ALGEBRES GEOMETRIQUES APPLIQUEES A LA ROBOTIQUE EN COQ

-

Stage de M2 2021

-

sous la direction de Julien Narboux (Icube)

GRAFF Jonathan

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.
L'objectif était de pouvoir rendre sûr les bras de robots médicaux qui opèrent des patients.

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.

L'objectif était de pouvoir rendre sûr les bras de robots médicaux qui opèrent des patients.

Mon stage se trouvait à l'intersection de trois domaines :

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.
L'objectif était de pouvoir rendre sûr les bras de robots médicaux qui opèrent des patients.
Mon stage se trouvait à l'intersection de trois domaines :

- la robotique

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.
L'objectif était de pouvoir rendre sûr les bras de robots médicaux qui opèrent des patients.
Mon stage se trouvait à l'intersection de trois domaines :

- la robotique

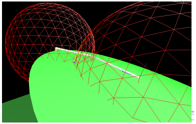
- les logiciels assistants de preuve (Coq)

J'ai effectué mon stage à Icube, un laboratoire de recherche à Illkirch.
L'objectif était de pouvoir rendre sûr les bras de robots médicaux qui opèrent des patients.
Mon stage se trouvait à l'intersection de trois domaines :

- la robotique

- les logiciels assistants de preuve (Coq)

- les algèbres géométriques



Les logiciels assistants de preuve

Les logiciels assistants de preuve

Le but d'un logiciel assistant de preuve est de prouver un théorème mathématique ou les lignes de code composant un programme, c'est-à-dire que les lignes de code exécutent bien ce qui est attendu.

Les logiciels assistants de preuve

Le but d'un logiciel assistant de preuve est de prouver un théorème mathématique ou les lignes de code composant un programme, c'est-à-dire que les lignes de code exécutent bien ce qui est attendu.

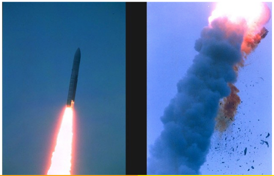
Avantage : le programme fait ce qu'il doit faire et ne plante pas.

Les logiciels assistants de preuve

Le but d'un logiciel assistant de preuve est de prouver un théorème mathématique ou les lignes de code composant un programme, c'est-à-dire que les lignes de code exécutent bien ce qui est attendu.

Avantage : le programme fait ce qu'il doit faire et ne plante pas.

Exemple : Le vol 501 de la fusée Ariane a explosé en vol à cause d'un problème de dépassement d'entier. Le code du système de navigation n'était pas prouvé.



Les logiciels assistants de preuve

Inconvénient : c'est très long ! On limite donc en général au maximum ce qui doit être prouvé et il faut trouver un formalisme adapté au problème

Les logiciels assistants de preuve

Plusieurs théorèmes mathématiques ont été prouvés en utilisant des logiciels assistants de preuve, parmi eux :

- Le théorème des quatre couleurs en 2005
- Le théorème de Feit-Thompson (tout groupe fini d'ordre impair est résoluble) en 2012 (plus de 6 ans pour 10 chercheurs)
- La conjecture de Kepler (empilement optimal de sphères) en 2014

Les logiciels assistants de preuve

Plusieurs théorèmes mathématiques ont été prouvés en utilisant des logiciels assistants de preuve, parmi eux :

- Le théorème des quatre couleurs en 2005
- Le théorème de Feit-Thompson (tout groupe fini d'ordre impair est résoluble) en 2012 (plus de 6 ans pour 10 chercheurs)
- La conjecture de Kepler (empilement optimal de sphères) en 2014

Des logiciels ont aussi été prouvés :

- un compilateur C (CompCert) où il est prouvé que le code compilé se comporte comme le code source

Les algèbres géométriques

Les algèbres géométriques

Les algèbres géométriques servent à représenter les éléments de la géométrie classique de façon plus uniforme.

Les algèbres géométriques

Les algèbres géométriques servent à représenter les éléments de la géométrie classique de façon plus uniforme.
Un unique objet, **le multivecteur** représente :

- les points
- les vecteurs
- les plans
- les droites
- les sphères
- les cercles
- les rotations
- les translations...

Les algèbres géométriques

Autre avantage : les cas particuliers n'existent pas.

Par exemple le calcul permettant d'obtenir un plan à partir de deux vecteurs renverra 0 si les deux vecteurs sont colinéaires.

Les algèbres géométriques ont été découvertes en 1844 par Grassmann puis formalisées par Clifford en 1873. Elles ont ensuite été oubliées jusque dans les années 1950 où Hestenes montrera que ces algèbres sont parfaitement adaptées pour résoudre des problèmes de relativité en dimension 4, d'électromagnétisme, ou de mécanique classique ou quantique.

Les algèbres géométriques ont été découvertes en 1844 par Grassmann puis formalisées par Clifford en 1873. Elles ont ensuite été oubliées jusque dans les années 1950 où Hestenes montrera que ces algèbres sont parfaitement adaptées pour résoudre des problèmes de relativité en dimension 4, d'électromagnétisme, ou de mécanique classique ou quantique.
Elles sont aujourd'hui utilisées en :

- physique
- biomécanique
- dynamique des vols spatiaux
- vision par ordinateur
- robotique

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathscr{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathscr{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
Les objets de cet algèbre sont appelés **multivecteurs**.

