

# Les surfaces minimales

## Stage M1 - été 2017

GRAFF Jonathan

28 août 2017

# Sommaire

## 1 Introduction

# Sommaire

## 1 Introduction

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale
  - Courbures principales
  - Définition
  - Exemples
  - Pourquoi minimale ?

# Sommaire

## 1 Introduction

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale
  - Courbures principales
  - Définition
  - Exemples
  - Pourquoi minimale ?

## 3 Problème de Plateau

- Exposé
- Algorithme
- Résultats
  - Caténoïde
  - Surface de Riemann

# Sommaire

## 1 Introduction

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale
  - Courbures principales
  - Définition
  - Exemples
  - Pourquoi minimale ?

## 3 Problème de Plateau

- Exposé
- Algorithme
- Résultats
  - Caténoïde
  - Surface de Riemann

## 4 Représentation de Weierstrass

- Présentation
- Implémentation
- Résultats

# Sommaire

1 Introduction

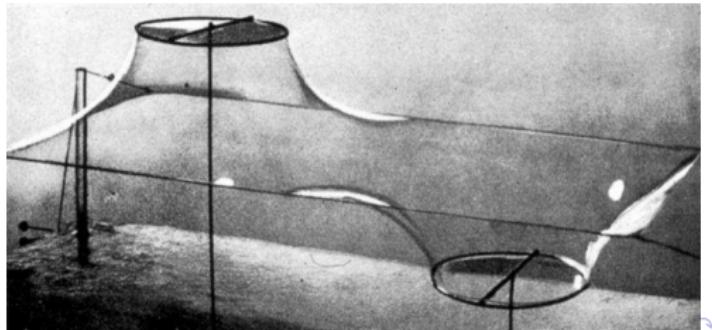
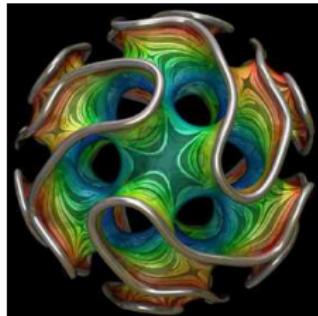
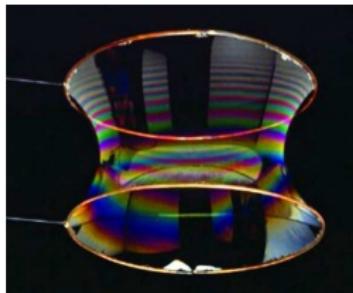
2 Théorie

3 Problème de Plateau

4 Représentation de Weierstrass

# Les surfaces minimales :

- se rencontrent dans la nature (films savonneux)



# Les surfaces minimales

- sont utiles en physique, mécanique, architecture, pour minimiser des forces, des surfaces de frottements...

# Les surfaces minimales

- sont utiles en physique, mécanique, architecture, pour minimiser des forces, des surfaces de frottements...
- sont tout simplement jolies, et donc utilisées dans certains ouvrages d'art :

# Les surfaces minimales

- sont utiles en physique, mécanique, architecture, pour minimiser des forces, des surfaces de frottements...
- sont tout simplement jolies, et donc utilisées dans certains ouvrages d'art :

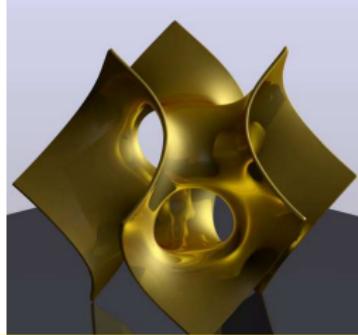
Le toit du stade olympique de Munich :



## Oeuvres d'art



GRAFF Jonathan



Les surfaces minimales

# Sommaire

## 1 Introduction

## 3 Problème de Plateau

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale

## 4 Représentation de Weierstrass

# Sommaire

## 2 Théorie

- Surfaces
  - Courbure d'une surface
  - Surface minimale

# Surfaces

$\mathcal{U}$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

- Un patch (ou surface locale, ou nappe) régulier est une application  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  différentiable, de matrice jacobienne de rang 2.

On confond l'application et son image  $x(\mathcal{U})$  en général.

# Surfaces

$\mathcal{U}$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$ .

- Un patch (ou surface locale, ou nappe) régulier est une application  $x : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$  différentiable, de matrice jacobienne de rang 2.

On confond l'application et son image  $x(\mathcal{U})$  en général.

- Une surface est composée d'un ou plusieurs patchs : en chaque point, il existe un voisinage qui est image d'un patch.

# Sphère

Une sphère par exemple n'est pas un patch régulier :

une paramétrisation est :

$$x : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \rightarrow (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

# Sphère

Une sphère par exemple n'est pas un patch régulier :

une paramétrisation est :

$$x : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \rightarrow (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

$$\mathcal{J}_x(u, v) = \begin{bmatrix} -\cos v \sin u & -\sin v \cos u \\ \cos v \cos u & -\sin v \sin u \\ 0 & \cos v \end{bmatrix}$$

# Sphère

Une sphère par exemple n'est pas un patch régulier :

une paramétrisation est :

$$x : [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$$

$$\mathcal{J}_x(u, v) = \begin{bmatrix} -\cos v \sin u & -\sin v \cos u \\ \cos v \cos u & -\sin v \sin u \\ 0 & \cos v \end{bmatrix}$$

Donc pour le pôle nord ( $v = \frac{\pi}{2}$ ), la matrice jacobienne devient :

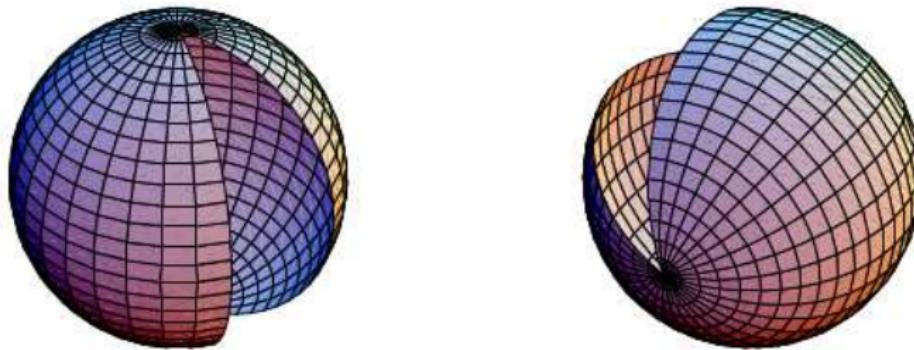
$$\mathcal{J}_x(u, \frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & -\cos u \\ 0 & -\sin u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ qui est clairement de rang 1.}$$

# Sphère

Mais une sphère est une surface, car peut être recouverte par deux patches :

# Sphère

Mais une sphère est une surface, car peut être recouverte par deux patchs :



Deux patchs formant une sphère

# Sommaire

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale

# Courbure

- $p$  un point d'une surface  $\mathcal{M}$
- $u_p$  vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{M}$  en  $p$
- $U$  champ de vecteurs normal à  $\mathcal{M}$

