

CONTROL DIGITAL - MAESTRÍA EN SISTEMAS EMBEBIDOS

IDENTIFICACIÓN

6 DE MARZO DE 2023

1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

- Planificación del experimento

- Selección de la estructura del modelo

- Elección del criterio

- Estimación de parámetros del modelo

- Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

IDENTIFICACIÓN

¿QUÉ ES PARA USTEDES LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS?

Vamos a usar Menti para recopilar las respuestas:



1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

- Planificación del experimento

- Selección de la estructura del modelo

- Elección del criterio

- Estimación de parámetros del modelo

- Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

- Planificación del experimento
- Selección de la estructura del modelo
- Elección del criterio
- Estimación de parámetros del modelo
- Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

Identificación

La identificación de un sistema es la obtención del modelo que lo representa en base a datos experimentales.

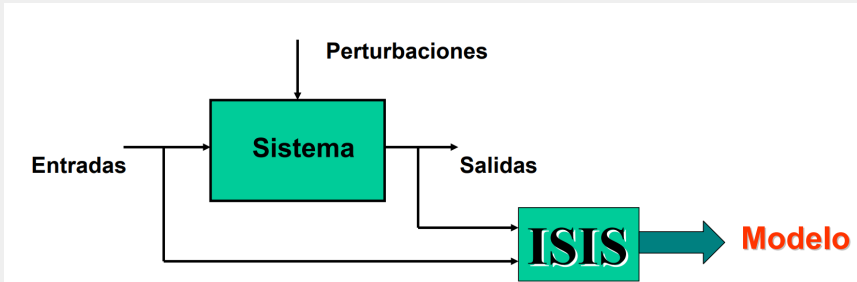
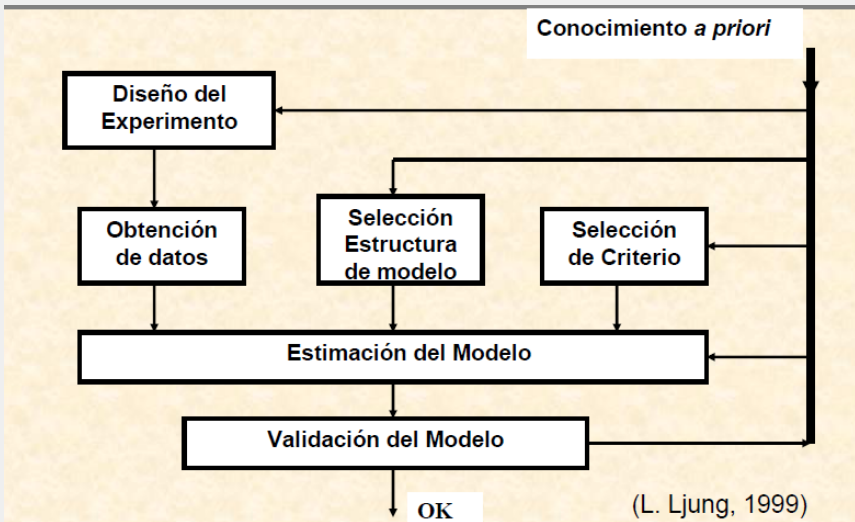


Figura: tomado de J.C. Gómez - FCEIA - UNR

ETAPAS DE UN PROCESO DE IDENTIFICACIÓN



Vamos a centrarnos en identificar sistemas lineales en su representación de modelos discretos.

Incluye los siguientes pasos [3, 4]:

- Planificación del experimento
- Selección de la estructura del modelo
- Elección del criterio
- Estimación de parámetros del modelo
- Validación del modelo

1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

Planificación del experimento

Selección de la estructura del modelo

Elección del criterio

Estimación de parámetros del modelo

Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

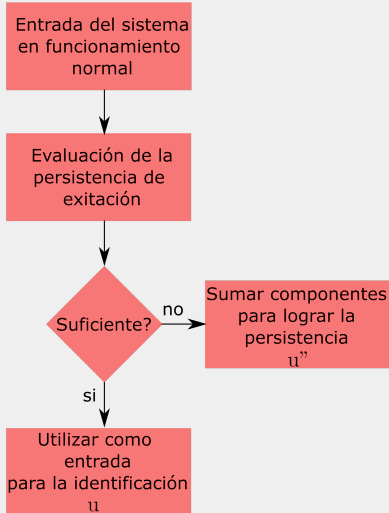
■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