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathcal{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.
Les objets de cet algèbre sont appelés **multivecteurs**.
L'algèbre $\mathcal{G}^n$ possède plusieurs opérations :

- une somme prolongeant la somme classique des vecteurs

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathscr{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Les objets de cet algèbre sont appelés **multivecteurs**.

L'algèbre $\mathscr{G}^n$ possède plusieurs opérations :

- une somme prolongeant la somme classique des vecteurs
- un produit appelé produit géométrique, noté ab pour deux multivecteurs a et b

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathscr{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Les objets de cet algèbre sont appelés **multivecteurs**.

L'algèbre $\mathscr{G}^n$ possède plusieurs opérations :

- une somme prolongeant la somme classique des vecteurs
- un produit appelé produit géométrique, noté ab pour deux multivecteurs a et b
- un produit scalaire (et donc une norme) noté $a \cdot b$

Les algèbres géométriques

L'algèbre géométrique $\mathscr{G}^n$ peut être vue comme une extension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Les objets de cet algèbre sont appelés **multivecteurs**.

L'algèbre $\mathscr{G}^n$ possède plusieurs opérations :

- une somme prolongeant la somme classique des vecteurs
- un produit appelé produit géométrique, noté ab pour deux multivecteurs a et b
- un produit scalaire (et donc une norme) noté $a \cdot b$
- un produit extérieur noté $a \wedge b$

Les algèbres géométriques

Si $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, les éléments $\boldsymbol{e_i}\mathbf{e_j}$ appartiennent donc à $\mathscr{G}^n$, mais ne sont pas des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Les algèbres géométriques

Si $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, les éléments $\boldsymbol{e_i}\mathbf{e_j}$ appartiennent donc à $\mathscr{G}^n$, mais ne sont pas des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

$dim(\mathscr{G}^n) = 2^n$, une base étant formée par 1 et l'ensemble des produits de vecteurs distincts :

$$\{1, \boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}, \boldsymbol{e_1 e_2}, \boldsymbol{e_1 e_3}, \cdots \boldsymbol{e_{n-1} e_n}, \boldsymbol{e_1 e_2 e_3}, \cdots, \boldsymbol{e_1} \cdots \boldsymbol{e_n}\}$$

L'élément $\boldsymbol{e_i e_j}$ sera noté par la suite e_{ij}.

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

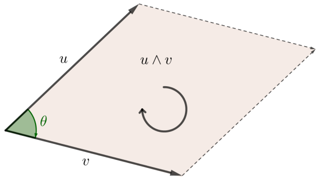
En 1D : un vecteur définit une droite et sa norme est la longueur d'un segment de cette droite, et il possède un sens.

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

En 2D : Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des vecteurs (non colinéaires), $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est appelé un **bivecteur**.

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

En 2D : Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des vecteurs (non colinéaires), $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est appelé un **bivecteur**.

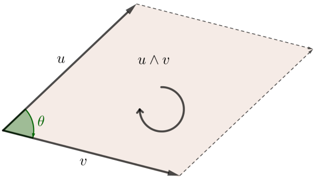


Un bivecteur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$

- définit le plan vectoriel engendré par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

En 2D : Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des vecteurs (non colinéaires), $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est appelé un **bivecteur**.

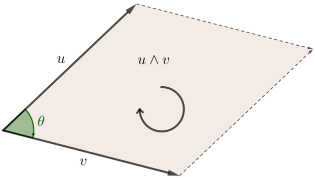


Un bivecteur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$

- définit le plan vectoriel engendré par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$
- sa norme est une partie de l'aire de ce plan : c'est l'aire du parallélogramme engendré par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$

Les algèbres géométriques - Interprétation géométrique

En 2D : Si $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ sont des vecteurs (non colinéaires), $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$ est appelé un **bivecteur**.



Un bivecteur $\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$

- définit le plan vectoriel engendré par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$
- sa norme est une partie de l'aire de ce plan : c'est l'aire du parallélogramme engendré par $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$
- possède également une orientation : celle de $\boldsymbol{u}$ vers $\boldsymbol{v}$

Egalité de bivecteurs

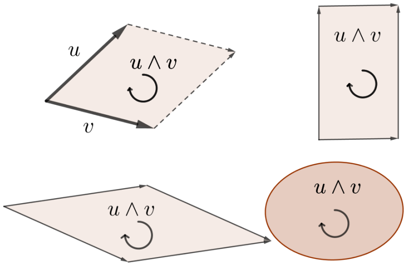
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Egalité de bivecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
Deux bivecteurs sont égaux si et seulement si ils définissent le même plan, ont la même orientation et ont la même norme.

Egalité de bivecteurs

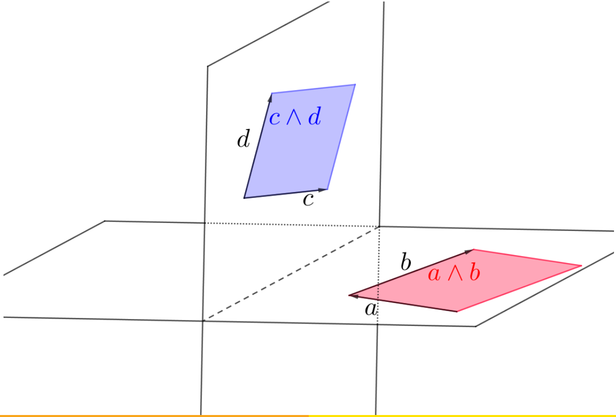
Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
Deux bivecteurs sont égaux si et seulement si ils définissent le même plan, ont la même orientation et ont la même norme.
Ainsi, ces bivecteurs-là sont par exemple égaux :



