ICEX/UFMG – Edital Nº 1.193/2024

Transformada Rápida de Fourier em Análise Discriminante de Séries Temporais Robustas

Candidato: Jonathan de souza Matias[1]

20 de novembro de 2024

Resumo

Este projeto visa desenvolver uma nova medida para discriminação e classificação de dados temporais, aplicando metodologias avançadas em ciência de dados. A proposta inclui um novo estimador do espectro baseado no algoritmo *Fast Fourier Transform*, que aumenta a velocidade computacional e a assertividade nas análises. Este estudo utiliza validação cruzada para ajustar parâmetros de acordo com o contexto de cada série temporal e aplica simulações de Monte Carlo para validar resultados. A implementação proposta não apenas contribui para o campo estatístico, mas também responde a desafios contemporâneos em ciência de dados, permitindo um avanço significativo no processamento e interpretação de grandes volumes de dados.

1 Caracterização do Problema Científico

2 Caracterização do Problema Científico

A análise de séries temporais é um campo essencial dentro do contexto de Ciências de Dados, abrangendo diversas aplicações em áreas como economia, finanças, engenharia, sismologia, qualidade do ar e medicina. Cada um desses domínios apresenta padrões de comportamento específicos que requerem abordagens analíticas especializadas. Por exemplo, séries temporais financeiras são frequentemente caracterizadas por alta volatilidade, refletindo flutuações rápidas e imprevisíveis no mercado. Em contraste, dados de eletrocardiogramas na medicina frequentemente exibem periodicidade e frequência, possibilitando a identificação de condições como arritmias.

Um desafio comum enfrentado na análise de séries temporais é a presença de desvios dos padrões esperados, especialmente quando as séries são afetadas por outliers ou valores extremos. Um exemplo notável é o batimento cardíaco de pacientes com arritmia, cuja

[1] Graduado em Economia (PUC-MG - 2006) | Mestre em Economia (CAEN/UFC-2010) Doutor em Estatística (ICEX/UFMG - 2024) | Professor Substituto (ICEX/UFMG)
E-mail: jonathanestatistica@ufmg.br

análise exige técnicas que possam discriminar entre comportamentos normais e anômalos. Nesse contexto, a literatura, como demonstrado em Anderson (1976), fundamenta a classificação adequada das séries temporais.

No âmbito da proposição de soluções em ciência de dados, a análise do crescimento do PIB *per capita* nos estados americanos, como discutido por Goerg (2011), ilustra a aplicação de modelos de Análise Discriminante Linear (ADL) em um contexto de dados temporais. Esse modelo permite classificar os estados em dois grupos—aqueles que se recuperam rapidamente e aqueles que demoram mais—apoiando a formulação de políticas públicas direcionadas a estados com menor capacidade de recuperação. Assim, a discriminação e classificação de séries temporais emergem como ferramentas cruciais para decisões baseadas em dados.

Além disso, a análise de dados sismológicos, que permite distinguir entre tremores de terra e explosões nucleares (Kakizawa, Shumway, & Taniguchi, 1998; Shumway & Unger, 1974), bem como a classificação da luz das estrelas em diferentes espectros (Leka & Barnes, 2003), exemplificam como a ciência de dados utiliza séries temporais para extrair insights valiosos. Na medicina, conforme evidenciado por Krafty (2016), técnicas de modelagem de séries temporais são empregadas para monitorar o progresso em tratamentos de doenças neurodegenerativas, utilizando dados de ciclos de passada.

As metodologias de discriminação e classificação em ciência de dados podem incluir abordagens não paramétricas, como Máquinas de Vetores de Suporte (SVM) e algoritmos de Boosting, ou abordagens paramétricas, como Logit e Análise Discriminante Linear. Neste projeto, optou-se pela ADL devido às suas propriedades que facilitam a interpretação e a implementação computacional, adequando-se às necessidades de eficiência em análise de dados complexos.

A proposta do projeto é explorar variabilidades e suas decomposições através de combinações lineares de harmônicos em diferentes frequências. A análise espectral das séries temporais permitirá a identificação de estruturas de correlação, utilizando técnicas como deconvolução para gerar coeficientes cepstrais. Essa abordagem também envolve a separação das contribuições do ruído branco das autocorrelações, proporcionando informações relevantes para a discriminação e classificação.

