Como já mecionado, um processo de média móvel de ordem *q* ou *MA(q)* é uma extensão do processo de ruído branco E_t:

$X_t = E_t + \beta_1 E_{t-1} + \beta_2 E_{t-2} + \ldots + \beta_q E_{t-q}$

Isto é, uma combinação linear da corrente pertubação E_t mais as mais recentes E_{t-1}, E_{t-2}, ... E_{t-q}.


Fonte: www.pixabay.com

E_t é um processo de ruído branco (!), ou seja, é independente e identicamente distribuído, e também é independente de qualquer X_s, em que $s < t$.

Momentos e Dependência

- Sendo uma combinação linear de E_t, qualquer processo *MA(q)* X_t possui média zero e variância constante:

$E[X_t] = 0$ para todo *t*, e $Var(X_t) = \sigma_E^2 \cdot \left(1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j^2\right)$=constante //

- Assim como para o modelo autoregressivo, é possível adicionar uma constante *m* ao *MA(q)* para se considerar séries temporais com média diferente de zero:

$Y_t = m + X_t$


Fonte: www.pixabay.com

- Agora, considere $\boxed{MA(q=1)}$ com $X_t = E_t + \beta_1 E_{t-1}$. A sua autocovariância para um intervalo $k = 1$ será:

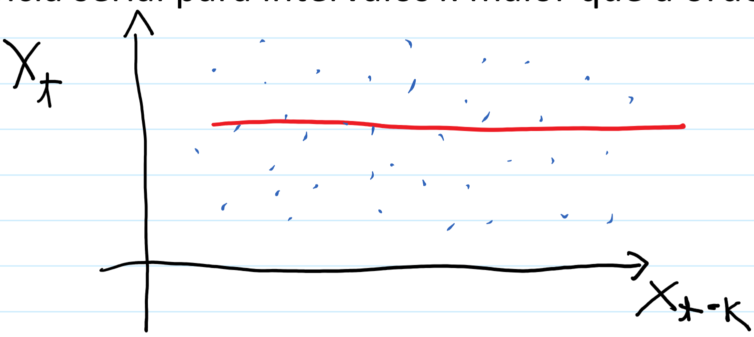
$\gamma(k = 1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(E_t + \beta_1 E_{t-1}, E_{t-1} + \beta_1 E_{t-2}) = \boxed{\beta_1 . \sigma^2_E}$

Utilizando a técnica de plug-in, a autocovariância para qualquer *k* maior que *q* = 1 será:

$\gamma(k > 1) = Cov(X_t, X_{t-k}) = 0$

$\gamma(k > 1) = \text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = 0$

Não há mais dependência serial para intervalos *k* maior que a ordem *q* = 1:



Assim, a autocovariância do processo MA(q=1) é independente do tempo t (!). Essa propriedade juntamente com a média zero e variância constante demonstram que MA(q=1) é um processo estacionário.

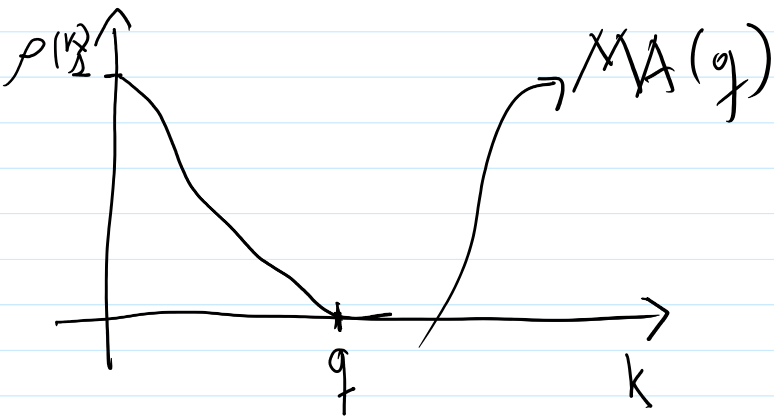
Então, para a autocorrelação de MA(q=1), tem-se:

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{\beta_1}{1+\beta_1} \; e \; \rho(k) = 0 \; para \; todo \; k > q = 1$$

Assim, $\rho(1) \leq 0{,}5$, não importa o valor de β_1. Se observarmos uma série temporal que o seu coeficiente de correlação exceda esse valor, temos uma evidência de que ela não seguirá um processo MA(1). Note que estacionariedade não depende da escolha do parâmetro β_1[diferentemente do processo AR(1)].

Fonte: www.pixabay.com

Generalizando os resultados acima para um processo MA de ordem qualquer q $\geq$1, podemos concluir que um processo MA(q) será sempre estacionário, independente de β_1, β_2, ... β_q [diferentemente do processo AR(p)]. Além disso, a sua função de autocorrelação é zero para qualquer k > q.



★ Exemplo: Autocorrelação (parcial) de MA(1)