Définitions inductives (et récursives)

1 Définitions inductives

On rappelle la définition inductive des entiers naturels dans Coq :

```
Inductive nat : Set := O : nat | S : nat -> nat.
```

1- Définir une fonction `myplus` réalisant l'opération d'addition sur les entiers naturels. Cette fonction devra calculer par récurrence sur son ***deuxième*** argument. Tester le comportement de cette fonction sur quelques exemples simples avec la commande `Eval compute in`.
2- Démontrer l'associativité de `myplus` :

```
forall a b c : nat, myplus (myplus a b) c = myplus a (myplus b c).
```

3- Démontrer les deux lemmes techniques suivants :

```
myplus_Sn_m : forall n m :nat, myplus (S n) m = S (myplus n m).
myplus_O_m : forall m:nat, myplus O m = m.
```

4- En déduire une preuve de la commutativité de `myplus` :

```
forall a b : nat, myplus a b = myplus b a.
```

On oublie maintenant la définition de `myplus` et on utilise les opérations habituelles sur les entiers, à savoir `plus`, `mult`, etc.

5- Définir une fonction de sommation Σ de 0 à n prenant en argument une fonction f de type `nat` $\rightarrow$ `nat` et une borne n : `nat` et calculant $\Sigma_{i=0}^{n} f(i)$

```
sommation : (nat -> nat) -> nat -> nat
```

6- Démontrer que

$$2 * \Sigma_{i=0}^{n}\ i = n * (n+1).$$

On pourra utiliser la tactique `ring` (faire `Require Export ArithRing.` pour charger cette tactique) ainsi que les théorèmes déjà prouvés dans la bibliothèque standard de Coq en particulier les deux lemmes suivants :

```
plus_n_Sm : forall n m : nat, S (n + m) = n + S m
plus_n_O : forall n : nat, n = n + 0
```

2 Nombre de pièces

On souhaite maintenant démontrer qu'avec un nombre infini de pièces de 3 et 5 euros on peut faire l'appoint pour tout montant supérieur à 8 euros. Il s'agit donc de démontrer un théorème de la forme suivante :

$$\forall m : \texttt{nat}, \exists i : \texttt{nat}, \exists j : \texttt{nat}, 8 + m = 5 * i + 3 * j.$$

7- Précisez le sens des variables m, i et j.
8- Proposez un mécanisme de démonstration sur papier pour ce théorème. Deux approches sont possibles, soit directement en effectuant plusieurs inductions successives ou bien en énoncant un principe d'induction particulier (qui avance de 3 en 3 sur les entiers).
9- En faire une démonstration en Coq.