O M-periodograma multitaper, sendo umestimador do espectro, demonstra robustez contra a contaminação por outliers e é assintoticamente não enviesado. Tradicionalmente, este método se beneficia da Transformada Rápida de Fourier (FFT) para reduzir significativamente o tempo computacional em grandes séries. Entretanto, existe uma lacuna na literatura sobre a utilização da FFT como sub-rotina na estimativa do M-periodograma, limitando sua aplicação prática no contexto de ciência de dados.

Dessa forma, este projeto tem como objetivo avançar metodologicamente e computacionalmente na discriminação e classificação de séries temporais. Propõe-se o desenvolvimento de um algoritmo que integre a FFT e utilize técnicas de aprendizado de máquina supervisionado, avaliando a eficácia das classificações e as taxas de erro. Essa abordagem busca não apenas melhorar as técnicas analíticas, mas também contribuir significativamente para o avanço da ciência de dados em diferentes domínios de aplicação.

3 Objetivos

3.1 Objetivo Geral

A análise de discriminação e classificação é um dos pilares do campo de Ciências de Dados. Através das transformadas de Fourier e Wavelets, é possível realizar tais análises de forma eficiente e rápida. No entanto, a literatura ainda carece do uso de técnicas que integrem modelos robustos de regressão, capazes de acomodar valores extremos e abruptos sem a necessidade de excluí-los mecanicamente, mas sim utilizando-os como fontes de informação valiosas. Assim, este projeto visa aprofundar o conhecimento e a aplicação de técnicas robustas usando transformadas de Fourier e Wavelets para discriminação e classificação em séries temporais, imagens, processamento de áudio, entre outros. Em particular, pretende-se desenvolver um algoritmo de Transformada Rápida de Fourier (FFT) que possa ser utilizado em conjunto com métodos de regressão robustos, como o estimador de Mínimos Quadrados Absolutos (LAD) e o estimador de Huber.

3.2 Objetivos Específicos

Em síntese, pretende-se alcançar os seguintes resultados ao final do projeto:

i) Desenvolver um algoritmo para análise de discriminação de dados transformados pela Transformada de Fourier e Wavelets, utilizando a estimação robusta dos estimadores do espectro em **séries temporais** e de dados de **reconhecimento de imagens e áudios**.

ii) Criar um estimador robusto para o M-periodograma que integre a Transformada Rápida de Fourier (FFT).

iii) Realizar simulações de Bootstrap e Monte Carlo para avaliar a eficiência computacional e o desempenho do novo algoritmo em termos de tempo de cálculo das taxas de classificação.

iv) Implementar um mecanismo automatizado de seleção de parâmetros do estimador, utilizando validação cruzada para maximizar as taxas de classificação.

v) Aplicar o novo algoritmo em previsões de séries temporais, reconhecimento de imagens e sonoro em três contextos distintos: dados macroeconômicos, análise de doenças neurodegenerativas, dados relacionados à poluição do ar, reconhecimento facial, identificação de placas de veículos, reconhecimento de voz e reconhecimento de áudio em dispositivos de inteligência artificial, como Alexa.

3.3 Justificativa

Na análise de séries temporais no domínio da frequência, quando o processo gerador de dados pode produzir observações abruptas que se comportam como *outliers* aditivos, os periodogramas clássicos suavizados frequentemente não oferecem boas estimativas para gerar discriminadores eficazes nem previsões precisas para a classificação de novas séries temporais. Consequentemente, o poder explicativo do modelo pode ser fortemente reduzido. A abordagem comum na literatura é a remoção desses valores extremos por meio de filtros mecânicos.

No entanto, a perda de informações contidas nesses outliers pode comprometer a eficácia de classificadores baseados na Análise Discriminante Linear, resultando em previsões equivocadas. Além disso, a obtenção de estimadores robustos do periodograma é, atualmente, um processo mais lento, pois depende de métodos de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).

Dessa forma, a existência de um modelo capaz de acomodar observações extremas para fins de discriminação e classificação, juntamente com um algoritmo que utilize a FFT para gerar previsões de forma mais rápida, justifica a realização deste projeto de pesquisa.

