Control Digital - Maestría en Sistemas Embebidos

Modelos Internos y de E/S

6 de marzo de 2023

Índice

Sistemas y modelos

Basándome en Ljung [1]:

- Sistema: Objeto o conjunto de objetos de los cuales queremos determinar sus propiedades.

Algunas definiciones

Basándome en Ljung [1]:

- Sistema: Objeto o conjunto de objetos de los cuales queremos determinar sus propiedades.
- Modelo: herramienta que nos sirve para responder preguntas sobre el sistema sin la necesidad de hacer experimentos.

Basándome en Ljung [1]:

- Sistema: Objeto o conjunto de objetos de los cuales queremos determinar sus propiedades.
- Modelo: herramienta que nos sirve para responder preguntas sobre el sistema sin la necesidad de hacer experimentos. Existen distintos tipos:
    - Mentales.
    - Verbales.
    - Físicos $\longrightarrow$ Prototipos.
    - Matemáticos (los que vamos a usar nosotros).

¿CÓMO CONSTRUIR MODELOS MATEMÁTICOS?

Hay, en principio, 2 fuentes de información para determinar las propiedades del sistema:

1. Las experiencias recopiladas por los expertos y la literatura disponible.
2. El sistema en sí mismo.

También, hay 2 niveles de profundidad para el modelo:

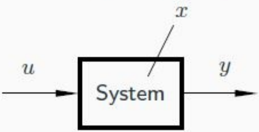
1. Dominio experto: conocer todas las posibilidades de comportamiento del sistema.
2. Conocimiento de ingeniería: Generar un modelo simple de utilizar.

Finalmente, los modelos se pueden construir a partir de:

1. Separar las propiedades del sistema en subsistemas cuyos comportamientos son conocidos (basándose en las leyes de la naturaleza).
2. Identificación: Usar observaciones del sistema para ajustar las propiedades del modelo a las del primero. Esto normalmente es un complemento del de arriba.

Modelos Internos y E-S

Los modelos del sistema que vamos a usar pueden ser internos (variables de estado) o de entrada-salida (transferencia).

	State-space model	Input-output models	
			
		Differential/difference equation	Transfer fcn
CT	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ $y(t) = Cx(t)$	$\frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n y$ $= b_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots + b_n u$	$G(s)$
DT	$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k)$ $y(k) = Cx(k)$	$y(k) + a_1 y(k-1) + \cdots +$ $a_n y(k-n) = b_1 u(k-1)$ $+ \cdots + b_n u(k-n)$	$H(z)$

Índice

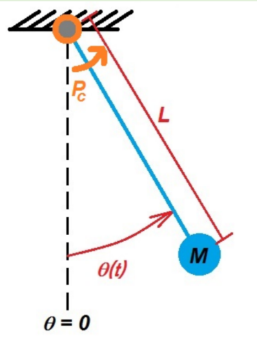
Conocer el **estado** de un sistema dinámico permite determinar por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo futuro, si se conoce la entrada.

Un **estado** está descripto por sus *variables de estado*. La cantidad de variables de estado en un sistema está relacionada con el número de elementos independientes que almacenan energía en un sistema.

Las variables de estado no necesitan ser cantidades físicamente medibles u observables. Sin embargo, en la práctica lo conveniente es seleccionar cantidades físicamente medibles como variables de estado, siempre que sea posible.

Ejemplo: Brazo Robot

Variable de Estado: Ejemplo



Ecuación del sistema: $ML\ddot{\theta}(t) = \frac{P_c(t)}{L} - Mgsen(\theta(t))$

Para resolver esta ecuación necesito 2 condiciones iniciales (2 variables de estado).
Por ejemplo: $\theta(t)$ (pos. angular) y $\omega = \dot{\theta}$ (vel. angular).

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) & = \omega(t) \\ \dot{\omega}(t) & = -\frac{g}{L} sen(\theta)(t) + \frac{1}{ML^2} P_c(t) \end{cases}$$
$$y(t) = \theta$$

Si lo linealizamos para $(\omega, \theta) = (0, 0)$ (**SLIT**):

$$ML\ddot{\theta}(t) = \frac{P_c(t)}{L} - Mg\theta(t)$$

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & 0 \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/ML^2 \end{bmatrix}}_{B} P_c$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{0}_{D} P_c$$

La representación de un sistema SISO en TF es única, pero puede haber varias realizaciones del mismo sistema en el Espacio de Variables de Estados.

$$\begin{cases} x[k+1] = \Phi x[k] + \Gamma u[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z\left(X(z) - x[0]\right) = \Phi X(z) + \Gamma U(z) \\ Y(z) = CX(z) + DU(z) \end{cases}$$

$$Y(z) = C\left(zI - \Phi\right)^{-1} zx[0] + \left[C\left(zI - \Phi\right)^{-1}\Gamma + D\right] U(z)$$

