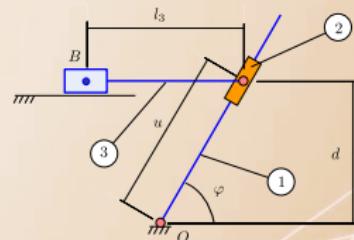
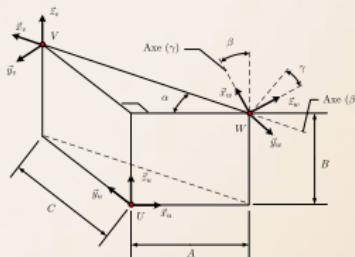
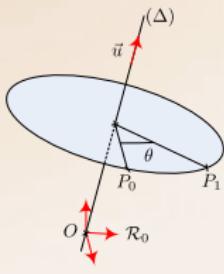


Cours de Mécanique Appliquée



Chapitre I

**Étude de mécanismes, machines, systèmes
articulés**

Étude de mécanismes, machines, systèmes articulés I

1. Présentation du cours

2. Introduction

- 2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés
- 2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

- 3.1 Hypothèses de départ
- 3.2 Choix d'un CVV particulier
- 3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

- 4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes
- 4.2 Paramétrage et mise en équations
- 4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Chapitre 1

Étude de mécanismes, machines, systèmes articulés **Introduction**

Cours de *Mécanique Appliquée*



Présentation du cours

Introduction

Équations de Lagrange avec multiplicateurs

Modélisation de mécanismes

Notations mathématiques

Plan – Chapitre 1 |

1. Présentation du cours

2. Introduction

2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés

2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

3.1 Hypothèses de départ

3.2 Choix d'un CVV particulier

3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes

4.2 Paramétrage et mise en équations

4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Présentation du cours

Introduction

- Équations de Lagrange avec multiplicateurs
- Modélisation de mécanismes
- Notations mathématiques

Présentation du cours

Ce cours a pour objet l'étude de mécanismes, machines et autres systèmes poly-articulés.

On examinera en particulier le cas des **robots manipulateurs**.



Présentation du cours

Objectifs du cours

Être capable d'établir les modèles mécaniques :

- géométriques
- cinématiques
- dynamiques

en vue de

- ① valider la conception d'un mécanisme ;
- ② concevoir la partie commande du système.

Présentation du cours

Organisation du module et des séances de mécanique appliquée

- Mécanique appliquée (36h)
- Cours : 7 séances + 1 examen (2020-12-16 – 1h50) TD : 6 séances
- Travaux Pratiques : 4 séances de 3h + 1 séance examen (2021-01-12 – 1h20)
Utilisation de logiciels de simulation et travaux dirigés.

Intervenants pour les TP

• O. Piccin

• A. Yigit

Évaluation

- Travaux Pratiques

- Examen $\leadsto \frac{2}{3}$ de la note du module

Présentation du cours

Introduction

- Équations de Lagrange avec multiplicateurs
- Modélisation de mécanismes
- Notations mathématiques

Bibliographie

- Ouvrages classiques de robotique en anglais : [1], [2] ; article fondateur sur les param. DH, [3]
- Ouvrages classiques de robotique en français : [4], [5].
- Ouvrage classique sur la dynamique multicorps : [6].

- [1] R. P. Paul.
Robot Manipulators. Mathematics, Programming and Control.
MIT Press, Cambridge. MA, 1981.
- [2] J. J. Craig.
Introduction to robotics Mechanics and control.
Prentice Hall, third edition, 2005.
- [3] J. Denavit and R. S. Hartenberg.
A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices.
ASME Journal of Applied Mechanics, 22 :215–221, 1955.
- [4] B. Gorla and M. Renaud.
Modèles des robots manipulateurs. Application à leur commande.
Cepadues - Editions, 1984.
- [5] Wisama Khalil and Etienne Dombre.
Modélisation identification et commande des robots.
Hermès, 1999.
- [6] Jens Wittenburg.
Dynamics of multibody systems.
Springer, 2007.

Présentation du cours

Introduction

Équations de Lagrange avec multiplicateurs

Modélisation de mécanismes

Notations mathématiques

Plan – Cours de Mécanique Appliquée I

Chapitre 1 – Étude de mécanismes, machines, systèmes articulés

1. Présentation du cours

2. Introduction

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

4. Modélisation de mécanismes

5. Notations mathématiques

Plan – Cours de Mécanique Appliquée II

Chapitre 2 – Étude de mécanismes plans

1. Étude d'un mécanisme à quatre barres

- 1.1 Présentation et paramétrage
- 1.2 Calcul des positions
- 1.3 Calcul des vitesses
- 1.4 Calcul des accélérations
- 1.5 Concept d'inversion cinématique
- 1.6 Loi de Grashof pour le système 4-barres

2. Résolution numérique de mécanismes plans

- 2.1 Rappel - Méthode de Newton
- 2.2 Méthode de Newton-Raphson
- 2.3 Application à la résolution numérique d'un mécanisme 4-barres
- 2.4 Autre exemple de calcul cinématique sur un mécanisme plan

Plan – Cours de Mécanique Appliquée III

Chapitre 3 – Modélisation géométrique de mécanismes dans l'espace

1. Outils pour la description des configurations spatiales

- 1.1 Configuration d'un corps rigide
- 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base
 - Exemple d'illustration dans le plan
- 1.3 Application à la composition de rotations
 - Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
 - Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
 - Exemples
- 1.4 Différents modes de représentation des rotations
- 1.5 Matrices de transformation homogènes
 - Opérations sur les matrices homogènes

2. Modèle géométrique direct

- 2.1 Définitions
- 2.2 Principe de la modélisation
- 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg

Plan – Cours de Mécanique Appliquée IV

- Remarques
- Cas particuliers

2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

2.5 Écriture du MGD

2.6 Application 1 : robot à trois ddl

2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

4. Modèle géométrique inverse

4.1 Conditions d'existence du MGI

4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

Plan – Cours de Mécanique Appliquée V

Chapitre 4 – Modélisation cinématique de mécanismes dans l'espace

1. Modèle cinématique direct

1.1 Définitions

1.2 Écriture du modèle cinématique direct par dérivation

1.3 Écriture directe de la jacobienne

2. Modèle cinématique inverse

2.1 Cas où $m = n$ et l'inverse de J existe

2.2 Configurations singulières

2.3 Cas où $n \text{ ddl} > m$ contraintes

Plan – Cours de Mécanique Appliquée VI

Chapitre 5 – Génération de trajectoires

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

- 2.1 Résolution du problème a
- 2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

- 4.1 Interpolation de degré cinq
- 4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

- 5.1 Loi en trapèze de vitesse
- 5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération
- 5.3 Loi «sinus carré»

Plan – Cours de Mécanique Appliquée VII

Chapitre 6 – Dynamique des systèmes mécaniques articulés

1. Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

2. Formulation de Newton-Euler

2.1 Théorèmes généraux

2.2 Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

- Calcul cinétiques - Récurrence avant
- Calculs dynamiques - Récurrence arrière

2.3 Application : mécanisme plan RR

3. Formulation de Lagrange

3.1 Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

3.2 Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

3.3 Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

3.4 Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

3.5 Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

- Efforts généralisés dûs à la pesanteur

Plan – Cours de Mécanique Appliquée VIII

- Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

3.6 Équations du mouvement

3.7 Identification avec Newton-Euler

3.8 Application : mécanisme plan RR

- Calcul des vitesses linéaires et angulaires
- Calcul de la matrice d'inertie
- Comparaison des termes

Plan – Chapitre 1 |

1. Présentation du cours

2. Introduction

2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés

2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

3.1 Hypothèses de départ

3.2 Choix d'un CVV particulier

3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes

4.2 Paramétrage et mise en équations

4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Système mécanique articulé

Principales caractéristiques

- Assemblage de solides considérés comme **rigides**.
- Les solides sont interconnectés par des liaisons (aussi appelées **couples** ou **paires cinématiques**).

Dans les mécanismes étudiés dans ce cours, on retrouvera principalement des liaisons de type

- Révolution (Revolute) $\longrightarrow R$
- Prismatique (Prismatic) $\longrightarrow P$

- Il existe des butées articulaires qui limitent l'amplitude des mouvements.
- Les déplacements relatifs ou absous sont de **grande amplitude**.

⇒ Conséquence : non-linéarité se répercutant sur les équations algébro-différentielles de la dynamique.

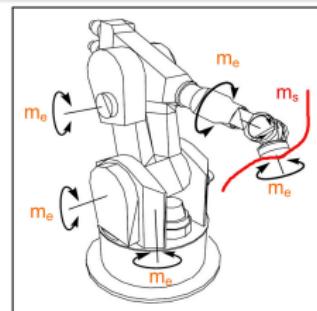
Analyse géométrique I

SMA → Système Mécanique Articulé

Objectif

Étude des relations **entrée/sortie** du mécanisme, d'un point de vue géométrique.

Soit une position m_e donnée en **entrée** du mécanisme, quel est la position m_s obtenue en **sortie** ?



Analyse géométrique II

Formulation du problème

Symboliquement, on recherche une relation \mathcal{F} de la forme :

$$\{\text{positions}\}_{\text{sortie}} = \mathcal{F} (\{\text{positions}\}_{\text{entrée}}) \quad (1)$$

Comment déterminer \mathcal{F} ?

Il existe deux variétés de méthodes pour répondre à la question :

- ① Méthodes vectorielles.
- ② Méthodes de transformation de coordonnées.

NB

La relation (1) est **non-linéaire** par rapport aux paramètres.

Analyse cinématique

Objectif

Étude des mouvements du mécanisme indépendamment des causes qui les engendrent (les efforts).

Soit un mouvement m_e donné en **entrée** du mécanisme, quel est le mouvement m_s obtenu en **sorte** ?

Formulation du problème

Symboliquement, on recherche une relation \mathcal{F} de la forme :

$$\{\text{positions, vitesses}\}_{\text{sortie}} = \mathcal{F} (\{\text{positions, vitesses}\}_{\text{entrée}}) \quad (2)$$

NB

La relation (2) est **linéaire** par rapport aux paramètres de vitesse.

Analyse dynamique I

Objectif

Étude des relations entre les efforts appliqués aux solides et les mouvements engendrés. Il existe deux types d'analyse :

Analyse dynamique directe

Efforts imposés

↔ Étude des mouvements induits avec prise en compte des contraintes cinématiques (imposées par les liaisons).

Analyse dynamique inverse

Lois de mouvement imposées

↔ Évaluation des efforts moteurs nécessaires.

Analyse dynamique II

NB : cas particulier

Analyse statique

~~> Étude de la situation d'équilibre, sans mouvement.

Plan – Chapitre 1 |

Présentation du cours

Introduction

Équations de Lagrange avec multiplicateurs

Modélisation de mécanismes

Notations mathématiques

Hypothèses de départ

Choix d'un CVV particulier

Application du TPV

1. Présentation du cours

2. Introduction

2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés

2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

3.1 Hypothèses de départ

3.2 Choix d'un CVV particulier

3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes

4.2 Paramétrage et mise en équations

4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Problèmes posés par l'étude de mécanismes

Équations de Lagrange avec multiplicateurs

- L'architecture d'un mécanisme présente souvent une ou plusieurs boucles.
 - dans ce cas, l'hypothèse d'indépendance des paramètres n'est plus vérifiée
~~ on ne peut plus appliquer la méthode de Lagrange « **classique** » (voir cours de mécanique générale de 3^o année).

On doit alors recourir aux équations de Lagrange **avec multiplicateurs**.

Dans ce cours, on étudiera plus particulièrement :

- les mécanismes **plans** à architecture de type série ou présentant des boucles ;
- les mécanismes **spatiaux** à architecture de type série.

Une étude des mécanismes **spatiaux** complexes, à architecture parallèle fera l'objet d'un cours en 5^o année.

Hypothèses de départ

Constitution du système et paramétrage

- Un système Σ est repéré par $n + 1$ variables indépendantes (q_1, \dots, q_n, t) .
- On considère les $2n + 1$ variables (q, \dot{q}, t) comme indépendantes.

Équations de Lagrange « classiques »

- Hypothèses
 - Les liaisons sont holonomes.
 - Le CVV est de la forme : $\vec{V}_M^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$.
- L'équation de Lagrange relative au paramètre q_i s'écrit :

$$\mathcal{L}_{q_i} : \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial q_i} = (Q_i)_{\text{int}} + (Q_i)_{\text{ext}}$$

Remarques sur les hypothèses formulées

Il peut exister :

- des équations de liaison non-holonomes ($f(q, \dot{q}, t) = 0$).
- des équations de liaison holonomes ($f(q, t) = 0$).

dont on n'a pas tenu compte dans le paramétrage choisi.

Après dérivation éventuelle, toutes ces équations de liaison se traduisent par k relations du type :

$$j \in [1, k] \quad (I_j) : \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(q, t)\dot{q}_i + \beta_j(q, t) = 0$$

D'après les hypothèses de départ, les variables (q_i, \dot{q}_i, t) sont considérées comme indépendantes.

⇒ on ne peut pas tenir compte tout de suite des relations (I_j) .

Choix d'un CVV particulier

Plutôt que de choisir le CVV $\vec{V}_M^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$ avec les \dot{q}_i^* quelconques, on peut prendre les \dot{q}_i^* dans le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , défini par :

$$j \in [1, k] \quad (I_j^*) : \quad \sum_{i=1}^n \alpha_{ji}(q, t) \dot{q}_i^* = 0$$

On dit alors que \vec{V}_M^* est compatible avec les liaisons décrites par les équations (I_j) .

Application du TPV

L'application du TPV permet d'écrire :

$\forall \dot{q}_i^* \in \mathbb{R}$ tels que les relations (I_j^*) soient vérifiées

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i^* = ((Q_i)_{\text{int}} + (Q_i)_{\text{ext}}) \dot{q}_i^*$$

Les paramètres \dot{q}_i^* ne sont pas indépendants.

On montre qu'il existe k scalaires λ_j tels que :

$$\mathcal{L}_{q_i} : \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial q_i} = (Q_i)_{\text{int}} + (Q_i)_{\text{ext}} + \sum_{j=1}^k \lambda_j \alpha_{ji}$$

Les coefficients λ_j sont appelés « multiplicateurs de Lagrange » associés aux relations (I_j^*) .

Présentation du cours

Introduction

Équations de Lagrange avec multiplicateurs

Modélisation de mécanismes

Notations mathématiques

Évaluation de la mobilité de mécanismes

Paramétrage et mise en équations

Résolution des équations

Plan – Chapitre 1 |

1. Présentation du cours

2. Introduction

2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés

2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

3.1 Hypothèses de départ

3.2 Choix d'un CVV particulier

3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes

4.2 Paramétrage et mise en équations

4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Définition

Mobilité d'un mécanisme

La mobilité d'un mécanisme est le nombre de paramètres d'entrée que l'on doit contrôler **indépendamment** pour faire atteindre au mécanisme une position particulière.

Formules de Grübeler ou de Grübeler-Kutzbach

En notant $\left\{ \begin{array}{l} m : \text{mobilité du mécanisme} \\ n : \text{nombre de solides (y compris le bâti)} \\ j : \text{nombre de liaisons} \\ f_i : \text{nombre de ddl de la liaison } i \end{array} \right.$

les formules de Grübeler s'écrivent :

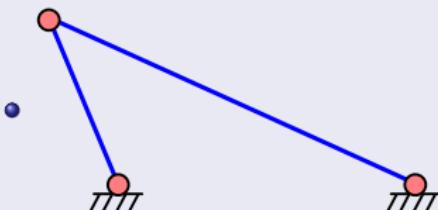
- $m = 3(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$ (dans le plan)

- $m = 6(n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$ (dans l'espace)

Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme 1



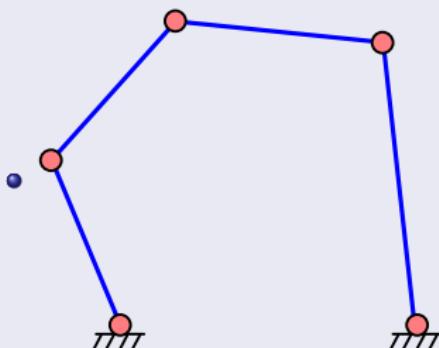
$$\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ j = 3 \\ m = 3(3 - 3 - 1) + 1 + 1 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

Ce mécanisme est appelé « structure ».

Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme 2



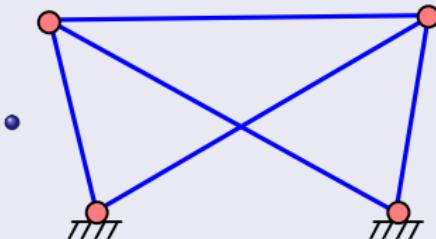
$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5 \\ j = 5 \\ m = 3(5 - 5 - 1) + 5 = 2 \end{array} \right.$$

- Quel est le nombre de solutions pour placer les actionneurs ?
 - Sélection de 2 articulations parmi 5 (ordre indifférent) \rightsquigarrow
- $$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{2(6)} = 10 \text{ possibilités.}$$

Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme 3

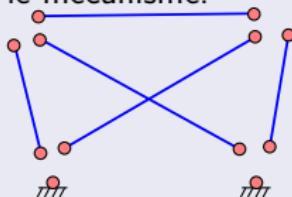


$$\left\{ \begin{array}{l} n = 6 \\ j = 8 \\ m = 3(6 - 8 - 1) + 8 = -1 \end{array} \right.$$

Ce système constitue une structure **hyperstatique**.



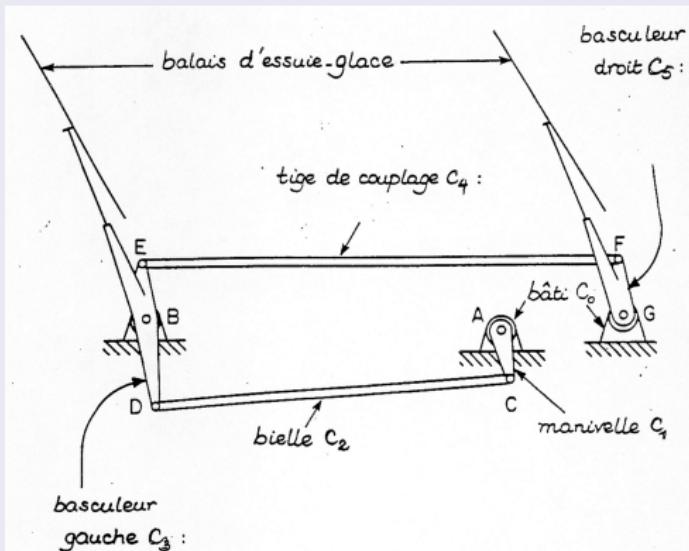
Liaisons binaires (attention au décompte des liaisons) \rightsquigarrow décomposer le mécanisme.



Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Tringlerie d'essuie-glace



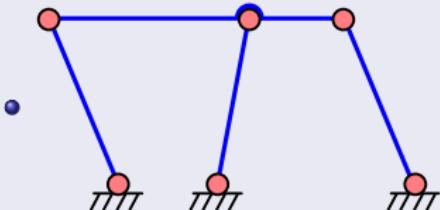
$$\left\{ \begin{array}{l} n = 6 \\ j = 7 \\ m = 3(6 - 7 - 1) + 7 = 1 \end{array} \right.$$

Deux mécanismes 4-barres « **couplés** ».

Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme 4



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5 \\ j = 6 \\ m = 3(5 - 6 - 1) + 6 = 0 \end{array} \right.$$

Ce système est bien une structure.

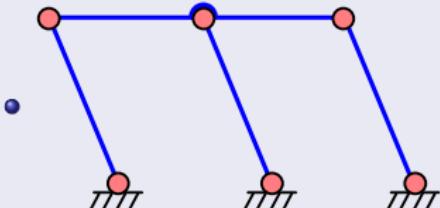
Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.



Les relations de Grübler conduisent parfois à des résultats **faux**.

Mécanisme 4'



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 5 \\ j = 6 \\ m = 3(5 - 6 - 1) + 6 = 0 \end{array} \right.$$

Ce mécanisme possède pourtant une mobilité.

Exemples dans le plan

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grubler.

Commentaire sur ce faux résultat

Ce phénomène est **normal** car la relation de Grubler ne prend pas en compte :

- la longueur des pièces ;
- les particularités géométriques des assemblages.

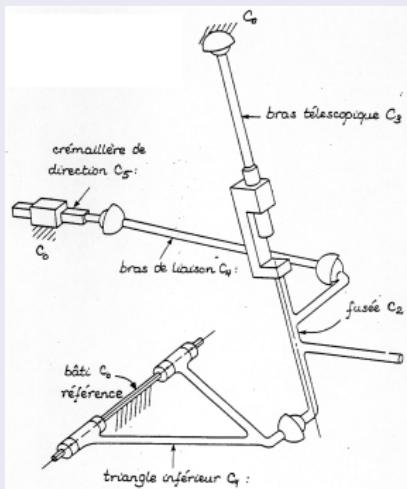
⇒ Conséquence : relation à utiliser avec prudence.

Pour une réponse certaine, il faut **étudier le rang** du système d'équations cinématiques du système.

Exemples dans l'espace

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme de suspension de type Mc Pherson

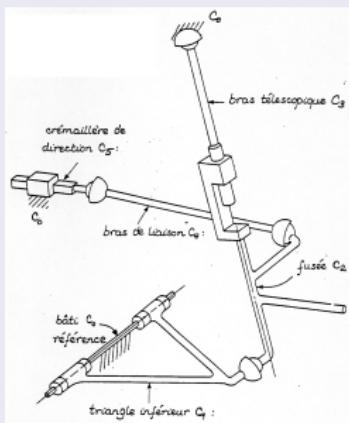


$$\left\{ \begin{array}{l} n = 6 \\ j = 7 \\ m = 6(6 - 7 - 1) + 16 = 4 \end{array} \right.$$

Exemples dans l'espace

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Mécanisme de suspension de type Mc Pherson



Ce mécanisme possède quatre mobilités dont deux mobilités internes :

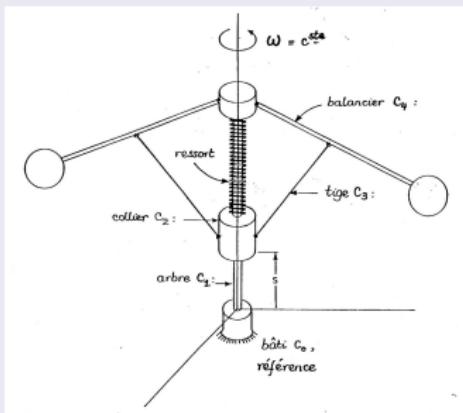
- rotation du bras télescopique
- rotation du bras de liaison

autour de leur axe.

Exemples dans l'espace

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Régulateur de vitesse de Watt



$$\left\{ \begin{array}{l} n = 7 \\ j = 8 \\ m = 3(7 - 8 - 1) + 8 = 2 \end{array} \right.$$

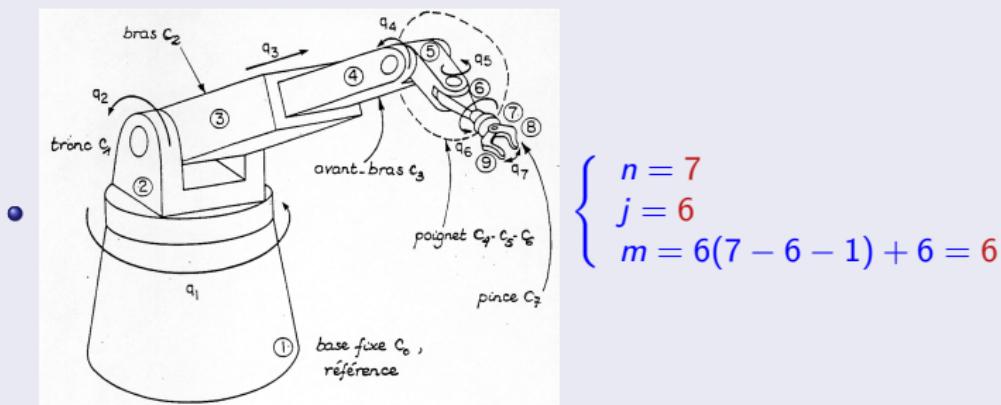


Le mécanisme, en dehors de la rotation ω , évolue dans le plan.

Exemples dans l'espace

Évaluation de la mobilité de mécanismes par la relation de Grübler.

Robot manipulateur à architecture série



Le robot comporte 6 ddl + 1 ddl associé à l'outil embarqué.

- L'ensemble $C_1 - C_2 - C_3$ est parfois appelé **porteur**.
- L'ensemble $C_4 - C_5 - C_6$ porte le nom de **poignet**.

Paramétrage et mise en équations

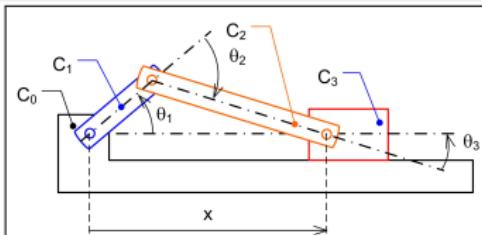
Système Bielle-Manivelle

C_0 : Bâti
 C_1 : Manivelle
 C_2 : Bielle
 C_3 : Piston

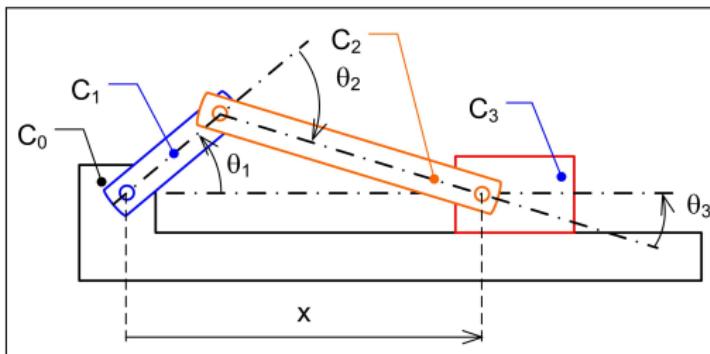
- forme un « système 4-barres » (9 ddl)
- 3 liaisons R, 1 liaison P (8 degrés de liaison)

- Nombre de degrés de liberté pour le système démonté : 3 corps \times 3 ddl/corps \leadsto 9 ddl.
- Nombre de degrés de liberté supprimés par les liaisons : 2×4 liaisons \leadsto 8 degrés de liaison.

\Rightarrow mécanisme à 1 ddl



Paramétrage strict



Paramétrage strict

On doit choisir un paramètre parmi quatre $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, x\}$.

Par exemple, on choisit θ_1 . L'équation de la dynamique pour ce système est donc de la forme : $h(\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1) = 0$.

→ prise en compte implicite des liaisons.

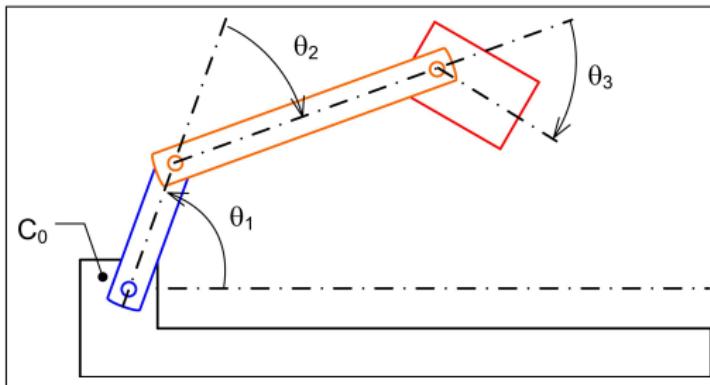
Paramétrage surabondant I

Paramétrage surabondant

On rend le mécanisme arborescent (chaîne cinématique ouverte) en rompant, par exemple, la liaison glissière.

- Mise en place d'axes liés aux solides (\vec{x}_i attaché au solide C_i).
- Paramétrage des liaisons avec les angles $\theta_i = (\vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i)$.

Paramétrage surabondant II



Paramétrage surabondant III

Bilan sur le modèle

- Le système ainsi paramétré comporte 3 ddl en rotation : θ_1 , θ_2 et θ_3 .
- Pour retrouver le fonctionnement initial du système, il faut ajouter une contrainte pour « refermer » le mécanisme.

Condition de fermeture

La condition de fermeture s'écrit : $\vec{x}_3 \equiv \vec{x}_0$ et se décompose :

- $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0$.
- $L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) = 0$ (projection suivant \vec{y}_0).

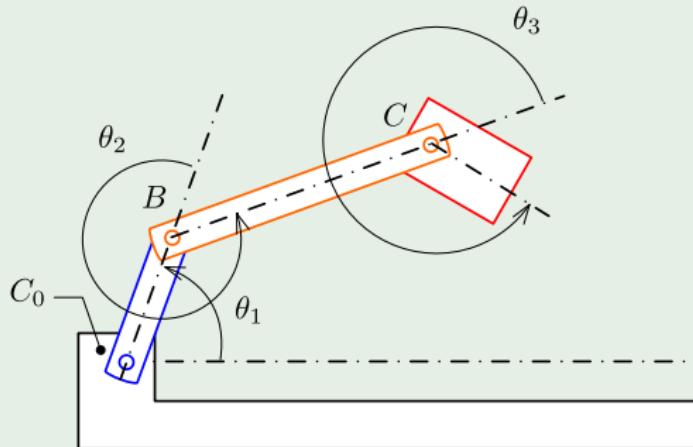


Définition des angles pour la mise en équations. voir schéma suivant

Paramétrage surabondant IV

Système Bielle-Manivelle arborescent :

- Mise en place du paramétrage angulaire



Paramétrage surabondant V

Bilan des équations et des inconnues

- Géométrie :

- la configuration du système par rapport à \mathcal{R}_0 est définie par les **trois** paramètres θ_1, θ_2 et θ_3 .

- Cinématique :

- les vitesses de C_1, C_2 et C_3 par rapport à \mathcal{R}_0 sont définies par **trois** relations de la forme : $f(\theta_1) = 0, g(\theta_1, \dot{\theta}_2) = 0$ et $h(\theta_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) = 0$.
- les conditions de fermeture (dérivées par rapport au temps) donnent **deux** relations : $i(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) = 0$ et $j(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = 0$. Matriciellement, elles s'écrivent $\underline{\alpha} \underline{\dot{q}} = \underline{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Paramétrage surabondant VI

Bilan des équations et des inconnues

- Dynamique :

- Les **trois** équations de Lagrange avec multiplicateurs s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_{\Sigma/R}}{\partial q_i} = (Q_i)_{\text{int}} + (Q_i)_{\text{ext}} + \lambda_1 \alpha_{1i} + \lambda_2 \alpha_{2i}$$

- Les **deux** équations provenant des relations de fermeture donnent :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ -(L_1 \sin \theta_1) \dot{\theta}_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

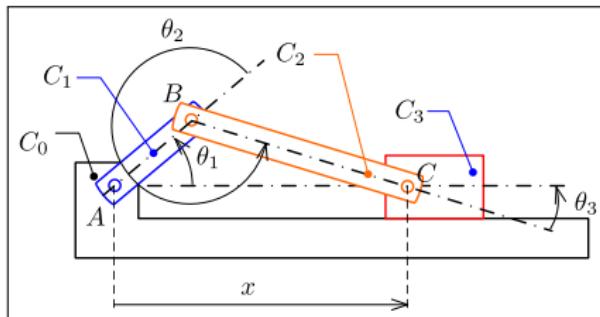
- cinq** équations algébro-différentielles
- cinq** inconnues $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda_1, \lambda_2)$.

