אותות ומערכות גיליון 6 שב יבש

מגישים:

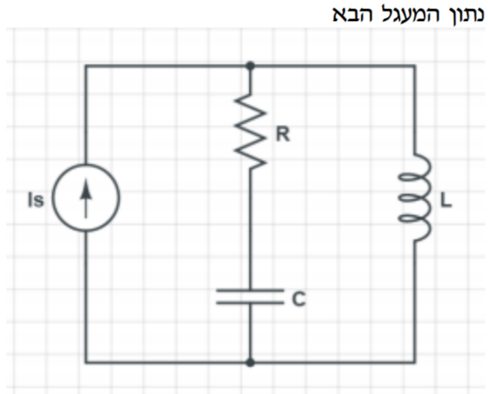
<u>יונתן פול - 204862098</u>

<u>אוריה גולדמן - 206336968</u>

תאריך: 18.5.20

1 **מעגל חשמלי:**

נתון המעגל הבא



כאשר:

$$x(t) = I_s(t)$$
$$y(t) = V_C(t)$$

1.1)

נגדיר $q_1 = V_c$ ו- $q_2 = I_L$

נקבל:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_c \\ I_L \end{pmatrix}$$

$$q' = \begin{pmatrix} q_1{}' \\ q_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_c{}' \\ I_L{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_R}{C} \\ \frac{V_L}{L} \end{pmatrix}$$

לפי חוקי קירכהוף וחוק אוהם:

$$I_R = I_s - I_L$$
$$V_L = V_C + V_R = V_C + I_R R$$

נקבל:

$$q' = \begin{pmatrix} \frac{I_s}{C} - \frac{I_L}{c} \\ \frac{V_c + (I_s - I_L)R}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{I_s}{C} - \frac{I_L}{c} \\ \frac{V_c - I_L R}{L} + \frac{R I_s}{L} \end{pmatrix} =$$

לסיכום:

$$q' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{c} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} q + \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} x(t)$$

ובנוסף:

$$y(t) = V_c(t) = [1,0] \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

(1.2
נתון כעת:

$$\begin{cases} R = 3\Omega \\ L = 1H \\ C = 0.5F \\ x(t) = u(t) \\ y(0^-) = 1 \\ y'(0^-) = 1 \end{cases}$$

נרצה להשתמש בנוסחה הבאה:

$$\boldsymbol{Y}^L(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{q}_0 + [\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}]\boldsymbol{X}^L(s)$$

ולכן נמצא את $(sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \left(sI - \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{c} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}^{-1}\right) = \begin{pmatrix} s & \frac{1}{c} \\ \frac{-1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+3)+2}\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}$$

נמצא את q_0:

$$q_0 = \begin{pmatrix} q_1(0^-) \\ q_2(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_c(0^-) \\ I_L(0^-) \end{pmatrix}$$

נתון:

$$V_C(0^-) = 1[H]$$

נחשב את $I_L(0^-)$:

נתון:

$$V_c(0^-)' = \frac{I_R(0^-)}{C} = 1$$

$$I_R(0^-) = 0.5[A]$$

נתון:

$$x(0^-) = u(0^-) = 0$$

ולכן:

$$I_R(0^-) = -I_L(0^-) = 0.5[A]$$

בסה"כ:

$$q_0 = \begin{pmatrix} V_c(0^-) \\ I_L(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

ראינו ש

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad C = [1, \quad 0]$$

לכן נקבל:

$$X^{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y^{\mathcal{L}}(s) = [1, \quad 0]\left(\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} + [1, \quad 0]\left(\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{pmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{1}{s}$$

$$Y^{\mathcal{L}}(s) = \frac{1}{s(s+3)+2}(s+3 \quad -2)\begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \frac{1}{s(s+3)+2}(s+3 \quad -2)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\frac{1}{s}$$

$$Y^{\mathcal{L}}(s) = \frac{s+4}{s(s+3)+2} + \frac{1}{s}\frac{2s}{s(s+3)+2} = \frac{s+6}{s(s+3)+2} = \frac{s+6}{s^2+3s+2} = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)}$$