Addition de bivecteurs

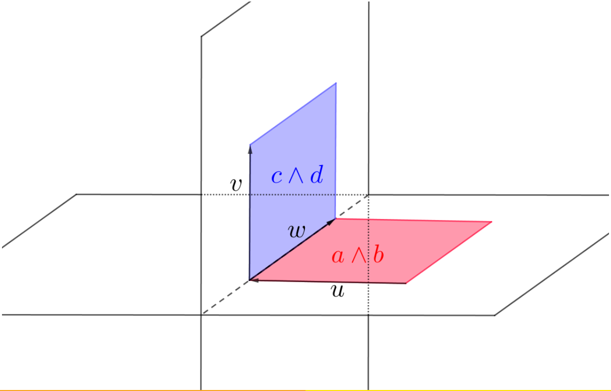
Addition de bivecteurs

Etape 1



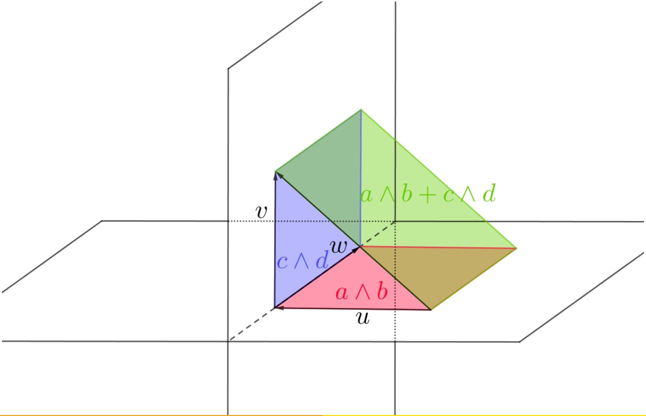
Addition de bivecteurs

Etape 2 : on ramène les bivecteurs de sorte qu'ils aient un vecteur en commun



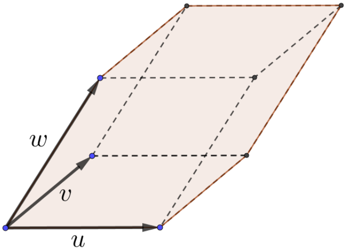
Addition de bivecteurs

Etape 3: par linéarité, le résultat est $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{w}$



Trivecteurs

Tout ceci peut être prolongé à la notion de trivecteurs, quadrivecteurs, ...



Lames - multivecteurs

Une **k-lame** est un multivecteur $\boldsymbol{A}$ de la forme

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a_1}, \cdots \boldsymbol{a_k}$ sont linéairement indépendants.

Lames - multivecteurs

Une **k-lame** est un multivecteur $\boldsymbol{A}$ de la forme

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a_1}, \cdots \boldsymbol{a_k}$ sont linéairement indépendants.
Les 0-lames sont les constantes réelles, les 1-lames les vecteurs, les bivecteurs sont les 2-lames, les trivecteurs les 3-lames...

Lames - multivecteurs

Une **k-lame** est un multivecteur $\boldsymbol{A}$ de la forme

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a_1}, \cdots \boldsymbol{a_k}$ sont linéairement indépendants.
Les 0-lames sont les constantes réelles, les 1-lames les vecteurs, les bivecteurs sont les 2-lames, les trivecteurs les 3-lames...
Le grade maximal est n : il n'y a qu'une n-lame (à une constante près) : $\boldsymbol{e_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e_n}$.
Cette lame est notée I et est appelée **pseudo-scalaire**.

Lames - multivecteurs

Une **k-lame** est un multivecteur $\boldsymbol{A}$ de la forme

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$$

où les vecteurs $\boldsymbol{a_1}, \cdots \boldsymbol{a_k}$ sont linéairement indépendants.
Les 0-lames sont les constantes réelles, les 1-lames les vecteurs, les bivecteurs sont les 2-lames, les trivecteurs les 3-lames...
Le grade maximal est n : il n'y a qu'une n-lame (à une constante près) : $\boldsymbol{e_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e_n}$.
Cette lame est notée I et est appelée **pseudo-scalaire**.
Un **multivecteur** sous sa forme générale est donc une somme de lames de grades différents.
Par exemple, dans $\mathscr{G}^3$, $2 + \boldsymbol{e_1} - 3\boldsymbol{e_3} + 2e_{12} - 4e_{123}$ est un multivecteur.

Réversion, inverse et dual

Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$, on appelle réversion de $\boldsymbol{A}$, notée $\tilde{\boldsymbol{A}}$ la lame

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a_k} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_1}$$

Ceci sert à montrer que les lames sont inversibles et à construire leur inverse, car $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\boldsymbol{A}^{-1}$ sont égaux à une constante près.

Réversion, inverse et dual

Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$, on appelle réversion de $\boldsymbol{A}$, notée $\tilde{\boldsymbol{A}}$ la lame

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a_k} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_1}$$

Ceci sert à montrer que les lames sont inversibles et à construire leur inverse, car $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\boldsymbol{A}^{-1}$ sont égaux à une constante près.
Mais un multivecteur en général n'a pas d'inverse ! Les algèbres ne sont pas des corps.