$x[0] = 0$, las TF se calculan para condiciones iniciales nulas.
Luego, la función racional:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C\left(zI - \Phi\right)^{-1}\Gamma + D$$

se llama *función de transferencia de impulso* y es la trasformada z de la respuesta impulsional del sistema $h[k]$. *Comando Octave* $\longrightarrow$ ss2tf()

Polos y Ceros - Caso Single Input Single Output (SISO)

La función de transferencia $H(z)$ es una función racional

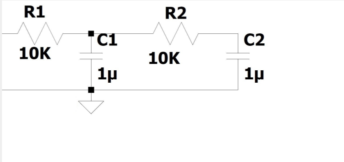
$$H(z) = \frac{Num(z)}{Den(z)}$$

Los *polos* del sistema están dados por $Den(z) = 0$.
Los *ceros* del sistema por $Num(z) = 0$.

Polos:
Un polo en a está asociado con la función temporal $f[k] = a^k$.

Ceros:
Un cero en a implica que la transmisión de la entrada $u[k] = a^k$ es bloqueada por el sistema.

Con el sistema del TP

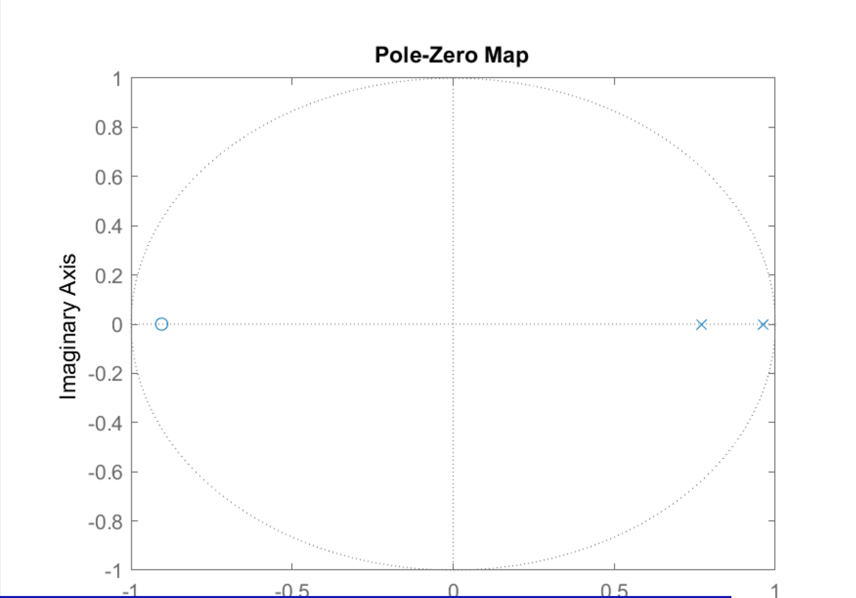


$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -{}^{2}/_{RC} & -{}^{1}/_{RC} \\ {}^{1}/_{RC} & -{}^{1}/_{RC} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} {}^{1}/_{RC} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

En Octave

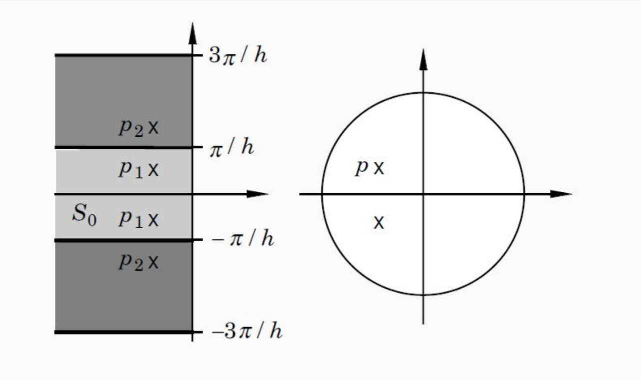
```
>> sys=ss(A,B,C,0);
>> sysd=c2d(sys,h,'zoh');
>> [numz,denz]=ss2tf(Φ,Γ,C,D);
>> H=tf(numz,denz,h)
>> pzmap(H)
```

Con el sistema del TP



Las variables complejas s y z quedan relacionadas mediante la ecuación [2]:

$$z = e^{sh}$$



Dado que $s = \sigma + j\omega$:

$$z = e^{h(\sigma + j\omega)} = e^{h\sigma} e^{jh\omega} = e^{h\sigma} e^{j(h\omega + 2\pi n)}$$

Referencias

Referencias

L. Ljung and T. Glad, *Modeling of Dynamic Systems*. Prentice Hall, 1994.

K. Ogata, *Sistemas de Control En Tiempo Discreto - 2 Edicio (Spanish Edition)*. Prentice Hall, 2000.