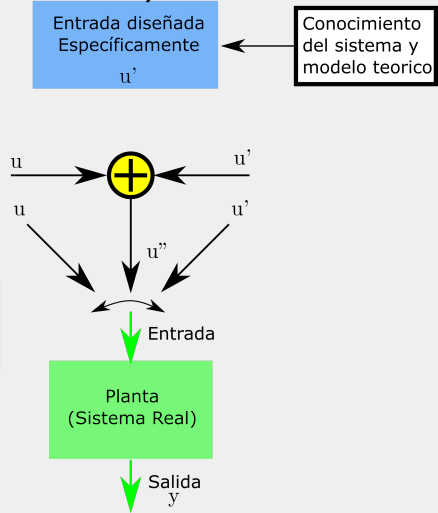
PLANIFICACIÓN DEL EXPERIMENTO

Los experimentos deben poner de manifiesto toda la dinámica del sistema.

Sistema en operación normal



Sistema operando para el ensayo



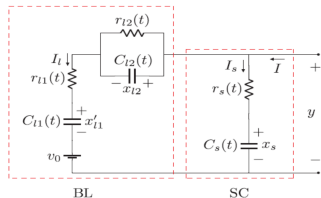
PLANIFICACIÓN DEL EXPERIMENTO

Identificación On-Line

Baterías y supercap de auto eléctrico



Modelo eléctrico



Modelo matemático

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_l = \mathbf{A}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{B}_l I_l = \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_{l1} \\ \dot{x}_{l2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/(r_{l2}C_{l2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{l1} \\ x_{l2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_{l1}} \\ \frac{1}{C_{l2}} \end{bmatrix} I_l \\ y = \mathbf{C}_l \mathbf{x}_l + \mathbf{D}_l I_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{l1} \\ x_{l2} \end{bmatrix} + [r_{l1}] I_l \end{cases}$$

Regresión lineal para estimación

$$\begin{aligned} \eta_l(t) &= \dot{z}_{l2} = \ddot{y} = \boldsymbol{\theta}(t)^T \boldsymbol{\varphi}_l(t) = \\ &= [m_{l1} \quad m_{l2} \quad m_{l3} \quad m_{l4}] [\ddot{I}_l \quad \dot{I}_l \quad I_l \quad z_{l2}]^T \end{aligned}$$

- Estado de carga - Energía almacenada.
- Estado de salud - Envejecimiento

PLANIFICACIÓN DEL EXPERIMENTO

Los experimentos deben poner de manifiesto toda la dinámica del sistema.

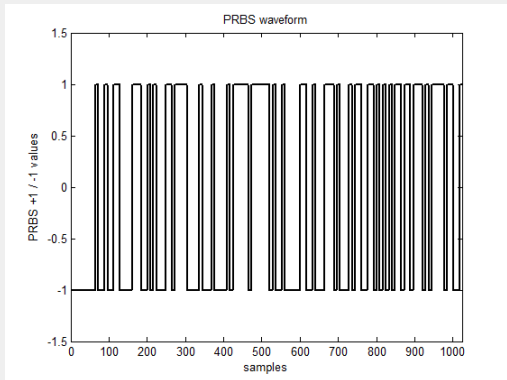
Las entradas deben cumplir con la *persistencia de excitación*.

En esta etapa se seleccionan:

- Tipo de entradas con las cuales se excitará al sistema (cuando es posible, **Off-Line**).
 - ▶ Escalones/Pulsos Múltiples
 - ▶ Senoidales
 - ▶ Random Binary
 - ▶ Pseudo-Random Binary Sequence (PRBS)
- Parámetros de las señales
 - ▶ Tiempo de conmutación
 - ▶ Magnitud
 - ▶ Frecuencia de la señal
- Período de muestreo
- Tiempo de identificación (cantidad de datos necesarios)

SEÑALES DE ENTRADA: PRBS

- Las secuencias binarias pseudoaleatorias son secuencias de pulsos rectangulares, moduladas en ancho, que en tiempo discreto se aproxima al ruido blanco.
- Las PRBS se generan mediante registros de desplazamiento con realimentación. La longitud máxima de una secuencia es $2^N - 1$ en la que N es el número de celdas del registro de desplazamiento.