# Courbure

- $p$  un point d'une surface  $\mathcal{M}$
- $u_p$  vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{M}$  en  $p$
- $U$  champ de vecteurs normal à  $\mathcal{M}$

On appelle **courbure normale de  $\mathcal{M}$  dans la direction  $u_p$**  le  
nombre réel

$$k(u_p) = (-D_{u_p} \cdot U) \cdot u_p,$$

# Courbure

- $p$  un point d'une surface  $\mathcal{M}$
- $u_p$  vecteur unitaire tangent à  $\mathcal{M}$  en  $p$
- $U$  champ de vecteurs normal à  $\mathcal{M}$

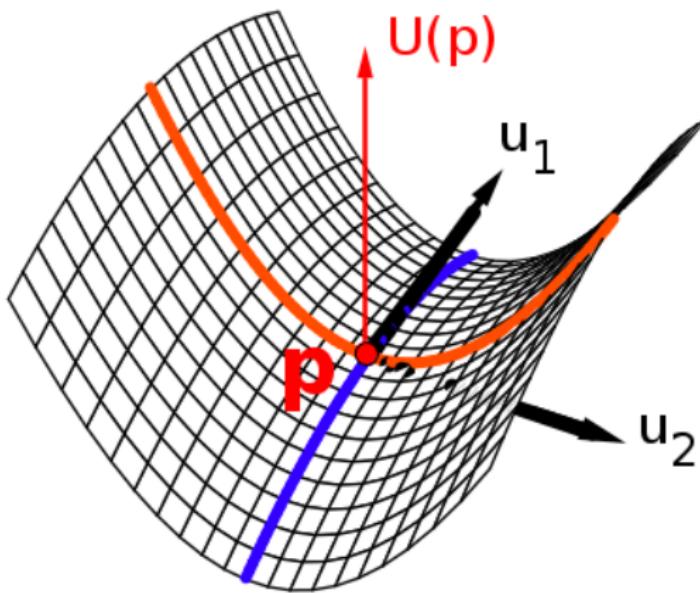
On appelle **courbure normale de  $\mathcal{M}$  dans la direction  $u_p$**  le nombre réel

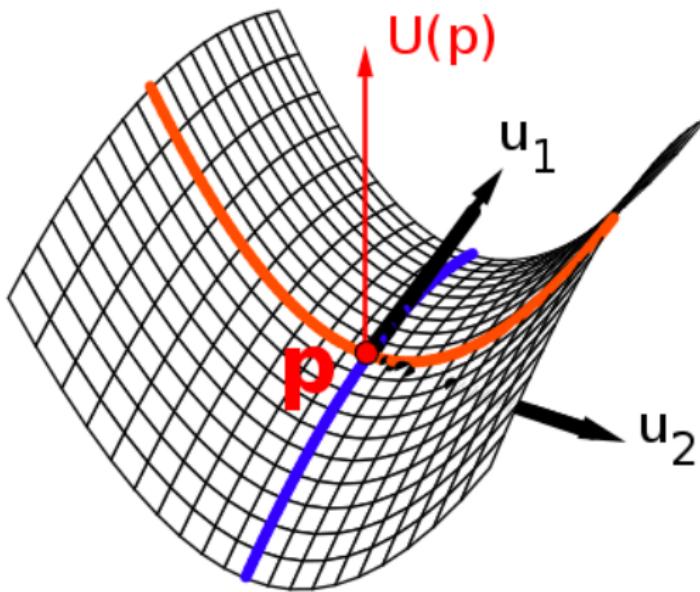
$$k(u_p) = (-D_{u_p} \cdot U) \cdot u_p,$$

$k(u_p) > 0$  :  $\mathcal{M}$  se courbe dans la même direction que  $U(p)$

$k(u_p) < 0$  :  $\mathcal{M}$  se courbe dans la direction opposée que  $U(p)$

$k(u_p) = 0$  :  $\mathcal{M}$  ne se courbe pas.





La surface a une courbure négative selon le vecteur  $u_1$ , et une positive selon le vecteur  $u_2$  :

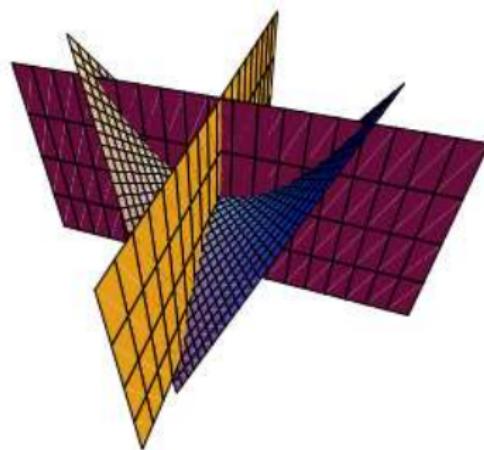
# Sommaire

## 2 Théorie

- Surfaces
- Courbure d'une surface
- Surface minimale
  - Courbures principales
  - Définition
  - Exemples
  - Pourquoi minimale ?

## Courbure principale

Les courbures principales de  $\mathcal{M}$  en  $p$ , notées  $k_1$  et  $k_2$ , sont les maximum et minimum des courbures normales à  $p$ ,  $u_p$  parcourant l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à  $p$ .



# Définition

- $\frac{k_1+k_2}{2}$  est la courbure moyenne de la surface en  $p$ .

## Définition

- $\frac{k_1+k_2}{2}$  est la courbure moyenne de la surface en  $p$ .
- Une surface minimale est une surface pour laquelle en tout point la courbure moyenne vaut 0.

## Définition

- $\frac{k_1+k_2}{2}$  est la courbure moyenne de la surface en  $p$ .
- Une surface minimale est une surface pour laquelle en tout point la courbure moyenne vaut 0.

D'après la définition d'une surface minimale, on a donc en chaque point d'une telle surface, la courbure maximale qui est égale à l'opposé de la courbure minimale.