4 Metodologia

4.1 Espectro de um Processo Estocástico de Várias Populações

5 Metodologia

5.1 Espectro de um Processo Estocástico de Várias Populações

Considere um processo estocástico $\{X_{jkt}\}$ em que $t = 1, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, n_j$ é a k-ésima réplica do processo, dependendo de $j = 1, \ldots, J$ e n_j sendo o número de réplicas para cada j-ésima população. Além disto, considere que cada população tem seu próprio processo gerador de dados. Consequentemente, cada população tem também uma dinâmica de seus sistemas. Além disso, é necessário que os sistemas não sejam completamente distintos, tais como um grupo ser gerado por um processo MA e outro por um processo AR, caso contrário não haveria o que discriminar. Logo, considere que cada réplica k no grupo j pode ser expressa em sua representação espectral:

$$X_{jkt} = \sum_{m=1}^{N} A_{jk}(\lambda_m) e^{it\lambda_m} \tag{1}$$

em que $A_{jk}(\lambda_m)$ é a função de transferência que é o complemento ortogonal para cada

j-ésimo grupo e $i = \sqrt{-1}$. Além disso, λ_m são as frequências de Fourier [2]. A equação (1) pode ser reescrita como:

$$X_{jkt} = \sum_{m=1}^{N} \{C_{jk}(\lambda_m)\cos(t\lambda_m) + D_{jk}(\lambda_m)\sin(t\lambda_m)\} \tag{2}$$

em que $C_{jk}(\lambda_m)$ e $D_{jk}(\lambda_m)$ são as amplitudes dos harmônicos para cada frequência, sendo informações extremamente relevantes para explicar a contribuição de cada harmônico para a série temporal. Definida dessa forma, a função de transferência é representada por $A_{jk}(\lambda_m) = C_{jk}(\lambda_m) + iD_{jk}(\lambda_m)$.

Reescrever a equação (1) na forma da equação (2) é particularmente importante para evidenciar a decomposição da série no formato que permitirá gerar seu espectro.

A função de covariância, definida de forma clássica, é representada na literatura como o valor esperado do processo em t com o processo defasado em f, o que pode ser expresso por:

$$\gamma_f = E(X_{jk(t)}X_{jk(t-f)}) \tag{3}$$

Essa definição é crucial para captar a variabilidade do processo ao longo do tempo. A partir dela, é possível obter os harmônicos que melhor explicam a série temporal. Para definir uma função que relacione a variabilidade do processo como uma função da covariância, Hamilton (1994) define a Função Geradora de Autocovariâncias como:

$$g_{X_{jkt}}(z) = \sum_{f=-\infty}^{\infty} \gamma_f z^f \tag{4}$$

em que z pode ser representado como $z = e^{-i\lambda_m}$ e $m = 1, ..., N/2$.

Finalmente, o espectro de um processo estocástico para cada réplica k da população j pode ser definido como a equação (4) dividida por 2π:

$$S_{X_{jkt}}(\lambda_m) = \frac{1}{2\pi} g_{X_{jkt}}(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{f=-\infty}^{\infty} \gamma_f (e^{-i\lambda_m})^f = \frac{1}{2\pi}\sum_{f=-\infty}^{\infty} \gamma_f e^{-i\lambda_m f} \tag{5}$$

5.2 Estimação do Espectro

O estimador clássico do espectro pode ser obtido por meio do periodograma clássico. Esse periodograma pode ser obtido por meio da regressão de mínimos quadrados dos coeficientes $C_{jk}(\lambda_m)$ e $D_{jk}(\lambda_m)$, aqui chamados de elementos de um vetor bidimensional $\hat{\beta}_{jk}(\lambda_\ell)$ para cada frequência de Fourier λ_m. Uma vez obtidos tais valores, o periodograma pode ser definido por:

$$I_N(\lambda_\ell) = \frac{1}{2\pi N}\left\|\hat{\beta}_{jk}(\lambda_\ell)\right\| \tag{6}$$

[2] Para mais detalhes, ver Brockwell and Davis (1991)

lembrando que N é o tamanho de todas as réplicas (séries temporais).

Na presença de valores extremos, a estimação dos parâmetros para o cálculo do periodograma clássico pode gerar conclusões equivocadas para as taxas de classificação. Logo, seguindo as ideias básicas de Kakizawa et al. (1998); Li (2010); Reisen et al. (2020), o periodograma robusto utilizando as estimativas robustas para os coeficientes $C_{jk}(\lambda_m)$ e $D_{jk}(\lambda_m)$ pode ser definido por:

$$I_N^M(\lambda_\ell) = \frac{N}{8\pi} \left\| \hat{\boldsymbol{\beta}}_{jk}^M(\lambda_\ell) \right\| \tag{7}$$

em que:

$$\psi_H(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq k \\ k\text{sign}(x), & \text{caso contrário} \end{cases}, \tag{8}$$

é uma função robusta definida em partes. Assim, a função escore será $\rho_H(x) = x\psi_H(x)$. Esta função escore será $\rho_H(x) = x^2$ caso $|x| \leq k$, sendo exatamente o mesmo contexto dos mínimos quadrados (aqui, x seria o quadrado do resíduo).