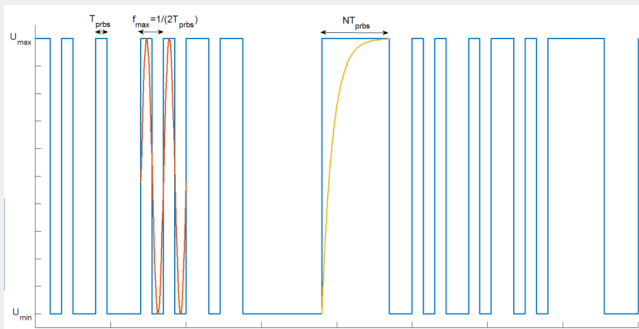


SEÑALES DE ENTRADA: PRBS - GUÍA DE DISEÑO

Ganancia de estado estacionario del modelo dinámico de la planta *rigtharrow* duración de, al menos, uno de los pulsos mayor que el tiempo de subida t_r de la planta. Siendo la duración máxima de un pulso NT_s , resulta la siguiente condición:

$$NT_{prbs} > t_r \longrightarrow N > \frac{t_r}{T_{prbs}}$$

$L = 2^N - 1$ longitud de la secuencia, $D \geq LT_{prbs}$ longitud del ensayo



SELECCIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL MODELO

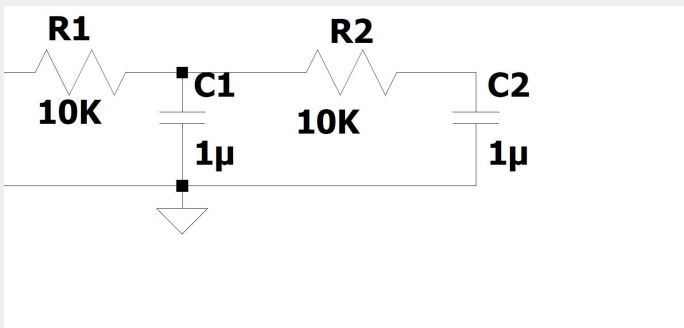
Según su física:

- Black-box: los parámetros del modelo no tienen una interpretación física. Solo interesa la función dinámica externa.
- Gray-box: algunas partes del sistema son modeladas basándose en principios físicos y otras como una caja negra. Algunos parámetros pueden tener interpretación física.
- White-box: la estructura de modelo se obtiene a partir de leyes de la física. Los parámetros tienen interpretación física.

SELECCIÓN DE LA ESTRUCTURA DEL MODELO

Según su física:

- **Black-box:** los parámetros del modelo no tienen una interpretación física. Solo interesa la función dinámica externa.
- **Gray-box:** algunas partes del sistema son modeladas basándose en principios físicos y otras como una caja negra. Algunos parámetros pueden tener interpretación física.
- **White-box:** la estructura de modelo se obtiene a partir de leyes de la física. Los parámetros tienen interpretación física.



Otros aspectos que permiten clasificar modelos:

- Dominio temporal o frecuencial.
- Deterministas o estocásticos.
- Dinámicos, estáticos o de eventos discretos.
- De parámetros distribuidos o concentrados.
- Lineales o no lineales.
- Tiempo continuo o tiempo discreto.

Se obtiene una medida de qué tan bien un modelo se ajusta a los datos experimentales.

Se obtiene una medida de qué tan bien un modelo se ajusta a los datos experimentales.

Usualmente es una función de los errores de estimación:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^N g(\epsilon(k))$$

La función g suele ser cuadrática (*least square*), pero también puede tener otras formas.

- Se busca el conjunto de parámetros que mejor ajusta a los datos.

- Se busca el conjunto de parámetros que mejor ajusta a los datos.
- Minimizar el criterio:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} J(\theta)$$

- Se busca el conjunto de parámetros que mejor ajusta a los datos.
- Minimizar el criterio:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} J(\theta)$$

- Estimación directa (una pasada), estimación iterativa (múltiples pasadas).

- Se busca el conjunto de parámetros que mejor ajusta a los datos.
- Minimizar el criterio:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta} J(\theta)$$

- Estimación directa (una pasada), estimación iterativa (múltiples pasadas).
- Estimación fuera de línea (algoritmo no recursivo), en línea (algoritmo recursivo).