Paramétrage maximal I

Paramétrage maximal

Le mécanisme est intégralement démonté.

- Pour chaque solide C_i : $\begin{cases} 2 \text{ translations} : & x_i, y_i \\ 1 \text{ rotation} : & \theta_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i) \end{cases}$
- Il faut ajouter les 4 conditions de fermeture du mécanisme (4 liaisons rompues).



Paramétrage maximal II

Conditions de fermeture

- Les conditions de fermeture Bâti-Manivelle, Manivelle-Bielle, Bielle-Piston s'écrivent : $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} = \vec{0}$.
- La condition de fermeture Piston-Bâti s'écrit : $\begin{cases} \vec{AF} \cdot \vec{y}_0 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{cases}$.

Contraintes géométriques d'assemblage

Les conditions de fermeture précédentes se traduisent par 8 relations scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ y_1 & = & 0 \\ x_2 - L_1 \cos \theta_1 & = & 0 \\ y_2 - L_1 \sin \theta_1 & = & 0 \\ (x_3 - x_2) - L_2 \cos \theta_2 & = & 0 \\ (y_3 - y_2) - L_2 \sin \theta_2 & = & 0 \\ y_3 & = & 0 \\ \theta_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Paramétrage maximal III

Bilan des équations et des inconnues

- Géométrie :

- la configuration du système par rapport à \mathcal{R}_0 est définie par les 9 paramètres x_i, y_i et θ_i .
- les conditions de fermeture du mécanisme (**assemblage**) donnent 8 équations.

- Dynamique :

- 9 équations de Lagrange avec 8 multiplicateurs λ_j .
- 8 équations provenant des relations de fermeture géométrique.

Finalement, on obtient :

- 17 équations algébro-différentielles
- 17 inconnues $(x_i, y_i, \theta_i, \lambda_j)$.

Remarques

- La résolution analytique des équations est limitée aux problèmes à faible degré de liberté \rightsquigarrow résolution numérique.
- Le calcul des multiplicateurs de Lagrange permet d'évaluer les efforts aux liaisons.
- Il existe des outils de calcul dédiés à l'analyse des systèmes multi-corps :
 - Module Mechanism dans PTC–Creo.
 - MSC/ADAMS
 - Altair/Motion
 - MapleSim

Plan – Chapitre 1 |

1. Présentation du cours

2. Introduction

- 2.1 Caractéristiques générales des systèmes envisagés
- 2.2 Analyse des SMA

3. Équations de Lagrange avec multiplicateurs

- 3.1 Hypothèses de départ
- 3.2 Choix d'un CVV particulier
- 3.3 Application du TPV

4. Modélisation de mécanismes

- 4.1 Évaluation de la mobilité de mécanismes
- 4.2 Paramétrage et mise en équations
- 4.3 Résolution des équations

5. Notations mathématiques

Notations mathématiques

L'objet de ce paragraphe est d'introduire les principales notations qui seront utilisées dans la suite du cours.

Référentiel :

On notera \mathcal{R} un référentiel ou repère de l'espace tridimensionnel

$\mathcal{R} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. \mathcal{R} est constitué :

- d'un point appelé origine ;
- d'une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormée directe.

Vecteur :

- Un vecteur \vec{V} s'écrit dans la base \mathcal{B} : $\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3$.
- Les coefficients V_1 , V_2 et V_3 sont appelés les composantes ou coordonnées de \vec{V} dans la base \mathcal{B} .

Notation matricielle

On utilisera parfois un symbole **souligné** pour désigner une grandeur matricielle. Le soulignement ne sera toutefois pas employé systématiquement si le contexte le permet (en l'absence d'ambiguité).

Scalaires :

- \underline{V} correspond à la matrice **colonne** des composantes du vecteur \vec{V} :

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

- \underline{V}^T correspond à la matrice **ligne** des composantes du vecteur \vec{V} :
$$\underline{V}^T = [V_1 \quad V_2 \quad V_3].$$

Notation matricielle

Vecteurs :

- $\underline{\vec{e}}$ correspond à la matrice **colonne** des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\underline{\vec{e}} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix}.$$

- $\underline{\vec{e}}^T$ correspond à la matrice **ligne** des vecteurs de la base

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) :$$

$$\underline{\vec{e}}^T = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3].$$

Notation matricielle

Conséquences :

- Un vecteur \vec{V} peut être écrit comme le produit de la matrice ligne de ses composantes avec la matrice colonne des vecteurs de la base : $\vec{V} = \underline{V}^T \underline{\vec{e}}$ ou bien sous la forme transposée : $\vec{V} = \underline{\vec{e}}^T \underline{V}$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs peut s'écrire sous la forme matricielle : $\vec{V} \cdot \vec{W} = \underline{V}^T \underline{\vec{e}} \underline{\vec{e}}^T \underline{W}$. Mais $\underline{\vec{e}} \underline{\vec{e}}^T = Id_3$ car la base est orthonormée directe. Donc $\vec{V} \cdot \vec{W} = \underline{V}^T \underline{W} = \underline{W}^T \underline{V}$.

Notation matricielle

Produit vectoriel :

- On considère deux éléments $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ et $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^3 . Ces éléments représentent les coordonnées des vecteurs \vec{a} et \vec{b} dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- En notant $\vec{X} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{bmatrix}$ la matrice colonne des vecteurs de la base, on peut écrire les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sous forme matricielle : $\vec{a} = \underline{a}^T \vec{X}$ et $\vec{b} = \underline{b}^T \vec{X}$.

Notation matricielle

Notation du produit vectoriel :



Remarque sur la notation du produit vectoriel



La notation généralement employée en France pour le produit vectoriel est le symbole \wedge (dit « **wedge** ») mais cette notation est par ailleurs universellement utilisée pour désigner le **produit extérieur** qui est une notion bien différente de celle de produit vectoriel.

Afin d'éviter ce conflit de notation et de mieux distinguer ces deux opérateurs, la notation employée dans ce cours pour le **produit vectoriel** sera celle utilisée dans la littérature anglophone et allemande avec le symbole \times (« **cross product** » et « Kreuzprodukt » en anglais et allemand).

Notation matricielle

Produit vectoriel :

- On introduit l'opérateur (le tenseur) de pré-produit vectoriel $\tilde{\underline{a}}$ défini tel que $\tilde{\underline{a}} \vec{b} = \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Le produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$ a pour coordonnées : $\underline{c} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$.

- En introduisant la matrice $\tilde{\underline{a}}$ (lire « a tilde ») : $\tilde{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ appelée matrice de pré-produit vectoriel, il est possible d'exprimer les composantes du produit vectoriel sous une forme matricielle $\underline{c} = \tilde{\underline{a}} \vec{b}$. La matrice $\tilde{\underline{a}}$ est **anti-symétrique** (skew-symmetric en anglais) ce qui se traduit par la propriété $\tilde{\underline{a}}^T = -\tilde{\underline{a}}$.

Chapitre II

Étude de mécanismes plans

Étude de mécanismes plans I

1. Étude d'un mécanisme à quatre barres

- 1.1 Présentation et paramétrage
- 1.2 Calcul des positions
- 1.3 Calcul des vitesses
- 1.4 Calcul des accélérations
- 1.5 Concept d'inversion cinématique
- 1.6 Loi de Grashof pour le système 4-barres

2. Résolution numérique de mécanismes plans

- 2.1 Rappel - Méthode de Newton
- 2.2 Méthode de Newton-Raphson
- 2.3 Application à la résolution numérique d'un mécanisme 4-barres
- 2.4 Autre exemple de calcul cinématique sur un mécanisme plan

Chapitre 2

Étude de mécanismes plans

Exemple introductif

Cours de *Mécanique Appliquée*



Plan – Chapitre 2 I

1. Étude d'un mécanisme à quatre barres

- 1.1 Présentation et paramétrage
- 1.2 Calcul des positions
- 1.3 Calcul des vitesses
- 1.4 Calcul des accélérations
- 1.5 Concept d'inversion cinématique
- 1.6 Loi de Grashof pour le système 4-barres

2. Résolution numérique de mécanismes plans

- 2.1 Rappel - Méthode de Newton
- 2.2 Méthode de Newton-Raphson
- 2.3 Application à la résolution numérique d'un mécanisme 4-barres
- 2.4 Autre exemple de calcul cinématique sur un mécanisme plan

Mécanisme à quatre barres

Quelques exemples.

Le système à quatre barres est un mécanisme très courant :

- Pince-étau



- Suspension arrière de VTT

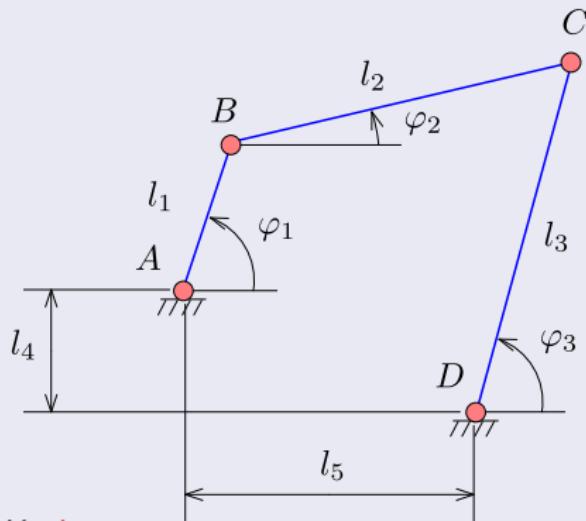


- Suspension arrière d'automobile



Constitution

Ce mécanisme est composé de trois barres connectées entre elles et à une pièce fixe par des liaisons pivots d'axes **parallèles**.



- Système articulé **plan**.
- Mécanisme à chaîne cinématique **fermée**.

Paramétrage

- Axes attachés à chaque barre : \vec{x}_i .
- Angle φ_i tel que $\varphi_i = (\vec{x}_0, \vec{x}_i)$
 \rightsquigarrow positionnement angulaire **absolu** des barres.
- Mobilité du mécanisme : **un** seul ddl.

On choisit un paramétrage **strict** du mécanisme :

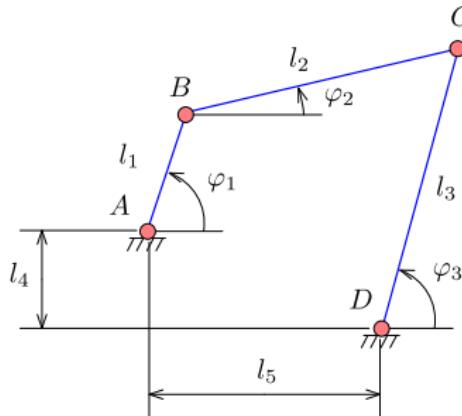
- On définit par exemple φ_1 comme paramètre d'**entrée**.

Formulation du problème

- Données de départ : $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$ et la géométrie du mécanisme :
 - les points A, B, C et D ;
 - les longueurs l_i .
- Question : étude des positions, vitesses et accélérations $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, \ddot{\varphi}_i)$ avec $i \in \{2, 3\}$.

Étude d'un mécanisme à quatre barres
Résolution numérique de mécanismes plans

Présentation et paramétrage
Calcul des positions
Calcul des vitesses
Calcul des accélérations
Concept d'inversion cinématique
Loi de Grashof pour le système 4-barres



L'équation vectorielle de fermeture de la chaîne cinématique s'écrit :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

soit, avec les paramètres mis en place :

$$l_1 \vec{x}_1 + l_2 \vec{x}_2 - l_3 \vec{x}_3 = l_5 \vec{x}_0 - l_4 \vec{y}_0$$

En projection dans le repère \mathcal{R}_0 , on obtient :

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 - l_3 \cos \varphi_3 &= l_5 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 - l_3 \sin \varphi_3 &= -l_4 \end{cases}$$

- Notations : $\begin{cases} c_i = \cos \varphi_i \\ s_i = \sin \varphi_i \end{cases}$
- Choix de l'inconnue **principale** : on choisit par exemple φ_2 .
- Conséquence : φ_3 est une variable intermédiaire à éliminer des relations.

On calcule le sinus et cosinus de φ_3 :

$$\begin{cases} c_3 &= \frac{l_1 c_1 + l_2 c_2 - l_5}{l_3} \\ s_3 &= \frac{l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_4}{l_3} \end{cases}$$

En sommant les carrés des sinus et cosinus, on élimine φ_3 :

$$\overbrace{2l_2(l_1c_1 - l_5)}^K \textcolor{red}{c}_2 + \overbrace{2l_2(l_1s_1 + l_4)}^L \textcolor{red}{s}_2 = \\ \underbrace{l_3^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2 + 2l_1(l_5c_1 - l_4s_1)}_M$$

et on obtient une équation de la forme $K \textcolor{red}{c}_2 + L \textcolor{red}{s}_2 = M$.

Résolution d'une équation de la forme $K c_2 + L s_2 = M$

Le principe de résolution consiste à transformer cette équation trigonométrique en équation algébrique.

Il faut remplacer les sinus et cosinus par leur valeur en fonction de la tangente

de l'arc moitié :
$$\begin{cases} c_i &= \frac{1-t_i^2}{1+t_i^2} \\ s_i &= \frac{2t_i}{1+t_i^2} \end{cases}$$
 avec $t_i = \tan \frac{\varphi_i}{2}$.

Calcul de φ_2

La substitution des sinus et cosinus dans $K \textcolor{red}{c}_2 + L \textcolor{red}{s}_2 = M$ donne :

$$K(1 - \textcolor{red}{t}_2^2) + 2L\textcolor{red}{t}_2 = M(1 + \textcolor{red}{t}_2^2)$$
$$(K + M)\textcolor{red}{t}_2^2 - 2L\textcolor{red}{t}_2 + M - K = 0$$

$$t_2 = \frac{B \pm \sqrt{K^2 + L^2 - M^2}}{K + M}$$

$$\varphi_2 = 2 \arctan \frac{L \pm \sqrt{K^2 + L^2 - M^2}}{K + M}$$

- Deux solutions possibles pour φ_2 c'est à dire **deux** configurations possibles pour la barre BC , une fois φ_1 fixé.
- En général, une seule configuration est acceptable physiquement.

Calcul de φ_3

On reprend les valeurs des sinus et cosinus de φ_3 :

$$\begin{cases} c_3 = \frac{l_1 c_1 + l_2 c_2 - l_5}{l_3} \\ s_3 = \frac{l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_4}{l_3} \end{cases}$$

pour calculer φ_3 par la fonction arctangente à 2 arguments : $\arctan2(y, x)$.

Fonction $\arctan2(y, x)$

- La fonction $\arctan2(y, x)$ calcule la **valeur principale** de l'argument du nombre complexe $x + iy$ soit $\arctan2(y, x) = \text{Arg}(x + iy)$.
- Similaire à utiliser $\arctan(y/x)$ mais en **gardant l'information de signe** de x et y pour identifier le **quadrant** de l'angle.
- Ainsi, $\arctan2(2, 2) = 45^\circ$ mais $\arctan2(-2, -2) = -135^\circ$ alors que la fonction $\arctan(-2/-2)$ aurait retourné 45° .

Calcul de φ_3

En remarquant que $\arctan2(ky, kx) = \arctan2(y, x)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, on calcule φ_3 :

$$\varphi_3 = \arctan2(l_1 s_1 + l_2 s_2 + l_4, l_1 c_1 + l_2 c_2 - l_5)$$

⇒ le modèle **géométrique** est calculé.

En différentiant les équations de fermeture :

$$\begin{cases} l_1 c_1 + l_2 c_2 - l_3 c_3 &= l_5 \\ l_1 s_1 + l_2 s_2 - l_3 s_3 &= -l_4 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} -l_1 s_1 \dot{\varphi}_1 - l_2 s_2 \dot{\varphi}_2 + l_3 s_3 \dot{\varphi}_3 &= 0 \\ l_1 c_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 c_2 \dot{\varphi}_2 - l_3 c_3 \dot{\varphi}_3 &= 0 \end{cases}$$

~ relations **linéaires** en $\dot{\varphi}_i$ que l'on peut écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \dot{q} = 0$$

avec $\dot{q} = [\dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}_3]^T$.

- Données : $\dot{\varphi}_1$
- Inconnues : $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$

~> système linéaire de 2 équations à 2 inconnues :

$$\begin{bmatrix} -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_1 \\ -l_1 c_1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

~> calcul du déterminant :

$$det = l_2 l_3 [s_2 c_3 - c_2 s_3] = l_2 l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

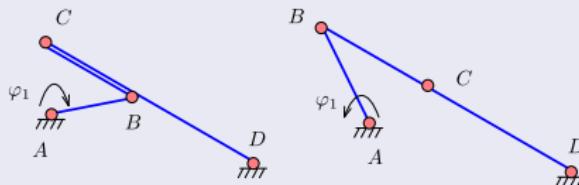
Singularité du mécanisme

Le mécanisme est dans une configuration dite **singulière** lorsque le déterminant du système précédent s'annule.

Condition à remplir pour calculer les inconnues $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3 : \varphi_2 \neq \varphi_3 [\pi]$. Cette condition est réalisée si la barre $BC \nparallel DC$.

Configurations singulières

- Deux configurations singulières potentielles
 - \rightsquigarrow dépend des longueurs de barres
 - La loi de Grashof indique la condition à vérifier pour que la barre d'entrée puisse tourner de façon continue : voir plus loin.



➡ en configuration singulière, le mouvement/la mobilité du mécanisme est réduite.

Calcul des vitesses $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\begin{vmatrix} l_1 s_1 & l_3 s_3 \\ -l_1 c_1 & -l_3 c_3 \end{vmatrix}}{\det} \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{\begin{vmatrix} -l_2 s_2 & l_1 s_1 \\ l_2 c_2 & -l_1 c_1 \end{vmatrix}}{\det} \dot{\varphi}_1$$

$$\boxed{\dot{\varphi}_2 = \frac{l_1}{l_2} \frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_1 \quad \dot{\varphi}_3 = \frac{l_1}{l_3} \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \dot{\varphi}_1}$$

⇒ le modèle **cinématique** est calculé.

Dérivation des contraintes cinématiques

Les contraintes cinématiques s'écrivent : $\mathcal{A} \dot{q} = 0$ avec :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix}$$

La dérivation de ces contraintes cinématiques donne :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{A}) \dot{q} + \mathcal{A} \ddot{q} = 0$$
$$\begin{bmatrix} -l_1 c_1 \dot{\varphi}_1 & -l_2 c_2 \dot{\varphi}_2 & l_3 c_3 \dot{\varphi}_3 \\ -l_1 s_1 \dot{\varphi}_1 & -l_2 s_2 \dot{\varphi}_2 & l_3 s_3 \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} \dot{q} + \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \ddot{q} = 0$$
$$\begin{bmatrix} -l_1 c_1 & -l_2 c_2 & l_3 c_3 \\ -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \end{bmatrix} \dot{q}^2 + \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \ddot{q} = 0$$

- Données : $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_1$.
- Variables calculables par le modèle géométrique : φ_2, φ_3 .
- Variables calculables par le modèle cinématique : $\dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$.
- **Inconnues** : $\ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3$.

$$\begin{bmatrix} -l_1 c_1 & -l_2 c_2 & l_3 c_3 \\ -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^2 + \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -l_2 s_2 & l_3 s_3 \\ l_2 c_2 & -l_3 c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_1 \\ -l_1 c_1 \end{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 + \begin{bmatrix} l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 \\ l_1 s_1 & l_2 s_2 & -l_3 s_3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}^2$$

~~~ système linéaire de 2 éq. à 2 inc. pour calculer  $\ddot{\varphi}_2$  et  $\ddot{\varphi}_3$ .

====> tous les modèles sont calculés.

## Concept d'inversion cinématique

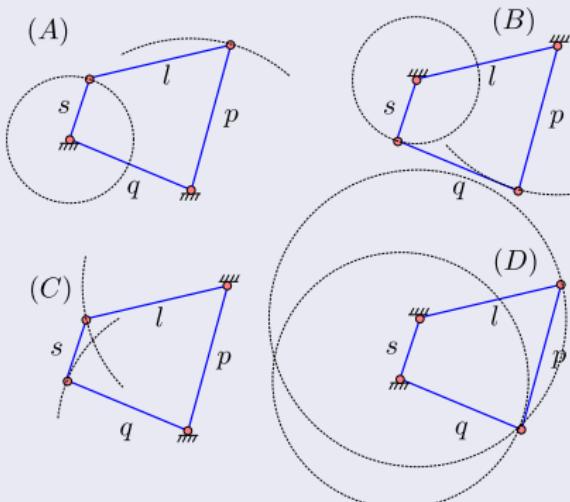
### Définition

- Tant qu'une ou plusieurs pièces servant de bâti (fixe) n'ont pas été choisies, un ensemble de pièces interconnectées forme une **chaîne cinématique**.
- Dès qu'une ou plusieurs pièces servant de bâti ont été choisies, la chaîne cinématique devient un **mécanisme**.
- L'**inversion cinématique** d'un mécanisme consiste à changer la pièce servant de bâti.
- **NB :** À partir d'une chaîne à  $n$  corps, on peut donc obtenir  $n$  mécanismes par le procédé d'inversion cinématique.

Examinons le cas d'un système 4-barres.

## Inversions cinématiques d'un système 4-barres

- (A), (B) : Mécanismes à manivelle et balancier (crank and rocker)
- (C) : Mécanisme à double balancier (double rocker)
- (D) : Mécanisme à double manivelle (double crank)



## Loi de Grashof pour le système 4-barres

### Loi de Grashof

Lorsqu'un mécanisme doit être actionné par un moteur rotatif, il est important de connaître la possibilité de faire **tourner en continu** la pièce d'entrée à laquelle est connectée le moteur.

Pour un système 4-barres, la réponse est donnée par la loi de **Grashof**.

- Notations :

- $s$  et  $l$  : longueurs de la plus courte et de la plus longue des barres.
- $p$  et  $q$  : longueurs des deux autres barres.

- Énoncé :

« La somme des longueurs de la plus courte et de la plus longue des barres doit rester **inférieure** à la somme des longueurs des autres barres pour que la **rotation continue** d'une barre par rapport à une autre puisse avoir lieu. »

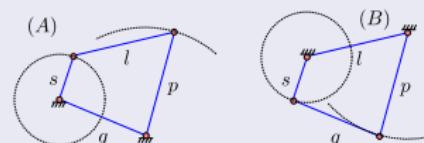
$$s + l \leq p + q$$

- **NB** : la loi de Grashof ne précise pas quelle est la pièce fixe du mécanisme 4-barres.

## Grashof et Inversions cinématiques d'un système 4-barres

- (A), (B) : Mécanismes à manivelle et balancier (crank and rocker)

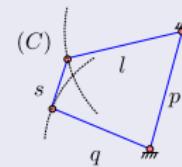
La manivelle  $s$  peut tourner de façon continue tandis que le balancier  $p$  va osciller entre deux positions.



- (C) : Mécanisme à double balancier (double rocker)

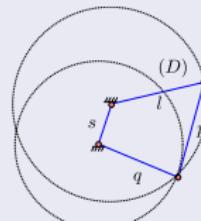
Bien que la manivelle  $s$  puisse tourner de façon continue, les balanciers  $q$  et  $l$  vont seulement osciller entre deux positions.

En général, le balancier le plus court (ici  $q$ ) est la pièce d'entrée du mécanisme.



- (D) : Mécanisme à double manivelle (double crank)

Les deux manivelles  $q$  et  $l$  adjacentes à  $s$  peuvent tourner de façon continue. La plus courte des deux ( $q$ ) est généralement la pièce d'entrée.



## Bilan

### Méthode vectorielle

La méthode vectorielle permet d'obtenir les modèles géométrique, cinématique et dynamique.

- Elle repose sur l'écriture de conditions de fermeture du mécanisme.
- Elle est applicable facilement aux problèmes plans « simples ».

### Limites d'utilisation

Difficilement

- automatisable ;
- applicable aux mécanismes spatiaux.

Pour répondre aux limitations précédentes, on utilise les **méthodes de transformation de coordonnées**.

## Plan – Chapitre 2 I

### 1. Étude d'un mécanisme à quatre barres

- 1.1 Présentation et paramétrage
- 1.2 Calcul des positions
- 1.3 Calcul des vitesses
- 1.4 Calcul des accélérations
- 1.5 Concept d'inversion cinématique
- 1.6 Loi de Grashof pour le système 4-barres

### 2. Résolution numérique de mécanismes plans

- 2.1 Rappel - Méthode de Newton
- 2.2 Méthode de Newton-Raphson
- 2.3 Application à la résolution numérique d'un mécanisme 4-barres
- 2.4 Autre exemple de calcul cinématique sur un mécanisme plan

## Un constat

La résolution **analytique** des équations non linéaires issues de conditions de fermeture est complexe voire impossible dans certains cas.

Il faut donc recourir à une résolution **numérique** des équations. La méthode de Newton permet de traiter ce problème.

On souhaite trouver les solutions numériques d'une équation du type :

$$f(x) = 0 \tag{3}$$

où  $f$  est une fonction d'une variable réelle. Pour résoudre numériquement (3), on construit la suite :  $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$  et on espère que pour une valeur finie de  $n$ ,  $x_{n+1} = x^*$  tel que  $f(x^*) = 0$ . La valeur  $x^*$  est la solution numérique approchée de (3).

## Problème : comment élaborer $\Delta x_n$ ?

Avec la méthode de Newton, on approxime  $f$  au point  $x_n$  par sa tangente :

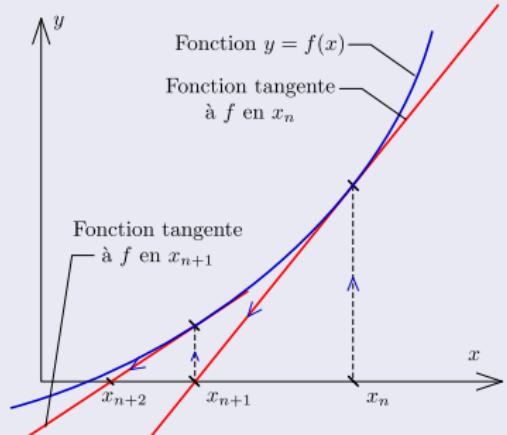
$$f(x_n) = -(x_{n+1} - x_n) \frac{df}{dt}(x_n)$$

En notant  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ , on peut écrire :

$$\Delta x_n \frac{df}{dt}(x_n) = -f(x_n)$$

et sous réserve que  $\frac{df}{dt}(x_n) \neq 0$ , on peut calculer  $\Delta x_n$  :

$$\boxed{\Delta x_n = - \left[ \frac{df}{dt}(x_n) \right]^{-1} f(x_n)}$$



La suite permettant de calculer une solution numérique de (3) s'écrit :

$$x_{n+1} = x_n - \left[ \frac{df}{dt}(x_n) \right]^{-1} f(x_n)$$

Si la suite  $(x_n)$  converge, on trouve une solution  $x^*$  de notre problème.



Comme pour toute méthode numérique, la convergence peut ne pas être garantie.

## Extension de la méthode de Newton

Pour résoudre des relations non-linéaires de **plusieurs** variables, on utilise la méthode de **Newton-Raphson**.

## Objectif

On étend la méthode de Newton aux fonctions non-linéaires de plusieurs variables.

## Formulation du problème

On note  $F$  une fonction de **plusieurs** variables à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  :

$$\begin{aligned} F : \quad & \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ X = [x_1, \dots, x_n]^T & \longmapsto F(X) \end{aligned}$$

avec  $F = [f_1 \quad \dots \quad f_p]^T$  et où les  $f_i$  sont des fonctions des  $n$  variables  $x_1 \dots x_n$ .  
On souhaite résoudre l'équation  $F(X) = 0$ .

Résoudre  $F(X) = 0$ , c'est résoudre simultanément :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(X) = 0 \\ \vdots \\ f_p(X) = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_p(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

## Notion de dérivée pour des fonctions de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

- Pour chaque ligne de  $F(X) = [f_1(X) \quad \dots \quad f_p(X)]^T$ , on calcule la différentielle :

$$f_i(X) \xrightarrow{\text{Différentielle d'une fct de plusieurs variables}} df_i(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

## Notion de matrice jacobienne

On peut écrire matriciellement la différentielle  $df_i(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j :$

$$d F(X) = J d X$$

La matrice  $(p \times n)$   $J$  est appelée **jacobienne** de la fonction  $F$  et vaut :

$$J = \left[ J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$$

- On construit la suite  $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$  et la fonction  $F$  est approximée par sa « tangente » :

$$F(X_k) = -\frac{\partial F(X_k)}{\partial X}(X_{k+1} - X_k)$$

La matrice  $J(X_k) = \frac{\partial F(X_k)}{\partial X}$  est la matrice jacobienne  $p \times n$  de  $F$  obtenue par dérivation :

- de la matrice colonne  $p \times 1$  :  $F$
- par rapport à la matrice colonne  $n \times 1$  :  $X$ .

- Sous réserve que  $J(X_k)$  soit **inversible**, on peut calculer :

$$\boxed{\Delta X_k = -J(X_k)^{-1}F(X_k)}$$

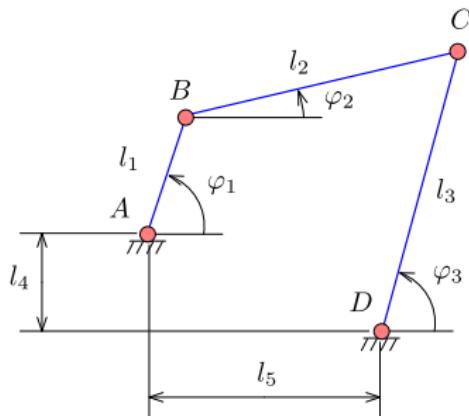
## Résolution numérique

### Méthode de Newton-Raphson

On peut calculer la solution avec la suite :  $X_{k+1} = X_k + \Delta X_k$  et l'incrément :

$$\Delta X_k = -J(X_k)^{-1}F(X_k) \quad (4)$$

- Pour  $k = 0$ , on se donne une valeur initiale  $X_0$ .
- La suite et (4) permettent de calculer les termes  $X_1 \dots X_k$ .
- Pour  $k = K$  suffisamment grand tel que  $|X_{k+1} - X_k| \leq \varepsilon$ , on obtient la solution numérique  $X^* = X_{K+1}$  à  $\varepsilon$  près.



## Paramétrage du problème

- Paramétrage strict : on choisit  $\varphi_1$  comme variable de pilotage telle que  $\dot{\varphi}_1 = \omega$  (ou encore  $\varphi_1 = \omega t$ ).
- Le point auquel on s'intéresse :  $E$  situé au milieu de  $BC$  et de coordonnées  $x_E, y_E$  dans le repère  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ .
- La configuration géométrique du mécanisme est connue : longueurs  $l_i$ .

## Bilan

- Variable d'entrée :  $t$ .
- Variables de sortie :  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_E, y_E$ .

## Formulation du problème

- Pour un instant  $t$  donné, calculer les variables de sortie.  
~~ calculer la **configuration** du mécanisme.
- Comment faire ?  
écrire puis résoudre (numériquement) les équations de contrainte qui décrivent le mécanisme.

## Résolution I

### Description du mécanisme

Le mécanisme est décrit par trois relations :

- ① Position du point d'intérêt  $E$ .
- ② Fermeture du mécanisme.
- ③ Équation de pilotage de la variable  $\varphi_1$ .

Après avoir choisi  $(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  comme repère de base, les relations précédentes s'écrivent :

- ①  $\overrightarrow{AE} = x_E \vec{x}_0 + y_E \vec{y}_0$
- ②  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- ③  $\varphi_1 = \omega t + \varphi_{10}$

## Résolution II

### Préparatifs

- Choix de  $X$  :

- Donnée :  $t$
- Inconnues :  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, x_E, y_E$

$$\text{d'où } X = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad x_E \quad y_E]^T.$$

### Plan de travail

- Écriture des équations de contrainte et identification des fonctions  $f_i$  de  $F$ .
- Calcul de  $J$  et des configurations où le rang de  $J$  chute (configurations singulières).
- Écriture de l'algorithme de résolution de  $F(X) = 0$  par la méthode de Newton-Raphson.
- Écriture du modèle cinématique direct du mécanisme.

## Solution I

- ① Écriture des équations de contrainte et identification des fonctions  $f_i$  de  $F$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = l_1 c_1 + \frac{l_2}{2} c_2 - x_E \\ f_2 = l_1 s_1 + \frac{l_2}{2} s_2 - y_E \\ f_3 = l_1 c_1 + l_2 c_2 - l_3 c_3 - l_5 \\ f_4 = l_1 s_1 + l_2 s_2 - l_3 s_3 + l_4 \\ f_5 = \varphi_1 - \omega t - \varphi_{10} \end{array} \right.$$

## Solution II

- ② Calcul de  $J$  et des configurations où le rang de  $J$  chute (configurations singulières).

La matrice jacobienne se calcule :  $J \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial F}{\partial X}$ . On obtient donc :

$$J = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 & -\frac{l_2}{2} s_2 & 0 & -1 & 0 \\ l_1 c_1 & \frac{l_2}{2} c_2 & 0 & 0 & -1 \\ -l_1 s_1 & -l_2 s_2 & l_3 s_3 & 0 & 0 \\ l_1 c_1 & l_2 c_2 & -l_3 c_3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les configurations singulières du mécanisme sont celles qui correspondent à la chute du rang de la matrice jacobienne, autrement dit, à l'annulation du déterminant de la matrice  $J$  qui a pour expression :

$$\det(J) = - \begin{vmatrix} \frac{l_2}{2} c_2 & 0 & -1 \\ -l_2 s_2 & l_3 s_3 & 0 \\ l_2 c_2 & -l_3 c_3 & 0 \end{vmatrix} = l_2 l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)$$

## Solution III

Les positions singulières du mécanisme sont données par la relation  $\varphi_2 - \varphi_3 = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Les trois solutions *a priori* possibles pour le mécanisme sont trouvées en prenant  $k \in \{-1, 0, 1\}$ . Ces trois positions pourront être effectivement atteintes ou non selon la valeur des longueurs des barres  $l_1 \dots l_5$ .

## Solution IV

- ③ Écriture de l'algorithme de résolution de  $F(X) = 0$  par la méthode de Newton-Raphson.

### Algorithme 1 : Newton-Raphson

Données : Valeurs initiales :  $F$ ,  $X_0$ ,  $\Delta X_0$ ,  $\varepsilon$

Sorties : Solution :  $X^*$

début