Neste ponto, deve-se destacar o ponto crucial deste projeto. Caso $|x| \leq k$, as estimativas dos parâmetros podem ser obtidas por FFT. No entanto, ainda não há nenhum trabalho na literatura que o faça.

Além disso, as estimativas do periodograma robusto conterão as informações mais importantes sobre a variabilidade dos processos de cada população. Essas informações são extremamente relevantes, pois incluem tanto a variabilidade quanto a periodicidade, sem perder de vista as informações contidas em valores extremos.

Na próxima seção, discutiremos como usar as coordenadas das estimativas do espectro para discriminar otimamente cada processo e manter essas informações para classificar novas séries temporais.

5.3 Análise Discriminante Linear

A Análise Discriminante Linear (ADL) é uma ferramenta estatística usada no contexto de aprendizado supervisionado, no qual cada série temporal é rotulada, e o vetor de rótulo é estimado em função das séries temporais como variáveis independentes. É necessário o uso de dados de treino e dados de teste para avaliar as taxas de classificação das séries temporais *a posteriori*.

Nesse contexto, para o desenvolvimento do modelo, considere que todas as réplicas tenham tamanho N, e o índice k indica as réplicas que vão até n_j, o número de réplicas para cada uma das j-ésimas populações, que vão até J. Se todos os processos de todas as populações forem colocados lado a lado em ordem, defina X como sendo uma matriz contendo em suas colunas as observações de cada réplica. Finalmente, seja C um vetor de variáveis categóricas, contendo a enumeração de 1 a J para rotular cada série temporal à sua respectiva população.

Com essas notações, seja (X^t, C) uma matriz contendo todas as séries temporais em linha, com a última coluna representando sua categorização. [3] Dessa forma, pode-se definir o valor esperado condicional da série, dada a categorização, como $E(X^t|C = j) = \mu_j$, ou seja, o vetor de médias dentro do grupo. Adicionalmente, a variância condicional dentro do grupo pode ser definida como $var(X^t|C = j) = K_w$ (*within*).

Suponha ainda que a probabilidade de uma série temporal pertencer a uma população j pode ser definida como a proporção de séries temporais contidas na população, dadas todas as réplicas disponíveis, sendo $P(C = j) = \pi_j$. Finalmente, considere a variância das médias entre grupos (*between*) como $K_b = Var(E[x_{jk}|C]) = \sum_{j=1}^{J} \pi_j(\mu_j - \mu)(\mu_j - \mu)'$, onde $\mu = E[x_{jk}] = E[E[x_{jk}|C]] = \sum_{j=1}^{J} \pi_j \mu_j$.

Consequentemente, o objetivo é obter uma projeção ortogonal $b' x_{jk}$ de cada réplica k da população j no subespaço que é obtido pela maximização da distância entre as populações (K_b) e, ao mesmo tempo, minimiza a distância dentro das populações (K_w). Para implementar tal projeção, é necessário obter um vetor de pesos tal que essa otimização seja alcançada e uma transformação linear possa ser aplicada à matriz de séries temporais. Nesse processo, os vetores de pesos devem ser obtidos de forma sequencial. Suponha que o primeiro vetor de pesos seja b_1, obtido pela maximização do quociente de Rayleigh (Lloyd & Bau, 1997, p.203):

$$b_1 = \underset{b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\operatorname{argmax}} \left[\frac{Var(E[b' x_{jk}|C])}{E[Var(b' x_{jk}|C)]} \right] = \underset{b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}{\operatorname{argmax}} \left[\frac{b' K_B b}{b' K_W b} \right] = \underset{\|b\|_W = 1}{\operatorname{argmax}} \|b\|_B \tag{9}$$

Logo, b_1 pode ser obtido por otimização lagrangiana e, ao fazê-lo, este vetor será o primeiro autovetor associado ao primeiro autovalor de $(K_W)^{-1} K_B$. [4] Uma vez obtido o primeiro autovetor que otimiza o processo, o segundo autovetor pode ser obtido da mesma forma, desde que seja ortogonal a todos os autovetores já pré-obtidos no processo anterior. Os próximos autovetores podem ser obtidos pela equação:

$$b_q = \underset{\|b\|_W = 1,\ \langle b\ ,\ b_m \rangle = 0\ \ \forall m < q}{\operatorname{argmax}} \|b\|_B \tag{10}$$

Uma vez que todos os vetores de pesos foram obtidos, a função discriminante de projeção que mais separa as séries temporais pode ser obtida pela transformação linear de cada réplica pelos autovetores, utilizando a seguinte equação:

$$d_{jkq} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_{q\ell} x_{jk\ell} \tag{11}$$

em que $q = 1, 2, ...$ A função discriminante vai gerar coordenadas dos discriminantes no subespaço para cada réplica.