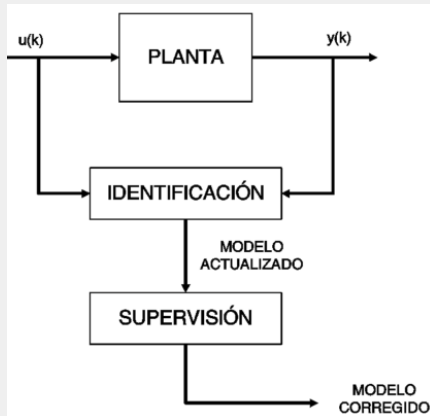
ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DEL MODELO

Identificación fuera de línea

Primero se obtienen todos los datos y después se ajusta el modelo sobre todos los datos.

Identificación en línea

La estimación del modelo se hace en tiempo real, conforme se van tomando los datos.



Una vez que obtuvimos el modelo que ajusta los datos experimentales medidos. Hay que probar si el modelo es lo suficientemente bueno para cumplir con su propósito.

Normalmente se utiliza un set de datos diferentes al que se utilizó para el ajuste del modelo y se calcula el error para ese nuevo set.

1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

Planificación del experimento

Selección de la estructura del modelo

Elección del criterio

Estimación de parámetros del modelo

Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

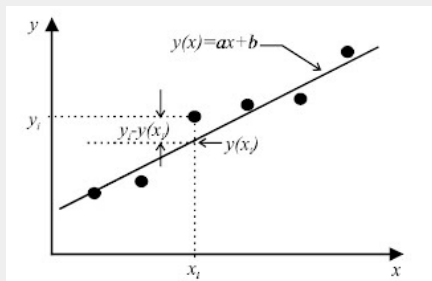
Los parámetros desconocidos se deben elegir tal que:

La suma de la diferencia cuadrática entre los datos observados y los calculados debe ser mínima.

Para poder tener solución analítica, los valores calculados deben ser funciones lineales de los parámetros desconocidos.

- Clase de modelo: Lineal en los parámetros.
- Criterio: Función cuadrática.

CUADRADOS MÍNIMOS - PRINCIPIO (EJEMPLO)



El criterio que se utiliza es:

$$J(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2$$

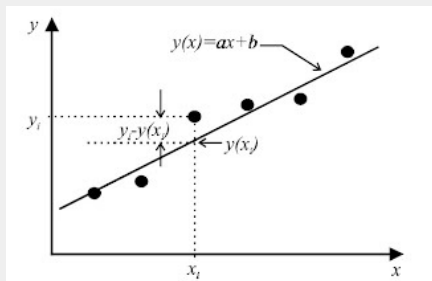
En donde y_i es la medición e \hat{y} es la estimación $\hat{y} = ax + b$.

Datos :

$$[y_1 y_2 y_3 \dots y_N]^T$$

$$[x_1 x_2 x_3 \dots x_N]^T$$

CUADRADOS MÍNIMOS - PRINCIPIO (EJEMPLO)



El criterio que se utiliza es:

$$J(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2$$

En donde y_i es la medición e \hat{y} es la estimación $\hat{y} = ax + b$.

Por lo tanto el problema se resume a encontrar a y b tal que $J(a, b)$ sea mínimo.

Datos :

$$[y_1 y_2 y_3 \dots y_N]^T$$

$$[x_1 x_2 x_3 \dots x_N]^T$$

PROBLEMA GENERAL

En un problema general del LSM, se asume que la variable calculada es:

$$\hat{y} = \theta_1\phi_1(u) + \theta_2\phi_2(u) + \dots + \theta_k\phi_k(u)$$

donde ϕ_1, \dots, ϕ_k son funciones conocidas y $\theta_1, \dots, \theta_k$ parámetros desconocidos.

Asumiendo que las mediciones tienen la misma precisión. El principio de cuadrados mínimos dice que se deben elegir los θ para minimizar:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

Partiendo de la función transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0}{a_q z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_0}$$

En donde:

$$q \geq p; a_q = 1$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

Partiendo de la función transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_0}{a_q z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_0}$$

En donde:

$$q \geq p; a_q = 1$$

Reescribiendo:

$$\begin{aligned} z^q Y(z) + a_{q-1} z^{q-1} Y(z) + \dots + a_0 Y(z) &= \\ &= b_p z^p U(z) + b_{p-1} z^{p-1} U(z) + \dots + b_0 U(z) \end{aligned}$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

Partiendo de la función transferencia:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_p z^p + b_{p-1} z^{p-1} + \dots + b_o}{a_q z^q + a_{q-1} z^{q-1} + \dots + a_o}$$