```
     $\Delta X \leftarrow \Delta X_0;$ 
     $X_{av} \leftarrow X_0;$ 
    tant que  $\Delta X \geq \varepsilon$  faire
         $J(X_{av}) \leftarrow$  jacobienne ( $X_{av}$ );
        si  $J$  inversible alors
             $\Delta X \leftarrow -(J(X_{av}))^{-1} F(X_{av});$ 
             $X_{ap} \leftarrow X_{av} + \Delta X;$ 
             $X_{av} \leftarrow X_{ap};$ 
        sinon
            afficher("Jacobienne non inversible");
            sortir ;
        fin
    fin
     $X^* \leftarrow X_{av};$ 
    retourner  $X^*$ 
```

## Solution V

### ④ Écriture du modèle cinématique direct du mécanisme.

Par dérivation de  $F(X) = 0$ , on obtient :

$$\frac{d}{dt} F(X) = 0 \iff \frac{\partial F}{\partial t}(X) + \frac{\partial F}{\partial X}(X) \dot{X} = 0$$

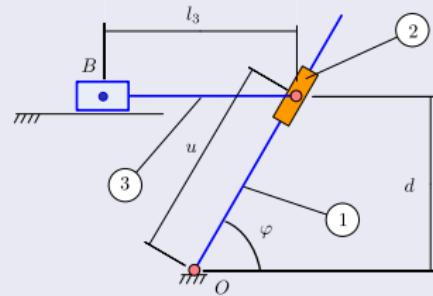
On peut donc écrire :  $J \dot{X} = -\frac{\partial F}{\partial t}(X)$  ou encore :

$$J \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{x}_E \\ \dot{y}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix}$$

## Calculs cinématiques sur un mécanisme plan

### Mécanisme à coulisse

- L'angle  $\varphi$  évolue entre 0 et  $\pi/2$ .
  - La barre 1 tourne à la vitesse constante  $\dot{\varphi}$ .
- ① Calculer la position, la vitesse et l'accélération du point  $B$ .
- ② Faire l'application numérique pour la position  $\varphi = 60^\circ$ ,  $\dot{\varphi} = 10 \text{ rad/s}$  et  $d = 100 \text{ mm}$ .



## Calculs cinématiques sur un mécanisme plan

### Étude des positions

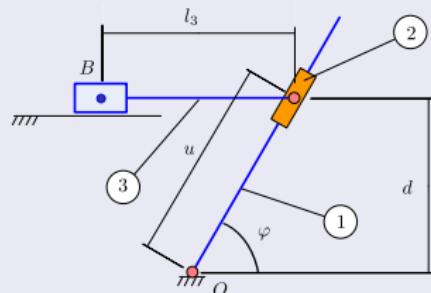
- La position du point  $B$  vaut :

$$\begin{cases} x_B = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{x}_0 \\ y_B = \overrightarrow{OB} \cdot \vec{y}_0 \end{cases}$$

avec  $\overrightarrow{OB} = u\vec{x}_1 - l_3\vec{x}_0$ , mais  $d = u \sin \varphi$   
donc  $\overrightarrow{OB} = \frac{d}{\sin \varphi}\vec{x}_1 - l_3\vec{x}_0$ .

On a finalement :

$$\begin{cases} x_B = d \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - l_3 \\ y_B = d \end{cases}$$



## Calculs cinématiques sur un mécanisme plan

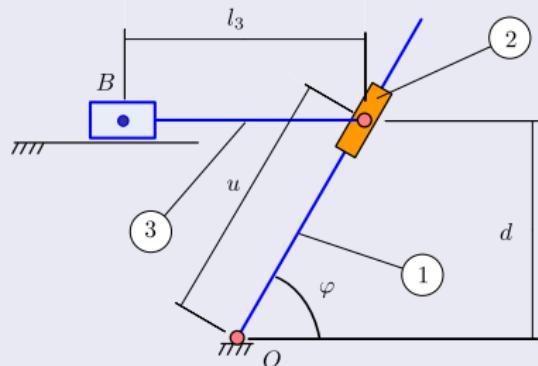
### Étude des vitesses et des accélérations

- La vitesse du point  $B$  vaut :

$$\begin{cases} \dot{x}_B = \frac{-d}{\sin^2 \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases}$$

- L'accélération du point  $B$  vaut :

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = \frac{2d \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \dot{\varphi}^2 - \frac{d}{\sin^2 \varphi} \ddot{\varphi} \\ \ddot{y}_B = 0 \end{cases}$$



## Calculs cinématiques sur un mécanisme plan

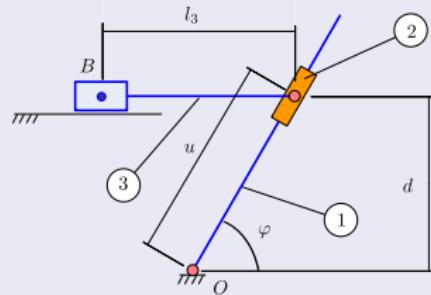
### Étude des vitesses et des accélérations

- La vitesse du point  $B$  vaut :

$$\begin{cases} \dot{x}_B = \frac{-d}{\sin^2 \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{y}_B = 0 \end{cases}$$

- L'accélération du point  $B$  vaut :

$$\begin{cases} \ddot{x}_B = \frac{2d \cos \varphi}{\sin^3 \varphi} \dot{\varphi}^2 - \frac{d}{\sin^2 \varphi} \ddot{\varphi} \\ \ddot{y}_B = 0 \end{cases}$$



- Application numérique :

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -\frac{4}{3} = -1.33 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \ddot{x}_B = \frac{80\sqrt{3}}{9} = 15.4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

## Chapitre III

### **Modélisation géométrique de mécanismes dans l'espace**

# Modélisation géométrique de mécanismes dans l'espace I

## 1. Outils pour la description des configurations spatiales

- 1.1 Configuration d'un corps rigide
- 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base
  - Exemple d'illustration dans le plan
- 1.3 Application à la composition de rotations
  - Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
  - Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
  - Exemples
- 1.4 Différents modes de représentation des rotations
- 1.5 Matrices de transformation homogènes
  - Opérations sur les matrices homogènes

## 2. Modèle géométrique direct

- 2.1 Définitions
- 2.2 Principe de la modélisation
- 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg
  - Remarques
  - Cas particuliers
- 2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

## Modélisation géométrique de mécanismes dans l'espace II

- 2.5 Écriture du MGD
- 2.6 Application 1 : robot à trois ddl
- 2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

### 3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

### 4. Modèle géométrique inverse

- 4.1 Conditions d'existence du MGI
- 4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

Outils pour la description des configurations spatiales  
Modèle géométrique direct  
Volume de travail d'un mécanisme articulé  
Modèle géométrique inverse

## Chapitre 3

### Modélisation géométrique de mécanismes dans l'espace

Cours de *Mécanique Appliquée*



# Plan – Chapitre 3 I

## 1. Outils pour la description des configurations spatiales

### 1.1 Configuration d'un corps rigide

### 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

- Exemple d'illustration dans le plan

### 1.3 Application à la composition de rotations

- Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
- Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
- Exemples

### 1.4 Différents modes de représentation des rotations

### 1.5 Matrices de transformation homogènes

- Opérations sur les matrices homogènes

## 2. Modèle géométrique direct

### 2.1 Définitions

### 2.2 Principe de la modélisation

### 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg

- Remarques
- Cas particuliers

### 2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

## Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Configuration d'un corps rigide

Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

Application à la composition de rotations

Differentes modes de représentation des rotations

Matrices de transformation homogènes

# Plan – Chapitre 3 II

2.5 Écriture du MGD

2.6 Application 1 : robot à trois ddl

2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

4. Modèle géométrique inverse

4.1 Conditions d'existence du MGI

4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

## Configuration d'un corps rigide

On considère un corps rigide  $C_i$ , repéré dans un repère  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ , par le repère  $\mathcal{R}_i = (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$ .

### Définition :

On appelle configuration du corps  $C_i$ , la situation de  $C_i$  en **position** et **orientation** par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ .

### Description de la configuration d'un solide :

La description de la configuration d'un corps solide dans l'espace nécessite au plus **six** paramètres indépendants.

La position et l'orientation de  $C_i$  sont définies par :

- le vecteur  $\vec{b}_i = \overrightarrow{O_0 O_i}$  ;
- la matrice de changement de base  $\mathcal{B}_0$  vers  $\mathcal{B}_i$  notée :  ${}^0 R_i$ .

## Configuration d'un corps rigide

### Construction de la matrice ${}^0R_i$ :

- Cette matrice est construite à partir des composantes des vecteurs de la base  $\mathcal{B}_i$  exprimées dans  $\mathcal{B}_0$  :  
En notant respectivement  ${}^0x_i$ ,  ${}^0y_i$  et  ${}^0z_i$ , les composantes des vecteurs  $\vec{x}_i$ ,  $\vec{y}_i$  et  $\vec{z}_i$  dans  $\mathcal{B}_0$ , on construit :  ${}^0R_i = [{}^0x_i \quad {}^0y_i \quad {}^0z_i]$ .
- La matrice  ${}^0R_i$  est une matrice **orthogonale** dont le déterminant est égal à **un**. Elle représente une **rotation**.
- En notant  $\vec{X}_0 = [\vec{x}_0 \quad \vec{y}_0 \quad \vec{z}_0]^T$  et  $\vec{X}_i = [\vec{x}_i \quad \vec{y}_i \quad \vec{z}_i]^T$ , on a la relation  $\vec{X}_0 = {}^0R_i \vec{X}_i$ .

## Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Configuration d'un corps rigide

Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

Application à la composition de rotations

Différents modes de représentation des rotations

Matrices de transformation homogènes

# Matrices de changement de base

## Interprétation comme matrice de passage :

Considérons la matrice de changement de base  ${}^j R_k = \begin{bmatrix} {}^j x_k & {}^j y_k & {}^j z_k \end{bmatrix}$ .

On considère un point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}_j$  défini par le vecteur position

$\vec{p} = \overrightarrow{O_j P} = \overrightarrow{O_k P}$ . On a la relation :

$${}^j p = {}^j R_k {}^k p$$

$$\begin{bmatrix} \text{composantes de } \vec{p} \text{ dans } \mathcal{R}_j \\ (3 \times 1) \end{bmatrix} = {}^j R_k \begin{bmatrix} \text{composantes de } \vec{p} \text{ dans } \mathcal{R}_k \\ (3 \times 1) \end{bmatrix}$$

## Interprétation comme matrice de transformation (rotation) :

On considère :

- un point  $P$  fixe de  $\mathcal{R}_k$  ;
- la rotation qui transforme le vecteur position  $\vec{p} = \overrightarrow{O_j P} = \overrightarrow{O_k P}$  initialement dans la position  $\vec{p} = \vec{p}_{①}$  en  $\vec{p}_{②}$ .

La transformation entre les repères est de la forme :

- $(\mathcal{R}_j) \equiv (\mathcal{R}_k)_{①} \longrightarrow (\mathcal{R}_k)_{②}$ .
- L'image  $\vec{p}_{②}$  du vecteur  $\vec{p}_{①}$  par cette rotation est donnée par la relation :  

$${}^j p_{②} = {}^j R_k {}^{j(=k)} p_{①}.$$

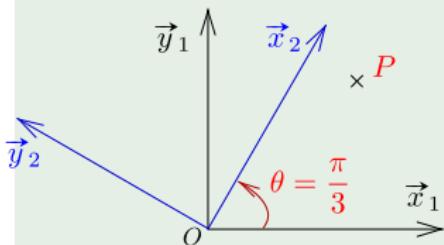
$$\begin{bmatrix} \text{comp. de } \vec{p} \text{ dans } \mathcal{R}_j \\ \text{après rotation} \\ (3 \times 1) \end{bmatrix} = {}^j R_k \begin{bmatrix} \text{comp. de } \vec{p} \text{ dans } \mathcal{R}_j \equiv \mathcal{R}_k \\ \text{avant rotation} \\ (3 \times 1) \end{bmatrix}$$

## Illustration dans le plan :

- On considère la transformation  $\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_1, \frac{\pi}{3})} \mathcal{R}_2$ .
- Initialement, un point  $P$  a pour coordonnées dans  $\mathcal{R}_1 : {}^1p = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ .

❶ Interprétation : **matrice de passage**.

Calculer les coordonnées de  $P$  dans  $\mathcal{R}_2$  si l'on considère le point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}_1$ .



On a la relation :

$${}^1p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^2p$$

On trouve :  ${}^2p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

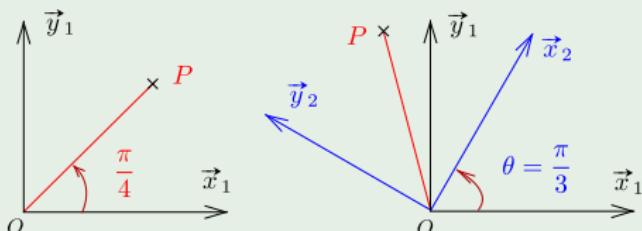
## Illustration dans le plan :

- 2 Interprétation : matrice de rotation.

Calculer les coordonnées de  $P$  dans  $\mathcal{R}_1$  si l'on considère le point  $P$  fixe dans  $\mathcal{R}_2$ .

La transformation fait passer le repère  $\mathcal{R}_1$  de la position ① à la position ② :

$$\mathcal{R}_1 \equiv (\mathcal{R}_2)_{\textcircled{1}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_1, \frac{\pi}{3})} (\mathcal{R}_2)_{\textcircled{2}}$$

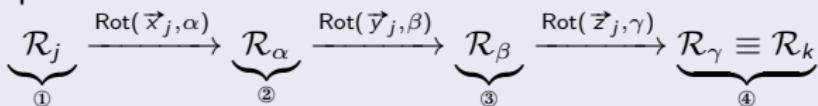


On a la relation :  $\underbrace{{}^1p_{\textcircled{2}}}_{\text{Après la rotation}} = {}^1R_2 \underbrace{{}^{2(=1)}p_{\textcircled{1}}}_{\text{Avant la rotation}}$

On trouve :  ${}^1p_{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

## Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe :

On considère un repère  $\mathcal{R}_j$  fixe et un point  $P$  attaché à un repère mobile  $\mathcal{R}_k$  qui subit la transformation :



On cherche à évaluer la transformation  ${}^j R_k$  (à interpréter comme une matrice de rotation).

$$\left. \begin{array}{l} {}^j p_{②} = {}^j R_\alpha {}^{j(=\alpha)} p_{①} \\ {}^j p_{③} = {}^j R_\beta {}^{j(=\beta)} p_{②} \\ {}^j p_{④} = {}^j R_\gamma {}^{j(=\gamma)} p_{③} \end{array} \right\} {}^j p_{④} = {}^j R_\gamma {}^j R_\beta {}^j R_\alpha {}^j p_{①}$$

On trouve :  ${}^j R_k = {}^j R_\gamma {}^j R_\beta {}^j R_\alpha$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{3^\circ \text{ Rot. } 2^\circ \text{ Rot. } 1^\circ \text{ Rot.}}$

Rotation par rapport à des axes fixes  $\Rightarrow$  Pré-multiplication.

## Composition de rotations autour d'axes de *repères mobiles* :

On considère un repère  $\mathcal{R}_j$  fixe, un point  $P$  fixe dans ce repère et la transformation :  $\underbrace{\mathcal{R}_j}_{\textcircled{1}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_j, \alpha)} \underbrace{\mathcal{R}_\alpha}_{\textcircled{2}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_\alpha, \beta)} \underbrace{\mathcal{R}_\beta}_{\textcircled{3}} \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_\beta, \gamma)} \underbrace{\mathcal{R}_\gamma \equiv \mathcal{R}_k}_{\textcircled{4}}$ .

On cherche à évaluer la transformation  ${}^j R_k$  (à interpréter comme une **matrice de passage**).

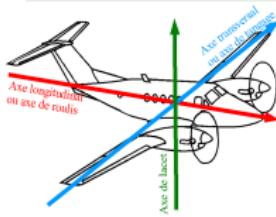
$$\left. \begin{array}{l} {}^j p = {}^j R_\alpha^\alpha p \\ {}^\alpha p = {}^\alpha R_\beta^\beta p \\ {}^\beta p = {}^\beta R_\gamma^\gamma p \end{array} \right\} {}^j p = {}^j R_\alpha^\alpha {}^R_\beta^\beta {}^R_\gamma^\gamma p$$

$$\text{On trouve : } {}^j R_k = \underbrace{{}^j R_\alpha^\alpha {}^R_\beta^\beta {}^R_\gamma^\gamma}_{\substack{1^\circ \text{ Rot.} \\ 2^\circ \text{ Rot.} \\ 3^\circ \text{ Rot.}}} \rightarrow$$

Rotation par rapport à des *axes mobiles*  $\implies$  Post-multiplication.

# Exemples de paramétrage pour l'orientation

## Angles de Roulis-Tangage-Lacet :



L'orientation d'un avion peut être paramétrée à l'aide des angles de **roulis**, **tangage** et **lacet** définis par rapport aux axes d'un repère fixe :

- l'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  : axe longitudinal ou axe de **roulis**.
- l'axe  $(O_0, \vec{y}_0)$  : axe transversal ou axe de **tangage**.
- l'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  : axe de **lacet**.

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_0, \psi)} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{y}_0, \theta)} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_0, \phi)} \mathcal{R}_{3 \equiv f}. \text{ Trouver } {}^0 R_f :$$

$$\bullet {}^0 R_3 = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^0 R_2 = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\bullet {}^0 R_3 {}^0 R_2 = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi & c_\phi s_\theta \\ s_\phi c_\theta & c_\phi & s_\phi s_\theta \\ -s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad {}^0 R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ 0 & s_\psi & c_\psi \end{bmatrix}$$

$$\bullet {}^0 R_{3 \equiv f} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\theta & -s_\phi c_\psi + c_\phi s_\theta s_\psi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\phi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\phi s_\psi + s_\phi s_\theta c_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}$$

# Exemples de paramétrage pour l'orientation

## Angles d'Euler :

Calculer la matrice  ${}^0 R_3$  relative à la transformation :

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_0, \psi)} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_1, \theta)} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_2, \phi)} \mathcal{R}_3.$$

... à chercher pour  $S(n+1) \dots$

$$\bullet {}^0 R_1 = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1 R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

$$\bullet {}^0 R_2 = \begin{bmatrix} c_\psi & -s_\psi c_\theta & s_\psi s_\theta \\ s_\psi & c_\psi c_\theta & -c_\psi s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{bmatrix} \quad {}^2 R_3 = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet {}^0 R_3 = \begin{bmatrix} c_\psi c_\phi - s_\psi c_\theta s_\phi & -c_\psi s_\phi - s_\psi c_\theta c_\phi & s_\psi s_\theta \\ s_\psi c_\phi + c_\psi c_\theta s_\phi & -s_\psi s_\phi + c_\psi c_\theta c_\phi & -c_\psi s_\theta \\ s_\theta s_\phi & s_\theta c_\phi & c_\theta \end{bmatrix}$$

# Exemples de paramétrage pour l'orientation

## Orientation du repère outil dans la commande des robots Fanuc :

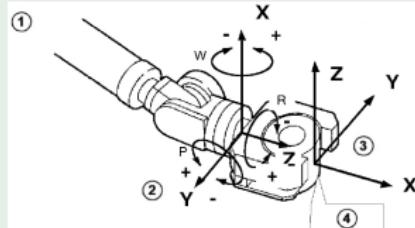
- Repère ② :  $\mathcal{R}_u$  repère lié à l'utilisateur.
- Repère ③ :  $\mathcal{R}_t$  repère lié à l'outil.
- L'orientation de  $\mathcal{R}_t$  par rapport à  $\mathcal{R}_u$  est spécifiée à l'aide d'un triplet  $(w, p, r)$ .
- L'orientation de  $\mathcal{R}_t$  est obtenue par les trois rotations successives d'angle  $w$ ,  $p$  et  $r$  autour des axes de  $\mathcal{R}_u$  :

$$\mathcal{R}_u \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_u, w)} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{y}_u, p)} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_u, r)} \mathcal{R}_t.$$

## Exemple

L'orientation du repère ③ est spécifiée par  $(w, p, r) = (180, 90, 0)$  en degrés.

- 1 Vérifier l'ordre des rotations sur la figure.
- 2 Dessiner l'orientation de  $\mathcal{R}_t$  obtenue si l'on applique les rotations dans l'ordre inverse.
- 3 Calculer la matrice de passage  ${}^u R_t$  relative à la transformation générale  $(w, p, r)$ .



# Exemples de paramétrage pour l'orientation

## Commande du robot Fanuc :

Matrice de passage  ${}^u R_t$  relative à la transformation générale :

$$\mathcal{R}_u \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_u, w)} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{y}_u, p)} \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_u, r)} \mathcal{R}_3 \equiv \mathcal{R}_t.$$

Les rotations successives se font par rapport aux axes du repère  $\mathcal{R}_u$  qui est fixe  
~~~ pré-multiplication des matrices de rotation.

- ${}^u R_t = {}^u R_3 {}^u R_2 {}^u R_1$

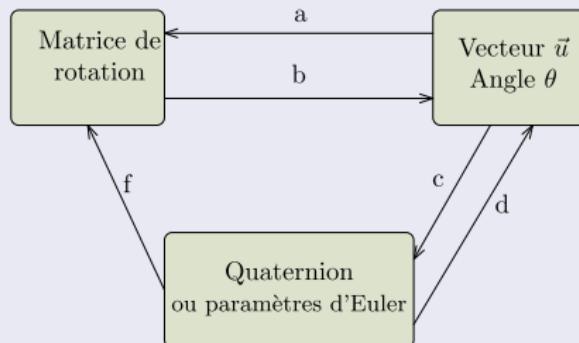
$${}^u R_3 = \begin{bmatrix} c_r & -s_r & 0 \\ s_r & c_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^u R_2 = \begin{bmatrix} c_p & 0 & s_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_p & 0 & c_p \end{bmatrix}$$

$${}^u R_3 {}^u R_2 = \begin{bmatrix} c_r c_p & -s_r & c_r s_p \\ s_r c_p & c_r & s_r s_p \\ -s_p & 0 & c_p \end{bmatrix} \quad {}^u R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_w & -s_w \\ 0 & s_w & c_w \end{bmatrix}$$

$${}^u R_t = \begin{bmatrix} c_r c_p & -s_r c_w + c_r s_p s_w & s_r s_w + c_r s_p c_w \\ s_r c_p & s_r s_p s_w + c_r c_w & -c_r s_w + s_r s_p c_w \\ -s_p & c_p s_w & c_p c_w \end{bmatrix}$$

Représentation des rotations

- Plusieurs possibilités existent pour représenter des rotations. La figure suivante en présente trois.

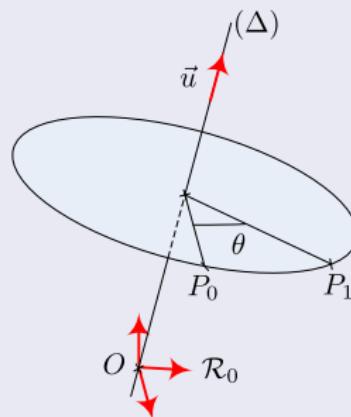


Ne pas confondre les **Paramètres d'Euler** avec les **Angles d'Euler**

Représentation des rotations

Rotation $\equiv (\vec{u}, \theta)$:

La rotation est représentée par un couple (\vec{u}, θ) où \vec{u} désigne le **vecteur unitaire** de l'axe de rotation et θ , l'**angle de rotation** en radian autour de cet axe.



Représentation des rotations

Rotation $\equiv (\vec{u}, \theta)$ - Transformation a :

- Deux repères \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 tels que la rotation (\vec{u}, θ) transforme \mathcal{R}_0 en \mathcal{R}_1 .
- Un point P , coïncidant avant la rotation avec un point P_0 , lié à \mathcal{R}_0 , se trouve ainsi transformé en un point P_1 , lié à \mathcal{R}_1 .

On note $\vec{p}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ et $\vec{p}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ les vecteurs positions du point P avant et après la rotation. Il s'agit de trouver la relation entre \vec{p}_0 et \vec{p}_1 , ce qui, traduit sous une forme matricielle permet d'évaluer la matrice de rotation recherchée. En effet, la matrice de rotation ${}^0 R_1$ peut être évaluée par la relation : ${}^0 p_1 = {}^0 R_1 {}^0 p_0$.

Représentation des rotations

Rotation $\equiv (\vec{u}, \theta)$ - Transformation a (suite) :

Le problème peut être résolu géométriquement si on remarque que $\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \overrightarrow{P_0 P_1}$ où $\overrightarrow{P_0 P_1}$ doit être évalué. Le résultat obtenu est :

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \sin \theta \vec{u} \times \vec{p}_0 + (1 - \cos \theta) \vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{p}_0)$$

Écrite sous forme matricielle, cette relation permet d'évaluer la matrice de rotation recherchée ${}^0 R_1$:

$${}^0 p_1 = \underbrace{\left[Id + \tilde{u} \sin \theta + \tilde{u}^2 (1 - \cos \theta) \right]}_{{}^0 R_1} {}^0 p_0 .$$

Représentation des rotations

Rotation $\equiv (\vec{u}, \theta)$ - Transformation a (suite et fin) :

- on note ${}^0 u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T$ les coordonnées de \vec{u} dans \mathcal{R}_0
- la matrice de rotation a pour expression :

$${}^0 R_1 = \begin{bmatrix} u_1^2 + (u_2^2 + u_3^2) \cos \theta & -u_3 \sin \theta + u_1 u_2 (1 - \cos \theta) & u_2 \sin \theta + u_1 u_3 (1 - \cos \theta) \\ u_3 \sin \theta + u_1 u_2 (1 - \cos \theta) & u_2^2 + (u_1^2 + u_3^2) \cos \theta & -u_1 \sin \theta + u_2 u_3 (1 - \cos \theta) \\ -u_2 \sin \theta + u_1 u_3 (1 - \cos \theta) & u_1 \sin \theta + u_2 u_3 (1 - \cos \theta) & u_3^2 + (u_1^2 + u_2^2) \cos \theta \end{bmatrix}$$

Représentation des rotations

Rotation $\equiv {}^0R_1$ - Transformation b :

En notant ${}^0R_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, par combinaison et identification des termes de cette matrice, on détermine le vecteur unitaire \vec{u} de l'axe et l'angle θ .

$$\theta = \arccos \left(\frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} - 1}{2} \right)$$

$${}^0u = \frac{1}{2 \sin \theta} \begin{bmatrix} a_{32} - a_{23} \\ a_{13} - a_{31} \\ a_{21} - a_{12} \end{bmatrix}$$



Relation non applicable pour des valeurs de $\theta = 0$ modulo π .

Représentation des rotations

Rotation \equiv quaternion - Transformation c :

On représente la rotation (\vec{u}, θ) à l'aide de quatre paramètres $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, constituant un quaternion, tels que

$$\begin{cases} \lambda_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \\ \lambda_i &= u_i \sin \frac{\theta}{2} \text{ avec } i \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

Les paramètres d'un quaternion vérifient la propriété suivante :

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$$

Représentation des rotations

Rotation \equiv quaternion - Transformation f :

Pour transformer un quaternion $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en matrice de rotation, on introduit dans la transformation a : ${}^0R_1 = Id + \tilde{u} \sin \theta + \tilde{u}^2 (1 - \cos \theta)$, les sinus et cosinus de l'arc moitié : $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sin \theta = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}$.

En observant que $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_0, \vec{\lambda})$ avec $\vec{\lambda} = \vec{u} \sin \frac{\theta}{2}$, on obtient :

$${}^0R_1 = Id + 2\lambda_0 \tilde{\lambda} + 2\tilde{\lambda}^2.$$

Rotation \equiv quaternion - Transformation d :

Directement déduite de la définition des quaternions.

Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Configuration d'un corps rigide

Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

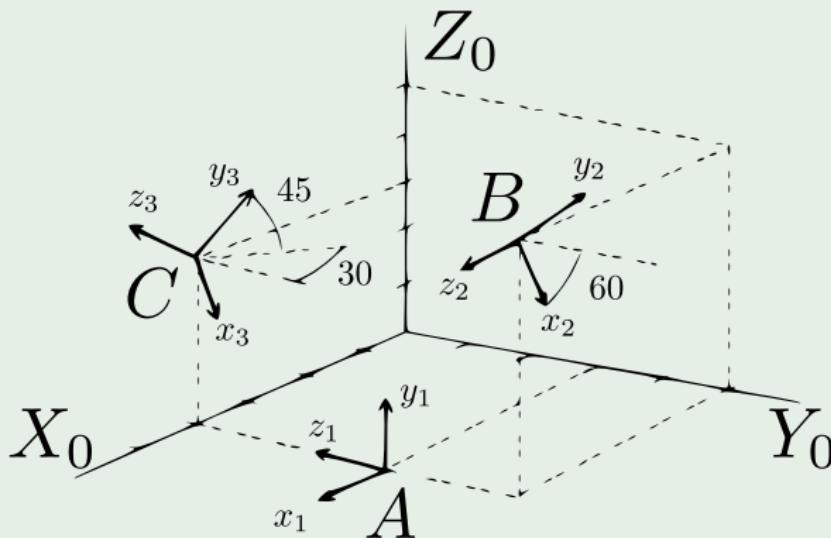
Application à la composition de rotations

Différents modes de représentation des rotations

Matrices de transformation homogènes

Recherche de matrices de passage

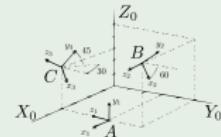
- Trouver les matrices de passage 0R_j avec $j \in \{1, 2, 3\}$.



Recherche de matrices de passage

- Matrice de transformation 0R_1 .

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_0, \frac{\pi}{2})} \mathcal{R}_1. \text{ Par simple observation : } {}^0R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- Matrice de transformation 0R_2 .

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{y}_0, \frac{\pi}{2})} \mathcal{R}_\alpha \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_\alpha, \frac{\pi}{6})} \mathcal{R}_2 \quad {}^0R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation 0R_3 .

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{z}_0, \frac{\pi}{6})} \mathcal{R}_\alpha \xrightarrow{\text{Rot}(\vec{x}_\alpha, \frac{\pi}{4})} \mathcal{R}_3 \quad {}^0R_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Matrices de transformation homogènes

- Objectif : caractériser la transformation de \mathcal{R}_j à \mathcal{R}_k .
- Étudier position d'un point P définie par $\overrightarrow{O_j P}$ ou $\overrightarrow{O_k P}$.

La relation entre ces deux vecteurs s'écrit :

$$\overrightarrow{O_j P} = \overrightarrow{O_j O_k} + \overrightarrow{O_k P} \Leftrightarrow \vec{p}_j = \vec{b}_{jk} + \vec{p}_k.$$

En projection sur la base \mathcal{B}_j , on a : ${}^j p_j = {}^j b_{jk} + {}^j p_k$.

Mais ${}^j p_k$ s'exprime en fonction de ${}^k p_k$ en introduisant la matrice de rotation ${}^j R_k$: ${}^j p_j = {}^j b_{jk} + {}^j R_k {}^k p_k$,

qui est une relation **affine** des coordonnées de P dans \mathcal{R}_j fonction des coordonnées de P dans \mathcal{R}_k .

- Si seulement l'orientation est prise en compte (${}^j b_{jk} = 0$), cette relation est de type **linéaire**.

Notion de transformation homogène

La notion de transformation homogène permet de :

- conserver une relation **linéaire** des coordonnées malgré le décalage d'origine des repères \mathcal{R}_j et \mathcal{R}_k .
- regrouper les termes correspondant aux transformations de **translation** et de **rotation**.

$$\begin{bmatrix} {}^j p_j \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^j R_k & {}^j b_{jk} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^j A_k} \begin{bmatrix} {}^k p_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Configuration d'un corps rigide

Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

Application à la composition de rotations

Différents modes de représentation des rotations

Matrices de transformation homogènes

Remarques :

$$\begin{bmatrix} {}^j p_j \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^j R_k & {}^j b_{jk} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}_{{}^j A_k} \begin{bmatrix} {}^k p_k \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation homogène notée ${}^j A_k$ comporte :

- la matrice de rotation ${}^j R_k$;
- le vecteur \vec{b}_{jk} qui caractérise le décalage d'origine entre \mathcal{R}_j et \mathcal{R}_k .

Opérations sur les matrices homogènes

Inversion :

- La matrice ${}^j A_k$ n'est pas orthogonale.
- Calcul de ${}^j A_k^{-1} = \begin{bmatrix} A & b \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ par identification de A et b dans l'équation :

$$\begin{aligned} {}^j A_k {}^j A_k^{-1} &= Id_{4 \times 4} \\ \begin{bmatrix} {}^j R_k & {}^j R_k b + {}^j b_{jk} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Id_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient :

$${}^j A_k^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} {}^j R_k^T & -{}^j R_k^T {}^j b_{jk} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}}$$

Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Configuration d'un corps rigide

Interprétation/utilisation des matrices de changement de base

Application à la composition de rotations

Différents modes de représentation des rotations

Matrices de transformation homogènes

Opérations sur les matrices homogènes

Composition :

Les règles établies pour la composition des rotations s'appliquent de façon analogue aux transformations homogènes (rotations/translations) :

- ① Transformations homogènes selon des axes de repères **fixes** \Rightarrow
Pré-multiplication.
- ② Transformations homogènes selon des axes de repères **mobiles** \Rightarrow
Post-multiplication.



Mise en œuvre pratique

- Les translations sont commutatives entre elles.
- Les translations ne sont pas commutatives avec les rotations.

Opérations sur les matrices homogènes

Décomposition d'une transformation homogène



- Le produit d'une translation avec une rotation n'est pas **commutatif**

$${}_j A_k = \begin{bmatrix} {}^j R_k & {}^j b_{jk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & {}^j b_{jk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^j R_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} {}^j R_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & {}^j b_{jk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dans une transformation homogène, la translation s'applique **avant** la rotation \rightsquigarrow **pré-multiplication**.
- Si la translation est appliquée **après** la rotation, il faut corriger les effets de la rotation :

$${}_j A_k = \begin{bmatrix} {}^j R_k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Id & {}^j R_k^T {}^j b_{jk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les matrices homogènes

Composition des transformations homogènes en pratique

- On considère une séquence de n transformations A_i permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_{n+1} .
- Une transformation A_i décrit une rotation ou une translation entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} selon soit
 - des axes \mathcal{R}_1 du repère fixe (axes **fixes**) ;
 - des axes du repère mobile courant \mathcal{R}_i (axes **mobiles**).
- Exemple d'une séquence de 5 transformations

| Transformation | Axe fixe \mathcal{R}_1 | Axe mobile \mathcal{R}_i |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| A_1 | x | |
| A_2 | | x |
| A_3 | x | |
| A_4 | x | |
| A_5 | | x |

- La matrice homogène résultante A se calcule :

$$A = A_4 A_3 A_1 A_2 A_5$$

Opérations sur les matrices homogènes

Composition des transformations homogènes en pratique

- On considère une séquence de n transformations A_i permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_{n+1} .
- Une transformation A_i décrit une rotation ou une translation entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} selon soit
 - des axes \mathcal{R}_1 du repère fixe (axes **fixes**) ;
 - des axes du repère mobile courant \mathcal{R}_i (axes **mobiles**).
- Exemple d'une séquence de 5 transformations

| Transformation | Axe fixe \mathcal{R}_1 | Axe mobile \mathcal{R}_i |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| A_1 | x | |
| A_2 | | x |
| A_3 | x | |
| A_4 | x | |
| A_5 | | x |

- La matrice homogène résultante A se calcule :

$$A = A_4 A_3 A_1 A_2 A_5$$

Opérations sur les matrices homogènes

Composition des transformations homogènes en pratique

- On considère une séquence de n transformations A_i permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_{n+1} .
- Une transformation A_i décrit une rotation ou une translation entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} selon soit
 - des axes \mathcal{R}_1 du repère fixe (axes **fixes**) ;
 - des axes du repère mobile courant \mathcal{R}_i (axes **mobiles**).
- Exemple d'une séquence de 5 transformations

| Transformation | Axe fixe \mathcal{R}_1 | Axe mobile \mathcal{R}_i |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| A_1 | x | |
| A_2 | | x |
| A_3 | x | |
| A_4 | x | |
| A_5 | | x |

- La matrice homogène résultante A se calcule :

$$A = A_4 A_3 A_1 A_2 A_5$$

Opérations sur les matrices homogènes

Composition des transformations homogènes en pratique

- On considère une séquence de n transformations A_i permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_{n+1} .
- Une transformation A_i décrit une rotation ou une translation entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} selon soit
 - des axes \mathcal{R}_1 du repère fixe (axes **fixes**) ;
 - des axes du repère mobile courant \mathcal{R}_i (axes **mobiles**).
- Exemple d'une séquence de 5 transformations

| Transformation | Axe fixe \mathcal{R}_1 | Axe mobile \mathcal{R}_i |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| A_1 | x | |
| A_2 | | x |
| A_3 | x | |
| A_4 | x | |
| A_5 | | x |

- La matrice homogène résultante A se calcule :

$$A = A_4 A_3 A_1 A_2 A_5$$

Opérations sur les matrices homogènes

Composition des transformations homogènes en pratique

- On considère une séquence de n transformations A_i permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_{n+1} .
- Une transformation A_i décrit une rotation ou une translation entre \mathcal{R}_i et \mathcal{R}_{i+1} selon soit
 - des axes \mathcal{R}_1 du repère fixe (axes **fixes**) ;
 - des axes du repère mobile courant \mathcal{R}_i (axes **mobiles**).
- Exemple d'une séquence de 5 transformations

| Transformation | Axe fixe \mathcal{R}_1 | Axe mobile \mathcal{R}_i |
|----------------|--------------------------|----------------------------|
| A_1 | x | |
| A_2 | | x |
| A_3 | x | |
| A_4 | x | |
| A_5 | | x |

- La matrice homogène résultante A se calcule :
$$A = A_4 A_3 A_1 A_2 A_5$$

Plan – Chapitre 3 I

1. Outils pour la description des configurations spatiales

- 1.1 Configuration d'un corps rigide
- 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base
 - Exemple d'illustration dans le plan
- 1.3 Application à la composition de rotations
 - Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
 - Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
 - Exemples
- 1.4 Différents modes de représentation des rotations
- 1.5 Matrices de transformation homogènes
 - Opérations sur les matrices homogènes

2. Modèle géométrique direct

- 2.1 Définitions
- 2.2 Principe de la modélisation
- 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg
 - Remarques
 - Cas particuliers
- 2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

Plan – Chapitre 3 II

- 2.5 Écriture du MGD
- 2.6 Application 1 : robot à trois ddl
- 2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

- ### 4. Modèle géométrique inverse
- 4.1 Conditions d'existence du MGI
 - 4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

Modèle géométrique direct

Mécanismes étudiés

- Les mécanismes envisagés sont composés de solides rigides indéformables et interconnectés par des liaisons simples de type *pivot* ou *glissière*.
- Les liaisons pivot ou glissière seront notées R (de l'anglais « Revolute joint ») ou P (« Prismatic joint »).
- Les méthodes de modélisation présentées ci-après s'appliquent aux mécanismes constitués d'une **chaîne cinématique simple** dans lesquels les corps sont assemblés **en série** :
 - Le premier corps C_1 de la chaîne est articulé sur un bâti fixe noté C_0 .
 - Le dernier, noté C_n supporte l'organe terminal auquel est généralement associé un **outil**.

Modèle géométrique direct I

Définitions

Situation de l'organe terminal :

La situation de l'organe terminal correspond à la connaissance de :

- sa position par rapport à un référentiel choisi.
- son orientation

Elle est définie par des *coordonnées opérationnelles*.

- Différentes manières de représenter la position et l'orientation d'un solide dans l'espace.
- Situation de l'organe terminal définie par m coordonnées opérationnelles rassemblées dans $x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_m]^T$.

Modèle géométrique direct II

Définitions

Configuration du mécanisme :

La configuration du mécanisme est définie par la connaissance de ses coordonnées *généralisées* ou coordonnées *articulaires*.

Le mécanisme comporte :

- $n + 1$ corps (y compris le bâti) connectés en série par n liaisons simples de type pivot ou glissière.
- On note $q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T$ la matrice colonne des coordonnées généralisées du mécanisme.

Modèle géométrique direct III

Définitions

Modèle géométrique direct :

- On appelle modèle géométrique direct (**MGD**) d'un mécanisme articulé, l'application f qui permet d'exprimer la **situation** de l'organe terminal en fonction de la **configuration** du mécanisme.

Le **MGD** s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{x}_{m \times 1} = \underbrace{f}_{m \times 1}(\underbrace{q}_{n \times 1})$$

Modèle géométrique direct IV

Définitions

Modèle géométrique direct - suite :

- Choix retenu dans ce cours : représenter la position et l'orientation d'un solide dans l'espace avec des **matrices homogènes**.
~~ le MGD s'écrit sous la forme :

$$\underbrace{A}_{4 \times 4} = \underbrace{f}_{4 \times 4} \left(\underbrace{q}_{n \times 1} \right)$$

Principe de la modélisation

Objectif et principe de modélisation :

- Disposer d'un modèle de mécanisme susceptible d'être interprété de manière *non ambiguë*.
- Garantir la même compréhension d'un mécanisme à des personnes différentes.

Le principe général de modélisation consiste à :

- attacher à chaque solide un référentiel ;
 - à expliciter les mobilités relatives entre ces référentiels.
- ~~ le modèle mis en place utilisera des matrices **homogènes**.

Précautions à prendre

Règles employées :

Pour garantir une construction systématique des modèles quels que soient les mécanismes envisagés, il est utile d'établir des règles de mise en place des repères.

- Les règles de paramétrage retenues sont basées sur celles proposées par Jacques Denavit et Richard S. Hartenberg en 1955 pour la modélisation cinématique de mécanismes spatiaux [3].
- Il existe diverses **variantes** de ces règles de paramétrage qui ne diffèrent que par quelques détails. Nous utiliserons ici la variante de Paul [1].



Rappeler systématiquement la définition des paramètres utilisés.

Conventions de numérotation des corps et des liaisons I

- a. Numérotation des corps de 0 (bâti) à n (organe terminal).
- b. Numérotation des liaisons de 1 à $n + 1^a$. Chaque liaison \mathcal{L}_i relie le corps C_i à son prédécesseur C_{i-1} .
- c. Chaque corps C_i est caractérisé par une longueur a_i et un angle de torsion α_i .
- d. La liaison \mathcal{L}_i est caractérisée par un angle θ_i mesuré autour de \vec{z}_{i-1} et une distance d_i mesurée le long de \vec{z}_{i-1} entre les corps C_{i-1} et C_i .

a. La liaison \mathcal{L}_{n+1} ne correspond pas réellement à une liaison car le solide $n + 1$ n'existe pas. \mathcal{L}_{n+1} permet simplement de localiser un repère attaché à l'organe terminal C_n .

Conventions de numérotation des corps et des liaisons II

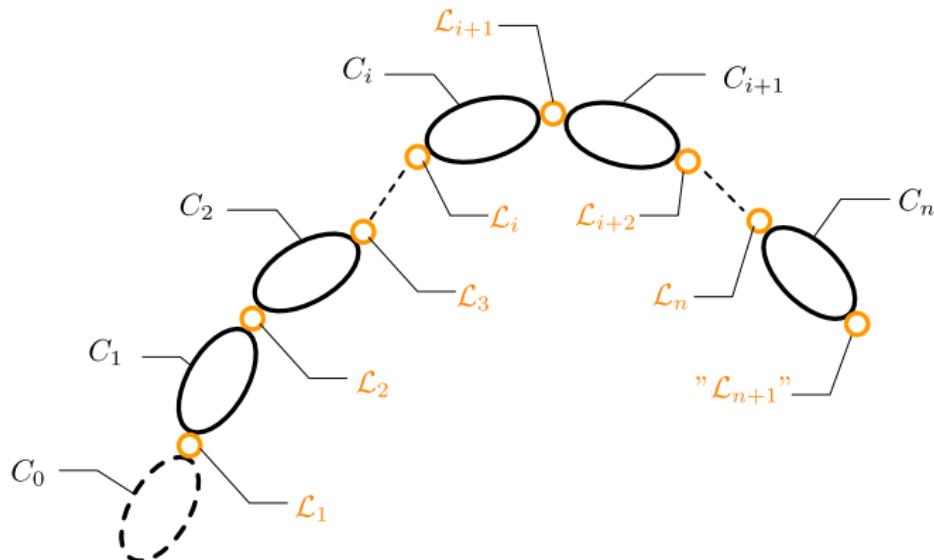


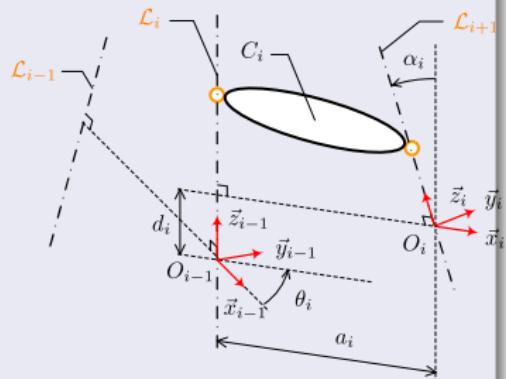
Figure – Numérotation des corps et des liaisons.

Construction des repères associés

Procédure de construction

La procédure de construction des repères associés aux corps est la suivante :

- ① Le repère \mathcal{R}_i est attaché au corps C_i .
- ② L'origine O_i de \mathcal{R}_i est le pied de la perpendiculaire commune à \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_{i+1} sur \mathcal{L}_{i+1} . \mathcal{R}_i est donc sur l'axe de la liaison \mathcal{L}_{i+1} .
- ③ L'axe \vec{z}_i est porté par l'axe de la liaison \mathcal{L}_{i+1} .
- ④ L'axe \vec{x}_i est porté par la perpendiculaire commune à \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i .
- ⑤ L'axe \vec{y}_i est construit à partir de \vec{x}_i et \vec{z}_i pour obtenir un repère \mathcal{R}_i orthonormé direct.



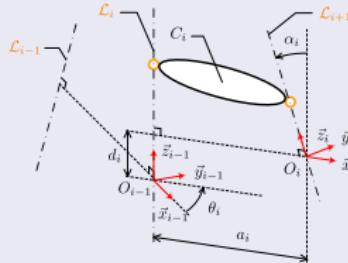
Paramètres de Denavit-Hartenberg.

Construction des repères associés

Passage de \mathcal{R}_{i-1} à \mathcal{R}_i

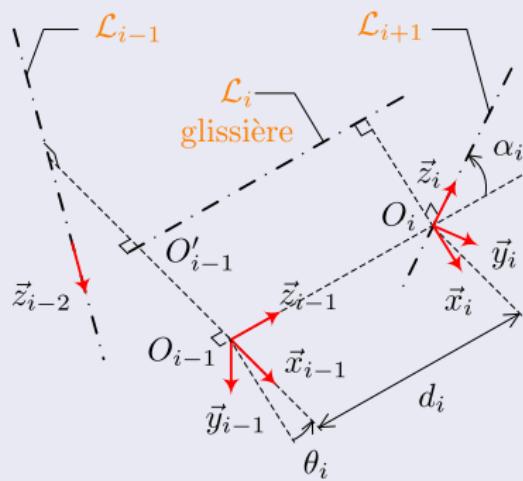
Le passage de \mathcal{R}_{i-1} à \mathcal{R}_i s'exprime à l'aide des quatre paramètres suivants :

- $a_i = \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \cdot \vec{x}_i$: longueur de la perpendiculaire commune à \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_{i+1} , mesurée suivant \vec{x}_i (toujours **positive**).
- $\alpha_i = (\vec{z}_{i-1}; \vec{z}_i)$: angle entre \vec{z}_{i-1} et \vec{z}_i mesuré autour de \vec{x}_i .
- $d_i = \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \cdot \vec{z}_{i-1}$: distance entre \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i mesurée suivant \vec{z}_{i-1} (valeur algébrique).
- $\theta_i = (\vec{x}_{i-1}; \vec{x}_i)$: angle entre \vec{x}_{i-1} et \vec{x}_i mesuré autour de \vec{z}_{i-1} .



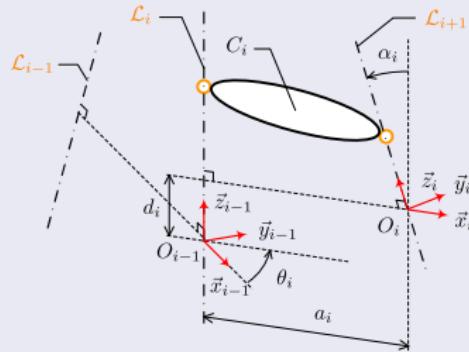
Remarques

- Cas où \mathcal{L}_i est une liaison glissière : on choisit la position de O_{i-1} telle que $a_i = 0$.



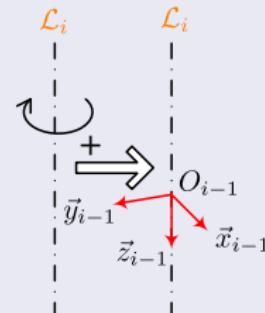
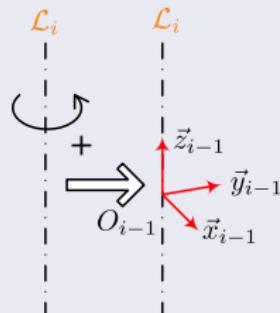
Remarques

- Les termes a_i et α_i sont des paramètres constants qui caractérisent la configuration géométrique du corps C_i .
- Si la liaison \mathcal{L}_i est de type *pivot* alors $\begin{cases} \theta_i \text{ variable.} \\ d_i \text{ constant.} \end{cases}$
- Si la liaison \mathcal{L}_i est de type *glissière* alors $\begin{cases} \theta_i \text{ constant.} \\ d_i \text{ variable.} \end{cases}$



Remarques

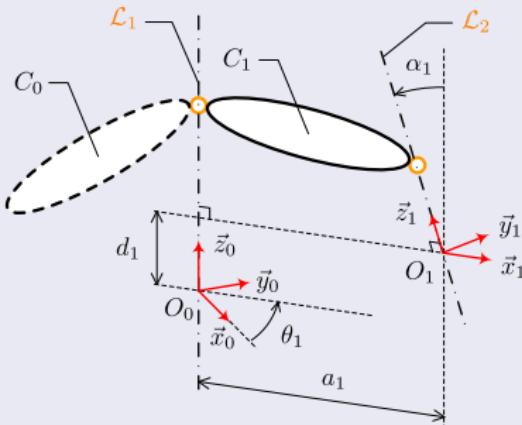
- Le sens du vecteur \vec{z}_{i-1} peut être choisi arbitrairement. Toutefois, le choix peut être arrêté si l'on se donne un sens positif pour les rotations ou translations selon les axes des liaisons.



Cas particuliers

• Position de \mathcal{R}_0

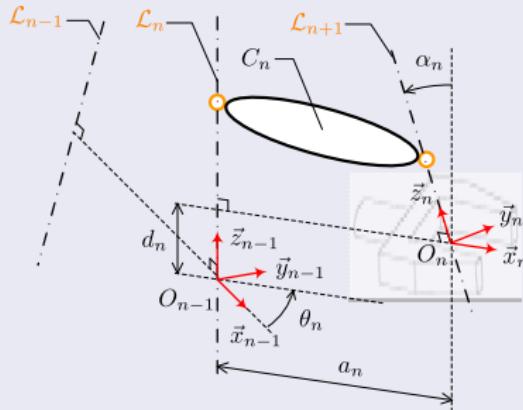
L'origine O_0 du repère \mathcal{R}_0 , attaché au corps C_0 , peut être choisie n'importe où sur l'axe de la liaison \mathcal{L}_1 .



Cas particuliers

• Position de \mathcal{R}_n

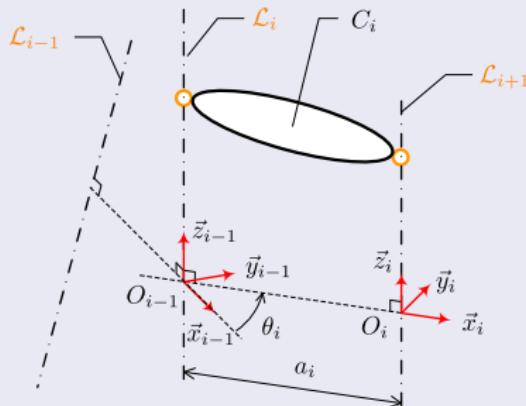
La liaison \mathcal{L}_{n+1} ne correspond pas à une liaison existante. Elle permet simplement de localiser le repère \mathcal{R}_n attaché au corps C_n . Généralement, on place la liaison \mathcal{L}_{n+1} pour que l'origine O_n du repère \mathcal{R}_n coïncide avec le centre d'un outil monté sur le corps terminal C_n .



Cas particuliers

- Cas où les axes des liaisons \mathcal{L}_i et \mathcal{L}_{i+1} sont parallèles ou confondus

Un placement unique de la perpendiculaire commune n'est pas défini. On choisit de faire passer la droite (O_i, \vec{x}_i) par le point O_{i-1} .



Cas particuliers

- **Cas où les axes sont sécants**

La direction des vecteurs \vec{x}_i n'est pas définie. On choisit alors

$$\vec{x}_i = \frac{\vec{z}_{i-1} \times \vec{z}_i}{\|\vec{z}_{i-1} \times \vec{z}_i\|}.$$

Transformation de Denavit-Hartenberg

- La matrice de transformation homogène permettant de passer de \mathcal{R}_{i-1} à \mathcal{R}_i est construite comme suit :

$$\mathcal{R}_{i-1} \xrightarrow[\text{Axes fixes} \Rightarrow \text{Pré-multiplication}]{{\text{Rot}}(\vec{z}_{i-1}, \theta_i) \text{Trans}(\vec{z}_{i-1}, d_i)} \mathcal{R}_{\text{int}} \xrightarrow[\text{Axes mobiles} \Rightarrow \text{Post-multiplication}]{{\text{Rot}}(\vec{x}_i, \alpha_i) \text{Trans}(\vec{x}_i, a_i)} \mathcal{R}_i$$

- La matrice ${}^{i-1}A_i(q_i)$, avec $q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{--- liaison pivot} \\ d_i & \text{--- liaison glissière} \end{cases}$, vaut :

$${}^{i-1}A_i(q_i) = \underbrace{\begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Commutatif}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Commutatif}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Commutatif}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Commutatif}}$$

Transformation de Denavit-Hartenberg

- La matrice homogène permettant de passer de \mathcal{R}_{i-1} à \mathcal{R}_i a pour expression :

$${}_{i-1}^i A_i(q_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Écriture du MGD

Pour écrire le MGD d'un mécanisme à n corps montés en série :

- Élaboration des matrices homogènes élémentaires de chaque liaison.
- Composition des n matrices homogènes.
~~ transformations élémentaires suivant des axes mobiles \Rightarrow post-multiplication.

Le MGD a pour expression :

$${}^0A_n(q_1, q_2, \dots, q_n) = {}^0A_1(q_1){}^1A_2(q_2)\dots{}^{n-1}A_n(q_n)$$

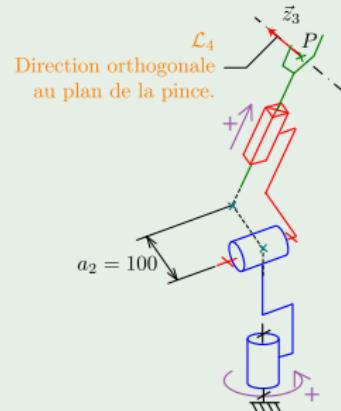
Matrice ${}^0A_n(q)$ avec $q = [q_1 \quad q_2 \dots q_n]^T$:

- MGD du mécanisme.
- Description de l'orientation de $\mathcal{R}_n/\mathcal{R}_0$ (matrice $3 \times 3 : {}^0R_n$).
- Description de l'origine du repère \mathcal{R}_n (matrice $3 \times 1 : {}^0p_{0n}$).

Robot à trois ddl

Robot RRP :

- Robot à 3 ddl à architecture série.
- Point P : point d'intérêt de l'organe terminal, situé au centre de la pince.
- Axe (P, \vec{z}_3) perpendiculaire au plan de la pince positionné comme indiqué sur la figure.



Plan de travail

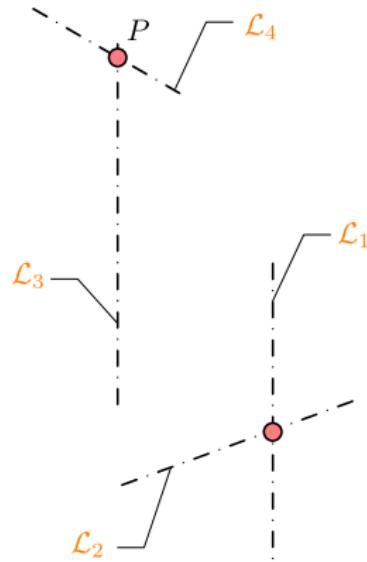
Traité en séance

- ① Mise en place du paramétrage selon la convention de Denavit-Hartenberg.
- ② Construction du tableau des paramètres de Denavit-Hartenberg.
- ③ Calcul des matrices élémentaires puis de la matrice correspondante au MGD.
- ④ Vérification du résultat pour une configuration simple du mécanisme.

Positionnement des repères

- On positionne les axes des liaisons pour une configuration particulière simple.

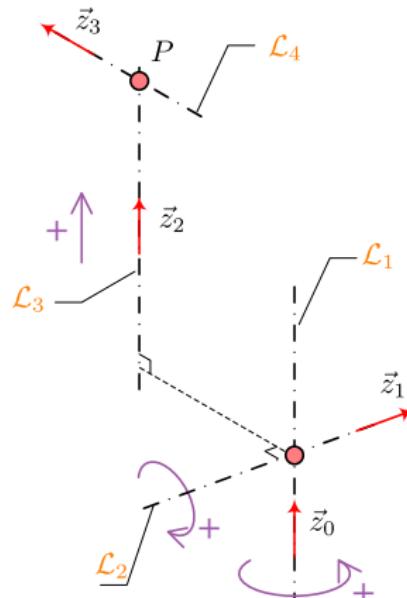
Figure



Positionnement des repères

- On choisit l'orientation des vecteurs \vec{z}_i en fonction du sens **positif** de déplacement des liaisons.

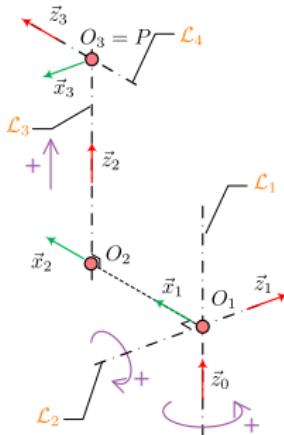
Figure



Positionnement des repères

- On place les origines et les vecteurs \vec{x}_i :
 - O_1 : à l'intersection de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ;
 - $\vec{x}_1 = \vec{z}_0 \times \vec{z}_1 \rightsquigarrow$ comme les axes sont sécants ;
 - O_2 : pied de la perpendiculaire commune de \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3 ;
 - $\vec{x}_2 = -\vec{z}_1 \times \vec{z}_2 \rightsquigarrow$ de \mathcal{L}_2 vers \mathcal{L}_3 ;
 - O_3 : à l'intersection de \mathcal{L}_3 et \mathcal{L}_4 ;
 - $\vec{x}_3 = \vec{z}_2 \times \vec{z}_3$.