Réversion, inverse et dual

Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$, on appelle réversion de $\boldsymbol{A}$, notée $\tilde{\boldsymbol{A}}$ la lame

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a_k} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_1}$$

Ceci sert à montrer que les lames sont inversibles et à construire leur inverse, car $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\boldsymbol{A}^{-1}$ sont égaux à une constante près.
Mais un multivecteur en général n'a pas d'inverse ! Les algèbres ne sont pas des corps.
Le dual d'un multivecteur A est le multivecteur

$$A^* = AI^{-1}$$

Il représente tout l'espace non pris par A.

Réversion, inverse et dual

Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_1} \wedge \boldsymbol{a_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_k}$, on appelle réversion de $\boldsymbol{A}$, notée $\tilde{\boldsymbol{A}}$ la lame

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{a_k} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a_1}$$

Ceci sert à montrer que les lames sont inversibles et à construire leur inverse, car $\tilde{\boldsymbol{A}}$ et $\boldsymbol{A}^{-1}$ sont égaux à une constante près.
Mais un multivecteur en général n'a pas d'inverse ! Les algèbres ne sont pas des corps.
Le dual d'un multivecteur A est le multivecteur

$$A^* = AI^{-1}$$

Il représente tout l'espace non pris par A.
Par exemple, dans $\mathscr{G}^3$, on a $\boldsymbol{e_1^*} = -\boldsymbol{e_2} \wedge \boldsymbol{e_3}$.

CGA - Présentation

CGA - Présentation

On se place dans $\mathscr{G}^{4,1}$, l'algèbre géométrique formée à partir d'un espace de dimension 5 (donc de dimension $2^5 = 32$).
Base orthogonale : $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_+}$ et $\boldsymbol{e_-}$ avec :

$$||\boldsymbol{e_+}|| = 1 \text{ et } ||\boldsymbol{e_-}|| = -1$$

CGA - Présentation

On se place dans $\mathscr{G}^{4,1}$, l'algèbre géométrique formée à partir d'un espace de dimension 5 (donc de dimension $2^5 = 32$).
Base orthogonale : $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{e_+}$ et $\boldsymbol{e_-}$ avec :

$$||\boldsymbol{e_+}|| = 1 \text{ et } ||\boldsymbol{e_-}|| = -1$$

En pratique, on utilisera plutôt les vecteurs $\boldsymbol{e_0}$ et $\boldsymbol{e_\infty}$ définis par :

$$\boldsymbol{e_0} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e_-} - \boldsymbol{e_+}) \text{ et } \boldsymbol{e_\infty} = \boldsymbol{e_+} + \boldsymbol{e_-}$$

car plus parlant :
$\boldsymbol{e_0}$ représente l'origine du repère et $\boldsymbol{e_\infty}$ représente un point à l'infini.

Passage d'un point 3D à des coordonnées CGA

A $\boldsymbol{x}$ de coordonnées (a, b, c) dans une base donnée de $\mathbb{R}^3$, on associe le vecteur CGA par la formule :
$x = a\boldsymbol{e_1} + b\boldsymbol{e_2} + c\boldsymbol{e_3} + \boldsymbol{e_0} + \frac{1}{2}||\boldsymbol{x}||^2\boldsymbol{e_\infty}$, ce qui s'écrit aussi :

$$x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e_0} + \frac{1}{2}||\boldsymbol{x}||^2\boldsymbol{e_\infty}$$

Représentations IPNS et OPNS

On cherche maintenant à représenter d'autres espaces que des points.

Représentations IPNS et OPNS

On cherche maintenant à représenter d'autres espaces que des points.

On a deux représentations possibles, duales l'une de l'autre :

- l'IPNS consiste à dire que le multivecteur x correspond à notre espace E si

$$\forall y \text{ vecteur de } \mathscr{G}^{4,1}, y \in E \Leftrightarrow x \cdot y = 0.$$

Représentations IPNS et OPNS

On cherche maintenant à représenter d'autres espaces que des points.

On a deux représentations possibles, duales l'une de l'autre :

- l'IPNS consiste à dire que le multivecteur x correspond à notre espace E si

$$\forall y \text{ vecteur de } \mathscr{G}^{4,1}, y \in E \Leftrightarrow x \cdot y = 0.$$

- l'OPNS consiste à dire que le multivecteur x correspond à notre espace E si

$$\forall y \text{ vecteur de } \mathscr{G}^{4,1}, y \in E \Leftrightarrow x \wedge y = 0.$$

Objets	Représentation IPNS	Représentation OPNS
Point x	$x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e_0} + \frac{1}{2}\|\|\boldsymbol{x}\|\|^2 \boldsymbol{e_\infty}$	$x^* = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3 \wedge s_4$
Sphère s	$s = \boldsymbol{c} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^2 - r^2)\boldsymbol{e_\infty} + \boldsymbol{e_0}$	$s^* = a \wedge b \wedge c \wedge d$
Plan P	$P = \boldsymbol{n} + d\boldsymbol{e_\infty}$	$P^* = a \wedge b \wedge c \wedge \boldsymbol{e_\infty}$
Droite D	$D = P_1 \wedge P_2$	$D^* = a \wedge b \wedge \boldsymbol{e_\infty}$
Cercle c	$c = s_1 \wedge s_2$	$c^* = a \wedge b \wedge c$
Paire de points P_p	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p^* = a \wedge b$

Transformations

- Pour une rotation d'angle θ de plan ayant $\boldsymbol{n}$ comme vecteur normal, on note

$$R = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n} \qquad \text{(appelé } \underline{\textbf{rotor}}\text{)}$$

L'image du multivecteur X par cette rotation est $RX\tilde{R}$.