Uma vez calculadas as coordenadas das funções discriminantes, elas conterão todas as informações necessárias para discriminar novas séries temporais em diferentes grupos.

[3] o símbolo ^{t} representando transposta.

[4] Para mais detalhes, ver Shin (2008).

Basta calcular as coordenadas dessas novas séries temporais usando a função discriminante otimizada pela equação (11).

6 Plano de trabalho e cronograma

i) Elaborar um novo estimador robusto para o espectro usando o algoritmo FFT;

ii) Obter as propriedades em pequenas amostras do M-periodograma e avaliar seus impactos nas taxas de classificação;

iii) Obter as propriedades em grandes amostras do M-periodograma e avaliar seus impactos nas taxas de classificação;

iv) Utilizar o novo algoritmo para as simulações de Monte Carlo para avaliar tempo de obtenção das taxas de classificação;

v) Implementar no estimador uma escolha automática dos vários parâmetros pré-estabelecidos usando a validação cruzada que gere as maiores taxas de classificação;

vi) Utilizar o novo algoritmo para prever as séries temporais utilizando o modelo proposto em dados macroeconômicos, dados de análise de doenças neurodegenerativas e dados de poluição do ar.

Abaixo segue uma tabela resumindo o cronograma de trabalho mensal:

Meses / **Atividades**	**2025/1**	**2025/2**	**2026/1**	**2026/2**	**2027/1**	**2027/2**	**2028/1**	**2028/2**
Revisão da Literatura	X	X						
Elaboração do Estimador usando FFT		X	X					
Elaboração dos códigos para execução do estimador		X	X	X				
Propriedades em pequenas amostras			X	X				
Propriedades em grandes amostras: simulações de Monte Carlo				X	X			
Utilização do novo estimador em aplicações					X	X		
Análise e avaliação dos resultados						X	X	
Elaboração do Relatório Final							X	X

7 O candidato

Jonathan de Souza Matias, o candidato à vaga, é graduado em Economia pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG), tendo concluído o curso em 2006. Adicionalmente, obteve o título de mestre em Economia pelo Centro de Pós-Graduação da Universidade Federal do Ceará (CAEN-UFC) e encontra-se atualmente na fase final do doutorado em Estatística, realizado no Departamento de Estatística do Instituto de

Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais (ICEX-UFMG), com previsão de defesa da tese para março de 2024, abordando o tema: "Análise Discriminante Linear robusta de séries temporais no domínio da frequência com variabilidade de espectro dentro das populações".

Ao longo de sua trajetória acadêmica, Jonathan direcionou seus estudos, tanto na graduação quanto no mestrado, para a área de Teoria Econômica, concentrando-se em Matemática, Estatística, Econometria e Análise de Séries Temporais. Adicionalmente, no âmbito do doutorado, sua área de enfoque é em Probabilidade e Estatística, com especialização na Análise de Séries Temporais.

O candidato possui experiência em pesquisa em todas as etapas acadêmicas. Na graduação, participou de um projeto de iniciação científica da PUC-MG (PROBIC-MG) com o título 'Desigualdade e Pobreza no Brasil - Teste de Convergência dos Indicadores de Pobreza, Indicadores de Desigualdade e da Renda Per Capita usando Processos Estocásticos de Primeira Ordem de Markov'.

No mestrado, contribuiu para o Banco Nacional do Nordeste (BNB) em 2009, cujo objetivo era apoiar a formação de recursos humanos na área de Economia, mediante a concessão de auxílio financeiro a estudantes de Mestrado ou de Doutorado de Instituições de Ensino Superior que desenvolvam projetos com temáticas de relevância para o desenvolvimento da Região Nordeste e de interesse do BNB. O projeto intitulado 'Análise de Crescimento Pró-Pobre: um estudo de caso para o Nordeste brasileiro no período de 1995 a 2007' foi concluído.