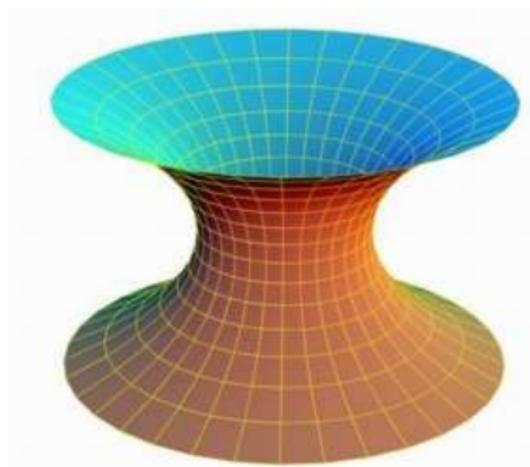
# Le caténoïde

Exemples :

# Le caténoïde

## Exemples :

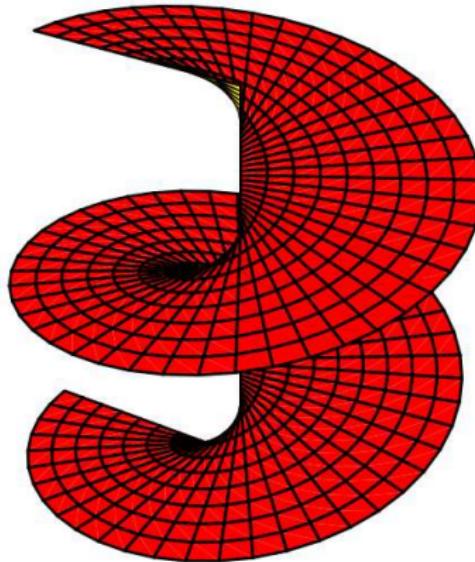
- Première surface minimale non plane, découverte en 1744 par Euler



Un caténoïde

# L'hélicoïde

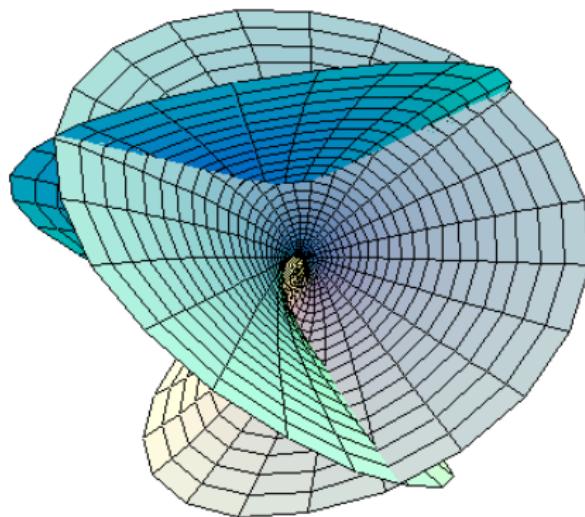
- Découverte en 1776 par Meusnier



Un hélicoïde

# La surface d'Enneper

- Découverte en 1863 par Enneper
- A des auto-intersections



Surface d'Enneper

# Familles de surfaces minimales - Exemple

# Pourquoi minimale ?

Une surface minimale a aussi une aire minimale parmi toutes les surfaces "légèrement déformées" ayant le même bord.

## Pourquoi minimale ?

Une surface minimale a aussi une aire minimale parmi toutes les surfaces "légèrement déformées" ayant le même bord.

Plus précisément, soit  $x$  un patch,  $U$  un champ de vecteurs normaux, et  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  :

- Une déformation normale de  $x$  est une application :

$X : ]-\epsilon, \epsilon[ \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , avec  $\epsilon > 0$  et

$$X(t, p) = x(p) + \underbrace{t \cdot h(p)}_{\in \mathbb{R}} \cdot U(p)$$

# Pourquoi minimale ?

Une surface minimale a aussi une aire minimale parmi toutes les surfaces "légèrement déformées" ayant le même bord.

Plus précisément, soit  $x$  un patch,  $U$  un champ de vecteurs normaux, et  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  :

- Une déformation normale de  $x$  est une application :

$$X : ]-\epsilon, \epsilon[ \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ avec } \epsilon > 0 \text{ et}$$

$$X(t, p) = x(p) + \underbrace{t \cdot h(p)}_{\in \mathbb{R}} \cdot U(p)$$

$t \mapsto X(t, \cdot)$  représente donc une déformation continue de la surface  $x$ , chaque point étant éloigné perpendiculairement de cette surface.

# Théorème

**Théorème** :  $x$  est minimale sur  $\mathcal{U}$  ssi  $\forall h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$A'(x) = 0.$$

$A : \{X(t, \cdot)\} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction qui donne l'aire.

# Théorème

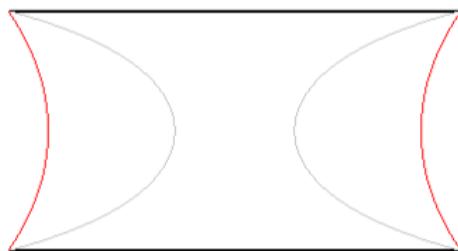
**Théorème** :  $x$  est minimale sur  $\mathcal{U}$  ssi  $\forall h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$A'(x) = 0.$$

$A : \{X(t, \cdot)\} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction qui donne l'aire.

- On a donc un minimum local.

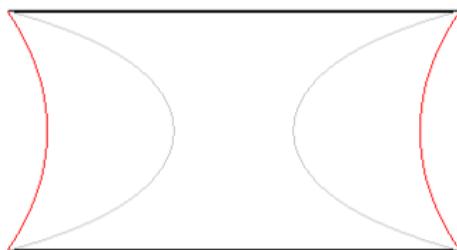
Attention, surface minimale  $\not\Rightarrow$  aire minimale :



### Trois surfaces minimales

- Trois surfaces minimales :  
un caténoïde (en rouge), un "pseudo-caténoïde" (en gris), et la surface de Goldbach (deux disques dans les cercles).

Attention, surface minimale  $\not\Rightarrow$  aire minimale :



### Trois surfaces minimales

- Trois surfaces minimales :  
un caténoïde (en rouge), un "pseudo-caténoïde" (en gris), et la surface de Goldbach (deux disques dans les cercles).

Tout dépend de l'écartement des cercles :

- proches : le caténoïde rouge est d'aire minimale
- écartés : la surface de Goldbach est d'aire minimale

# Sommaire

1 Introduction

2 Théorie

3 Problème de Plateau

- Exposé
- Algorithme
- Résultats

4 Représentation de Weierstrass

# Sommaire

## 3 Problème de Plateau

- Exposé
- Algorithme
- Résultats

# Problème de Plateau

- Problème posé par Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Plateau qui étudia des bulles de savon

# Problème de Plateau

- Problème posé par Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Plateau qui étudia des bulles de savon
- Existence de surfaces minimales, un bord étant donné (courbes fermées)

# Problème de Plateau

- Problème posé par Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Plateau qui étudia des bulles de savon
- Existence de surfaces minimales, un bord étant donné (courbes fermées)
- Résolution en 1931 (Douglas)  $\Rightarrow$  médaille Fields :

# Problème de Plateau

- Problème posé par Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Plateau qui étudia des bulles de savon
- Existence de surfaces minimales, un bord étant donné (courbes fermées)
- Résolution en 1931 (Douglas)  $\Rightarrow$  médaille Fields :
  - Il y a toujours au moins une surface minimale
  - Il y en a un nombre fini
  - Une seule est d'aire minimale et elle ne présente pas d'auto-intersection

# Problème de Plateau

- Problème posé par Lagrange en 1760, mais qui porte le nom de Plateau qui étudia des bulles de savon
- Existence de surfaces minimales, un bord étant donné (courbes fermées)
- Résolution en 1931 (Douglas)  $\Rightarrow$  médaille Fields :
  - Il y a toujours au moins une surface minimale
  - Il y en a un nombre fini
  - Une seule est d'aire minimale et elle ne présente pas d'auto-intersection

**Problème** : Comment les construire ?

En particulier si les courbes de départ sont compliquées...