Transformations

- Pour une rotation d'angle θ de plan ayant $\boldsymbol{n}$ comme vecteur normal, on note

$$R = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{n} \qquad \text{(appelé \underline{\textbf{rotor}})}$$

L'image du multivecteur X par cette rotation est $RX\tilde{R}$.

- Pour une translation de vecteur $\boldsymbol{t}$, on note

$$T = 1 - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}\boldsymbol{e}_\infty$$

L'image du multivecteur X par cette translation est $TX\tilde{T}$.

Présentation de Coq

Pour voir rapidement le fonctionnement de Coq, nous allons regarder la démonstration de la formule :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Implémentation de la CGA

Implémentation de la CGA

Première partie :
On implémente les algèbres géométriques conformes en Coq en réutilisant les bibliothèques de Laurent Théry.

Implémentation de la CGA

Première partie :
On implémente les algèbres géométriques conformes en Coq en réutilisant les bibliothèques de Laurent Théry.

Deuxième partie :
On définit des fonctions qui créent en Coq les différents objets géométriques vus plus haut dans le tableau.

Implémentation de la CGA

```
(** to pass from a 3D point to a CGA point *)
Definition Point2CGA (x:point) : vect := x + ((1#2) * (x *s x)) .* e_inf + e_0.

(** Sphere definition from its center and its square radius and from 4 points*)
Definition Sphere_c_r (center:point) (sq_radius: Qc) : IOvect := IPNS (Point2CGA center - ((1#2) * sq_radiu
Definition Sphere_4p (p1 p2 p3 p4 : point ) : IOvect := OPNS (Point2CGA p1 v Point2CGA p2 v Point2CGA p3 v

(** Plane definition from a normal vector and its distance to 0 and from 3 points*)
Definition Plane_n_d (n: point) (d:Qc) := IPNS(n+d.*e_inf).
Definition Plane_3p (p1 p2 p3 : point ) := OPNS(Point2CGA p1 v Point2CGA p2 v Point2CGA p3 v e_inf).

(** Midplane IPNS definition from 2 points *)
Definition IPNSMidplane (a b : point) := IPNS(Point2CGA a - Point2CGA b).

(** Circle definition from 2 spheres and from 3 points*)
Definition Circle_2S (S1 S2 : vect ) := IPNS(S1 v S2).
Definition Circle_3p (p1 p2 p3 : point ) := OPNS(Point2CGA p1 v Point2CGA p2 v Point2CGA p3).

(** Line definition from 2 points *)
Definition LineIPNS (Plane1 Plane2 : vect) := IPNS(Plane1 v Plane2).
Definition LineOPNS (p1 p2 : point) := OPNS(Point2CGA p1 v Point2CGA p2 v e_inf).

(** PointPair IPNS definition from 3 spheres and from 2 points (TODO : Check planes ??)*)
Definition IPNSPointPair (S1 S2 S3 : vect) := S1 v S2 v S3.
Definition OPNSPointPair (P1 P2 : vect ) := P1 v P2.
```

Objets	Représentation IPNS	Représentation OPNS
Point x	$x = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{e_0} + \frac{1}{2}\|\|\boldsymbol{x}\|\|^2 \boldsymbol{e_\infty}$	
Droite D		$D^* = a \wedge b \wedge \boldsymbol{e_\infty}$

```
(** to pass from a 3D point to a CGA point *)
Definition Point2CGA (x:point) : vect := x + ((1#2) * (x *s x)) .* e_inf + e_0.
```

```
Definition LineOPNS (p1 p2 : point) := OPNS(Point2CGA p1 v Point2CGA p2 v e_inf).
```

Implémentation de la CGA

Ensuite, on définit la fonction suivante, qui vérifie si un point vérifie les propriétés d'appartenance à un objet en CGA :

```
Definition is_on_object (V : IOvect) := match V with
IPNS v => fun x:point => v *s (Point2CGA x) = 0
|OPNS v => fun x:point => v v (Point2CGA x) = 0%v
end.
```

Implémentation de la CGA

Ensuite, on définit la fonction suivante, qui vérifie si un point vérifie les propriétés d'appartenance à un objet en CGA :

```
Definition is_on_object (V : IOvect) := match V with
IPNS v => fun x:point => v *s (Point2CGA x) = 0
|OPNS v => fun x:point => v v (Point2CGA x) = 0%v
end.
```

Et on démontre plusieurs lemmes comme celui-ci :

```
Lemma OPNSLine_compat : forall (a b x : point),
                         is_on_object (LineOPNS a b) x <-> Aligned a b x.
```

(où la fonction *Aligned* est la fonction qui nous dit si trois points en géométrie classique sont alignés)

Cinématique directe

En robotique, la cinématique directe consiste pour un bras de robot donné à pouvoir calculer où se situera le bout du bras, appelé **effecteur**, en fonction des paramètres d'entrée.

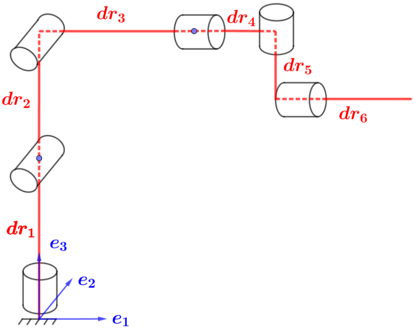
Cinématique directe

En robotique, la cinématique directe consiste pour un bras de robot donné à pouvoir calculer où se situera le bout du bras, appelé **effecteur**, en fonction des paramètres d'entrée.