Figure



Positionnement des repères

- On place les origines et les vecteurs \vec{x}_i :
 - O_0 confondu avec O_1 .
- On construit les vecteurs \vec{y}_i :

Figure

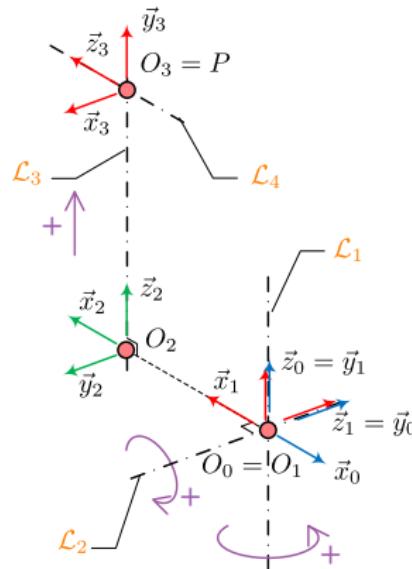


Tableau des paramètres de DH

| | 1 | 2 | 3 |
|---|-----------------|------------------|-----------------|
| $a_i = \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \cdot \vec{x}_i$ | 0 | 100 | 0 |
| $\alpha_i = (\vec{z}_{i-1}; \vec{z}_i) / \vec{x}_i$ | $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $d_i = \overrightarrow{O_{i-1}O_i} \cdot \vec{z}_{i-1}$ | 0 | 0 | d_3 |
| $\theta_i = (\vec{x}_{i-1}; \vec{x}_i) / \vec{z}_{i-1}$ | θ_1 | θ_2 | $\frac{\pi}{2}$ |
| Valeur de q_i représentée | π | 0 | > 0 |

Construction des matrices élémentaires

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & a_2 c_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & a_2 s_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0A_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & -c_1 s_2 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & -s_1 s_2 & a_2 s_1 c_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Construction des matrices élémentaires

$${}^0 A_3 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 s_2 & c_1 c_2 & -d_3 c_1 s_2 + a_2 c_1 c_2 \\ c_1 & -s_1 s_2 & s_1 c_2 & -d_3 s_1 s_2 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & c_2 & s_2 & d_3 c_2 + a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vérification dans une configuration particulière $q = [\pi \quad 0 \quad d_3 > 0]^T$. La matrice ${}^0 A_3$ vaut :

$${}^0 A_3(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -a_2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outils pour la description des configurations spatiales

Modèle géométrique direct

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Modèle géométrique inverse

Définitions

Principe de la modélisation

Paramètres de Denavit-Hartenberg

Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

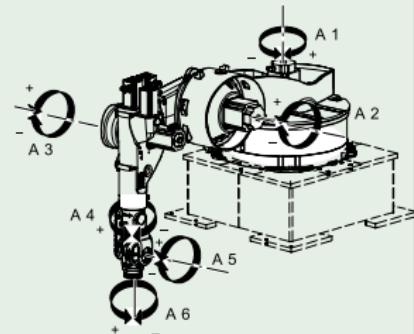
Écriture du MGD

Application 1 : robot à trois ddl

Application 2 : robot Kuka à six ddl

Robot Kuka KR30 :

- Robot industriel à 6 ddl à architecture série.
- Installation sur une réhausse en surplomb de la zone de travail.
- Point P : point d'intérêt de l'organe terminal, situé au centre de gravité de la charge indiqué sur la vue latérale.
- Axe (P, \vec{z}) lié à l'organe terminal vertical descendant sur la figure ci-contre.



Robot Kuka KR30 - suite :

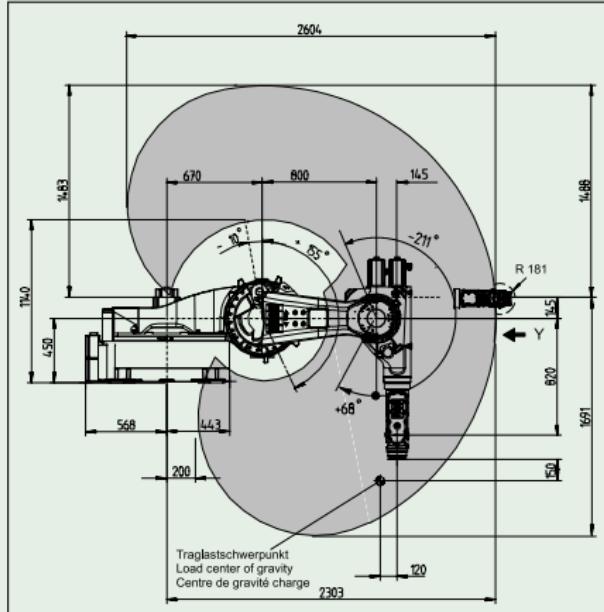


Figure – Vue latérale.

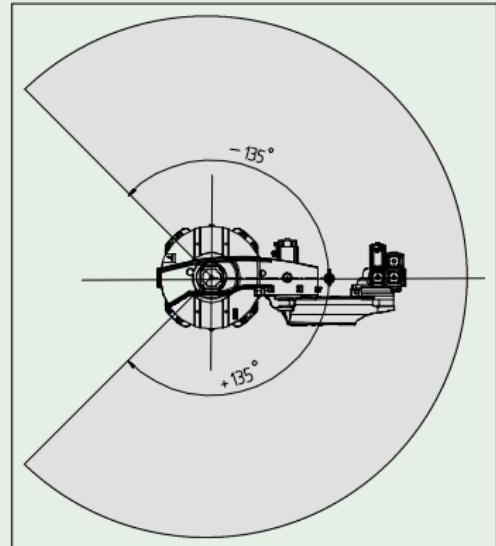


Figure – Vue de dessus.

Plan de travail

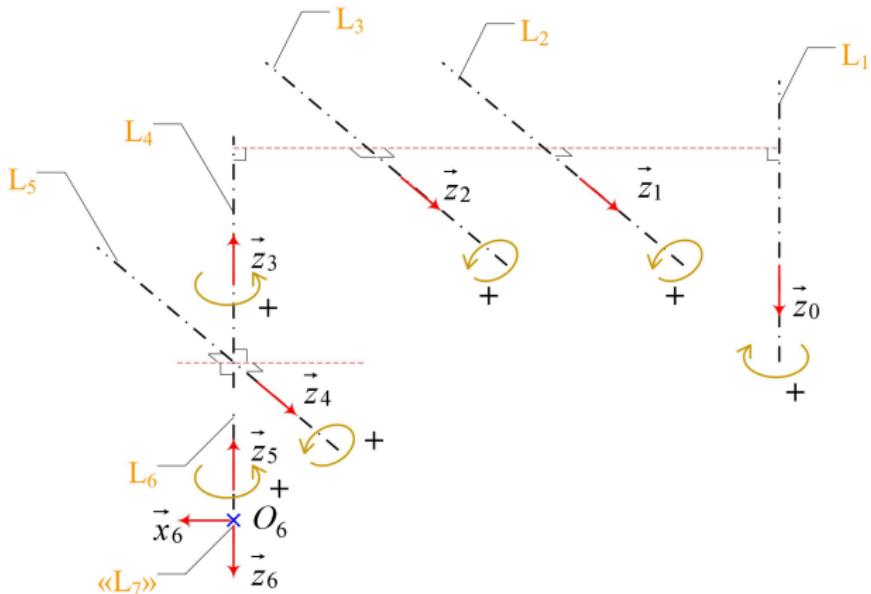
Traité en séance

- ① Mise en place du paramétrage selon la convention de Denavit-Hartenberg.
 - ② Construction du tableau des paramètres de Denavit-Hartenberg.
- NB** Pour un nombre de ddl supérieur à trois, le calcul manuel de la matrice homogène correspondant au MGD devient très lourd.
~~ Ces calculs peuvent être réalisés à l'aide d'un outil de calcul formel du type **Maple** ou utiliser un outil numérique du type **matlab**.

Robot KUKA KR30 - Positionnement des repères

Mise en place des :

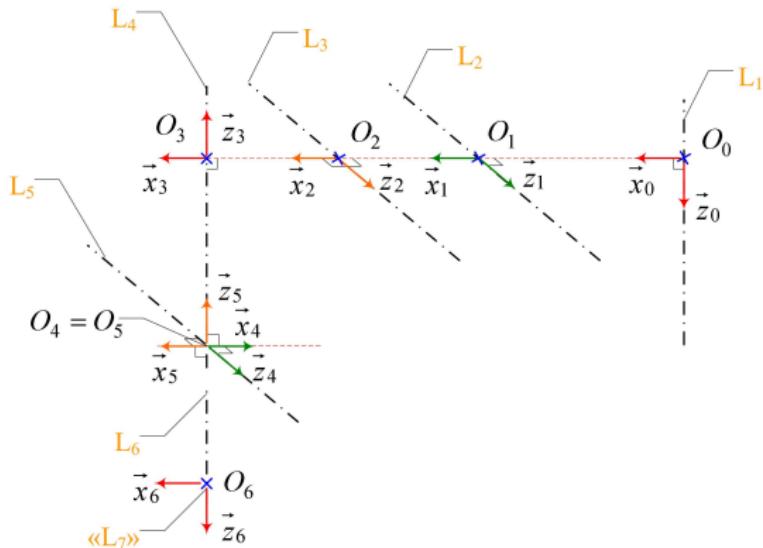
- axes des liaisons ;
- vecteurs \vec{z}_i conformes aux sens positifs.



Robot KUKA KR30 - Positionnement des repères

Mise en place des :

- perpendiculaires communes ;
- origines des repères ;
- vecteurs \vec{x}_i .



Robot KUKA KR30 - Positionnement des repères

- Mise en place des vecteurs \vec{y}_i .

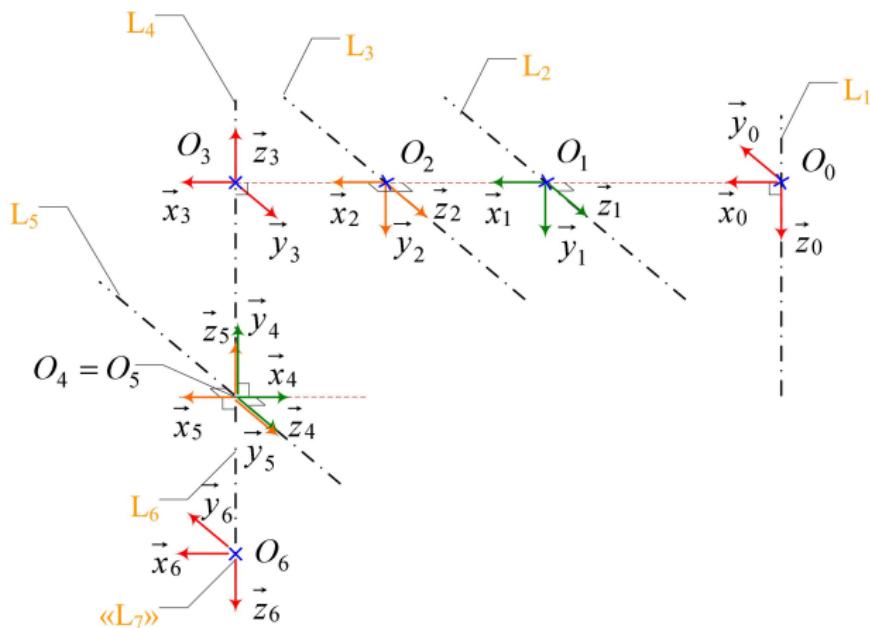
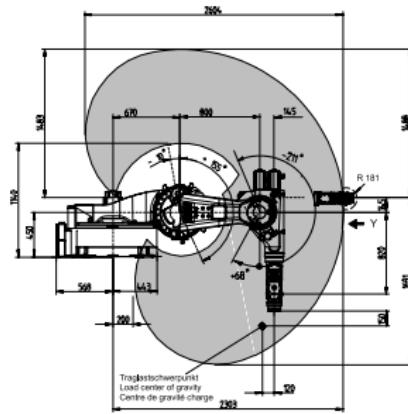


Tableau des paramètres de DH - Robot KUKA KR30

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|------------------|------------------|------------------|------------------------|------------------------|------------------|
| $a_i = \vec{O}_{i-1}\vec{O}_i \cdot \vec{x}_i$ | $a_1 = 670$ | $a_2 = 800$ | $a_3 = 145$ | 0 | 0 | $a_6 = -120$ |
| $\alpha_i = (\vec{z}_{i-1}; \vec{z}_i) / \vec{x}_i$ | π | 0 | π | π | π | π |
| $d_i = \vec{O}_{i-1}\vec{O}_i \cdot \vec{z}_{i-1}$ | 0 | 0 | 0 | $d_4 = -820$ | 0 | $d_6 = -150 - x$ |
| $\theta_i = (\vec{x}_{i-1}; \vec{x}_i) / \vec{z}_{i-1}$ | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_4 | θ_5 | θ_6 |
| Valeur des q_i représentés | 0 | 0 | 0 | π | π | 0 |
| Valeur des q_i contrôleur ¹ | $q_1 = \theta_1$ | $q_2 = \theta_2$ | $q_3 = \theta_3$ | $q_4 = \theta_4 - \pi$ | $q_5 = \theta_5 - \pi$ | $q_6 = \theta_6$ |



1. Valeurs articulaires définies dans l'armoire de commande du robot.

Matrices homogènes - Robot KUKA KR30

$$\bullet \begin{aligned} {}^0 A_1 &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & a_1 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & a_1 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^1 A_2 &= \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^2 A_3 &= \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & a_3 c_3 \\ s_3 & 0 & -c_3 & a_3 s_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^3 A_4 &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & -c_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ {}^4 A_5 &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & {}^5 A_6 &= \begin{bmatrix} c_6 & s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & -c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Plan – Chapitre 3 I

1. Outils pour la description des configurations spatiales

- 1.1 Configuration d'un corps rigide
- 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base
 - Exemple d'illustration dans le plan
- 1.3 Application à la composition de rotations
 - Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
 - Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
 - Exemples
- 1.4 Différents modes de représentation des rotations
- 1.5 Matrices de transformation homogènes
 - Opérations sur les matrices homogènes

2. Modèle géométrique direct

- 2.1 Définitions
- 2.2 Principe de la modélisation
- 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg
 - Remarques
 - Cas particuliers
- 2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

Plan – Chapitre 3 II

- 2.5 Écriture du MGD
- 2.6 Application 1 : robot à trois ddl
- 2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

- 4. Modèle géométrique inverse**
- 4.1 Conditions d'existence du MGI
- 4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Limites articulaires :

- Le plus souvent, la plage de variation d'une coordonnée généralisée q_i est bornée par des valeurs limites.
 - Chaque articulation présente en général des butées qui limitent les mouvements possibles.
- ~~> On a $q_i \in [q_{i_{\min}}; q_{i_{\max}}]$.

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Volume de travail généralisé :

C'est le produit cartésien des intervalles de variation des articulations :

$$V_q = [q_{1_{\min}}; q_{1_{\max}}] \times [q_{2_{\min}}; q_{2_{\max}}] \times \dots \times [q_{n_{\min}}; q_{n_{\max}}].$$

Volume de travail opérationnel :

C'est l'image du volume de travail généralisé V_q par le MGD :

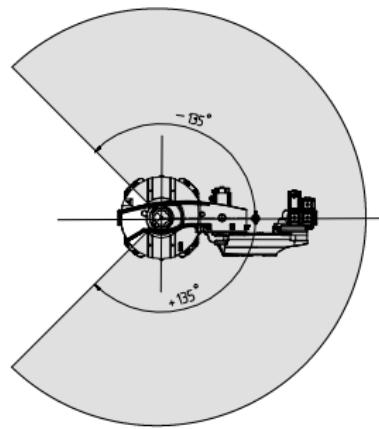
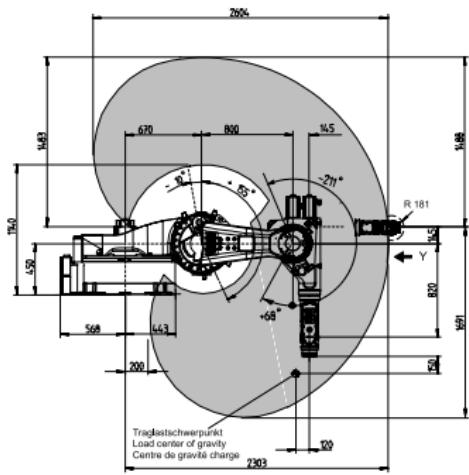
$$V_x = f(V_q).$$

- V_x est un hypervolume généralement complexe à représenter lorsque n est supérieur à trois.
- Le volume V_x caractérise l'atteignabilité du mécanisme c'est à dire sa capacité à faire atteindre son organe terminal des positions et orientations données.

Volume de travail d'un mécanisme articulé

Volume de travail opérationnel - suite :

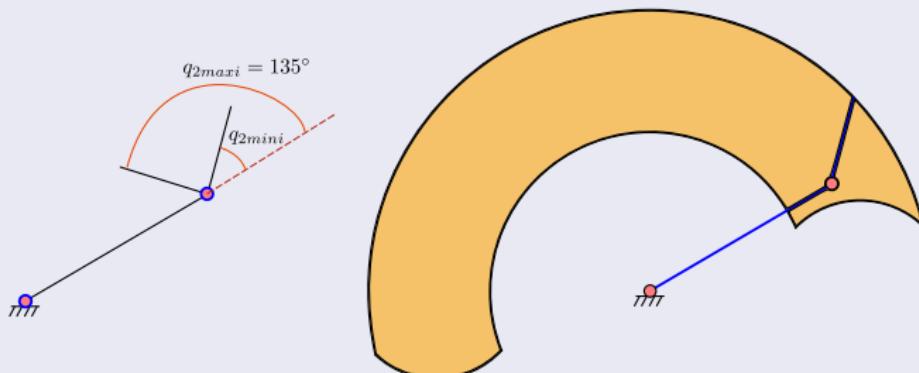
- Les silhouettes grisées des figures ci-dessous représentent des projections planes de l'hypervolume V_x du robot Kuka KR30 construit seulement pour les positions du centre du poignet : le centre du poignet peut atteindre les points des zones grisées mais avec une orientation non précisée.



Volume de travail d'un mécanisme articulé

Exemple en 2D :

- Représentation du volume opérationnel d'un mécanisme plan RR.
 $q_1 \in [0; 180^\circ]$ et $q_2 \in [45; 135^\circ]$.



Plan – Chapitre 3 I

1. Outils pour la description des configurations spatiales

- 1.1 Configuration d'un corps rigide
- 1.2 Interprétation/utilisation des matrices de changement de base
 - Exemple d'illustration dans le plan
- 1.3 Application à la composition de rotations
 - Composition de rotations autour d'axes d'un repère fixe
 - Composition de rotations autour d'axes de repères mobiles
 - Exemples
- 1.4 Différents modes de représentation des rotations
- 1.5 Matrices de transformation homogènes
 - Opérations sur les matrices homogènes

2. Modèle géométrique direct

- 2.1 Définitions
- 2.2 Principe de la modélisation
- 2.3 Paramètres de Denavit-Hartenberg
 - Remarques
 - Cas particuliers
- 2.4 Matrice de transformation pour le paramétrage de Denavit-Hartenberg

Plan – Chapitre 3 II

- 2.5 Écriture du MGD
- 2.6 Application 1 : robot à trois ddl
- 2.7 Application 2 : robot Kuka à six ddl

3. Volume de travail d'un mécanisme articulé

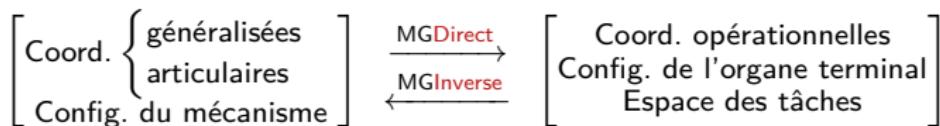
4. Modèle géométrique inverse

- 4.1 Conditions d'existence du MGI
- 4.2 Recherche d'un MGI avec les transformations homogènes

Modèle géométrique inverse

Définition :

On appelle modèle géométrique **inverse** (MGI) d'un mécanisme articulé, l'application qui permet d'exprimer la configuration du mécanisme en fonction de la situation de l'organe terminal.



Modèle géométrique inverse

Utilité du MGI :

- Intérêt pratique : faire décrire une trajectoire à l'organe terminal, dans l'espace opérationnel.
- Détermination avec le MGI, des consignes articulaires à appliquer pour atteindre chacun des points de la trajectoire.
- Le MGI correspond à une fonction réciproque du MGD $x = f(q)$.
~~ Le problème est donc d'inverser, si cela est possible, la fonction f pour obtenir :

$$q = f^{-1}(x)$$

Conditions d'existence du MGI

Condition d'existence :

- Une condition nécessaire évidente est que x appartienne au volume de travail opérationnel V_x .
- Autrement dit, il faut que la position (et orientation) x recherchée pour l'organe terminal soit simplement accessible par le mécanisme.

Définitions :

• Degré de liberté d'un mécanisme

Pour un mécanisme à chaîne ouverte comportant des liaisons R ou P, le nombre de ddl est égal au nombre d'articulations motorisées, soit n (c'est aussi le nombre de paramètres de commande indépendants).

Conditions d'existence du MGI

Définitions - suite :

- **Degré de liberté d'une tâche**

C'est le nombre, noté DL_T , de paramètres indépendants qui permettent de décrire les configurations que l'organe terminal doit atteindre pour accomplir une tâche **donnée**.

Conditions d'existence du MGI

Exemples :

- **Robot 6R ($n = 6$)**

La configuration x de l'organe terminal est définie par $m = 6$ paramètres indépendants. Pour une tâche du genre « atteindre une position P », le degré de liberté de la tâche DL_T vaut 3.

- **Robot plan RR ($n = 2$)**

La configuration x de l'organe terminal est définie par $m = 3$ paramètres indépendants.

Pour une tâche du genre « atteindre une situation P » (position et orientation), le degré de liberté de la tâche DL_T vaut 3.

Conditions d'existence du MGI

Il n'existe pas de résultats généraux précisant les conditions d'existence des solutions la fonction réciproque de f . Toutefois, les situations suivantes sont vérifiées dans la majorité des cas.

- $n < DL_T$

Il n'existe pas de solution. Le nombre de mobilités du mécanisme est insuffisant pour réaliser toutes les contraintes imposées par la tâche.

- $n = DL_T$

Si la configuration du mécanisme n'est pas singulière, il existe un nombre fini de solutions. Dans le cas contraire, ce nombre de solutions est infini.

- $n \geq DL_T$

Il existe un nombre infini de solutions. On parle alors de redondance du mécanisme par rapport à la tâche à réaliser.

La recherche du MGI peut être menée de manière analytique pour des robots ou mécanismes « simples ». Dans les cas plus généraux, il faut faire appel à des méthodes de résolution numériques qui peuvent poser des problèmes délicats de convergence.

Chapitre IV

Modélisation cinématique de mécanismes dans l'espace

Modélisation cinématique de mécanismes dans l'espace I

1. Modèle cinématique direct

- 1.1 Définitions
- 1.2 Écriture du modèle cinématique direct par dérivation
- 1.3 Écriture directe de la jacobienne

2. Modèle cinématique inverse

- 2.1 Cas où $m = n$ et l'inverse de J existe
- 2.2 Configurations singulières
- 2.3 Cas où n ddl > m contraintes

Chapitre 4

Modélisation cinématique de mécanismes dans l'espace

Cours de *Mécanique Appliquée*



Plan – Chapitre 4 I

1. Modèle cinématique direct

- 1.1 Définitions
- 1.2 Écriture du modèle cinématique direct par dérivation
- 1.3 Écriture directe de la jacobienne

2. Modèle cinématique inverse

- 2.1 Cas où $m = n$ et l'inverse de J existe
- 2.2 Configurations singulières
- 2.3 Cas où $n \text{ ddl} > m$ contraintes

Modèle cinématique direct

Données initiales :

- Coordonnées **opérationnelles** : définies par x ($m \times 1$).
Par exemple : avec $m = 6$, on choisit comme coordonnées opérationnelles :
$$x = [{}^0 b_n^T \quad \phi \quad \theta \quad \psi]^T.$$
- Coordonnées **généralisées** : définies par q ($n \times 1$) avec $q_i = \theta_i$ ou d_i .
- Modèle géométrique direct : $x = f(q)$

Modèle cinématique direct :

Le modèle cinématique direct (**MCD**) d'un mécanisme est le modèle qui permet de calculer les vitesses **opérationnelles** en fonction des vitesses **articulaires** (ou généralisées).

Modèle différentiel direct :

- Les composantes de x sont des fonctions non-linéaires :

$$x_i = f_i(q_1, \dots, q_n) \quad \text{pour } i \in [1, m].$$

- La différentielle de la composante x_i vaut :

$$dx_i = df_i(q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial q_j} dq_j$$

- En regroupant toutes les composantes de f , on obtient :

$$dx = J dq$$

qui est appelé modèle **differentiel** direct (**MDD**).

- La matrice J est appelée matrice **jacobienne** de la fonction f .

Modèle cinématique direct
Modèle cinématique inverse

Définitions

Écriture du modèle cinématique direct par dérivation
Écriture directe de la jacobienne

Modèle variationnel direct :

- En faisant varier x et q de quantités infinitésimales δx et δq , on obtient le modèle **variationnel** direct (**MVD**) :

$$\delta x = J \delta q$$

Modèle cinématique direct :

- Lorsqu'on dérive par rapport au temps x et q , on obtient le modèle **cinématique** direct (**MCD**) :

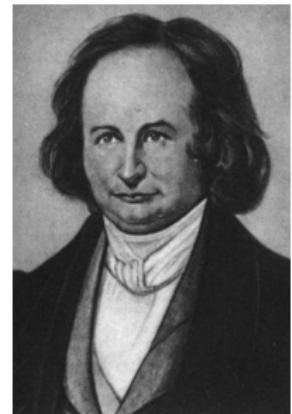
$$\dot{x} = J \dot{q}$$

Matrice jacobienne

Remarques :

- Le MGD $x = f(q)$ correspond à ***m*** relations **non-linéaires** par rapport aux q_i .
- Le MCD $\dot{x} = J \dot{q}$ correspond à ***m*** relations **linéaires** par rapport aux \dot{q}_i .
~~ Cette propriété sera utile pour **inverser** le MCD.
- La jacobienne J est de dimension $(m \times n)$.
- La jacobienne J dépend des positions q :

$$J_{i,j}(q_1, \dots, q_n) = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(q_1, \dots, q_n)$$



Carl Gustav Jacobi, (1804 - 1851)

Écriture du modèle cinématique direct

Le MCD peut être obtenu de deux manières :

- ① Dérivation du MGD.
- ② Formulation directe de la jacobienne, en exploitant les particularités du paramétrage de Denavit-Hartenberg.

Données de départ

- MGD :

Avec la modélisation retenue (paramétrage de DH), le **MGD** s'écrit :

$$\underbrace{\mathbf{x}}_{m \times 1} = \underbrace{f}_{m \times 1}(\underbrace{\mathbf{q}}_{n \times 1}) \text{ et prend la forme matricielle :}$$

$${}^0 A_n = \begin{bmatrix} {}^0 R_n & {}^0 b_{0n} \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

MGD en position

- Par dérivation du vecteur position \vec{b}_{0n} , on obtient le vecteur vitesse de l'organe terminal $\vec{v}_{O_n, n/0}$. Sous une forme matricielle, on obtient les composantes dans \mathcal{R}_0 de la vitesse de l'OT :

$${}^0 \dot{b}_{0n} = {}^0 v_{O_n, n/0}$$

MGD en orientation

- La prise en compte de l'orientation est plus délicate. On montre que la **vitesse angulaire** de l'organe terminal est reliée à la matrice de rotation 0R_n par la relation :

$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

- Démonstration

On part de la propriété des matrices de rotation qui sont des matrices orthogonales directes^a :

$$\begin{aligned} {}^0R_n {}^0R_n^T &= Id \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T + {}^0R_n {}^0\dot{R}_n^T &= 0 \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T &= - \left({}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T \right)^T \end{aligned}$$

↔ la matrice ${}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$ est anti-symétrique. On peut l'identifier à la matrice de pré-produit vectoriel issue du vecteur vitesse de rotation :

$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

a. leur déterminant vaut 1.

MGD en orientation

- La prise en compte de l'orientation est plus délicate. On montre que la **vitesse angulaire** de l'organe terminal est reliée à la matrice de rotation 0R_n par la relation :

$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

- Démonstration

On part de la propriété des matrices de rotation qui sont des matrices orthogonales directes^a :

$$\begin{aligned} {}^0R_n {}^0R_n^T &= Id \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T + {}^0R_n {}^0\dot{R}_n^T &= 0 \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T &= - \left({}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T \right)^T \end{aligned}$$

↔ la matrice ${}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$ est **anti-symétrique**. On peut l'identifier à la matrice de pré-produit vectoriel issue du vecteur vitesse de rotation :

$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

a. leur déterminant vaut 1.

MGD en orientation

- La prise en compte de l'orientation est plus délicate. On montre que la **vitesse angulaire** de l'organe terminal est reliée à la matrice de rotation 0R_n par la relation :

$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

- Démonstration

On part de la propriété des matrices de rotation qui sont des matrices orthogonales directes^a :

$$\begin{aligned} {}^0R_n {}^0R_n^T &= Id \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T + {}^0R_n {}^0\dot{R}_n^T &= 0 \\ {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T &= - \left({}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T \right)^T \end{aligned}$$

↔ la matrice ${}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$ est **anti-symétrique**. On peut l'identifier à la matrice de pré-produit vectoriel issue du vecteur vitesse de rotation :

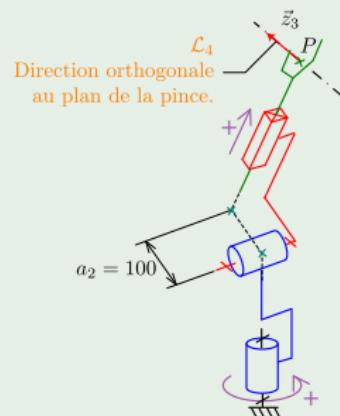
$${}^0\tilde{\omega}_{n/0} = {}^0\dot{R}_n {}^0R_n^T$$

a. leur déterminant vaut 1.

Exemple

Robot RRP :

- Robot à 3 ddl à architecture série.
- Point P : point d'intérêt de l'organe terminal, situé au centre de la pince.
- Axe perpendiculaire au plan de la pince positionné comme indiqué sur la figure.