# Sommaire

## 3 Problème de Plateau

- Exposé
- **Algorithme**
- Résultats

# Algorithme

⇒ algorithme itératif

- Entrée : une surface de départ représentée par un maillage triangulaire et un ensemble de points (les bords)
- Sortie : une surface très proche d'une surface minimale  
L'algorithme va déformer petit à petit la surface de départ pour se rapprocher d'une surface minimale

# Algorithme

Entre deux itérations, on modifie chaque point du maillage avec une fonction  $f$ .

Si  $E(f)$ , l'énergie de  $f$ , est minimale, la surface obtenue est minimale :

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{U}} |\nabla f|^2 \text{ avec } |\nabla f|^2 = \text{tr}({}^t \partial f \cdot \partial f).$$

L'idée est donc de rendre  $E(f)$  de plus en plus petit au fur et à mesure de l'algorithme.

# Algorithme

Un théorème dit que pour  $f$  transformant un triangle  $\Delta_1$  en  $\Delta_2$ ,

$$E(f) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \cot \alpha_i \cdot |a_i|^2,$$

où :

- $\alpha_i$  sont les angles du triangle  $\Delta_1$
- $a_i$  est l'image dans  $\Delta_2$  du côté opposé à  $\alpha_i$ .

# Algorithme

Un théorème dit que pour  $f$  transformant un triangle  $\Delta_1$  en  $\Delta_2$ ,

$$E(f) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 \cot \alpha_i \cdot |a_i|^2,$$

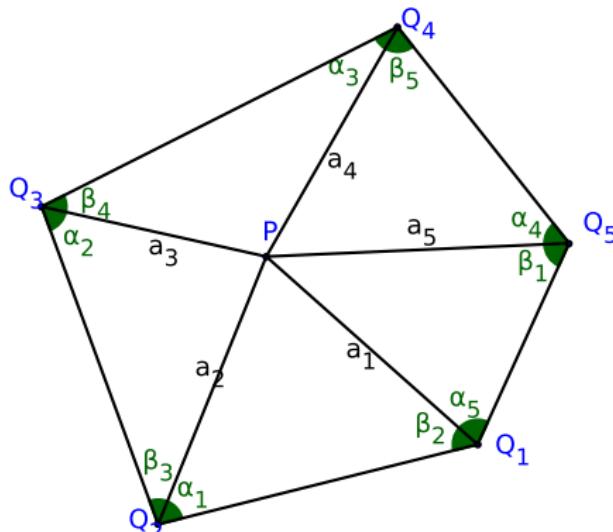
où :

- $\alpha_i$  sont les angles du triangle  $\Delta_1$
- $a_i$  est l'image dans  $\Delta_2$  du côté opposé à  $\alpha_i$ .

En sommant sur tous les triangles de la surface, on obtient la formule cherchée :

# Algorithme

$$E(f) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{\#bords} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) |a_i|^2.$$



# Algorithme

$$\frac{\partial}{\partial p} E(f) = 0 \iff$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(p - q_i) = 0$$

# Algorithme

$$\frac{\partial}{\partial p} E(f) = 0 \iff$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(p - q_i) = 0$$

Ce qui donne, en isolant  $p$  :

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) q_i}{\sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} \cot \alpha_i + \cot \beta_i}$$

Si tous les points  $p$  de la surface vérifient cette formule, alors la surface est minimale.

# Algorithme

$$\frac{\partial}{\partial p} E(f) = 0 \iff$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(p - q_i) = 0$$

Ce qui donne, en isolant  $p$  :

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i) q_i}{\sum_{i=1}^{\#\text{voisins de } p} \cot \alpha_i + \cot \beta_i}$$

Si tous les points  $p$  de la surface vérifient cette formule, alors la surface est minimale.

L'algorithme consiste donc à remplacer tous les points  $p$  par le point vérifiant la formule ci-dessus, et à continuer.