En donde:

$$q \geq p; a_q = 1$$

Reescribiendo:

$$\begin{aligned} z^q Y(z) + a_{q-1} z^{q-1} Y(z) + \dots + a_o Y(z) &= \\ &= b_p z^p U(z) + b_{p-1} z^{p-1} U(z) + \dots + b_o U(z) \end{aligned}$$

Aplicando la anti-transformada Z:

$$\begin{aligned} Y[k+q] + a_{q-1} Y[k+q-1] + \dots + a_o Y[k] &= \\ &= b_p U[k+p] + b_{p-1} U[k+p-1] + \dots + b_o U[k] \end{aligned}$$

Desplazo q muestras hacia atrás:

$$\begin{aligned} Y[k] + a_{q-1}Y[k-1] + \dots + a_0Y[k-q] &= \\ &= b_pU[k-q+p] + b_{p-1}U[k-q+p-1] + \dots + b_0U[k-q] \end{aligned}$$

Desplazo q muestras hacia atrás:

$$\begin{aligned} Y[k] + a_{q-1}Y[k-1] + \dots + a_0Y[k-q] &= \\ &= b_pU[k-q+p] + b_{p-1}U[k-q+p-1] + \dots + b_0U[k-q] \end{aligned}$$

Por lo tanto si despejo $Y[k]$ obtengo:

$$\begin{aligned} Y[k] &= -a_{q-1}Y[k-1] - \dots - a_0Y[k-q] + \\ &+ b_pU[k-q+p] + b_{p-1}U[k-q+p-1] + \dots + b_0U[k-q] \end{aligned}$$

$$Y[k] = -a_{q-1}Y[k-1] - \dots - a_0Y[k-q] + \\ + b_pU[k-q+p] + b_{p-1}U[k-q+p-1] + \dots + b_0U[k-q]$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

$$Y[k] = -a_{q-1}Y[k-1] - \dots - a_0Y[k-q] + \\ + b_pU[k-q+p] + b_{p-1}U[k-q+p-1] + \dots + b_0U[k-q]$$

Para las muestras siguientes:

$$Y[k+1] = -a_{q-1}Y[k] - \dots - a_0Y[k-q+1] + b_pU[k-q+p+1] + \\ + b_{p-1}U[k-q+p] + \dots + b_0U[k-q+1]$$

$$Y[k+2] = -a_{q-1}Y[k+1] - \dots - a_0Y[k-q+2] + b_pU[k-q+p+2] + \\ + b_{p-1}U[k-q+p+1] + \dots + b_0U[k-q+2]$$

$$Y[k+N] = -a_{q-1}Y[k+N-1] - \dots - a_0Y[k-q+N] + \\ + b_pU[k-q+p+N] + b_{p-1}U[k-q+p+N-1] + \dots + \\ + b_0U[k-q+N]$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

Se tiene un sistema de ecuaciones que puede escribirse como:

$$\vec{\hat{Y}} = \Phi.\vec{\theta}$$

En donde:

$$\Phi = \begin{bmatrix} Y[k-1] & \dots & Y[k-q] & U[k] & \dots & U[k-q] \\ Y[k] & \dots & Y[k-q+1] & U[k+1] & \dots & U[k-q+1] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y[k+N-1] & \dots & Y[k-q+N] & U[k+N] & \dots & U[k-q+N] \end{bmatrix}$$

$$\vec{\theta} = [-a_{q-1} \quad \dots \quad -a_0 \quad b_p \quad \dots \quad b_0]^T$$

La función de costo se puede escribir como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \qquad \varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

La función de costo se puede escribir como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \quad \varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Para el sistema matricial anterior puede reescribirse:

$$J = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T \vec{\varepsilon} \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} Y[k] - \hat{Y}[k] \\ Y[k+1] - \hat{Y}[k+1] \\ \dots \\ Y[k+N] - \hat{Y}[k+N] \end{bmatrix}^T = \vec{Y} - \vec{\hat{Y}}$$

MÉTODO DE IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS

La función de costo se puede escribir como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \quad \varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

Para el sistema matricial anterior puede reescribirse:

$$J = \frac{1}{2} \vec{\varepsilon}^T \vec{\varepsilon} \quad \vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} Y[k] - \hat{Y}[k] \\ Y[k+1] - \hat{Y}[k+1] \\ \dots \\ Y[k+N] - \hat{Y}[k+N] \end{bmatrix}^T = \vec{Y} - \vec{\hat{Y}}$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2} (\vec{Y} - \vec{\hat{Y}})^T (\vec{Y} - \vec{\hat{Y}}) = \frac{1}{2} (\vec{Y} - \Phi \vec{\theta})^T (\vec{Y} - \Phi \vec{\theta})$$