Robot RRP

MGD

Le MGD a pour expression :

$${}^0 A_3 = \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 s_2 & c_1 c_2 & -d_3 c_1 s_2 + a_2 c_1 c_2 \\ c_1 & -s_1 s_2 & s_1 c_2 & -d_3 s_1 s_2 + a_2 s_1 c_2 \\ 0 & c_2 & s_2 & d_3 c_2 + a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Intéressons-nous simplement au MGD **en position** :

$${}^0 b_{03} = \begin{bmatrix} -d_3 c_1 s_2 + a_2 c_1 c_2 \\ -d_3 s_1 s_2 + a_2 s_1 c_2 \\ d_3 c_2 + a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

Robot RRP

Écriture du MCD en position

Par dérivation de ${}^0b_{03}$, on obtient :

$${}^0v_{O_3,3/0} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_3s_1s_2 - a_2s_1c_2 & -d_3c_1c_2 - a_2c_1s_2 & -c_1s_2 \\ -d_3c_1s_2 + a_2c_1c_2 & -d_3s_1c_2 - a_2s_1s_2 & -s_1s_2 \\ 0 & -d_3s_2 + a_2c_2 & c_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice jacobienne } {}^0J} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Vitesses opérationnelles

- On choisit comme vitesse opérationnelle \dot{x} , les composantes du torseur cinématique de l'organe terminal par rapport à \mathcal{R}_0 :

$$\dot{x} = \begin{cases} {}^0v_{O_n,n/0} = {}^0v_{n/0} = {}^0\dot{b}_{0n} & \text{vitesse linéaire } (3 \times 1) \\ {}^0\omega_{n/0} & \text{vitesse angulaire } (3 \times 1) \end{cases}$$

- On exprime les grandeurs cinématiques sous leur forme intrinsèque (*i.e.* indépendante du repère de projection) :

$$\begin{cases} \vec{v}_{n/0} = \vec{J}_{L_1}^n \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{L_i}^n \dot{q}_i + \dots + \vec{J}_{L_n}^n \dot{q}_n \\ \vec{\omega}_{n/0} = \vec{J}_{A_1}^n \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{A_i}^n \dot{q}_i + \dots + \vec{J}_{A_n}^n \dot{q}_n \end{cases}$$

Contribution des liaisons aux vitesses

Dans

$$\begin{cases} \vec{v}_{n/0} = \vec{J}_{L_1}^n \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{L_i}^n \dot{q}_i + \dots + \vec{J}_{L_n}^n \dot{q}_n \\ \vec{\omega}_{n/0} = \vec{J}_{A_1}^n \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{A_i}^n \dot{q}_i + \dots + \vec{J}_{A_n}^n \dot{q}_n \end{cases}$$

on note :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{L_i}^n : \text{contribution de la liaison } i \text{ à la vitesse linéaire de } C_n \text{ par rapport à } C_0. \\ \vec{J}_{A_i}^n : \text{contribution de la liaison } i \text{ à la vitesse angulaire de } C_n \text{ par rapport à } C_0. \end{array} \right.$$

Calcul des $\vec{J}_{L_i}^n$ et des $\vec{J}_{A_i}^n$

Les règles particulières de paramétrage (DH) permettent de donner la forme générale de ces vecteurs, en fonction du type de la liaison considérée :

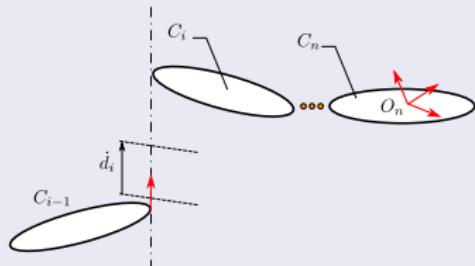
- Cas d'une liaison **glissière** : $q_i = d_i$

On considère que seul $\dot{d}_i \neq 0$ (les autres liaisons sont **bloquées**).

$$\begin{cases} \vec{v}_{n/0} &= \vec{z}_{i-1} \dot{d}_i \\ \vec{\omega}_{n/0} &= \vec{0} \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\begin{cases} \vec{J}_{L_i}^n &= \vec{z}_{i-1} \\ \vec{J}_{A_i}^n &= \vec{0} \end{cases}}$$



Liaison de type glissière.

Calcul des $\vec{J}_{L_i}^n$ et des $\vec{J}_{A_i}^n$

- Cas d'une liaison pivot : $q_i = \theta_i$

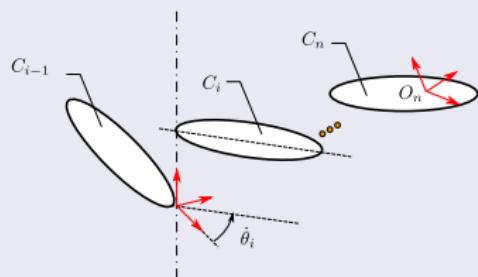
On considère que seul $\dot{\theta}_i \neq 0$ (les autres liaisons sont bloquées).

$$\vec{v}_{n/0} = \vec{v}_{O_n, n/0} = \underbrace{\vec{v}_{O_{i-1}, n/0}}_{= \vec{o}} + \underbrace{\overrightarrow{O_n O_{i-1}}}_{-\vec{b}_{i-1,n}} \times \vec{\omega}_{n/0}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{n/0} &= \left(\vec{z}_{i-1} \times \vec{b}_{i-1,n} \right) \dot{\theta}_i \\ \vec{\omega}_{n/0} &= \vec{z}_{i-1} \dot{\theta}_i \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \vec{J}_{L_i}^n &= \vec{z}_{i-1} \times \vec{b}_{i-1,n} \\ \vec{J}_{A_i}^n &= \vec{z}_{i-1} \end{cases}$$



Liaison de type pivot.

Calcul direct de la jacobienne

- La matrice jacobienne peut se calculer en projetant les contributions aux vitesses linéaires et angulaires ($\vec{J}_{L_i}^n$ et $\vec{J}_{A_i}^n$).
- En effet, si l'on projette les vitesses $\vec{v}_{n/0}$ et $\vec{\omega}_{n/0}$ dans le repère \mathcal{R}_0 , on a :

$$\begin{bmatrix} {}^0 v_{n/0} \\ {}^0 \omega_{n/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0 J_{L_1}^n & \dots & {}^0 J_{L_n}^n \\ {}^0 J_{A_1}^n & \dots & {}^0 J_{A_n}^n \end{bmatrix}}_{\text{jacobienne}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Expressions vectorielles des $\vec{J}_{L_i}^n$ et $\vec{J}_{A_i}^n$

- $\begin{cases} \vec{J}_{L_1}^3 &= \vec{z}_0 \times \overrightarrow{O_0P} \\ \vec{J}_{A_1}^3 &= \vec{z}_0 \end{cases}$

- $\begin{cases} \vec{J}_{L_2}^3 &= \vec{z}_1 \times \overrightarrow{O_1P} \\ \vec{J}_{A_2}^3 &= \vec{z}_1 \end{cases}$

- $\begin{cases} \vec{J}_{L_3}^3 &= \vec{z}_2 \\ \vec{J}_{A_3}^3 &= \vec{0} \end{cases}$

On a de plus : $\overrightarrow{O_0P} = \overrightarrow{O_1P} = a_2 \vec{x}_2 + d_3 \vec{z}_2$.

~ il faut évaluer les **projections** des vecteurs : \vec{z}_0 , \vec{z}_1 , \vec{z}_2 et \vec{x}_2 dans des repères à choisir.

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Matrices élémentaires

$$\bullet {}^0 A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1 A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 & a_2 c_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & a_2 s_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bullet {}^0 A_2 = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & -c_1 s_2 & a_2 c_1 c_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & -s_1 s_2 & a_2 s_1 c_2 \\ s_2 & 0 & c_2 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Détails des calculs

Les termes à calculer sont :

- $\vec{J}_{L_1}^3 = \vec{z}_0 \times (a_2 \vec{x}_2 + d_3 \vec{z}_2)$
- $\vec{J}_{L_2}^3 = \vec{z}_1 \times (a_2 \vec{x}_2 + d_3 \vec{z}_2)$

① Choix du repère de projection pour mener les calculs vectoriels :

En fonction des termes à évaluer, le choix du repère R_2 nécessite seulement la projection des vecteurs \vec{z}_0 et \vec{z}_1 .

Par simple observation des matrices de rotation ${}^0R_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & -c_1s_2 \\ s_1c_2 & c_1 & -s_1s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix}$ et ${}^1R_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & -s_2 \\ s_2 & 0 & c_2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

on peut déduire que :

- ${}^2z_0 = [s_2 \quad 0 \quad c_2]^T$ donc $\vec{z}_0 = s_2 \vec{x}_2 + c_2 \vec{z}_2$.
- ${}^2z_1 = [0 \quad -1 \quad 0]^T$ donc $\vec{z}_1 = -\vec{y}_2$.

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Détails des calculs (suite)

On en déduit que :

- $\vec{J}_{L_1}^3 = (s_2 \vec{x}_2 + c_2 \vec{z}_2) \times (a_2 \vec{x}_2 + d_3 \vec{z}_2)$ donc $\vec{J}_{L_1}^3 = (-d_3 s_2 + a_2 c_2) \vec{y}_2$.
- $\vec{J}_{L_2}^3 = -\vec{y}_2 \times (a_2 \vec{x}_2 + d_3 \vec{z}_2)$ donc $\vec{J}_{L_2}^3 = a_2 \vec{z}_2 - d_3 \vec{x}_2$.

La jacobienne vectorielle s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_{n/0} \\ \vec{\omega}_{n/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (-d_3 s_2 + a_2 c_2) \vec{y}_2 & a_2 \vec{z}_2 - d_3 \vec{x}_2 & \vec{z}_2 \\ \vec{z}_0 & \vec{z}_1 & \vec{0} \end{bmatrix}}_{\text{jacobienne vectorielle}} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Détails des calculs (suite)

L'écriture la plus simple sera dans le repère \mathcal{R}_2 :

$$\begin{bmatrix} {}^2 v_{n/0} \\ {}^2 \omega_{n/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -d_3 & 0 \\ -d_3 s_2 + a_2 c_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 \\ s_2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{jacobienne exprimée dans } \mathcal{R}_2} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

Robot RRP - Calcul direct de la jacobienne

Détails des calculs (suite et fin)

Par projection dans le repère \mathcal{R}_0 , on obtient :

$$\begin{bmatrix} {}^0 v_{n/0} \\ {}^0 \omega_{n/0} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} d_3 s_1 s_2 - a_2 s_1 c_2 & -d_3 c_1 c_2 - a_2 c_1 s_2 & -c_1 s_2 \\ -d_3 c_1 s_2 + a_2 c_1 c_2 & -d_3 s_1 c_2 - a_2 s_1 s_2 & -s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 + a_2 c_2 & c_2 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{jacobienne exprimée dans } \mathcal{R}_0} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

- Vérification de ${}^0 \omega_{n/0}$?

Plan – Chapitre 4 I

1. Modèle cinématique direct

- 1.1 Définitions
- 1.2 Écriture du modèle cinématique direct par dérivation
- 1.3 Écriture directe de la jacobienne

2. Modèle cinématique inverse

- 2.1 Cas où $m = n$ et l'inverse de J existe
- 2.2 Configurations singulières
- 2.3 Cas où $n \text{ ddl} > m$ contraintes

Modèle cinématique inverse

Définition

- Le **MCI** est un système d'équations linéaires par rapport à \dot{q}

$$\underbrace{\dot{x}}_{m \times 1} = \underbrace{J(q)}_{m \times n} \underbrace{\dot{q}}_{n \times 1}$$

- Le **MCI** permet de calculer \dot{q} en fonction de \dot{x} . Ce calcul est réalisé en évaluant « l'**inverse** » de la matrice $J(q)$.
- Trois cas se présentent en fonction des valeurs de m et n .

Cas où $m = n$ et l'inverse de J existe

- Il y a **autant** de dll que de « **contraintes** » cinématiques imposées sur la vitesse d'évolution de l'organe terminal.
- La configuration articulaire est telle que $\det(J(q)) \neq 0$.

Dans ce cas, le **MCI** a pour expression :

$$\dot{q} = J^{-1}(q) \dot{x}$$

et la solution trouvée pour \dot{q} est unique.

~~> le MCI permet la commande en **vitesse** du mécanisme.

Configurations singulières

On appelle q^s une configuration **singulière** caractérisée par :

$$\det(J(q^s)) = 0$$

Cette situation se traduit par la **chute** du rang de la matrice jacobienne $J(q^s)$.

- Comparée à la situation **non singulière** où $n = m$ et $\det(J(q)) \neq 0$, on a :
 $\text{Rang}(J(q^s)) < n = m$.
- Il existe **au moins** un mouvement de C_n par rapport à C_0 impossible.

Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$

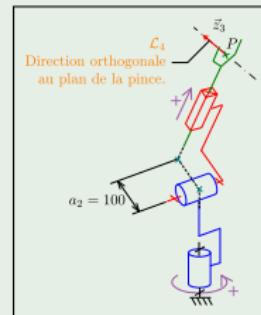
- On considère le MCD en position. Son écriture la plus simple se fait dans \mathcal{R}_2 :

$${}^2 v_{n/0} = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & 0 \\ -d_3 s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

- Le calcul du déterminant de ${}^2 J$ donne :

$$\det({}^2 J) = -d_3^2 s_2$$

- Le déterminant s'annule pour $\left\{ \begin{array}{l} d_3 = 0 \\ \theta_2 = k\pi \end{array} \right.$



Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$ - Choix de la base de projection

- Le même MCD en position exprimé dans \mathcal{R}_0 s'écrit :

$${}^0 v_{n/0} = \begin{bmatrix} d_3 s_1 s_2 & -d_3 c_1 c_2 & -c_1 s_2 \\ -d_3 c_1 s_2 & -d_3 s_1 c_2 & -s_1 s_2 \\ 0 & -d_3 s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

- Le déterminant de ${}^0 J$ continue de valoir :

$$\det({}^0 J) = -d_3^2 s_2$$

- Exprimer les matrices dans la base « la plus simple ».

Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$

- Le cas $d_3 = 0$ est peu probable en pratique (réalisation des liaisons \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_3) car d_3 sera certainement supérieur à une longueur positive d_0 . Il reste donc le cas $\theta_2 = k\pi$.
- Forme de la configuration singulière : $q^s = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ k\pi \\ d_3 \end{bmatrix}$. La matrice jacobienne s'écrit alors :

$${}^2J(q^s) = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$

- Interprétation de la singularité :
la vitesse de n par rapport à \mathcal{R}_0 s'écrit :

$$\vec{v}_{n/0} = \underbrace{-d_3 s_2 \vec{y}_2 \dot{\theta}_1}_{J_{L_1}^3} - \underbrace{d_3 \vec{x}_2 \dot{\theta}_2}_{J_{L_2}^3} + \underbrace{\vec{z}_2 d_3}_{J_{L_3}^3}$$

- Dans la configuration singulière q^s :

$$\vec{v}_{n/0} = \underbrace{0 \vec{y}_2 \dot{\theta}_1}_{J_{L_1}^3} - d_3 \vec{x}_2 \dot{\theta}_2 + \vec{z}_2 d_3$$

~~ mouvement suivant \vec{y}_2 impossible.

Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$

- En dehors de la configuration singulière, on peut calculer ${}^2J^{-1}$:

$${}^2J^{-1} = \frac{-1}{d_3 s_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 s_2 \end{bmatrix}$$

- Modèle pour la commande en vitesse du mécanisme :

$$\dot{q} = \frac{-1}{d_3 s_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 s_2 \end{bmatrix} {}^2v_{3/0}$$

Configurations singulières

Robot RRP avec $a_2 = 0$

- Le même calcul dans la base \mathcal{R}_0 donne :

$${}^0 J^{-1} = \frac{-1}{d_3 s_2} \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \\ c_1 s_2 c_2 & s_1 s_2 c_2 & s_2^2 \\ d_3 c_1 s_2^2 & d_3 s_1 s_2^2 & -d_3 s_2 c_2 \end{bmatrix}$$

- Modèle pour la commande en vitesse du mécanisme exprimé dans \mathcal{R}_0 :

$$\dot{q} = \frac{-1}{d_3 s_2} \begin{bmatrix} -s_1 & c_1 & 0 \\ c_1 s_2 c_2 & s_1 s_2 c_2 & s_2^2 \\ d_3 c_1 s_2^2 & d_3 s_1 s_2^2 & -d_3 s_2 c_2 \end{bmatrix} {}^0 v_{3/0}$$

Cas où $n \text{ ddl} > m$ contraintes

- Le MCD s'écrit :

$$\underbrace{\dot{x}}_{m \times 1} = \underbrace{J(q)}_{m \times n} \underbrace{\dot{q}}_{n \times 1}$$

Le rang de J vaut m .

- Il existe un noyau \mathcal{K} de la transformation linéaire : $\dot{q} \mapsto J\dot{q}$ tels que :
 $\forall \dot{q}^{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}, \quad J\dot{q}^{\mathcal{K}} = 0$
 - Le noyau \mathcal{K} est de dimension $n - m$.
 - On partitionne la matrice J en deux matrices J_1 et J_2 de dimensions respectives $m \times m$ et $m \times (n - m)$.
- Il existe $n - m$ variables q_i arbitraires telles que $\dot{q}^{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1^{\mathcal{K}} \\ \dot{q}_2^{\mathcal{K}} \end{bmatrix}$:

$$\forall \dot{q}^{\mathcal{K}}, \quad J\dot{q}^{\mathcal{K}} = 0 = J_1\dot{q}_1^{\mathcal{K}} + J_2\dot{q}_2^{\mathcal{K}}$$

Cas où $n \text{ ddl} > m \text{ contraintes}$

Interprétation physique

- À quoi correspond une vitesse articulaire du noyau ?

$$\forall \dot{q}^{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}, \quad J\dot{q}^{\mathcal{K}} = 0$$

~~ on peut faire déplacer le mécanisme de façon **interne** sans déplacement de l'organe terminal.

- On dit que le mécanisme est **redondant**.

Solution du problème

- On recherche une solution particulière \dot{q}_0 de l'équation $\dot{x} = J(q)\dot{q}$.

Cas où $n \text{ ddl} > m \text{ contraintes}$

Solution du problème

- Comment calculer \dot{q}_0 , solution de $\dot{x} = J \dot{q}$?
- On recherche une matrice G appelée **inverse généralisée** vérifiant la relation : $J G J \stackrel{\text{def}}{=} J$
 - J a pour dimension $m \times n$
 - G a pour dimension $n \times m$
 - G n'est pas unique
- Calcul de \dot{q}_0 :

$$\dot{x} = J \dot{q}_0$$

$$G \dot{x} = G J \dot{q}_0$$

$$J G \dot{x} = J G J \dot{q}_0$$

$$J G \dot{x} = J \dot{q}_0 \iff J(G \dot{x} - \dot{q}_0) = 0$$

$$G \dot{x} = \dot{q}_0$$

Inverses généralisées

Obtention des inverses généralisées

- Choix de m variables **principales** telles que J_1 ($m \times m$) soit **inversible**.
- Blocage de $(n - m)$ articulations correspondantes aux variables restantes : $\dot{q}_j = 0$.

Le MCD s'écrit alors :

$$\dot{x} = [J_1 \quad J_2] \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = J_1 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \text{ avec } J_1 \text{ **inversible**.}$$

Inverses généralisées

Obtention des inverses généralisées (suite)

- Le MCI s'écrit alors :

$$\dot{q}_1 = J_1^{-1} \dot{x}$$

et l'inverse généralisée vaut donc : $G = J_1^{-1}$.

- Pour faire un choix parmi toutes les solutions possibles pour G , on peut chercher celle qui **optimise** un certain critère :

- Par exemple, $w(\dot{q}) = \dot{q}^T M \dot{q}$ avec M une matrice $n \times n$ symétrique, définie et positive constitue un critère **quadratique**.

Exemple : $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{d}_3 \end{bmatrix}^T \mapsto a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + a_2^2 \dot{\theta}_2^2 + a_3^2 \dot{d}_3^2$$

$$w(\dot{q}) = \dot{q}^T M \dot{q} \text{ avec } M = \begin{bmatrix} a_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

Inverses généralisées

Obtention des inverses généralisées (suite)

- La solution du problème est solution du problème d'optimisation suivant :

Trouver \dot{q} tel que :
$$\begin{cases} \dot{x} = J \dot{q} \\ \min_{\dot{q}} w(\dot{q}) \end{cases}$$

Le terme $\min_{\dot{q}} w(\dot{q})$ correspond souvent en pratique à la minimisation d'un terme énergétique.

- On montre que la solution optimale vaut :

$$\dot{q} = \underbrace{M^{-1} J^T (J M^{-1} J^T)^{-1}}_G \dot{x}$$

Inverses généralisées

Obtention des inverses généralisées (suite et fin)

- Dans la solution optimale :

$$\dot{q} = \underbrace{M^{-1}J^T(JM^{-1}J^T)^{-1}}_G \dot{x}$$

l'inverse généralisée G permet de calculer la solution qui minimise le lagrangien du système.

- Pour $M = Id$, l'inverse généralisée porte le nom de **pseudo-inverse** et s'écrit :

$$G = J^T(JJ^T)^{-1}$$

Chapitre V

Génération de trajectoires

Génération de trajectoires I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

- 2.1 Résolution du problème a
- 2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

- 4.1 Interpolation de degré cinq
- 4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

- 5.1 Loi en trapèze de vitesse
- 5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération
- 5.3 Loi «sinus carré»

Chapitre 5

Génération de trajectoires

Cours de *Mécanique Appliquée*



Plan – Chapitre 5 I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

- 2.1 Résolution du problème a
- 2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

- 4.1 Interpolation de degré cinq
- 4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

- 5.1 Loi en trapèze de vitesse
- 5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération
- 5.3 Loi «sinus carré»

Génération de trajectoires

Tâches à réaliser

- Les tâches à réaliser par un mécanisme articulé se ramènent le plus souvent à la génération d'un **déplacement** de l'organe terminal.
- On peut décrire tout d'abord ce déplacement d'un point de vue géométrique puis spécifier les conditions cinématiques d'évolution :
 - vitesse ;
 - accélération.

Génération de trajectoires

Problèmes mécaniques soulevés par la génération de mouvements

- Les variations brutales de position, vitesse ou accélération doivent être évitées car elles nécessitent la mise en jeu de niveaux d'énergie **non bornés** que les actionneurs ne pourront pas fournir.
- Ces variations brutales surviennent par exemple lors d'une **collision** du mécanisme avec l'environnement.
- Si les collisions sont parfois imprévisibles et/ou inévitables, en revanche, la **commande appliquée** au mécanisme devra s'efforcer d'éviter les discontinuités qui se traduisent elles aussi par des **chocs**.

Plan – Chapitre 5 I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

2.1 Résolution du problème a

2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

4.1 Interpolation de degré cinq

4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

5.1 Loi en trapèze de vitesse

5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération

5.3 Loi «sinus carré»

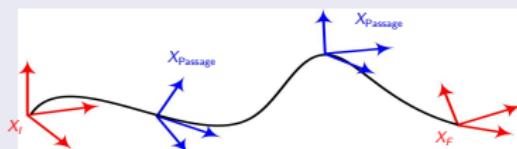
Génération de trajectoires

Formulation du problème

- Une tâche de déplacement d'une configuration initiale X_I à une configuration finale X_F peut être spécifiée
 - sans imposer les positions intermédiaires à atteindre entre X_I et X_F
 - ou, au contraire, en imposant des positions de passage entre X_I et X_F .
- Ces tâches de déplacement sont donc des évolutions **libres** ou **imposées** de la situation de l'organe terminal entre deux configurations imposées X_I et X_F .
- Ces évolutions peuvent être décrites au moyen d'un paramètre, par exemple, l'abscisse curviligne.



Problème a : évolution libre entre deux configurations imposées.



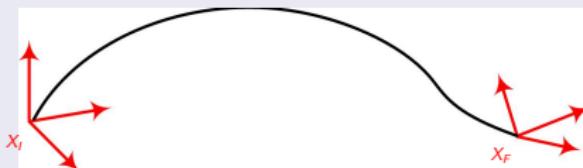
Problème b : évolution imposée entre deux configurations imposées.

Génération de trajectoires

Définitions

- On appelle **trajectoire opérationnelle** de l'organe terminal, l'évolution de la situation de l'organe terminal en fonction du paramètre.
- On appelle **mouvement opérationnel** de l'organe terminal, l'évolution de la situation de l'organe terminal en fonction du temps.
- Autrement dit, un **mouvement opérationnel** est l'association d'une trajectoire opérationnelle **et** d'une loi de mouvement sur cette trajectoire.
- On note \mathcal{T} la trajectoire articulaire paramétrée en fonction de l'abscisse curviligne s .
- q_I et q_F sont les coordonnées articulaires correspondantes aux situations initiale et finale X_I et X_F .

Résolution du problème a



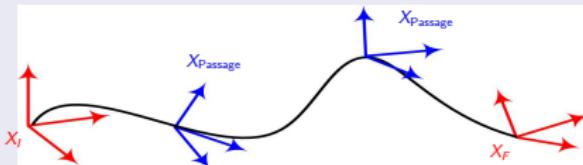
Problème a : évolution libre entre deux configurations imposées.

- Générer une trajectoire entre X_I et X_F , c'est trouver une fonction continue $q(s)$ telle que

$$\begin{cases} q(s_I) = \underline{q}_I \\ q(s_F) = \underline{q}_F \end{cases} .$$

- Pour un mécanisme à n degrés de liberté, $q(s)$ est construite à l'aide d'une **fonction d'interpolation** qui définit l'évolution des n articulations en fonction de s .

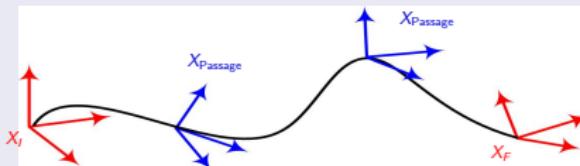
Résolution du problème b



Problème b : évolution imposée entre deux configurations imposées.

- Entre X_I et X_F , l'évolution de l'organe terminal est imposée.
- Pour générer une trajectoire entre X_I et X_F , il faut tout d'abord définir k configurations intermédiaires $[X_1 \dots X_k]$ entre X_I et X_F puis transformer ces configurations dans l'espace articulaire pour obtenir $k + 2$ coordonnées articulaires $[q_I, q_1, \dots, q_k, q_F]$.

Résolution du problème b



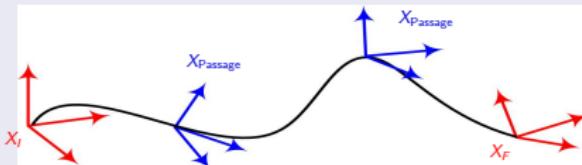
Problème b : évolution imposée entre deux configurations imposées.

- On recherche enfin la fonction continue $q(s)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} q(s_I) = q_I \\ q(s_1) = q_1 \\ \vdots \\ q(s_k) = q_k \\ q(s_F) = q_F \end{array} \right.$$

- Pour éviter les **chocs** sur la mécanique, on ajoute aux relations précédentes des conditions sur les **dérivées successives** de $q(s)$.

Résolution du problème b



Problème b : évolution imposée entre deux configurations imposées.

- La construction de $q(s)$ est réalisée en déterminant, pour chaque variable articulaire, $k + 1$ **fonctions d'interpolation** entre chaque couple de points (q_i, q_{i+1}) .
- La fidélité avec laquelle l'organe terminal suivra la trajectoire de l'espace opérationnel dépend directement de la **finesse** avec laquelle la trajectoire a été **découpée**.

Plan – Chapitre 5 I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

- 2.1 Résolution du problème a
- 2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

- 4.1 Interpolation de degré cinq
- 4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

- 5.1 Loi en trapèze de vitesse
- 5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération
- 5.3 Loi «sinus carré»

Interpolation de mouvement

Nous allons maintenant examiner plusieurs solutions classiques d'interpolation.

- On considère un mouvement opérationnel entre deux configurations articulaires q_I et q_F réalisé en un temps T .
- Aux instants $t = 0$ et $t = T$, les coordonnées articulaires q valent q_I et q_F .

Lois d'évolution articulaires

On se propose de représenter l'évolution de chaque articulation à l'aide d'une fonction s de la variable t^* choisie telle que

- $t^* \in [0; 1]$;
- t^* vérifie $t^* = \frac{t}{T}$ et $\forall t^* \in [0; 1], s(t^*) \in [0; 1]$.
- Ainsi, la loi d'évolution des coordonnées articulaires est de la forme

$$q(t) = q_I + (q_F - q_I)s(t^*)$$

et le polynôme s est **unitaire**.

Interpolation de mouvement

Lois d'évolution articulaires

- Les dérivées successives de $q(t)$ ont pour expression :

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{T}(q_F - q_I)s'(t^*),$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{T^2}(q_F - q_I)s''(t^*)$$

et

$$\dddot{q}(t) = \frac{1}{T^3}(q_F - q_I)s'''(t^*).$$

- Les conditions que doit vérifier la fonction s aux points d'extrémité sont du type :

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s(1) = 1, \quad s'(1) = 0, \quad s''(1) = 0$$

Génération de trajectoires

Problèmes à résoudre

Interpolation

Lois d'interpolation polynomiales

Autres lois de commande

Interpolation de degré cinq

Interpolation de degré sept

Plan – Chapitre 5 I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

2.1 Résolution du problème a

2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

4.1 Interpolation de degré cinq

4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

5.1 Loi en trapèze de vitesse

5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération

5.3 Loi «sinus carré»

Lois d'interpolation polynomiales

Choix de la fonction s

La fonction s choisie est un **polynôme unitaire** dont les coefficients vont être déterminés à l'aide des contraintes d'extrémité :

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s(1) = 1, \quad s'(1) = 0, \quad s''(1) = 0$$

Interpolation de degré cinq

Polynôme choisi

- Le polynôme choisi est de la forme :

$$s(t^*) = a_0 + a_1 t^* + a_2 t^{*2} + a_3 t^{*3} + a_4 t^{*4} + a_5 t^{*5}.$$

- Ses dérivées successives s'écrivent :

$$s'(t^*) = a_1 + 2a_2 t^* + 3a_3 t^{*2} + 4a_4 t^{*3} + 5a_5 t^{*4}$$

$$s''(t^*) = 2a_2 + 6a_3 t^* + 12a_4 t^{*2} + 20a_5 t^{*3}$$

- Les trois premières conditions ($s(0) = 0$, $s'(0) = 0$, $s''(0) = 0$) permettent de déduire que $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. Les trois coefficients suivants sont calculés en résolvant le système d'équations linéaires :

$$a_3 + a_4 + a_5 = 1$$

$$3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 0$$

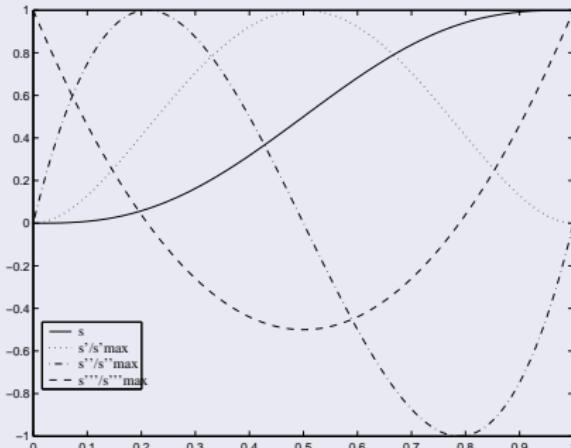
$$6a_3 + 12a_4 + 20a_5 = 0$$

Interpolation de degré cinq

Polynôme choisi

- La résolution conduit aux valeurs $a_3 = 10$, $a_4 = -15$ et $a_5 = 6$ qui définissent le polynôme unitaire recherché :

$$s(t^*) = 10t^{*3} - 15t^{*4} + 6t^{*5}.$$



Interpolation de degré cinq

Propriétés de l'interpolation de degré 5

- La figure précédente représente le polynôme s et ses trois premières dérivées rendues unitaires pour être à valeur dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- Afin de déterminer les valeurs de t^* pour lesquelles s' et s'' atteignent des valeurs maximales, il faut calculer les racines des dérivées seconde et troisième de s .
- Ces calculs donnent les valeurs suivantes :

$$s'_{max} = s'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}$$

$$s''_{max} = s''\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$s''_{min} = s''\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$s'''_{max} = s'''(0) = s'''(1) = 60$$

Interpolation de degré cinq

Propriétés de l'interpolation de degré 5

- Les relations

$$\dot{q}(t) = \frac{1}{T}(q_F - q_I)s'(t^*),$$

$$\ddot{q}(t) = \frac{1}{T^2}(q_F - q_I)s''(t^*)$$

permettent de calculer pour chaque articulation la durée T minimale de sorte que la vitesse et l'accélération restent dans les limites autorisées par les moteurs.