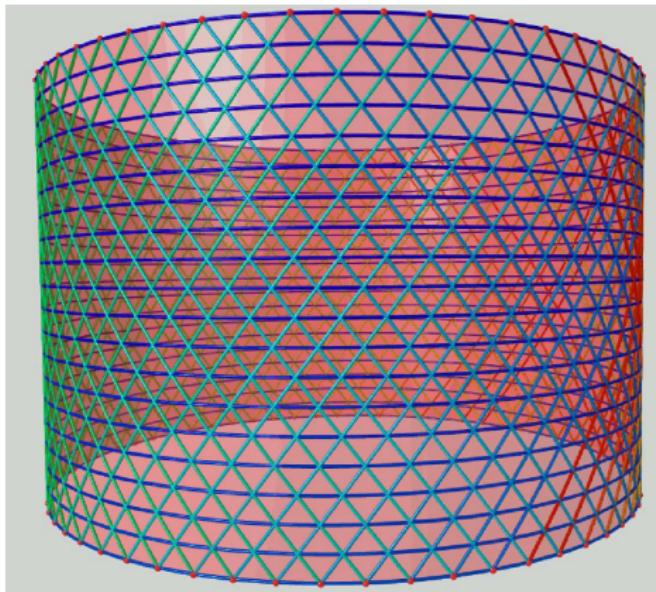
# Sommaire

## 3 Problème de Plateau

- Exposé
- Algorithme
- Résultats
  - Caténoïde
  - Surface de Riemann

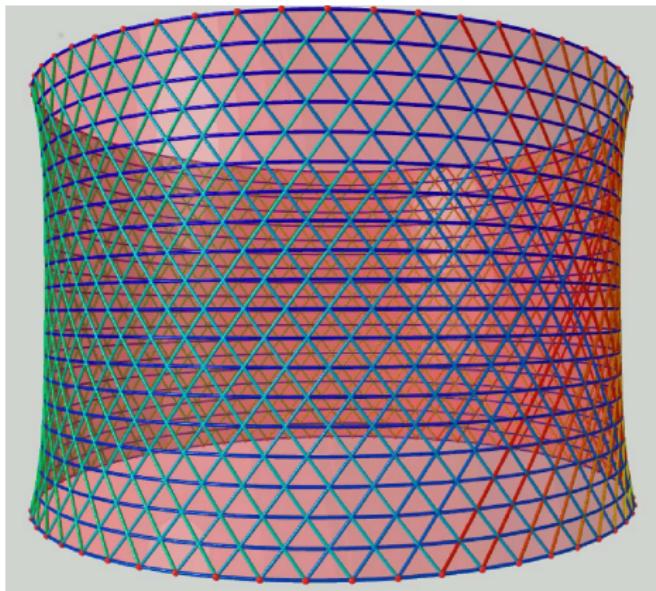
# Caténoïde

- Figure de départ : cylindre



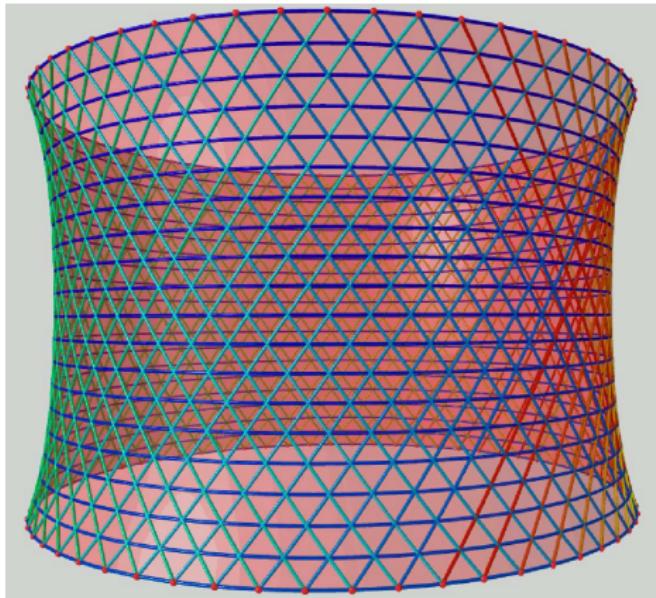
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



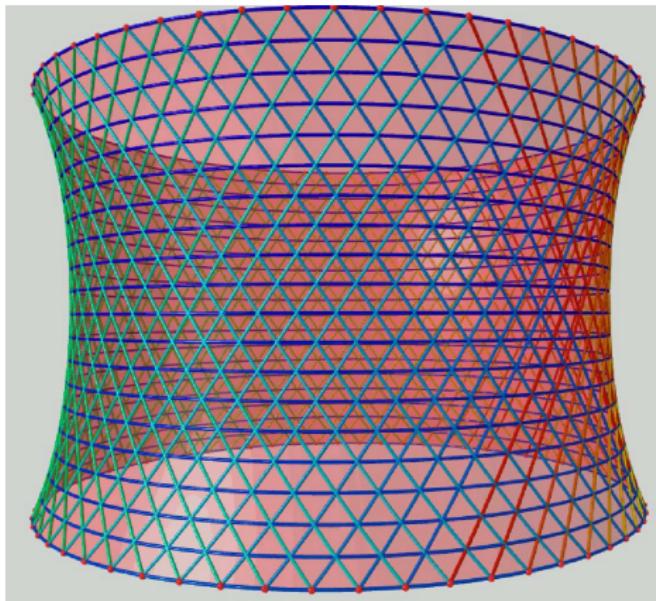
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



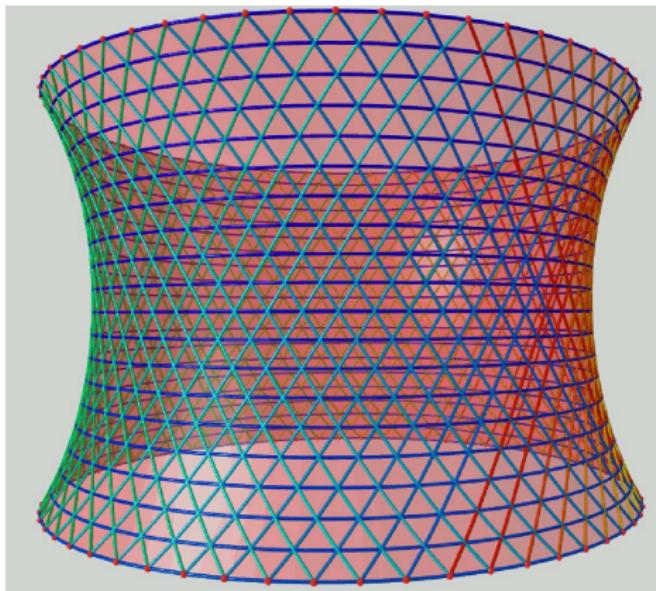
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



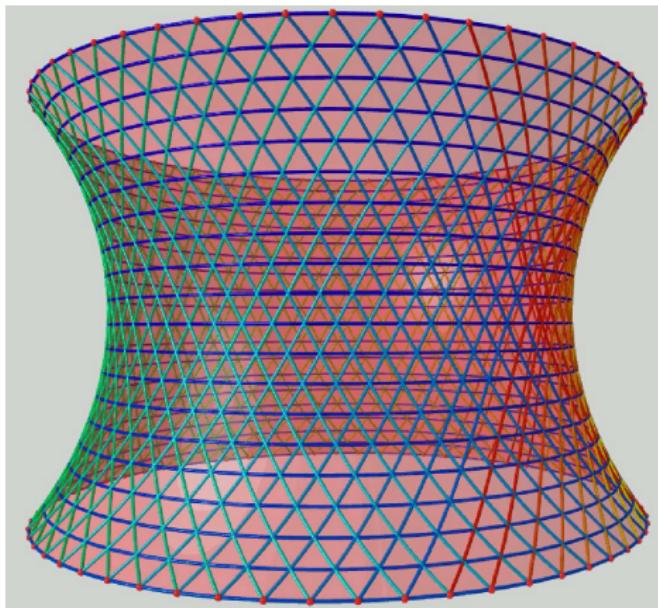
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



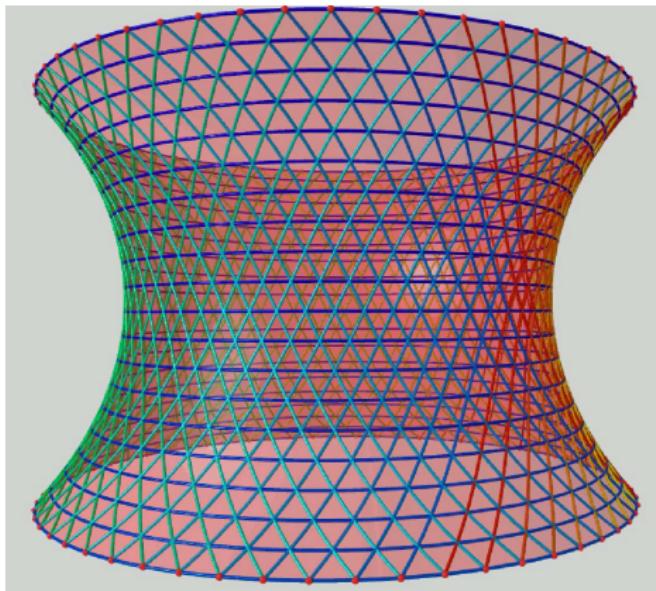
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