No âmbito do doutorado, participou do projeto COVIDLP sob coordenação do professor Dani Gamerman, cujo objetivo era elaborar modelos, algoritmos e análises visuais dos dados de casos e mortes de Covid-19, bem como elaborar previsões no contexto Bayesiano. Essa pesquisa teve como principal objetivo utilizar ferramentas estatísticas para fornecer informações relevantes para a sociedade no início e no auge da pandemia. Este projeto resultou em um livro intitulado 'Building a Platform for Data-Driven Pandemic Prediction From Data Modelling to Visualisation - The CovidLP Project'. O proponente à bolsa de pós-doutorado participou em três de seus capítulos, descritos abaixo: [continuação do texto].

1. MATIAS, J. S.; MAYRINK, V. D.; FREITAS, J.; CAMARA, A. J. A.; ASSUNCAO, G. O. **Comparing Predictions** In: Building a Platform for Data-Driven Pandemic Prediction From Data Modelling to Visualisation - The CovidLP Project.1 ed.Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2022, p. 257-273.

2. MATIAS, J. S.; MAYRINK, V. D.; CAMARA, A. J. A.; ASSUNCAO, G. O.; FREITAS, J. **Daily evaluation of the updated data** In: Building a Platform for Data-Driven Pandemic Prediction From Data Modelling to Visualisation - The CovidLP Project.1 ed.Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2022, p. 217-232.

3. MATIAS, J. S.; MAYRINK, V. D.; FREITAS, J.; CAMARA, A. J. A.; ASSUNCAO, G. O. **Investigating inference results** In: Building a Platform for Data-Driven Pandemic Prediction From Data Modelling to Visualisation - The CovidLP Project.1 ed.Boca Raton: Chapman and Hall/CRC Press, 2022, p. 233-256.

Jonathan defendeu sua tese intitulada "Discriminant Analysis in stationary time series based on robust cepstral coefficients"no dia 26 de julho de 2024. A tese focou em discriminar séries temporais de diferentes populações com base em suas principais características de variabilidade, tanto intra-grupo quanto inter-grupo. Diversas técnicas estatísticas foram empregadas para minimizar viés e variância, ao mesmo tempo em que aumentaram a precisão das previsões, medidas pelas taxas de classificação. Como séries temporais frequentemente apresentam valores extremos que atuam como outliers aditivos, métodos robustos foram utilizados na estimativa do espectro.

Entre as aplicações práticas, Jonathan utilizou dados de séries temporais de equilíbrio de caminhada para detectar doenças neurodegenerativas e acompanhar o tratamento de pacientes na medicina. Na Macroeconomia, ele trabalhou com dados de séries macroeconômicas para discriminar e classificar diferentes economias. Além disso, dados de poluição do ar, como o PM10, foram usados para discriminar diferentes fontes de poluição.

A tese foi concluída com sucesso em julho de 2024.

Referências

Anderson, O. D. (1976). *Time series analysis and forecasting: The box and jenkins approach.* Butterworths.

Brockwell, P. J., & Davis, R. A. (1991). *Time series: Theory and methods.* https://link.springer.com/: Springer.

Goerg, G. M. (2011). A nonparametric frequency domain em algorithm for time series classification with applications to spike sorting and macro-economics. *Wiley Periodicals, Inc.*.

Hamilton, J. D. (1994). *Times series analysis.* Princeton.

Kakizawa, Y., Shumway, R. H., & Taniguchi, M. (1998, Março). Discrimination and clustering for multivariate time series. *Journal of the American Statistical Association*, *93*(441), 328-340.

Krafty, R. T. (2016). Discriminant analysis of time series in the presence of within-group spectral variability. *Journal of Time Series*, *37*, 435-450.

Leka, K., & Barnes, G. (2003). Photospheric magnetic field properties of flaring versus flare-quiet active regions. ii. discriminant analysis. *The Astrophysical Journal*, *595*(2), 1296.

Li, T.-H. (2010). A nonlinear method for robust spectral analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, *58*(5), 2466–2474.

Lloyd, N. T., & Bau, D. a. (1997). *Numerical linear algebra.* Siam.

Reisen, V. A., Lévy-Leduc, C., Cotta, H. H. A., Bondon, P., Ispany, M., & Filho, P. R. P. (2020). An overview of robust spectral estimators. *Springer Nature Switzerland*, 01-23.

Shin, H. (2008). An extension of fisher's discriminant analysis for stochastic processes. *Journal of Multivariate Time Series*, *99*, 1191-1216.

Shumway, R. H., & Unger, A. N. (1974). Linear discriminant functions for stationary time series. *Journal of American Statistical Association*, *69*(2), 948-956.