- Comme les moteurs sont généralement différents pour chaque axe, les valeurs minimales seront également différentes.
- De toutes les valeurs de T , il faut donc choisir la plus grande.

Interpolation de degré sept

Polynôme choisi

- On observe que, pour un polynôme de degré cinq, la dérivée troisième de s ne s'annule pas aux points d'extrémité (par là même, \ddot{q} ne s'annule pas aux extrémités).
- On dit alors que l'évolution articulaire présente un **jerk** non nul ce qui n'est pas souhaitable.
- Pour éviter cela, on ajoute aux conditions $s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \quad s''(0) = 0, \quad s(1) = 1, \quad s'(1) = 0, \quad s''(1) = 0$ deux conditions supplémentaires pour l'annulation de la dérivée troisième de s aux extrémités : $s'''(0) = 0$ et $s'''(1) = 0$.
- Le polynôme choisi est donc de degré sept et s'écrit :

$$s(t^*) = a_0 + a_1 t^* + a_2 t^{*2} + a_3 t^{*3} + a_4 t^{*4} + a_5 t^{*5} + a_6 t^{*6} + a_7 t^{*7}.$$

Interpolation de degré sept

Polynôme choisi

- Ses dérivées successives s'écrivent :

$$s'(t^*) = a_1 + 2a_2 t^* + 3a_3 t^{*2} + 4a_4 t^{*3} + 5a_5 t^{*4} + 6a_6 t^{*5} + 7a_7 t^{*6}$$

$$s''(t^*) = 2a_2 + 6a_3 t^* + 12a_4 t^{*2} + 20a_5 t^{*3} + 30a_6 t^{*4} + 42a_7 t^{*5}$$

$$s'''(t^*) = 6a_3 + 24a_4 t^* + 60a_5 t^{*2} + 120a_6 t^{*3} + 210a_7 t^{*4}$$

Interpolation de degré sept

Propriétés de l'interpolation de degré 7

- L'annulation de s et ses dérivées successives en 0 permet de déduire que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Les quatre coefficients suivants sont calculés en résolvant le système d'équations linéaires :

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1$$

$$4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 = 0$$

$$12a_4 + 20a_5 + 30a_6 + 42a_7 = 0$$

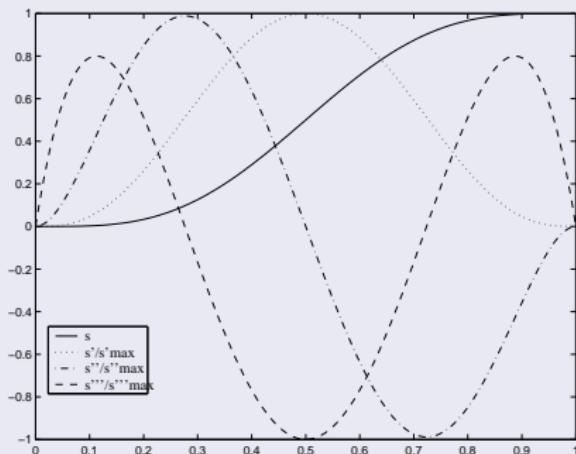
$$24a_4 + 60a_5 + 120a_6 + 210a_7 = 0$$

- La résolution conduit aux valeurs $a_4 = 35$, $a_5 = -84$, $a_6 = 70$ et $a_7 = -20$ qui définissent le polynôme unitaire recherché :

$$s(t^*) = 35t^{*4} - 84t^{*5} + 70t^{*6} - 20t^{*7}.$$

Interpolation de degré sept

Propriétés de l'interpolation de degré 7



Polynôme de degré 7 et ses dérivées successives unitaires.

- La figure précédente représente le polynôme s et ses trois premières dérivées rendues unitaires pour être à valeur dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Interpolation de degré sept

Propriétés de l'interpolation de degré 7

- Afin de déterminer les valeurs de t^* pour lesquelles s' et s'' atteignent des valeurs maximales, il faut calculer les racines des dérivées seconde et troisième de s .
- Ces calculs donnent les valeurs suivantes :

$$s'_{max} = s'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{35}{16}$$

$$s''_{max} = s''\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = \frac{85\sqrt{5}}{25}$$

$$s''_{min} = s''\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) = -\frac{85\sqrt{5}}{25}$$

$$s'''_{max} = s'''\left(\frac{1}{2} - \frac{1 \pm \sqrt{3/5}}{2}\right) = 42$$

$$s'''_{min} = s'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{105}{2}$$

Interpolation de degré sept

Propriétés de l'interpolation de degré 7

- Comme dans le cas du polynôme de degré cinq, on peut utiliser les équations précédentes pour calculer le temps de parcours minimal T compatible avec les limitations des actionneurs.

Génération de trajectoires

Problèmes à résoudre

Interpolation

Lois d'interpolation polynomiales

Autres lois de commande

Loi en trapèze de vitesse

Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération

Loi «sinus carré»

Plan – Chapitre 5 I

1. Génération de trajectoires

2. Problèmes à résoudre

2.1 Résolution du problème a

2.2 Résolution du problème b

3. Interpolation

4. Lois d'interpolation polynomiales

4.1 Interpolation de degré cinq

4.2 Interpolation de degré sept

5. Autres lois de commande

5.1 Loi en trapèze de vitesse

5.2 Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération

5.3 Loi «sinus carré»

Autres lois de commande

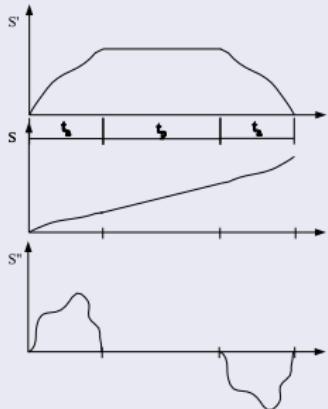
Forme générale des lois

- Les lois présentées ici sont construites pour décrire une évolution composée
 - d'un régime transitoire d'accélération ;
 - d'un régime permanent à vitesse constante ;
 - et d'un régime transitoire de décélération (en général symétrique du premier).
- Pour simplifier, on suppose que les régimes transitaires sont symétriques et on désigne par t_a et t_p les durées des régimes transitoire et permanent. Le temps total du mouvement vaut alors $T = 2t_a + t_p$.

Autres lois de commande

Forme générale des lois

- Les évolutions de s et ses dérivées successives sont du type de celles représentées sur la figure suivante.

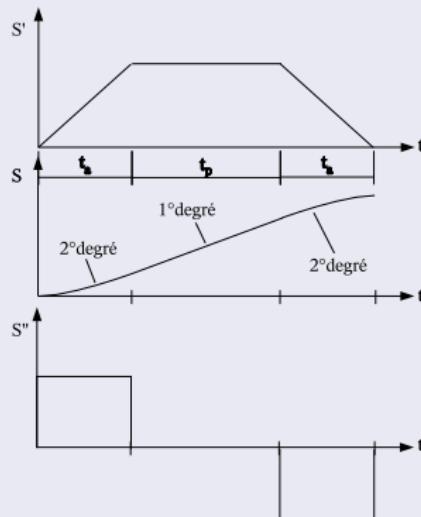


Loi de commande générale.

Loi en trapèze de vitesse

Forme de la loi en trapèze de vitesse

- Comme son nom l'indique, la vitesse augmente **linéairement** puis reste constante et diminue linéairement jusqu'à zéro.
- Lorsque $t_p = 0$, cette loi est appelée loi **bang-bang**.
- Comme le suggère ce nom, ce type de commande occasionne des **chocs** mécaniques.

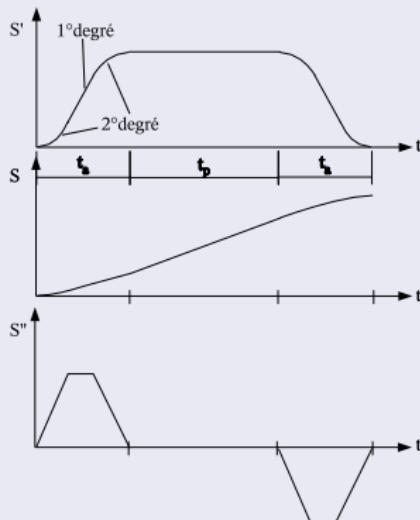


Loi en trapèze de vitesse.

Loi cubique - Loi en trapèze d'accélération

Forme de la loi en trapèze d'accélération

- Pour améliorer les phases **transitoires**, on envisage de remplacer les **échelons** d'accélération et de décélération par des **trapèzes**.
- Cette modification permet d'obtenir la continuité des accélérations sans pour autant éliminer le **jerk** (dérivée troisième discontinue).



Loi cubique.

Loi «sinus carré»

Forme de la loi en «sinus carré»

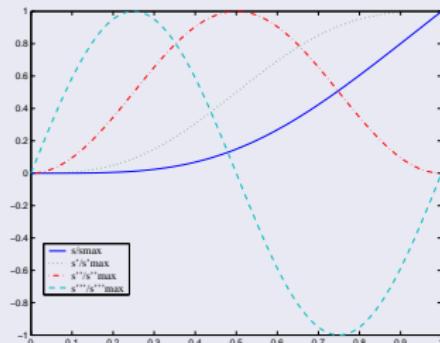
- Sur l'intervalle $[0; t_a]$, la loi d'accélération articulaire est choisie sous la forme :

$$s''(t) = a \sin^2\left(\frac{\pi t}{t_a}\right) = \frac{a}{2} \left[1 - \cos \frac{2\pi t}{t_a}\right]$$

- Par intégration, on obtient :

$$s'(t) = \frac{a}{2} \left[t - \frac{t_a}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{t_a}\right]$$

$$s(t) = \frac{a}{4} \left[t^2 + \frac{t_a^2}{2\pi^2} \cos \frac{2\pi t}{t_a} - \frac{t_a^2}{2\pi^2}\right]$$



Loi d'accélération en sinus².

- Les transitoires en sinus² offrent, outre la continuité en accélération, un des meilleurs compromis rapidité-durée de vie pour l'ensemble de la chaîne de commande.

Chapitre VI

Dynamique des systèmes mécaniques articulés

Dynamique des systèmes mécaniques articulés I

1. Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

2. Formulation de Newton-Euler

2.1 Théorèmes généraux

2.2 Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

- Calcul cinétiques - Récurrence avant
- Calculs dynamiques - Récurrence arrière

2.3 Application : mécanisme plan RR

3. Formulation de Lagrange

3.1 Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

3.2 Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

3.3 Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

3.4 Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

3.5 Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

- Efforts généralisés dûs à la pesanteur
- Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

3.6 Équations du mouvement

3.7 Identification avec Newton-Euler

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Dynamique des systèmes mécaniques articulés II

3.8 Application : mécanisme plan RR

- Calcul des vitesses linéaires et angulaires
- Calcul de la matrice d'inertie
- Comparaison des termes

Chapitre 6

Dynamique des systèmes mécaniques articulés

Cours de *Mécanique Appliquée*



Plan – Chapitre 6 I

1. Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

2. Formulation de Newton-Euler

2.1 Théorèmes généraux

2.2 Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

- Calcul cinétiques - Récurrence avant
- Calculs dynamiques - Récurrence arrière

2.3 Application : mécanisme plan RR

3. Formulation de Lagrange

3.1 Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

3.2 Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

3.3 Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

3.4 Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

3.5 Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

- Efforts généralisés dûs à la pesanteur
- Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

3.6 Équations du mouvement

3.7 Identification avec Newton-Euler

Plan – Chapitre 6 II

3.8 Application : mécanisme plan RR

- Calcul des vitesses linéaires et angulaires
- Calcul de la matrice d'inertie
- Comparaison des termes

Objectifs de l'analyse dynamique de mécanismes

Objectifs

Principales motivations pour l'étude dynamique d'un mécanisme :

- Conception de la **structure mécanique** d'un système
 - Simulation du comportement dynamique
 - Vérification du dimensionnement
- Conception d'un **système de commande**.
 - Élaboration des modèles pour la commande
 - Prise en compte des effets dynamiques pour commander à vitesse élevée

Objectifs de l'analyse dynamique de mécanismes

Cas d'un solide unique

Dans le cas d'un **solide unique** C , il s'agit de trouver les relations entre les efforts appliqués et le torseur dynamique.

$$\begin{array}{ccc} \text{Efforts appliqués} & \rightleftharpoons & \dot{\vec{v}}_{G,C/\mathcal{R}_g}(t), \dot{\vec{\omega}}_{C/\mathcal{R}_g}(t) \\ \vec{F}(t), \vec{N}(t) & & \text{Accélération} \\ & & (\text{torseur dynamique}) \end{array}$$

Objectifs de l'analyse dynamique de mécanismes

Cas d'un mécanisme multi-corps

Pour un **mécanisme multi-corps**, on recherche les relations entre les efforts appliqués aux liaisons (efforts moteurs et de guidage) et l'accélération de l'organe terminal dans l'espace cartésien.

Efforts appliqués aux
liaisons

- moteurs $\tau_i(t)$
- de guidage

\rightleftharpoons

Accélérations
articulaires $\ddot{q}_i(t)$

\rightleftharpoons

Accélération
organe terminal
dans l'espace cartésien
 $\vec{v}_{G_n, C_n / \mathcal{R}_g}(t), \vec{\omega}_{C_n / \mathcal{R}_g}(t)$

Formulations pour l'analyse dynamique

Formulations

Plusieurs formulations sont utilisables.

- Formulation de **Newton-Euler**

- Application des théorèmes généraux à chaque corps C_i
- Calcul des relations cinématiques entre chaque solide
- Calcul des efforts aux liaisons

- Formulation de **Lagrange**

- Principe des puissances virtuelles appliqué au mécanisme complet isolé
- Champ de vitesses cinématiquement admissible
 - Élimination des inconnues de liaison
- Obtention des équations du mouvement

Plan – Chapitre 6 I

1. Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

2. Formulation de Newton-Euler

2.1 Théorèmes généraux

2.2 Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

- Calcul cinétiques - Récurrence avant
- Calculs dynamiques - Récurrence arrière

2.3 Application : mécanisme plan RR

3. Formulation de Lagrange

3.1 Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

3.2 Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

3.3 Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

3.4 Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

3.5 Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

- Efforts généralisés dûs à la pesanteur
- Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

3.6 Équations du mouvement

3.7 Identification avec Newton-Euler

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorèmes généraux

Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Plan – Chapitre 6 II

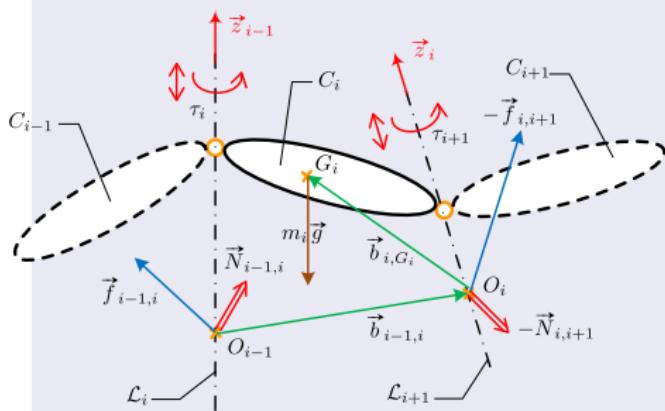
3.8 Application : mécanisme plan RR

- Calcul des vitesses linéaires et angulaires
- Calcul de la matrice d'inertie
- Comparaison des termes

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

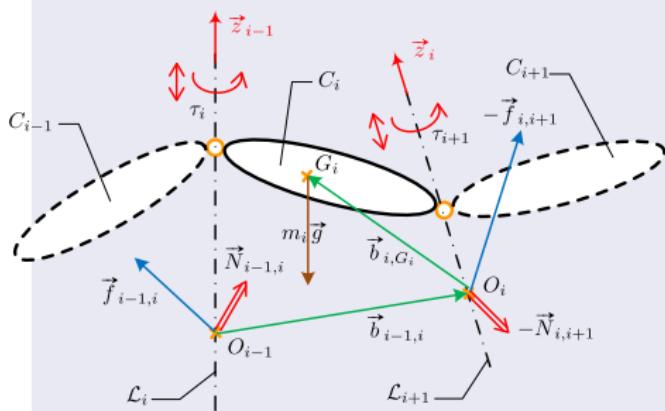


- Pesanteur
- Solide C_{i-1} placé en amont
- Solide C_{i+1} situé en aval
- Efforts moteurs τ_i et τ_{i+1}

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.



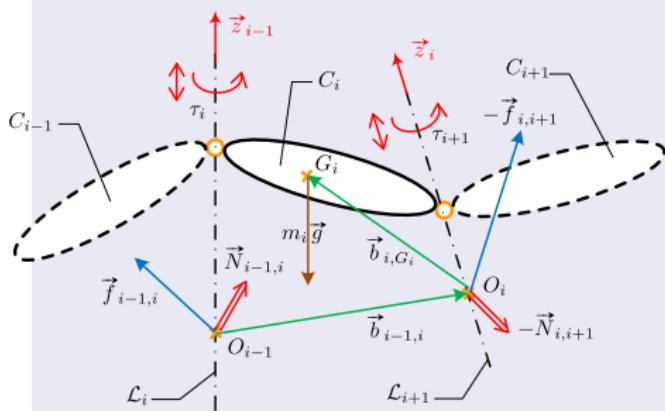
● Pesanteur

- Solide C_{i-1} placé en amont
- Solide C_{i+1} situé en aval
- Efforts moteurs τ_i et τ_{i+1}

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

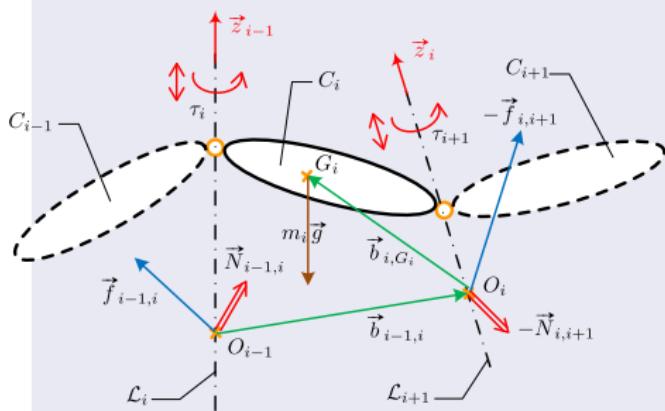


- Pesanteur
- Solide C_{i-1} placé en amont
- Solide C_{i+1} situé en aval
- Efforts moteurs τ_i et τ_{i+1}

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

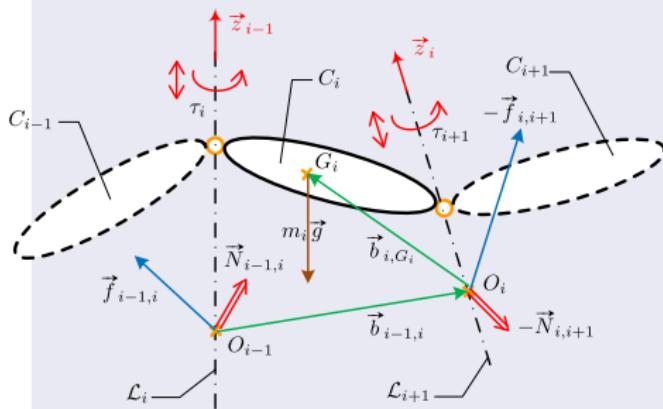


- Pesanteur
- Solide C_{i-1} placé en amont
- Solide C_{i+1} situé en aval
- Efforts moteurs τ_i et τ_{i+1}

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

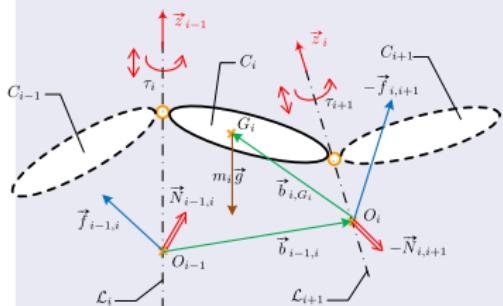


- Pesanteur
- Solide C_{i-1} placé en amont
- Solide C_{i+1} situé en aval
- Efforts moteurs τ_i et τ_{i+1}

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

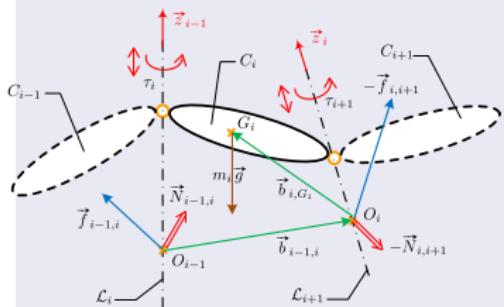


- $\vec{f}_{i,j}$: effort exercé par C_i sur C_j
- $\vec{N}_{i,j}$: couple exercé par C_i sur C_j , exprimé au point O_i
- $m_i \vec{g}$ action de la pesanteur

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

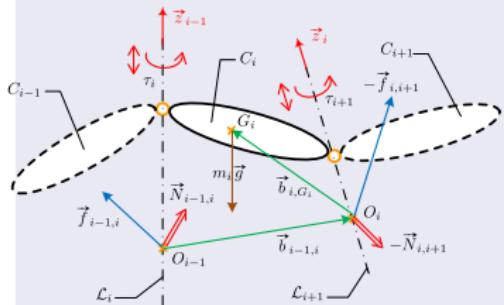


- $\vec{f}_{i,j}$: effort exercé par C_i sur C_j
- $\vec{N}_{i,j}$: couple exercé par C_i sur C_j , exprimé au point O_i
- $m_i \vec{g}$ action de la pesanteur

Théorèmes généraux

Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.

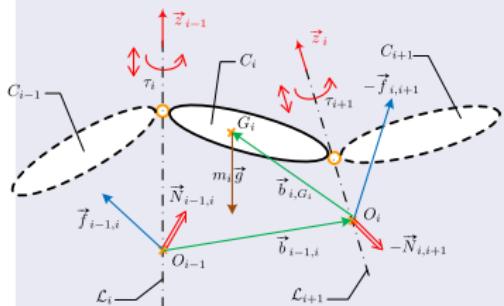


- $\vec{f}_{i,j}$: effort exercé par C_i sur C_j
- $\vec{N}_{i,j}$: couple exercé par C_i sur C_j , exprimé au point O_i
- $m_i \vec{g}$ action de la pesanteur

Théorèmes généraux

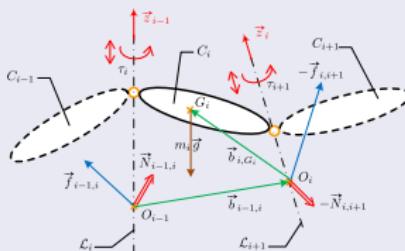
Bilan des efforts extérieurs à C_i

On isole le corps C_i pour lui appliquer les théorèmes généraux.



- $\vec{f}_{i,j}$: effort exercé par C_i sur C_j
- $\vec{N}_{i,j}$: couple exercé par C_i sur C_j , exprimé au point O_i
- $m_i \vec{g}$ action de la pesanteur

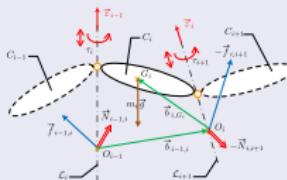
Théorème de la résultante dynamique



Le théorème de la résultante dynamique appliquée au corps C_i s'écrit (Newton) :

$$\vec{f}_{i-1,i} - \vec{f}_{i,i+1} + m_i \vec{g} = m_i \dot{\vec{v}}_{G_i, C_i / \mathcal{R}_g}$$

Théorème du moment dynamique



Le théorème du moment dynamique appliqué au corps C_i , exprimé en G_i , s'écrit (Euler) :

$$\vec{N}_{i-1,i} - \vec{N}_{i,i+1} + \overrightarrow{G_i O_{i-1}} \times \vec{f}_{i-1,i} - \overrightarrow{G_i O_i} \times \vec{f}_{i,i+1} = \vec{\delta}_{G_i, C_i / \mathcal{R}_g}$$

Après calcul de $\vec{\delta}_{G_i, C_i / \mathcal{R}_g}$ en fonction des grandeurs cinématiques et cinétiques, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\boxed{\vec{N}_{i-1,i} - \vec{N}_{i,i+1} + \overrightarrow{G_i O_{i-1}} \times \vec{f}_{i-1,i} - \overrightarrow{G_i O_i} \times \vec{f}_{i,i+1} = \vec{\delta}_{G_i, C_i / \mathcal{R}_g} = \vec{J}_{G_i}(C_i) \vec{\omega}_{i/\mathcal{R}_g} + \vec{\omega}_{i/\mathcal{R}_g} \times \vec{J}_{G_i}(C_i) \vec{\omega}_{i/\mathcal{R}_g}}$$

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\vec{v}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\dot{\vec{v}}_{G_n, C_n / \mathcal{R}_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n / \mathcal{R}_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\vec{v}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\dot{\vec{v}}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\dot{\vec{v}}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\dot{\vec{v}}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Modèle dynamique inverse

Le modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler.

C'est quoi ?

Connaissant $\dot{\vec{v}}_{G_n, C_n/R_g}(t)$ et $\dot{\vec{\omega}}_{C_n/R_g}(t)$ on cherche à évaluer les efforts articulaires.

Comment ?

Transformation des équations de la dynamique en équations du mouvement par élimination des efforts de liaison

Algorithme ?

- Récurrence avant
- Récurrence arrière

Calculs cinématiques

Calcul et élimination
des efforts aux liaisons

Calcul cinématiques - Récurrence avant

Vitesses et accélérations linéaires

Pour i variant de 1 à n , les vitesses et accélérations angulaires ont pour expression :

$$\vec{\omega}_i = \begin{cases} \vec{\omega}_{i-1} + \dot{\theta}_i \vec{z}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type R,} \\ \vec{\omega}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type P.} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_i = \begin{cases} \vec{\omega}_{i-1} + \ddot{\theta}_i \vec{z}_{i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \times \dot{\theta}_i \vec{z}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type R,} \\ \dot{\vec{\omega}}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type P.} \end{cases}$$

Calcul cinématiques - Récurrence avant

Vitesses et accélérations linéaires

Pour i variant de 1 à n , les vitesses et accélérations angulaires ont pour expression :

$$\vec{v}_{G_i} = \begin{cases} \vec{v}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i} & \text{si la liaison } i \text{ est de type R,} \\ \vec{v}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i} + \dot{d}_i \vec{z}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type P.} \end{cases}$$

$$\dot{\vec{v}}_{G_i} = \begin{cases} \dot{\vec{v}}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i}) & \text{si type R,} \\ \dot{\vec{v}}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1}G_i}) + \\ 2\dot{d}_i \vec{\omega}_i \times \vec{z}_{i-1} + \ddot{d}_i \vec{z}_{i-1} & \text{si type P.} \end{cases}$$

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Calcul des efforts et moments aux liaisons

Pour i variant de n à 1, les efforts et moments aux liaisons ont pour expression :

$$\begin{aligned}\vec{f}_{i-1,i} &= m_i (\dot{\vec{v}}_{G_i} - \vec{g}) + \vec{f}_{i,i+1} \\ \vec{N}_{i-1,i} &= \bar{\vec{J}}_{G_i}(C_i) \vec{\omega}_i + \vec{\omega}_i \times \bar{\vec{J}}_{G_i}(C_i) \vec{\omega}_i \\ &\quad + \overrightarrow{O_{i-1}G_i} \times \vec{f}_{i-1,i} - \overrightarrow{O_iG_i} \times \vec{f}_{i,i+1} + \vec{N}_{i,i+1}\end{aligned}$$

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Calcul des efforts et moments articulaires

Il reste à éliminer les **efforts de guidage** ce qui est réalisé en projetant les efforts suivant l'axe de la liaison considérée.

On obtient de cette façon les efforts moteurs :

$$\tau_i = \begin{cases} \vec{f}_{i-1,i} \cdot \vec{z}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type P,} \\ \vec{N}_{i-1,i} \cdot \vec{z}_{i-1} & \text{si la liaison } i \text{ est de type R.} \end{cases}$$

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Écriture en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$

Efforts moteurs à écrire en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$.

Pour un manipulateur à **structure série** à n ddl :

$$\underbrace{\tau}_{n \times 1} = \underbrace{A(q)}_{n \times n} \underbrace{\ddot{q}}_{n \times 1} + \underbrace{B(q)}_{n \times n} \underbrace{\dot{q}^2}_{n \times 1} + \underbrace{C(q)}_{n \times \frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\dot{q}\dot{q}}_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1} + \underbrace{G(q)}_{n \times 1}$$

- A effets d'inertie
- B effets centrifuges
- C effets de Coriolis
- G efforts d'interaction et pesanteur

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Écriture en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$

Efforts moteurs à écrire en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$.

Pour un manipulateur à **structure série** à n ddl :

$$\underbrace{\tau}_{n \times 1} = \underbrace{A(q)}_{n \times n} \underbrace{\ddot{q}}_{n \times 1} + \underbrace{B(q)}_{n \times n} \underbrace{\dot{q}^2}_{n \times 1} + \underbrace{C(q)}_{n \times \frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\dot{q}\dot{q}}_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1} + \underbrace{G(q)}_{n \times 1}$$

● A

effets d'inertie

● B

effets centrifuges

● C

effets de Coriolis

● G

efforts d'interaction
et pesanteur

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Écriture en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\ddot{q}$

Efforts moteurs à écrire en fonction des q , \dot{q} , \dot{q}^2 et $\ddot{q}q$.

Pour un manipulateur à structure série à n ddl :

$$\underbrace{\tau}_{n \times 1} = \underbrace{A(q)}_{n \times n} \underbrace{\ddot{q}}_{n \times 1} + \underbrace{B(q)}_{n \times n} \underbrace{\dot{q}^2}_{n \times 1} + \underbrace{C(q)}_{n \times \frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\dot{q}\dot{q}}_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1} + \underbrace{G(q)}_{n \times 1}$$

- *A* effets d'inertie
 - *B* effets centrifugés
 - *C* effets de Coriolis
 - *G* efforts d'interaction et pesanteur

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Écriture en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$

Efforts moteurs à écrire en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$.