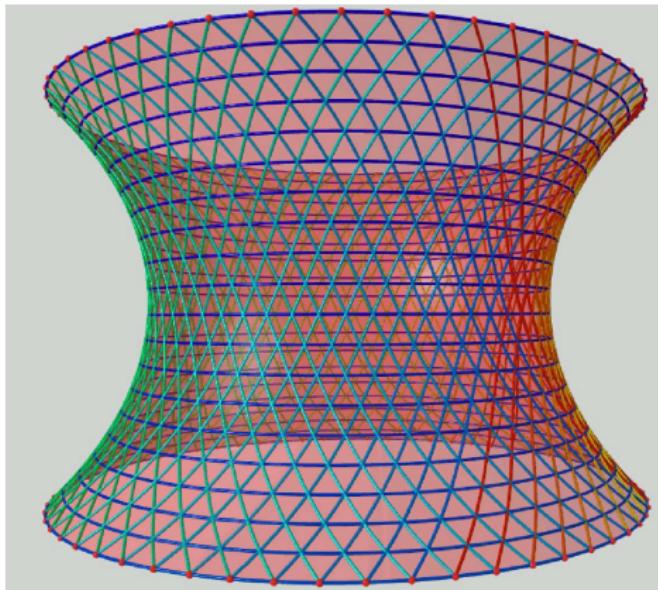
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



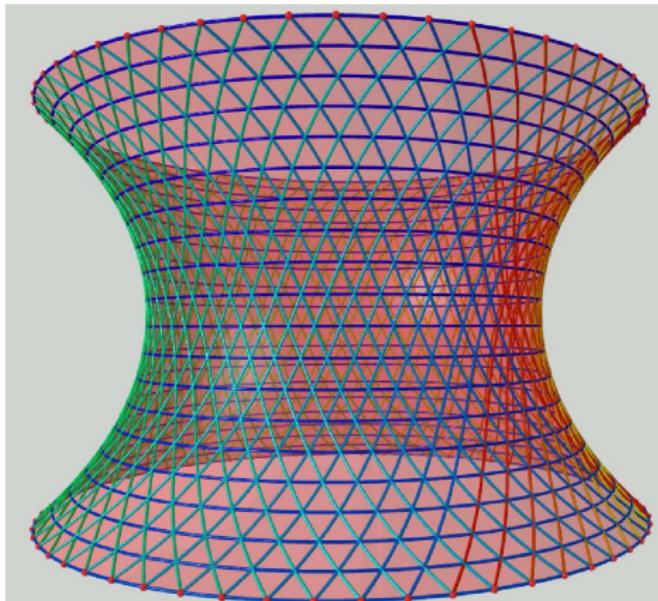
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



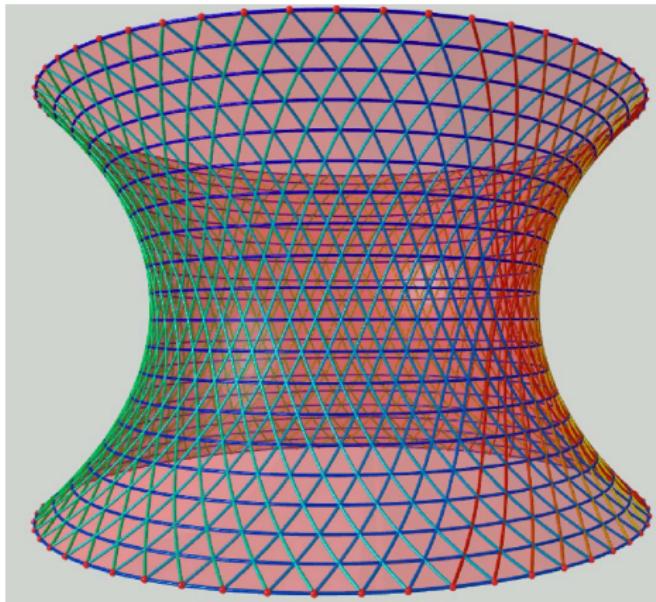
# Caténoïde

Au fur et à mesure des itérations



# Caténoïde

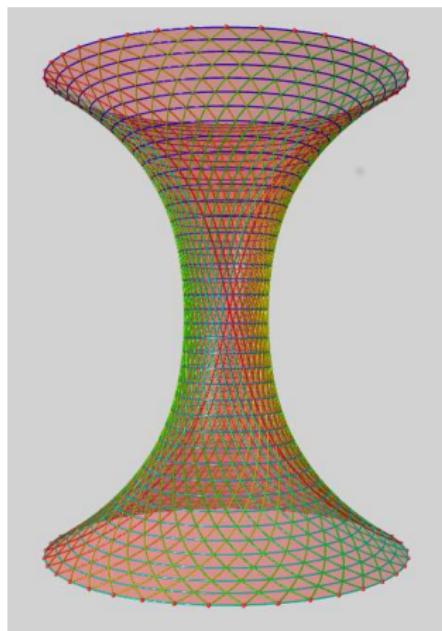
Pour 1000 itérations :