Dans cette partie, nous avons créé trois robots, implémenté une fonction cinématique directe à l'aide des algèbres géométriques, et observé graphiquement les résultats obtenus. Je vais en présenter un seul ici : le robot 6R.

Robot 6R

Un robot 6R est un robot ayant 6 axes de rotation. Il est constitué d'une base et d'une partie plus petite appelée "poignet".



Robot 6R

On crée les paramètres du robot :

```
(**    Robot 6R    *)

(* All the parameters *)
Definition dr1:Qc := 1/1. (* base-waist*)
Definition dr2:Qc := 2/1. (* upper arm *)
Definition dr3:Qc := 3/2. (* lower arm *)
Definition dr4:Qc := 1/2. (* wrist *)
Definition dr5:Qc := 1/2. (* wrist2 *)
Definition dr6:Qc := 1/2. (* effector *)

(* Creation of the motor M *)
Definition RR1 ht1 := rotor ht1 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p (e_3)))).
Definition RR2 ht2 := rotor ht2 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p (Vopp e_2)))).
Definition RR3 ht3 := rotor ht3 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p (Vopp e_2)))).
Definition RR4 ht4 := rotor ht4 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p (Vopp e_1)))).
Definition RR5 ht5 := rotor ht5 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p (e_3)))).
Definition RR6 ht6 := rotor ht6 (OPNS2IPNS (LineOPNS origin (v2p e_1))).
Definition TR1 := translator (v2p(dr1 .* e_3)).
Definition TR2 := translator (v2p(dr2 .* e_3)).
Definition TR3 := translator (v2p(dr3 .* e_1)).
Definition TR4 := translator (v2p(dr4 .* e_1)).
Definition TR5 := translator (v2p(Vopp (dr5 .* e_3))).
Definition TR6 := translator (v2p(dr6 .* e_1)).
```

Robot 6R

Et on lui fait calculer la position finale de l'effecteur (la fonction *effector* calcule l'image par la transformation *robot6R* de l'origine)

```
Definition robot6R ht1 ht2 ht3 ht4 ht5 ht6 := (RR1 ht1) *g TR1 *g (RR2 ht2) *g TR2 *g (RR3 ht3)*g TR3 *g (RR4 ht4)
                                         *g TR4 *g (RR5 ht5) *g TR5 *g (RR6 ht6) *g TR6.
Definition robot6Rtest := robot6R half_theta_1 half_theta_2 half_theta_3 half_theta_4 half_theta_5 half_theta_6.
Compute effector robot6Rtest.
```

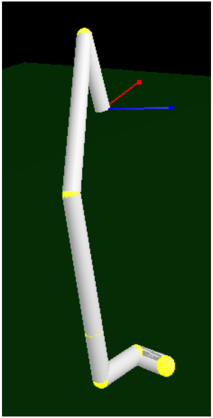
On trouve, pour des valeurs d'angles choisies au hasard :

```
= ({|
   this := 1446748742509 # 1283602531250;
   canon := Qred_involutive
             (742820139186922750362500 # 6590541832925628906250000) |},
  ({|
   this := -898791223944 # 641801265625;
   canon := Qred_involutive
             (-576845345059902004125000 # 411908864557851806640625) |},
  ({|
   this := -4205366693 # 1770486250;
   canon := Qred_involutive
             (-1956782007838850100390625 # 8238177291157036132812 50) |},
  tt)))
 : point
```

soit à peu près $(1.13, -1.40, -2.38)$.

Robot 6R

On peut voir le résultat graphiquement sur le logiciel CLUCalc :



theta1 = 1.83
theta2 = 2.34
theta3 = 2.16
theta4 = 2.58
theta5 = 1.64
theta6 = 2.49
Sphere_1 = 1 **e3** + 0.495 **e** + 1 **e0**
Sphere_2 = 0.368 **e1** + -1.39 **e2** + -0.391 **e3** + 1.1 **e** + 1 **e0**
Sphere_3 = 0.449 **e1** + -1.69 **e2** + -1.86 **e3** + 3.26 **e** + 1 **e0**
Sphere_4 = 0.476 **e1** + -1.8 **e2** + -2.35 **e3** + 4.47 **e** + 1 **e0**
Sphere_5 = 0.628 **e1** + -1.33 **e2** + -2.44 **e3** + 4.04 **e** + 1 **e0**
Effecteur = 1.1 **e1** + -1.46 **e2** + -2.35 **e3** + 4.42 **e** + 1 **e0**

Cinématique indirecte

La cinématique indirecte consiste à prendre le problème dans le sens inverse : on choisit un endroit où doit se situer l'effecteur et on cherche quels paramètres rentrer dans le robot pour y arriver.

Cinématique indirecte

La cinématique indirecte consiste à prendre le problème dans le sens inverse : on choisit un endroit où doit se situer l'effecteur et on cherche quels paramètres rentrer dans le robot pour y arriver.

Il peut y avoir plusieurs problèmes :

- le point choisi n'est pas atteignable
- il y a plusieurs façons d'arriver au point choisi
- il y a une infinité de façons d'arriver au point choisi

Cinématique indirecte

La cinématique indirecte consiste à prendre le problème dans le sens inverse : on choisit un endroit où doit se situer l'effecteur et on cherche quels paramètres rentrer dans le robot pour y arriver.