Pour un manipulateur à **structure série** à n ddl :

$$\underbrace{\tau}_{n \times 1} = \underbrace{A(q)}_{n \times n} \underbrace{\ddot{q}}_{n \times 1} + \underbrace{B(q)}_{n \times n} \underbrace{\dot{q}^2}_{n \times 1} + \underbrace{C(q)}_{n \times \frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\dot{q}\dot{q}}_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1} + \underbrace{G(q)}_{n \times 1}$$

- A effets d'inertie
- B effets centrifuges
- C effets de Coriolis
- G efforts d'interaction et pesanteur

Calculs dynamiques - Récurrence arrière

Écriture en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$

Efforts moteurs à écrire en fonction des q , \ddot{q} , \dot{q}^2 et $\dot{q}\dot{q}$.

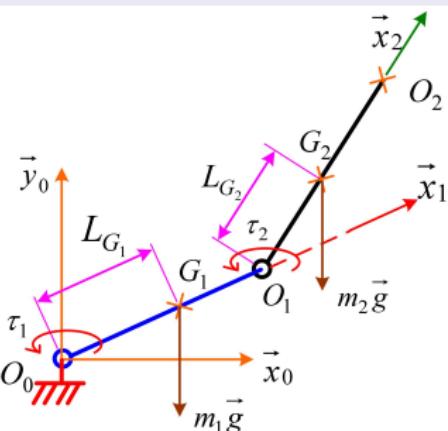
Pour un manipulateur à **structure série** à n ddl :

$$\underbrace{\tau}_{n \times 1} = \underbrace{A(q)}_{n \times n} \underbrace{\ddot{q}}_{n \times 1} + \underbrace{B(q)}_{n \times n} \underbrace{\dot{q}^2}_{n \times 1} + \underbrace{C(q)}_{n \times \frac{n(n-1)}{2}} \underbrace{\dot{q}\dot{q}}_{\frac{n(n-1)}{2} \times 1} + \underbrace{G(q)}_{n \times 1}$$

- A effets d'inertie
- B effets centrifuges
- C effets de Coriolis
- G efforts d'interaction et pesanteur

Application : mécanisme plan RR

Présentation du mécanisme



Mécanisme plan à deux barres

- de longueur L_1 et L_2 ,
- de masse m_1 et m_2 ,
- de centre de gravité G_1 et G_2 , situés à L_{G_1} et L_{G_2} ,
- action de la pesanteur est verticale descendante.

Matrice d'inertie des C_i , au point G_i ,

$$\text{dans } \mathcal{R}_i : J_{G_i}(C_i) = \begin{bmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_i} .$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorèmes généraux

Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Application : mécanisme plan RR

Équations de la dynamique

$$\text{Corps } C_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_{0,1} + \vec{f}_{2,1} + m_1 \vec{g} = m_1 \dot{\vec{v}}_{G_1} \\ \vec{N}_{0,1} + \vec{N}_{2,1} - L_{G_1} \vec{x}_1 \times \vec{f}_{0,1} + (L_1 - L_{G_1}) \vec{x}_1 \times \vec{f}_{2,1} = \\ \quad \bar{\bar{J}}_{G_1}(C_1) \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_1 \times \bar{\bar{J}}_{G_1}(C_1) \vec{\omega}_1 \end{array} \right.$$

$$\text{Corps } C_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}_{1,2} + m_2 \vec{g} = m_2 \dot{\vec{v}}_{G_2} \\ \vec{N}_{1,2} - L_{G_2} \vec{x}_2 \times \vec{f}_{1,2} = \bar{\bar{J}}_{G_2}(C_2) \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_2 \times \bar{\bar{J}}_{G_2}(C_2) \vec{\omega}_2 \end{array} \right.$$

Application : mécanisme plan RR

Phase a - Calculs cinématiques

- Phase a.1 : Calcul des vitesses et accélérations angulaires.

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\vec{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 \vec{z}_0$$

$$\vec{\omega}_2 = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0$$

$$\vec{\omega}_2 = (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{z}_0$$

- Phase a.2 : Calcul des vitesses et accélérations linéaires.

$$\vec{v}_{G_1} = L_{G_1} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

$$\dot{\vec{v}}_{G_1} = L_{G_1} (\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1)$$

$$\vec{v}_{G_2} = L_1 \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + L_{G_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{y}_2$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_{G_2} = & L_1 (\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + \\ & L_{G_2} [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 \\ & - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2]\end{aligned}$$

Application : mécanisme plan RR

Phase b - Calculs des efforts aux liaisons

- Efforts et moments de C_1 sur C_2

$$\begin{aligned}\vec{f}_{1,2} = & m_2 [g \vec{y}_0 + L_1(\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) \\ & + L_{G_2} [(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2]] \\ \vec{N}_{1,2} = & J_{2z}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{z}_0 + m_2 L_{G_2} \vec{x}_2 \times [g \vec{y}_0 \\ & + L_1(\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + L_{G_2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2]\end{aligned}$$

Application : mécanisme plan RR

Phase b - Calculs des efforts aux liaisons

- Efforts et moments de C_0 sur C_1

$$\vec{f}_{0,1} = m_1 [g \vec{y}_0 + L_{G_1}(\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1)] + \\ m_2 [g \vec{y}_0 + L_1(\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + L_{G_2}[(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2]]$$

$$\vec{N}_{0,1} = J_{1z}\ddot{\theta}_1 \vec{z}_0 + J_{2z}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{z}_0 + \\ m_2 L_{G_2} \vec{x}_2 \times [g \vec{y}_0 + L_1(\ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - \dot{\theta}_1^2 \vec{x}_1) + L_{G_2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2] + \\ m_1 L_{G_1} \vec{x}_1 \times [g \vec{y}_0 + L_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1] + \\ m_2 L_{G_1} \vec{x}_1 \times [g \vec{y}_0 + L_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 + L_{G_2}[(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2]] + \\ m_2 (L_1 - L_{G_1}) \vec{x}_1 \times [g \vec{y}_0 + L_1 \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 + L_{G_2}[(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \vec{y}_2 - (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \vec{x}_2]]$$

Application : mécanisme plan RR

Phase c - Calculs des efforts moteurs

Le calcul des **couples articulaires** se fait par projection des moments calculés précédemment :

$$\begin{cases} \tau_1 = \vec{N}_{0,1} \cdot \vec{z}_0 \\ \tau_2 = \vec{N}_{1,2} \cdot \vec{z}_0 \end{cases}$$

On peut écrire ces couples moteurs sous la forme :

$$\begin{cases} \tau_1 = A_{11} \ddot{\theta}_1 + A_{12} \ddot{\theta}_2 + B_{12} \dot{\theta}_2^2 + C_{112} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + G_1 \\ \tau_2 = A_{21} \ddot{\theta}_1 + A_{22} \ddot{\theta}_2 + B_{21} \dot{\theta}_1^2 + G_2 \end{cases}$$

puis, on identifie les termes des matrices A , B , C et G .

Application : mécanisme plan RR

Phase c - Calculs des efforts moteurs

Les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{112} \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$A_{11} = I_{1z} + I_{2z} + m_1 L_{G_1}^2 + m_2 (L_1^2 + L_{G_2}^2 + 2L_1 L_{G_2} \cos \theta_2)$$

$$A_{12} = A_{21} = I_{2z} + m_2 (L_{G_2}^2 + L_1 L_{G_2} \cos \theta_2)$$

$$A_{22} = I_{2z} + m_2 L_{G_2}^2$$

$$B_{12} = -B_{21} = -m_2 L_1 L_{G_2} \sin \theta_2$$

$$C_{112} = -2m_2 L_1 L_{G_2} \sin \theta_2$$

$$G_1 = g [m_1 L_{G_1} \cos \theta_1 + m_2 (L_1 \cos \theta_1 + L_{G_2} \cos (\theta_1 + \theta_2))]$$

$$G_2 = g m_2 L_{G_2} \cos (\theta_1 + \theta_2)$$

Plan – Chapitre 6 I

1. Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

2. Formulation de Newton-Euler

2.1 Théorèmes généraux

2.2 Modèle dynamique inverse itératif de Newton-Euler

- Calcul cinématiques - Récurrence avant
- Calculs dynamiques - Récurrence arrière

2.3 Application : mécanisme plan RR

3. Formulation de Lagrange

3.1 Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

3.2 Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

3.3 Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

3.4 Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

3.5 Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

- Efforts généralisés dûs à la pesanteur
- Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

3.6 Équations du mouvement

3.7 Identification avec Newton-Euler

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Plan – Chapitre 6 II

3.8 Application : mécanisme plan RR

- Calcul des vitesses linéaires et angulaires
- Calcul de la matrice d'inertie
- Comparaison des termes

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Formulation de Lagrange

Théorème (Théorème des puissances virtuelles)

Il existe \mathcal{R}_g , repère absolu (ou Galiléen) tel que, $\forall \mathcal{D}$ (ensemble matériel), $\forall t$ et $\forall \vec{v}^*$ (champ de vitesses virtuelles quelconque défini sur \mathcal{D}) :

$$\mathcal{P}_{acc}^* = \mathcal{P}_{int}^* + \mathcal{P}_{ext}^*$$

avec

$$\mathcal{P}_{acc}^* = \int_{\mathcal{D}} \dot{\vec{v}}_{M/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}_M^* dm$$

$$\mathcal{P}_{int}^* = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_L} \vec{F}_L \cdot \vec{v}_M^* d\mu}_{\text{(forces de liaison)}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} -\sigma_{ij} \cdot \Delta_{ij}^* dV}_{=0 \text{ (solides rigides)}}$$

$$\mathcal{P}_{ext}^* = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P^* d\mu}_{\text{(forces surfaciques)}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \vec{f}_M \cdot \vec{v}_M^* dV}_{\text{(forces volumiques)}}$$

Hypothèses et construction du champ virtuel

Champ des vitesses réelles

- Ensemble matériel \mathcal{D} repéré par n paramètres indépendants
- Vecteur position $\overrightarrow{OM}(q_1, \dots, q_n, t) \equiv$ Fonction vectorielle de $n + 1$ variables
- Vitesse réelle d'un point M de \mathcal{D} par rapport à \mathcal{R}_g :

$$\vec{v}_M = \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t}}_a + \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i}}_b \dot{q}_i$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ vitesse partielle relative au temps } t \\ b \text{ vitesse partielle relative au paramètre } q_i \end{array} \right.$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Hypothèses et construction du champ virtuel

Construction du champ virtuel

Choix pour le champ de vitesses virtuelles \vec{v}^*

- Champ cinématiquement admissible (ou compatible avec les liaisons) à t fixé
- Basé sur le champ des vitesses réelles

Forme générale d'un tel champ :

$$\vec{v}^* = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \dot{q}_i^*$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération

Évaluation de la puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération :

$$\mathcal{P}_{\text{acc}}^* = \int_{\mathcal{D}} \dot{\vec{v}}_{M/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}_M^* dm$$

- Sans calcul explicite de l'accélération $\dot{\vec{v}}_{M/\mathcal{R}_g}$.
- Relation cinématique de Lagrange pour calculer $\dot{\vec{v}}_{M/\mathcal{R}_g} \cdot \vec{v}_M^*$.

On obtient :

$$\mathcal{P}_{\text{acc}}^* = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i^* = \sum_{i=1}^n D_i \dot{q}_i^*$$

où T représente l'énergie cinétique du système et D_i désigne l'effort généralisé dû aux quantités d'accélération, relatif au paramètre q_i .

Calcul de l'énergie cinétique

L'ensemble matériel \mathcal{D} est composé de n solides C_i rigides indéformables.

L'énergie cinétique totale T est égale à la somme des énergies cinétiques T_i de chaque solide C_i .

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \text{ avec } 2 T_i = m_i \vec{v}_{G_i}^2 + \vec{\omega}_i \cdot \bar{\bar{J}}_{G_i} \vec{\omega}_i$$

Les vitesses \vec{v}_{G_i} et $\vec{\omega}_i$ sont calculées à partir des relations de récurrence rappelées ci-dessous :

$$\begin{cases} \vec{\omega}_i &= \vec{\omega}_{i|i-1} + \vec{\omega}_{i-1} \\ \vec{v}_{G_i} &= \vec{v}_{O_{i-1}} + \vec{\omega}_i \times \overrightarrow{O_{i-1} G_i} + \frac{d\mathcal{R}_{i-1}}{dt} \overrightarrow{O_{i-1} G_i} \end{cases}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Calcul de l'énergie cinétique

L'ensemble matériel \mathcal{D} est composé de n solides C_i rigides indéformables.

L'énergie cinétique totale T est égale à la somme des énergies cinétiques T_i de chaque solide C_i .

$$T = \sum_{i=1}^n T_i \text{ avec } 2 T_i = m_i \vec{v}_{G_i}^2 + \vec{\omega}_i \cdot \bar{\bar{J}}_{G_i} \vec{\omega}_i$$

Expression des vitesses \vec{v}_{G_i} et $\vec{\omega}_i$ en fonction des vitesses articulaires \dot{q}_i :

$$\begin{cases} \vec{v}_{G_i} &= \vec{J}_{L_1}^i \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{L_j}^i \dot{q}_j + \dots + \vec{J}_{L_n}^i \dot{q}_n \\ \vec{\omega}_i &= \vec{J}_{A_1}^i \dot{q}_1 + \dots + \vec{J}_{A_j}^i \dot{q}_j + \dots + \vec{J}_{A_n}^i \dot{q}_n \end{cases}$$

$\vec{J}_{L_j}^i$ et $\vec{J}_{A_j}^i$ représentent les contributions linéaire et angulaire de la liaison j aux vitesses linéaire et angulaire de C_i par rapport à C_0 .

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Calcul de l'énergie cinétique

Avec le paramétrage choisi : DH

Grâce à la convention de Denavit-Hartenberg pour le positionnement des référentiels sur les solides, les vecteurs $\vec{J}_{L_j}^i$ et $\vec{J}_{A_j}^i$ se calculent :

$$\begin{aligned} \text{Si } j > i \quad \vec{J}_{L_j}^i &= \vec{J}_{A_j}^i = \vec{0} \\ \text{Si } j \leq i \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{L_j}^i = \vec{z}_{j-1} \times \vec{b}_{j-1,G_i} \quad \text{Si liaison } j \text{ de type R} \\ \vec{J}_{A_j}^i = \vec{z}_{j-1} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_{L_j}^i = \vec{z}_{j-1} \quad \text{Si liaison } j \text{ de type P} \\ \vec{J}_{A_j}^i = \vec{0} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Calcul de l'énergie cinétique

Translation

La vitesse de translation \vec{v}_{G_i} du corps C_i s'écrit :

$$\vec{v}_{G_i} = \dot{q}^T \vec{J}_L^i {}^T = \vec{J}_L^i \dot{q}$$

où $\vec{J}_L^i = [\vec{J}_{L_1}^i \quad \dots \quad \vec{J}_{L_n}^i]$ et $\dot{q} = [\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n]^T$.

Rotation

De façon analogue, la vitesse de rotation $\vec{\omega}_i$ du corps C_i s'écrit :

$$\vec{\omega}_i = \dot{q}^T \vec{J}_A^i {}^T = \vec{J}_A^i \dot{q}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Calcul de l'énergie cinétique

Énergies cinétiques de translation et rotation de C_i par rapport à C_0 .

$$T_{i_{\text{transl}}} = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}^T \overset{T}{J}_L^i \overset{T}{J}_L^i \dot{\mathbf{q}}$$

$$T_{i_{\text{rot}}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \overset{T}{J}_A^i \overset{T}{J}_{G_i}^i \overset{T}{J}_A^i \dot{\mathbf{q}}$$

Ensemble du mécanisme

Pour l'ensemble du mécanisme, l'énergie cinétique vaut :

$$T = \sum_{i=1}^n (T_{i_{\text{transl}}} + T_{i_{\text{rot}}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T H \dot{\mathbf{q}}$$

où H représente la matrice d'énergie cinétique du mécanisme.

- H est symétrique, définie, positive
- T est une forme quadratique

Calcul de l'énergie cinétique

Matrice d'énergie cinétique

H peut s'écrire comme la somme de n matrices élémentaires H^i construites à partir des vecteurs de contribution linéaire et angulaire \vec{J}_L^i et \vec{J}_A^i :

$$H = \sum_{i=1}^n H^i = \sum_{i=1}^n \left[m_i \vec{J}_L^i \vec{J}_L^i + \vec{J}_A^i \vec{J}_{G_i}^T \vec{J}_A^i \right]$$

- Le produit $\vec{J}_L^i \vec{J}_L^i = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vdots \\ \vec{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v} & \dots & \vec{v} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \checkmark & \dots & \checkmark \\ \vdots & & \vdots \\ \checkmark & \dots & \checkmark \end{bmatrix}$ est une matrice de scalaires dont un élément (k, l) s'écrit : $\vec{J}_{L_k}^i \vec{J}_{L_l}^i$

Calcul de l'énergie cinétique

Matrice d'énergie cinétique

H peut s'écrire comme la somme de n matrices élémentaires H^i construites à partir des vecteurs de contribution linéaire et angulaire \vec{J}_L^i et \vec{J}_A^i :

$$H = \sum_{i=1}^n H^i = \sum_{i=1}^n \left[m_i \vec{J}_L^i {}^T \vec{J}_L^i + \vec{J}_A^i {}^T \bar{\vec{J}}_{G_i} \vec{J}_A^i \right]$$

- Le produit $\vec{J}_A^i {}^T (\bar{\vec{J}}_{G_i} \vec{J}_A^i) = \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vdots \\ \vec{J} \end{bmatrix} \bar{\vec{J}}_{G_i} [\vec{J} \quad \dots \quad \vec{J}] = \begin{bmatrix} \vec{J} \\ \vdots \\ \vec{J} \end{bmatrix} [\bar{\vec{J}}_{G_i} \vec{J} \quad \dots \quad \bar{\vec{J}}_{G_i} \vec{J}] = \begin{bmatrix} \checkmark & \dots & \checkmark \\ \vdots & & \vdots \\ \checkmark & \dots & \checkmark \end{bmatrix}$
- est une matrice de scalaires dont un élément (k, l) s'écrit :
- $$\vec{J}_{A_k} {}^T \bar{\vec{J}}_{G_i} \vec{J}_{A_l}^i$$

Calcul de $\mathcal{P}_{\text{acc}}^*$ avec H

On a vu que la puissance virtuelle développée par les quantités d'accélération s'écrivait :

$$\mathcal{P}_{\text{acc}}^* = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \dot{q}_i^* = \sum_{i=1}^n D_i \dot{q}_i^*$$

Or T s'écrit sous la forme : $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$.

Cette écriture permet de calculer successivement tous les termes de $\mathcal{P}_{\text{acc}}^*$:

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n H_{ji} \dot{q}_j$. Comme H est symétrique, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n H_{ij} \dot{q}_j$.

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Calcul de $\mathcal{P}_{\text{acc}}^*$ avec H

Termes de $\mathcal{P}_{\text{acc}}^*$:

$$\bullet \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \ddot{q}_j + H_{ij} \ddot{q}_j \right]$$

$$\bullet \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

Finalement, les efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération s'écrivent :

$$D_i = \sum_{j=1}^n H_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

La puissance virtuelle développée par les efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}^* = \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_L} \vec{F}_L \cdot \vec{v}_M^* d\mu}_{(\text{forces de liaison})} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} -\sigma_{ij} \Delta_{ij}^* dV}_{=0 (\text{solides rigides})}$$

peut s'écrire, compte tenu de la nature et du nombre fini des liaisons :

$$\mathcal{P}_{\text{int}}^* = \sum_{i=1}^n \vec{F}_{\text{Liaison}_i} \cdot \vec{v}_{\text{Liaison}_i}^* = \sum_{i=1}^n \tau_i \dot{q}_i^*$$

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Dans la plupart des applications courantes, les efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs se limitent aux effets de la **pesanteur** et aux efforts exercés par l'**extérieur** sur l'organe terminal.

La puissance virtuelle développée par les efforts extérieurs

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^* = \underbrace{\int_{\partial D} \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P^* d\mu}_{(\text{forces surfaciques})} + \underbrace{\int_D \vec{f}_M \cdot \vec{v}_M^* dV}_{(\text{forces volumiques})}$$

peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^* = \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \vec{v}_{G_i}^*}_{\mathcal{P}_{\text{grav.}}^*} + \underbrace{\vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{v}_n^* + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{\omega}_n^*}_{\mathcal{P}_{\text{interact.}}^*} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i^*$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Dans

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}^* = \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i \vec{g} \cdot \vec{v}_{G_i}^*}_{\mathcal{P}_{\text{grav.}}^*} + \underbrace{\vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{v}_n^* + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{\omega}_n^*}_{\mathcal{P}_{\text{interact.}}^*} = \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i^*$$

Q_i désigne l'**effort généralisé dûs aux efforts extérieurs** que l'on va évaluer en calculant $\mathcal{P}_{\text{grav.}}^*$ et $\mathcal{P}_{\text{interact.}}^*$.

Efforts généralisés dûs à la pesanteur

- Calcul de la vitesse virtuelle $\vec{v}_{G_i}^*$

$$\vec{v}_{G_i}^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \overrightarrow{O_0 G_i}}{\partial q_j} \dot{q}_j^* = \sum_{j=1}^n \vec{J}_{L_j}^i \dot{q}_j^* \text{ avec } \vec{J}_{L_j}^i \neq 0 \text{ si } j \leq i.$$

- Le calcul de l'effort généralisé G_i dû à la pesanteur peut se faire de **deux** manières :
 - en utilisant la vitesse virtuelle $\vec{v}_{G_i}^*$;
 - à partir du potentiel de pesanteur V .

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Efforts généralisés dûs à la pesanteur

- Calcul de $\mathcal{P}_{\text{grav.}}^*$ à partir de $\vec{v}_{G_i}^*$

$$\mathcal{P}_{\text{grav.}}^* = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n m_j \vec{g} \cdot \vec{J}_{L_j}^i \dot{q}_j^* \right] = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n m_j \vec{g} \cdot \vec{J}_{L_i}^j \right] \dot{q}_i^* = \sum_{i=1}^n -G_i \dot{q}_i^*$$

- Calcul de $\mathcal{P}_{\text{grav.}}^*$ à partir du potentiel de pesanteur V

$$\mathcal{P}_{\text{grav.}}^* = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} \dot{q}_i^*, \quad \text{avec } V = - \sum_{j=1}^n m_j \vec{g} \cdot \overrightarrow{O_0 G_j}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Efforts généralisés d'interaction avec l'extérieur

La puissance $\mathcal{P}_{\text{interact.}}^*$.

$$\mathcal{P}_{\text{interact.}}^* = \vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{v}_n^* + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{\omega}_n^*$$

peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}_{\text{interact.}}^* = \sum_{i=1}^n [\vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{L_i}^n + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{A_i}^n] \dot{q}_i^*.$$

Finalement, l'effort généralisé Q_i dûs aux **efforts extérieurs** s'écrit

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{L_i}^n + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{A_i}^n.$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Équations du mouvement

- L'écriture du TPV en utilisant un champ de vitesses \dot{q}^* compatible avec les liaisons permet d'écrire :

$$\forall \dot{q}_i^*, \sum_{i=1}^n [D_i - Q_i - \tau_i] \dot{q}_i^* = 0.$$

- Les équations du mouvement sont les n équations différentielles couplées : $D_i - Q_i - \tau_i = 0$ qui ne sont rien d'autre que les **n** équations de Lagrange du mécanisme.

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange

Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides

Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération

Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs

Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs

Équations du mouvement

Identification avec Newton-Euler

Application : mécanisme plan RR

Équations du mouvement

- En rassemblant les résultats précédents, on peut préciser la forme de l'équation du mouvement relative au paramètre i comme suit :

$$\sum_{j=1}^n H_{i,j} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial H_{i,j}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{j,k}}{\partial q_i} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k = \tau_i + \sum_{j=1}^n m_j \vec{g} \cdot \vec{J}_{L_i}^j + \vec{f}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{L_i}^n + \vec{N}_{n+1,n} \cdot \vec{J}_{A_i}^n$$

Identification avec Newton-Euler

- Les équations du mouvement par la méthode de Newton-Euler sont de la forme :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}^2 + C\dot{q}\ddot{q} + G.$$

- En identifiant ces relations avec celles obtenues par le formalisme de Lagrange, on obtient :

- $A_{ij} = H_{ij}$
- $B_{ij} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{jj}}{\partial q_i}$
- $C_{ijk} = \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i}$ (avec $k \neq j$)

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Résolution par le formalisme de Lagrange

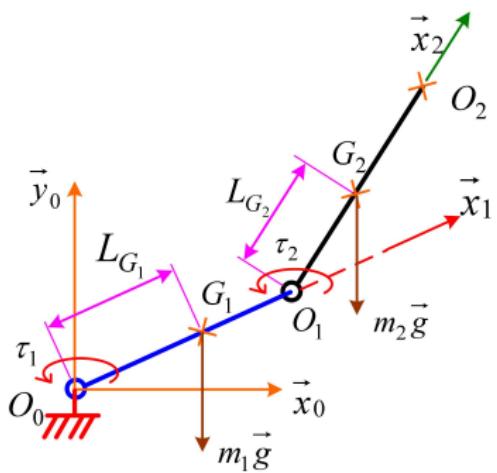


Figure – Mécanisme plan RR

Mécanisme plan à deux barres

- de longueur L_1 et L_2 ,
- de masse m_1 et m_2 ,
- de centre de gravité G_1 et G_2 , situés à L_{G_1} et L_{G_2} ,
- action de la pesanteur est verticale descendante.

Matrice d'inertie des C_i , au point G_i , dans

$$\mathcal{R}_i : J_{G_i}(C_i) = \begin{bmatrix} I_{ix} & 0 & 0 \\ 0 & I_{iy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{iz} \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_i}.$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Calcul des vitesses linéaires et angulaires

Corps C_1

- Pour le corps C_1

$$\begin{cases} \vec{v}_{G_1} = \vec{J}_L^1 \dot{q} = \vec{J}_{L_1}^1 \dot{q}_1 \\ \vec{\omega}_1 = \vec{J}_A^1 \dot{q} = \vec{J}_{A_1}^1 \dot{q}_1 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \vec{J}_{L_1}^1 = L_{G_1} \vec{y}_1 \\ \vec{J}_{A_1}^1 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Calcul des vitesses linéaires et angulaires

Corps C_2

- Pour le corps C_2

$$\begin{cases} \vec{v}_{G_2} &= \vec{J}_L^2 \dot{q} = \vec{J}_{L_1}^2 \dot{q}_1 + \vec{J}_{L_2}^2 \dot{q}_2 \\ \vec{\omega}_2 &= \vec{J}_A^2 \dot{q} = \vec{J}_{A_1}^2 \dot{q}_1 + \vec{J}_{A_2}^2 \dot{q}_2 \end{cases}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \vec{J}_{L_1}^2 &= L_1 \vec{y}_1 + L_{G_2} \vec{y}_2 \\ \vec{J}_{L_2}^2 &= L_{G_2} \vec{y}_2 \\ \vec{J}_{A_1}^2 &= \vec{J}_{A_2}^2 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Calcul de la matrice d'inertie

La matrice d'inertie H a pour expression :

$$H = \sum_{i=1}^{n=2} \left[m_i \vec{J}_L^i \vec{J}_L^i + \vec{J}_A^i \vec{J}_{G_i}^i \vec{J}_A^i \right]$$

$$\begin{aligned} H = & m_1 \begin{bmatrix} L_{G_1} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{G_1} \vec{y}_1 & \vec{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{bmatrix} \bar{\vec{J}}_{G_1} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & \vec{0} \end{bmatrix} \\ & + m_2 \begin{bmatrix} L_1 \vec{y}_1 + L_{G_2} \vec{y}_2 \\ L_{G_2} \vec{y}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \vec{y}_1 + L_{G_2} \vec{y}_2 & L_{G_2} \vec{y}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix} \bar{\vec{J}}_{G_2} \begin{bmatrix} \vec{z}_0 & \vec{z}_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Calcul de la matrice d'inertie

Le calcul de la matrice d'inertie H se développe :

$$\begin{aligned} H = & m_1 \begin{bmatrix} L_{G_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \cdot \bar{\bar{J}}_{G_1} \vec{z}_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & + m_2 \begin{bmatrix} (L_1 \vec{y}_1 + L_{G_2} \vec{y}_2)^2 & (L_1 L_{G_2} \vec{y}_1 \vec{y}_2 + L_{G_2}^2) \\ (L_1 L_{G_2} \vec{y}_1 \vec{y}_2 + L_{G_2}^2) & L_{G_2}^2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \vec{z}_0 \cdot \bar{\bar{J}}_{G_2} \vec{z}_0 & \vec{z}_0 \cdot \bar{\bar{J}}_{G_2} \vec{z}_0 \\ \vec{z}_0 \cdot \bar{\bar{J}}_{G_2} \vec{z}_0 & \vec{z}_0 \cdot \bar{\bar{J}}_{G_2} \vec{z}_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Calcul de la matrice d'inertie

Finalement, la matrice d'inertie du mécanisme plan RR s'écrit :

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{11} = m_1 L_{G_1}^2 + m_2(L_1^2 + L_{G_2}^2 + 2L_1 L_{G_2} \cos \theta_2) + I_{1z} + I_{2z} \\ H_{12} = H_{21} = m_2(L_{G_2}^2 + L_1 L_{G_2} \cos \theta_2) + I_{2z} \\ H_{22} = m_2 L_{G_2}^2 + I_{2z} \end{array} \right.$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Comparaison des termes

Les équations du mouvement par la méthode de Newton-Euler sont de la forme :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}^2 + C\dot{q}\ddot{q} + G$$

- Les éléments de la matrice d'inertie sont ceux de la matrice des termes dynamiques liés aux effets d'inertie :

$$A_{ij} = H_{ij}$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Comparaison des termes

Les équations du mouvement par la méthode de Newton-Euler sont de la forme :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}^2 + C\dot{q}\ddot{q} + G.$$

La matrice liée aux effets centrifuges s'écrit $B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} \\ -B_{12} & 0 \end{bmatrix}$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11} = \frac{\partial H_{11}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} = 0 \\ B_{12} = \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_1} = -m_2 L_1 L_{G_2} \sin \theta_2 \\ B_{21} = \frac{\partial H_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} = m_2 L_1 L_{G_2} \sin \theta_2 \\ B_{22} = \frac{\partial H_{22}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_{22}}{\partial q_1} = 0 \end{array} \right.$$

Buts de l'analyse dynamique des mécanismes articulés

Formulation de Newton-Euler

Formulation de Lagrange

Théorème des puissances virtuelles - Équations de Lagrange
Énergie cinétique d'un mécanisme composé de corps rigides
Efforts généralisés dûs aux quantités d'accélération
Efforts généralisés dûs aux efforts intérieurs
Efforts généralisés dûs aux efforts extérieurs
Équations du mouvement
Identification avec Newton-Euler
Application : mécanisme plan RR

Comparaison des termes

Les équations du mouvement par la méthode de Newton-Euler sont de la forme :

$$\tau = A\ddot{q} + B\dot{q}^2 + C\dot{q}\ddot{q} + G$$

La matrice liée aux effets de Coriolis s'écrit $C = \begin{bmatrix} C_{112} \\ 0 \end{bmatrix}$

avec

$$\begin{cases} C_{112} &= \frac{\partial H_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial H_{12}}{\partial q_1} = -2m_2 L_1 L_{G_2} \sin \theta_2 \\ C_{212} &= \frac{\partial H_{21}}{\partial q_2} + \frac{\partial H_{22}}{\partial q_1} - \frac{\partial H_{12}}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