# Caténoïde - Cas limite

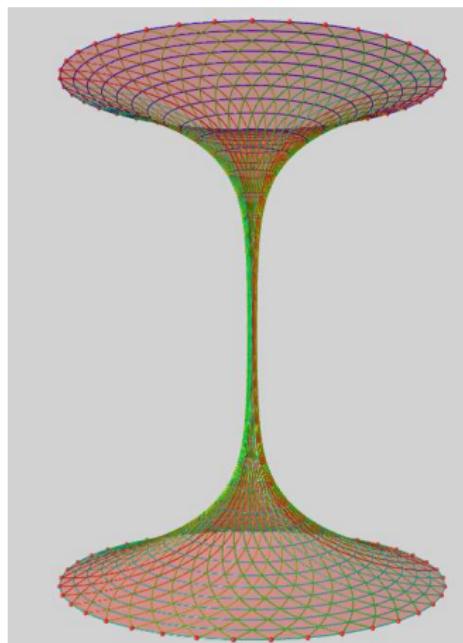
# Caténoïde - Cas limite

200 itérations



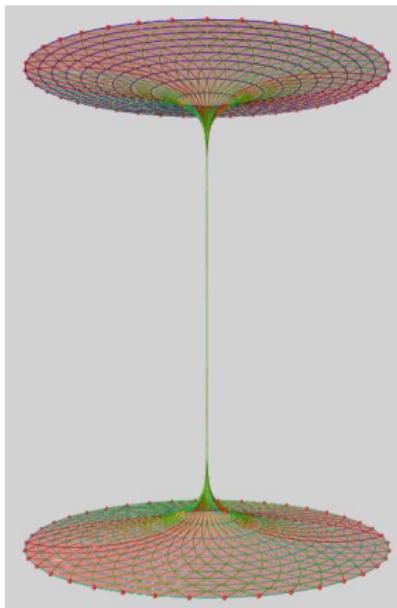
# Caténoïde - Cas limite

500 itérations

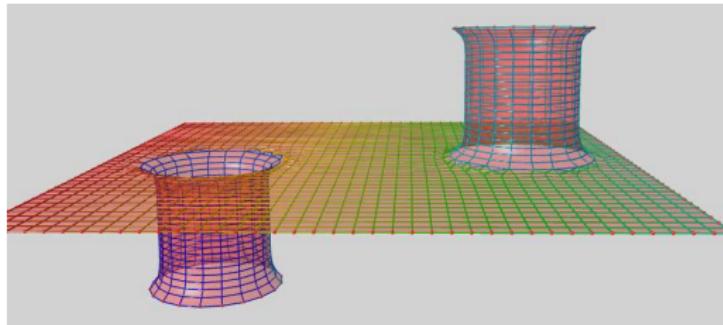


# Caténoïde - Cas limite

1000 itérations

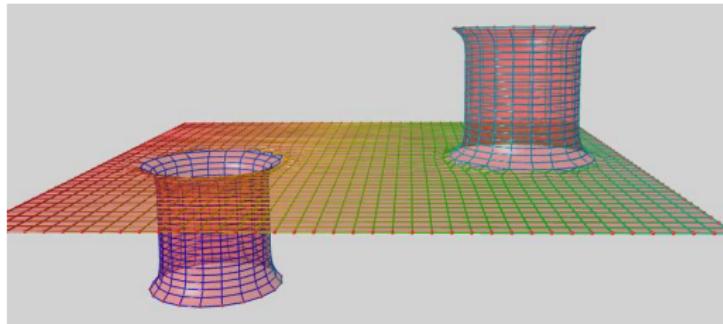


# Surface de Riemann

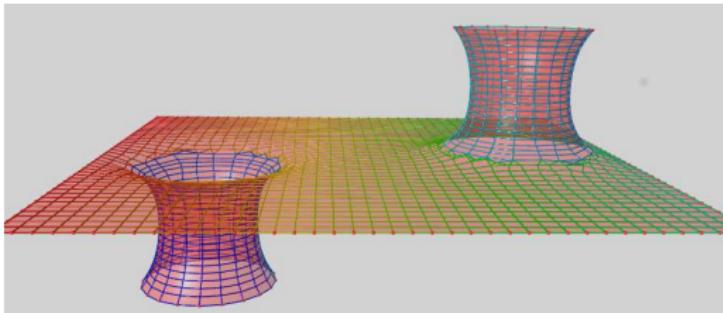


Surface de départ

# Surface de Riemann



Surface de départ



# Sommaire

1 Introduction

3 Problème de Plateau

2 Théorie

4 Représentation de Weierstrass

- Présentation
- Implémentation
- Résultats

# Sommaire

## 4 Représentation de Weierstrass

- Présentation
- Implémentation
- Résultats

# Présentation

$$\Phi(w) = \Re \oint^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G} - G \right) h, \frac{i}{2} \left( \frac{1}{G} + G \right) h, h \right) dz$$

# Présentation

$$\Phi(w) = \Re \oint^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G} - G \right) h, \frac{i}{2} \left( \frac{1}{G} + G \right) h, h \right) dz$$

- ➊  $w \in D$ ,  $D$  est un domaine de  $\mathbb{C}$
- ➋  $G$  et  $h$  deux fonctions complexes méromorphes sur  $D$
- ➌  $Gh$  est holomorphe sur  $D$ .
- Formule découverte par Weierstrass et Enneper en 1860

# Présentation

$$\Phi(w) = \Re \oint^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G} - G \right) h, \frac{i}{2} \left( \frac{1}{G} + G \right) h, h \right) dz$$

- ➊  $w \in D$ ,  $D$  est un domaine de  $\mathbb{C}$
  - ➋  $G$  et  $h$  deux fonctions complexes méromorphes sur  $D$
  - ➌  $Gh$  est holomorphe sur  $D$ .
- Formule découverte par Weierstrass et Enneper en 1860
  - La réciproque est vraie :  
Toute surface minimale peut s'écrire sous cette forme.

# Sommaire

## 4 Représentation de Weierstrass

- Présentation
- **Implémentation**
- Résultats

# Implémentation

$\Phi(w) = \left( \Re \oint \varphi_1(z), \Re \oint \varphi_2(z), \Re \oint \varphi_3(z) \right)$ , avec

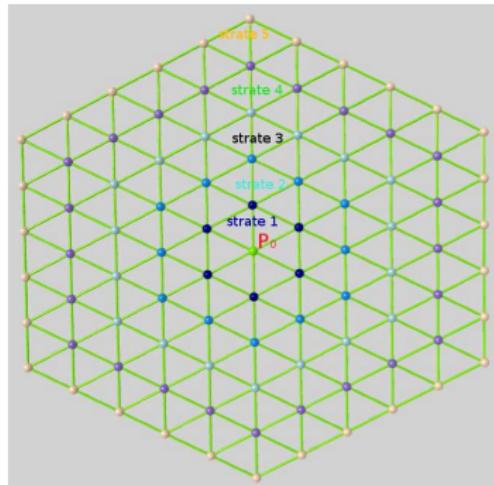
$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \frac{1}{2|G|^2} (\overline{G} - \overline{G} G^2) h \\ \varphi_2(z) &= \frac{i}{2|G|^2} (\overline{G} + \overline{G} G^2) h \\ \varphi_3(z) &= h\end{aligned}$$

## Entrées :

- parties réelle et imaginaire de  $G$  et  $h$
- un maillage de  $D$

# Intégrale curviligne

- $\oint_w^{w'} f(z)dz \approx \frac{f(w)+f(w')}{2} \times (w' - w)$
- sommet initial  $P_0$
- diviser le maillage  $D$  en strates à partir de  $P_0$ .
- Relation de Chasles de l'intégrale