Se desea buscar el $\vec{\theta}$ que haga mínimo a J :

$$J = \frac{1}{2}(\vec{Y} - \Phi\vec{\theta})^T(\vec{Y} - \Phi\vec{\theta})$$

Para hallar el mínimo hallamos el valor de $\vec{\theta}$ que hace que $\frac{dJ}{d\theta} = 0$.

$$\hat{\vec{\theta}} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\vec{Y}$$

- Tiene que existir la inversa de $\Phi^T\Phi$.
- Si el número de muestras no es suficiente, o si no se cumplen las condiciones de excitación persistente, la matriz puede ser no invertible o estar muy mal condicionada.
- Este método es el llamado de “fuera de línea”.

1 Identificación

■ Introducción

■ Proceso de Identificación

Planificación del experimento

Selección de la estructura del modelo

Elección del criterio

Estimación de parámetros del modelo

Validación del modelo

■ Método de cuadrados mínimos (LS)

■ Método cuadrados mínimos recursivo

2 Referencias

Luego de realizar N medidas podemos estimar los parámetros del modelo a partir de la ecuación:

$$\vec{\hat{\theta}}(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}\Phi^T(N)\vec{Y}(N)$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO

Luego de realizar N medidas podemos estimar los parámetros del modelo a partir de la ecuación:

$$\vec{\hat{\theta}}(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}\Phi^T(N)\vec{Y}(N)$$

Si luego realizamos una medida más en el instante $(N + 1)$, podemos estimar los parámetros $\vec{\hat{\theta}}$ en el instante $(N + 1)$.

$$\vec{\hat{\theta}}(N + 1) = [\Phi^T(N + 1)\Phi(N + 1)]^{-1}\Phi^T(N + 1)\vec{Y}(N + 1)$$

Donde:

$$\Phi(N + 1) = \begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \vec{\phi}(N + 1) \end{bmatrix} \quad \vec{Y}(N + 1) = \begin{bmatrix} \vec{Y}(N) \\ Y(N + 1) \end{bmatrix}$$

Luego de realizar N medidas podemos estimar los parámetros del modelo a partir de la ecuación:

$$\vec{\hat{\theta}}(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}\Phi^T(N)\vec{Y}(N)$$

Si luego realizamos una medida más en el instante $(N + 1)$, podemos estimar los parámetros $\vec{\hat{\theta}}$ en el instante $(N + 1)$.

$$\vec{\hat{\theta}}(N + 1) = [\Phi^T(N + 1)\Phi(N + 1)]^{-1}\Phi^T(N + 1)\vec{Y}(N + 1)$$

Donde:

$$\Phi(N + 1) = \begin{bmatrix} \Phi(N) \\ \vec{\phi}(N + 1) \end{bmatrix} \quad \vec{Y}(N + 1) = \begin{bmatrix} \vec{Y}(N) \\ Y(N + 1) \end{bmatrix}$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO

Utilizando las ecuaciones anteriores se llega a que:

$$\vec{\theta}(N+1) = \Phi(N) + K(N)[Y(N+1) - \vec{\phi}^T(N+1)\vec{\theta}(N)]$$

En donde la ganancia $K(N)$ se denota ganancia de adaptación y multiplica al error cometido por la estimación previa de los parámetros del sistema.

$$K(N) = [\Phi^T(N+1)\Phi(N+1)]^{-1}\vec{\phi}(N+1)$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO

Utilizando las ecuaciones anteriores se llega a que:

$$\vec{\theta}(N+1) = \Phi(N) + K(N)[Y(N+1) - \vec{\phi}^T(N+1)\vec{\theta}(N)]$$

En donde la ganancia $K(N)$ se denota ganancia de adaptación y multiplica al error cometido por la estimación previa de los parámetros del sistema.

$$K(N) = [\Phi^T(N+1)\Phi(N+1)]^{-1}\vec{\phi}(N+1)$$

Para definir $K(N)$ es necesario introducir la variable P tal que:

$$P(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO

Utilizando las ecuaciones anteriores se llega a que:

$$\vec{\theta}(N+1) = \Phi(N) + K(N)[Y(N+1) - \vec{\phi}^T(N+1)\vec{\theta}(N)]$$

