Modelos de média móvel são uma extensão do processo de ruído branco:

$$X_t = E_t + \beta_1 E_{t-1} + \beta_2 E_{t-2} + \ldots + \beta_q E_{t-q} \Rightarrow MA(q)$$

Isto é, uma combinação linear da corrente pertubação E_t mais as mais recentes E_{t-1}, E_{t-2}, ... E_{t-q}.

Em muitos aspectos, os modelos de média móvel são complementares aos modelos autoregressivos. AR $\Rightarrow$ ARMA(p,q)

Fonte: www.pixabay.com

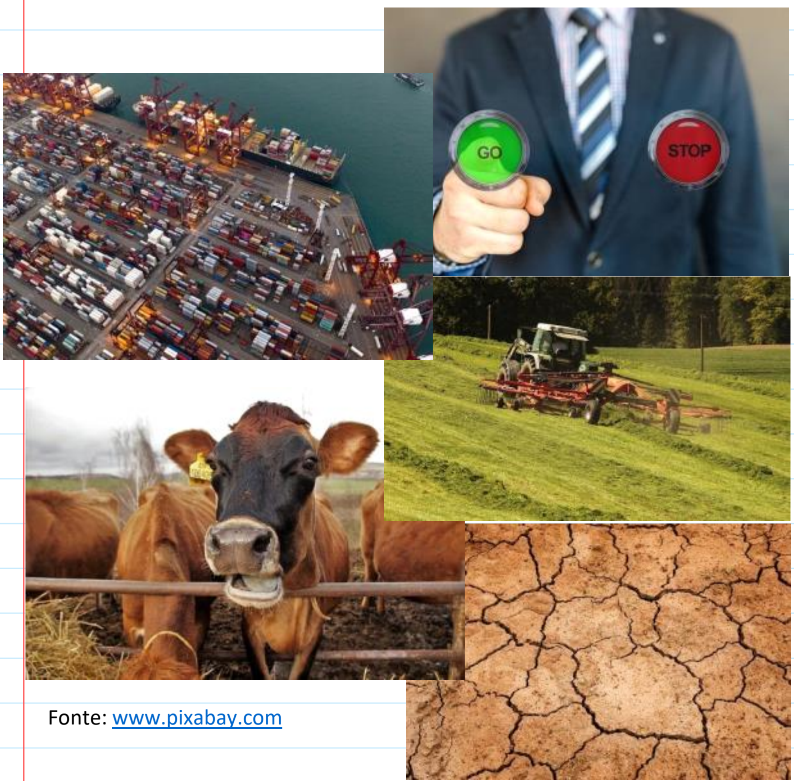
Modelos de Média Móvel:

- [x] Motivação
- [x] Definição e Propriedades
- [x] Ajustamento
- [x] Exemplos

Motivação

Primeiramente, os modelos de média móvel têm sido aplicados com grande sucesso em várias áreas, particularmente em econometria.

Fonte: www.pixabay.com



Fonte: www.pixabay.com

Séries temporais de indicadores econômicos, por exemplo, são afetadas por uma variedade de eventos randômicos como greves, decisões governamentais, desastres naturais, déficits de commodities e etc.

$$X_t = \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

Esses eventos não terão apenas um efeito imediato no indicador, mas poderá afetá-lo também em vários períodos consecutivos.

- Assim, é plausível que um processo de média móvel apareça na prática!
- Além disso, como veremos, suas propriedades matemáticas são complementares a aquelas dos processos autoregressivos.

Como já mecionado, um processo de média móvel de ordem *q* ou *MA(q)* é uma extensão do processo de ruído branco E_t:

$X_t = E_t + \beta_1 E_{t-1} + \beta_2 E_{t-2} + \ldots + \beta_q E_{t-q}$

Isto é, uma combinação linear da corrente pertubação E_t mais as mais recentes E_{t-1}, E_{t-2}, ... E_{t-q}.

Fonte: www.pixabay.com

E_t é um processo de ruído branco (!), ou seja, é independente e identicamente distribuído, e também é independente de qualquer X_s, em que $s < t$.

Momentos e Dependência

- Sendo uma combinação linear de E_t, qualquer processo *MA(q)* X_t possui média zero e variância constante:

$E[X_t] = 0$ para todo *t*, e $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_E^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2\right)$=constante

- Assim como para o modelo autoregressivo, é possível adicionar uma constante *m* ao *MA(q)* para se considerar séries temporais com média diferente de zero:

$Y_t = m + X_t$

Fonte: www.pixabay.com

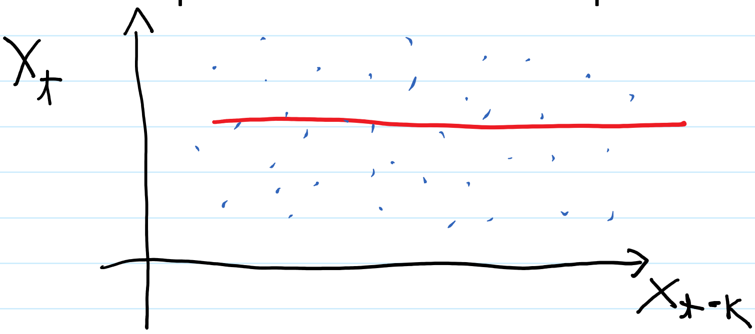
- Agora, considere *MA(q=1)* com $X_t = E_t + \beta_1 E_{t-1}$. A sua autocovariância para um intervalo $k = 1$ será:

$\gamma(k = 1) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{Cov}(E_t + \beta_1 E_{t-1}, E_{t-1} + \beta_1 E_{t-2}) = \beta_1 . \sigma^2_E$

Utilizando a técnica de plug-in, a autocovariância para qualquer *k* maior que *q* = 1 será:

$\gamma(k > 1) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-k}) = 0$

Não há mais dependência serial para intervalos *k* maior que a ordem *q* = 1:



Assim, a autocovariância do processo MA(q=1) é independente do tempo t (!). Essa propriedade juntamente com a média zero e variância constante demonstram que MA(q=1) é um processo estacionário.

- Já para a autocorrelação de MA(q=1), tem-se:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\beta_1}{1+\beta_1} \; e \; \rho(k) = 0 \; para \; todo \; k > q = 1$$

Assim, $\rho(1) \leq 0{,}5$, não importa o valor de β_1. Então, se observarmos uma série temporal que o seu coeficiente de correlação exceda esse valor, temos uma evidência de que ela não seguirá um processo MA(1). Note que estacionariedade não depende da escolha do parâmetro β_1.

Fonte: www.pixabay.com

★ Generalizando os resultados acima para um processo MA de ordem qualquer $q \geq 1$, podemos concluir que um processo MA(q) será sempre estacionário, independente de $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_q$ [diferentemente do processo AR(p)]. Além disso, a sua função de autocorrelação é zero para qualquer k > q.

★ Exemplo:

Ajustamento

Aplicação