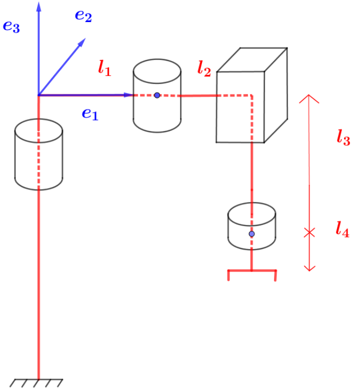
Il peut y avoir plusieurs problèmes :

- le point choisi n'est pas atteignable
- il y a plusieurs façons d'arriver au point choisi
- il y a une infinité de façons d'arriver au point choisi

Dans cette partie, on va montrer comment trouver des solutions au problème pour le robot SCARA.

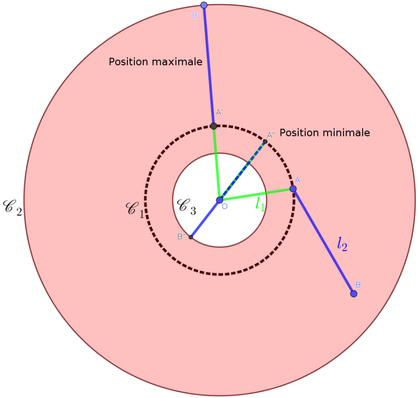
Robot SCARA

Voici le robot SCARA, ainsi que ses liaisons schématiques :



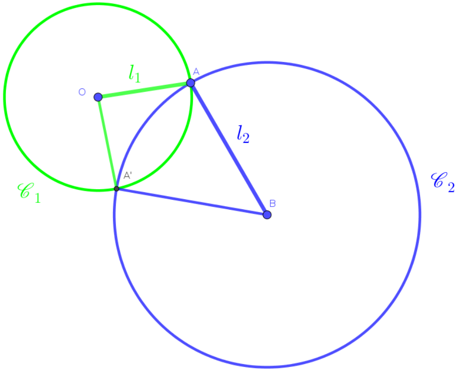
Robot SCARA

Vu de dessus, l'ensemble des points atteignables est colorié en rouge. Pour la cote, cela ne dépend que de la translation du bras.



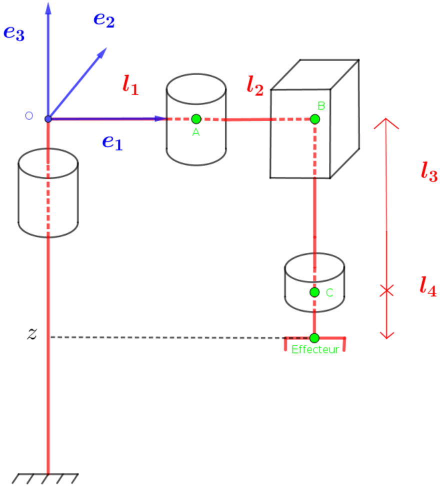
Robot SCARA

Si un point est strictement compris dans l'anneau rouge au-dessus, il y aura toujours deux façons d'atteindre le point considéré :



Robot SCARA

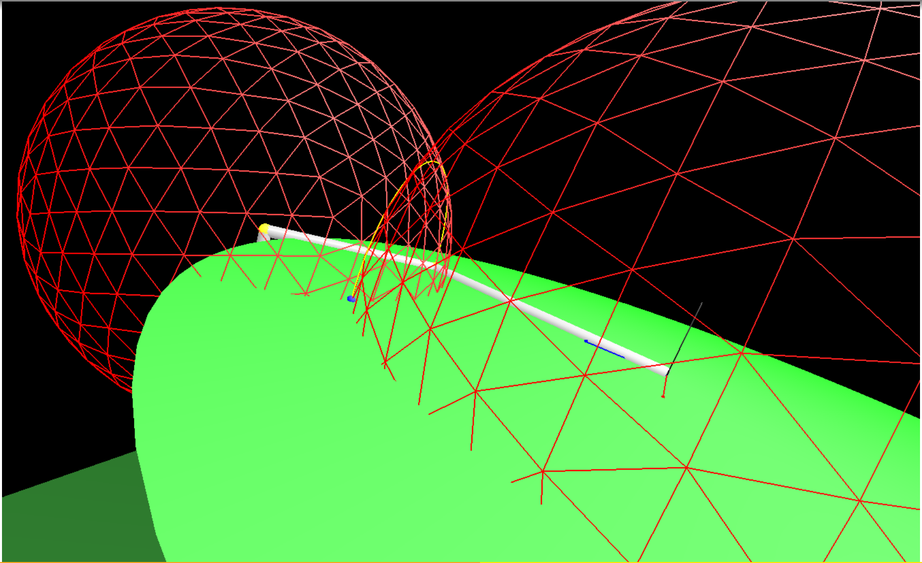
Avec les algèbres géométriques, on cherche la position du point A, intersection des deux bras.
Pour cela, on remarque que :


e_3
e_2
l_1
l_2
O
A
B
e_1
l_3
C
l_4
z
Effecteur

Robot SCARA

On note B le point extrémité du deuxième bras : $B(x, y, 0)$
Pour calculer ces points avec les algèbres géométriques, on cherche la position du point A, intersection des deux bras.
Pour cela, on remarque que :

- le point A est sur le plan P d'équation $z = 0$.
- sa distance à O est de l_1, donc il est situé sur la sphère S_1 de centre O de rayon l_1.
- A est situé à une distance de l_2 de B, donc il est sur la sphère S_2 de centre B de rayon l_2.