En donde la ganancia $K(N)$ se denota ganancia de adaptación y multiplica al error cometido por la estimación previa de los parámetros del sistema.

$$K(N) = [\Phi^T(N+1)\Phi(N+1)]^{-1}\vec{\phi}(N+1)$$

Para definir $K(N)$ es necesario introducir la variable P tal que:

$$P(N) = [\Phi^T(N)\Phi(N)]^{-1}$$

Aplicando el teorema de inversión de matriz a $P(N+1)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} P(N+1) &= [\Phi^T(N+1)\Phi(N+1)]^{-1} = (\Phi^T\Phi + \vec{\phi}\vec{\phi}^T)^{-1} = \\ &= (\Phi^T\Phi)^{-1} - (\Phi^T\Phi)^{-1}\vec{\phi}[\vec{\phi}^T(\Phi^T\Phi)^{-1}\vec{\phi}]^{-1}\vec{\phi}^T(\Phi^T\Phi)^{-1} \end{aligned}$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$P(N+1) = P(N) - \\ - P(N)\varphi(N+1)[I + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1}\varphi^T(N+1)P(N)$$

De la ecuación anterior se obtiene:

$$P(N+1) = P(N) - \\ - P(N)\varphi(N+1)[I + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1}\varphi^T(N+1)P(N)$$

$$K(N) = P(N+1)\varphi(N+1) = \\ = P(N)\varphi(N+1)[I + \varphi(N+1)P(N)\varphi^T(N+1)]^{-1}$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO

La identificación recursiva se resuelve de la siguiente forma:

1. Dar valores iniciales a P y $\vec{\theta}$.
2. En cada instante k :
 - 2.1 Leer los valores de $Y(k)$ y $U(k)$.
 - 2.2 Formar ϕ .
 - 2.3 Calcular $P(k)$:

$$P(k) = P(k-1) - \frac{P(k-1)\varphi^T(k)\varphi(k)P(k-1)}{1 + \varphi(k)P(k-1)\varphi^T(k)}$$

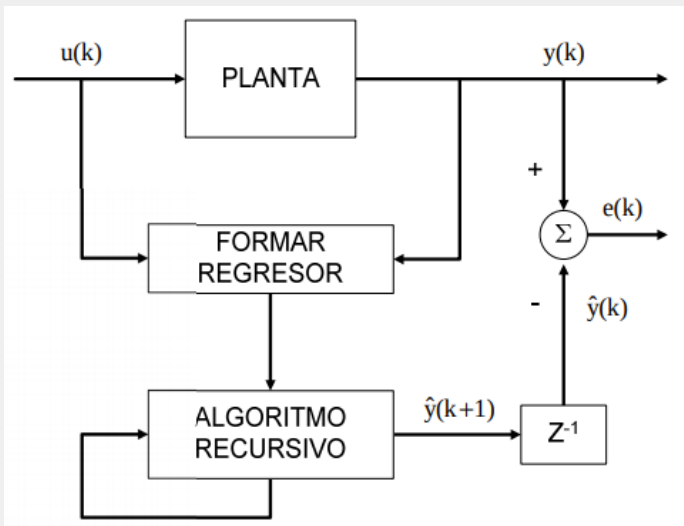
- 2.4 Calcular $K(k)$:

$$K(k) = \frac{P(k-1)\varphi^T(k)}{1 + \varphi(k)P(k-1)\varphi^T(k)}$$

- 2.5 Calcular $\vec{\theta}(k)$:





$$\vec{\theta}(k) = \vec{\theta}(k-1) + K(k)[Y(k) - \varphi(k)\vec{\theta}(k-1)]$$

CUADRADOS MÍNIMOS - MÉTODO RECURSIVO



REFERENCIAS

REFERENCIAS

-  L. LJUNG AND T. GLAD, *MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS*. PRENTICE HALL, 1994.
-  K. OGATA, *SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO - 2 EDICION (SPANISH EDITION)*. PRENTICE HALL, 2000.
-  K. J. ASTROM AND B. WITTENMARK, *COMPUTER-CONTROLLED SYSTEMS: THEORY AND DESIGN (THIRD EDITION) (ENGLISH VERSION)*. PRENTICE HALL, 2002.
-  L. LJUNG, *SYSTEM IDENTIFICATION: THEORY FOR THE USER (2ND EDITION)*. PRENTICE HALL, 1999.