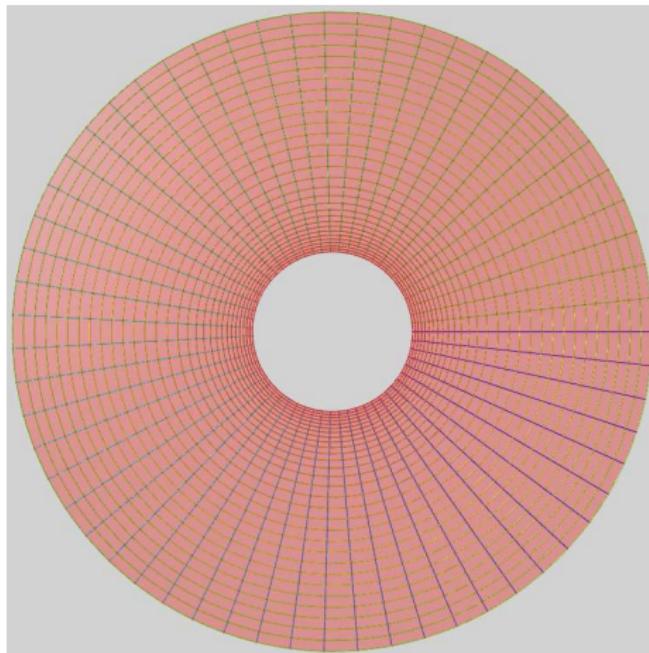
# Sommaire

## 4 Représentation de Weierstrass

- Présentation
- Implémentation
- Résultats

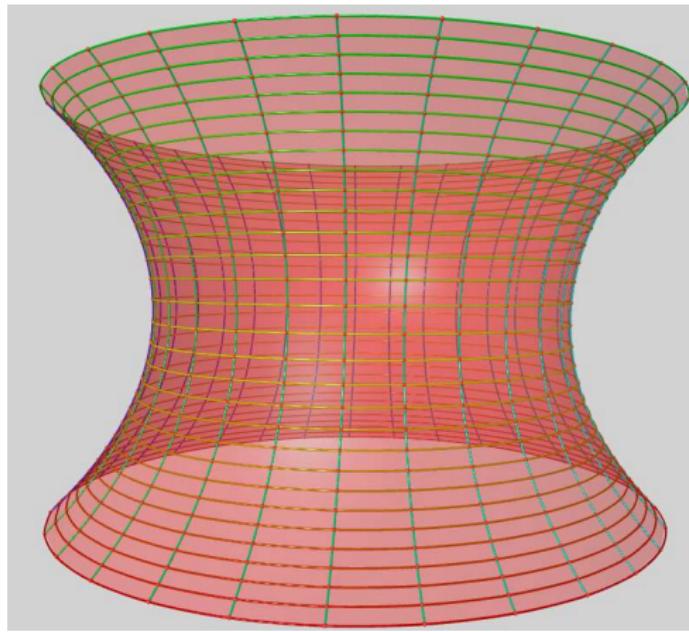
# Maillage de départ

- Maillage de départ :



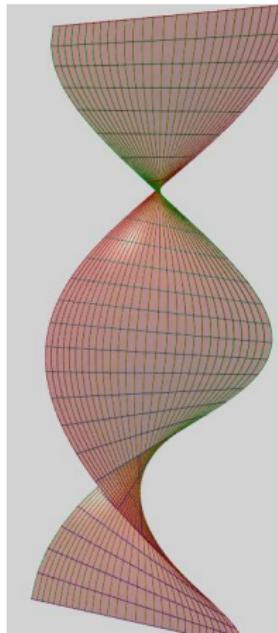
# Le caténoïde

$G(z) = z$ , et  $h(z) = \frac{1}{z}$  :



# L'hélicoïde

$G(z) = z$ , et  $h(z) = \frac{i}{z}$  :



## Remarque :

- caténoïde :  $h_C(z) = \frac{1}{z}$
- hélicoïde :  $h_H(z) = \frac{i}{z}$

Ces deux surfaces sont dites conjuguées

$$h_t(z) = e^{t\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z}, \quad t \in [0, 1]$$

## Remarque :

- caténoïde :  $h_C(z) = \frac{1}{z}$
- hélicoïde :  $h_H(z) = \frac{i}{z}$

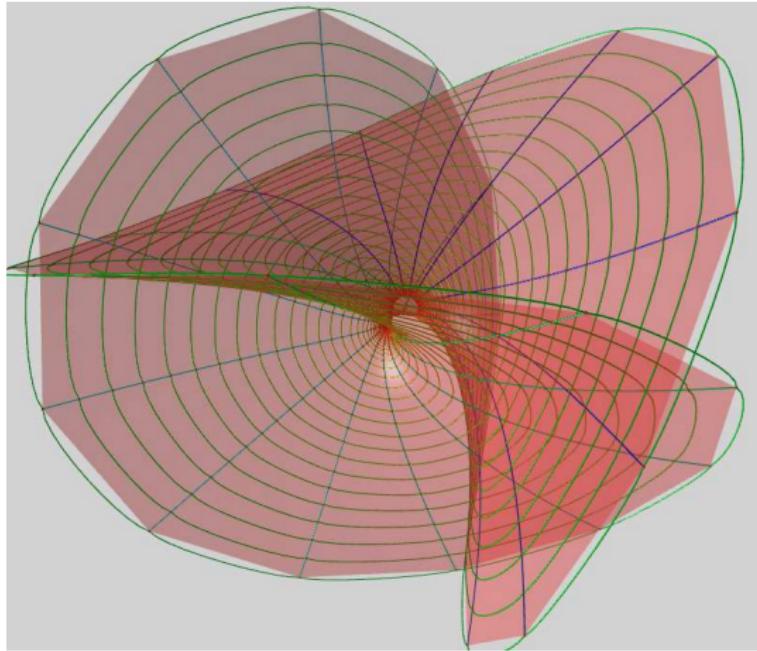
Ces deux surfaces sont dites conjuguées

$$h_t(z) = e^{t\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z}, \quad t \in [0, 1] \implies h_0 = h_C \text{ et } h_1 = h_H$$

$\implies$  Famille de surfaces minimales comprenant la caténoïde et l'hélicoïde !

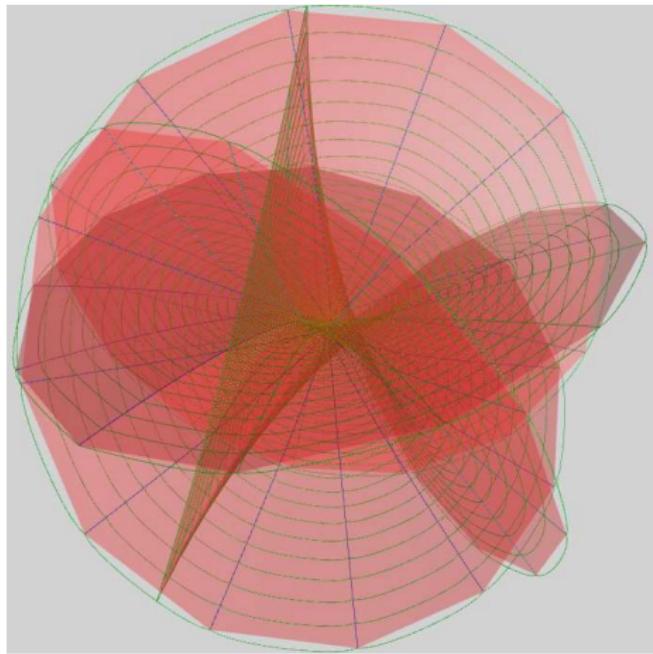
# Surface d'Enneper

$G(z) = z$ , et  $h(z) = z$



# Fleur de Jenner

$G(z) = z$ , et  $h(z) = z^3$



# Merci pour votre attention !

## Bibliographie

- <http://www.bridgesmathart.org/art-exhibits/jmm08/sequin.html>
- <http://mocosubmit.com/minimal-complexities/>
- Gray A., Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica
- Pinkal U. and Polthier K., Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates
- Weber M., Classical Minimal Surfaces in Euclidean Space by Examples
- <http://versdusilence.blogspot.fr/2011/03/frei-otto.html>
- <https://www.mathcurve.com/surfaces/minimale/minimale.shtml>

- <https://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml>
- <http://images.math.cnrs.fr/Mathematiques-savonneuses.html?lang=fr>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Minimal\\_surface\\_of\\_revolution](https://en.wikipedia.org/wiki/Minimal_surface_of_revolution)
- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface\\_minimale](https://fr.wikipedia.org/wiki/Surface_minimale)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Enneper\\_surface](https://en.wikipedia.org/wiki/Enneper_surface)
- [https://fr.wikipedia.org/wiki/Probleme\\_de\\_Plateau](https://fr.wikipedia.org/wiki/Probleme_de_Plateau)