Robot SCARA

Au final, pour avoir la position de A, il suffit de calculer

$$P \wedge S_1 \wedge S_2$$

Cela renverra une paire de points, notée P_p.

Robot SCARA

Au final, pour avoir la position de A, il suffit de calculer

$$P \wedge S_1 \wedge S_2$$

Cela renverra une paire de points, notée P_p.
Pour extraire un seul point, il faut calculer

$$\frac{Pp^* \pm \sqrt{Pp^* \cdot Pp^*}}{\boldsymbol{e}_\infty \cdot Pp^*}$$

le signe choisi donnant un point ou l'autre.

Robot SCARA

```
S1 = -1/2*d1*d1*e+e0;
S2 = Pt+1/2*(Pt.Pt-d2*d2)*e+e0;
Circle = S1^S2;
Plane = e3;
Pp = Circle^Plane;
?point0 = (-*Pp+sqrt(*Pp . *Pp))/(e. (*Pp));
?point1 = (-*Pp-sqrt(*Pp . *Pp))/(e. (*Pp));
?PointA= -(*Cc0);
```

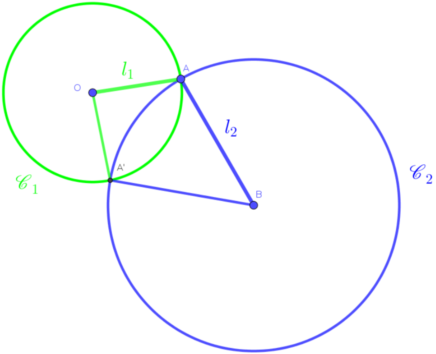
Figure: Les calculs

effecteur = 5.89 **e1** + 1.52 **e2** + -2 **e3** + 20.5 **e** + 1 **e0**
point0 = 3.93 **e1** + -0.755 **e2** + 8 **e** + 1 **e0**
point1 = 3.07 **e1** + 2.56 **e2** + 8 **e** + 1 **e0**
PointA = 3.93 **e1** + -0.755 **e2** + 8 **e** + 1 **e0**

Figure: Les résultats

Une fois les coordonnées du point A connu, il ne reste qu'à utiliser les formules d'Al-Kashi :

$$\theta_1 = arccos\left(\frac{l_1^2 + OB^2 - l_2^2}{2 l_1 OB}\right) \text{ et } \theta_2 = arccos\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - OB^2}{2 l_1 l_2}\right)$$



Difficultés rencontrées

Pour pouvoir faire les calculs, le corps de base utilisé a été $\mathbb{Q}$. En effet, l'ensemble des nombres réels étant mathématiquement compliqué (l'ensemble des limites des suites de Cauchy), il est compliqué à manipuler en Coq (qui ne les remplace pas par des flottants), surtout pour faire des calculs.

Difficultés rencontrées

Pour pouvoir faire les calculs, le corps de base utilisé a été $\mathbb{Q}$. En effet, l'ensemble des nombres réels étant mathématiquement compliqué (l'ensemble des limites des suites de Cauchy), il est compliqué à manipuler en Coq (qui ne les remplace pas par des flottants), surtout pour faire des calculs.

Le problème, c'est qu'une fois dans $\mathbb{Q}$, le calcul des rotors $R = cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \boldsymbol{n}$ pose problème à cause des fonctions trigonométriques.

Pour contourner le problème, les angles ont été définis par leur cosinus et sinus comme des paires (c, s) où c et s sont des rationnels.

Pour contourner le problème, les angles ont été définis par leur cosinus et sinus comme des paires (c, s) où c et s sont des rationnels.

Ce n'est en fait pas limitant, car on peut montrer que tout angle peut être limite d'une suite de tels angles.

Pour contourner le problème, les angles ont été définis par leur cosinus et sinus comme des paires (c, s) où c et s sont des rationnels.

Ce n'est en fait pas limitant, car on peut montrer que tout angle peut être limite d'une suite de tels angles.

Mais le problème réapparait dans les formules

$$\frac{Pp^* \pm \sqrt{Pp^* \cdot Pp^*}}{\boldsymbol{e}_\infty \cdot Pp^*} \text{ et } \theta_1 = arccos\left(\frac{l_1^2 + OB^2 - l_2^2}{2 l_1 OB}\right)$$

où les nombres irrationnels apparaitront immanquablement.

Conclusion

On a maintenant des robots dont les mouvements sont prouvés : il n'iront pas ailleurs que où il doivent aller.

Conclusion

On a maintenant des robots dont les mouvements sont prouvés : il n'iront pas ailleurs que où il doivent aller.

Perspectives :

- Finir d'implémenter la cinématique indirecte en Coq

Conclusion

On a maintenant des robots dont les mouvements sont prouvés : il n'iront pas ailleurs que où il doivent aller.

Perspectives :

- Finir d'implémenter la cinématique indirecte en Coq
- Prouver que la composée de la cinématique indirecte et directe donne bien l'identité

Conclusion

On a maintenant des robots dont les mouvements sont prouvés : il n'iront pas ailleurs que où il doivent aller.

Perspectives :

- Finir d'implémenter la cinématique indirecte en Coq
- Prouver que la composée de la cinématique indirecte et directe donne bien l'identité
- Faire en sorte qu'un robot aille d'un endroit à un autre sans passer par une zone interdite (une artère par exemple)

Merci pour votre attention !