נבצע פירוק לגורמים חלקיים:

$$\frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2} = \frac{s+6}{(s+1)(s+2)}$$

$$a(s+2) + b(s+1) = (a+b)s + 2a + b = s + 6$$

$$s = (a+b)s$$

$$2a + b = 6$$

$$b = 6 - 2a$$

$$a - 2a + 6 = 6 - a = 1$$

$$a = 5$$

$$b = -4$$

$$Y^{\mathcal{L}}(s) = \frac{5}{s+1} - \frac{4}{s+2}$$

נבצע התמרה הפוכה ונקבל לפי הטבלה:

$$y(t) = u(t)(5e^{-t} - 4e^{-2t})$$

2)

2.1) נתונה המשוואה $y'' - 9y = x' - x$

נמצא את הייצוג הקנוני הקונטרולבילי של המשוואה:

תחילה נבחר:

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

ידוע כי בייצוג זה:

$$y = (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_n) \cdot x(t) = (-1 \quad 1) \cdot q$$

וגם:

$$q' = \begin{pmatrix} q_0{}' \\ q_1{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} x(t)$$

$$C = (-1 \quad 1) \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2) נמצא ייצוג שבו A אלכסונית:

קיבלנו שA היא :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

נמצא את הערכים העצמיים של המטריצה:

$$|\lambda I - A| = 0 = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -9 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 9$$

$$\lambda = \pm 3$$

נמצא את הווקטורים העצמיים של המטריצה:

עבור $\lambda_1 = 3$:

$$(3I - A)V_1 = 0 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow 3v_1 - v_2 = 0 \rightarrow 3v_1 = v_2$$

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda_2 = -3$:

$$(-3I - A)V_1 = 0 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \rightarrow\rightarrow -3v_1 - v_2 = 0 \rightarrow 3v_1 = -v_2$$

$$v_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן מטריצת הטרנספורמציה היא P:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ונקבל:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

המשוואה היא:

$$q' = Aq + Bx$$

נכפיל בP^{-1} משמאל:

$$P^{-1} \cdot q' = P^{-1}A(P \cdot P^{-1})q + P^{-1}B \cdot x(t)$$

נסמן: $p(t) = P^{-1} \cdot q(t)$ וגם $P^{-1}B = \tilde{B}$

$$p' = \tilde{A} \cdot p + \tilde{B} \cdot x(t)$$

וגם נציב $CP = \tilde{C}$:

$$y = Cq(t) + d \cdot x(t) = C(P \cdot P^{-1})q(t) + d \cdot x(t) = (CP) \cdot \left(P^{-1}q(t)\right) + d \cdot x(t) = \tilde{C}p(t) + d \cdot x(t)$$

<u>נקבל בסה"כ:</u>

$$p' = \tilde{A} \cdot p + \tilde{B} \cdot x(t)$$

$$y = \tilde{C}p(t) + d \cdot x(t)$$

כאשר:

$$\tilde{A} = P^{-1}AP \qquad \tilde{B} = P^{-1}B \qquad \tilde{C} = CP \qquad p(t) = P^{-1} \cdot q(t) \qquad d = d$$

2.3) נפתור את המשוואה שקיבלנו עבור ZIR ולכן נאפס את כניסת המערכת

נקבל

$$p' = \tilde{A} \cdot p$$

$$y = \tilde{C}p(t)$$

מהמשוואה $p' = \tilde{A} \cdot p$ נקבל שהפתרון עבור p הוא:

$$p(t) = e^{\tilde{A}t}v_0$$

כאשר v_0 הוא ווקטור תנאי התחלה, נציב אותם ונקבל:

$$p(0) = e^{\tilde{A}0}v_0 = v_0 \qquad \rightarrow \qquad p(t) = e^{\tilde{A}t}p(0)$$

נציב במשוואה השנייה:

$$y_{ZIR} = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}p(0)$$

נציב:

$$p(0) = P^{-1} \cdot q(0) = P^{-1}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

כיוון ש $\tilde{A}$ מטריצה אלכסונית:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = CP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

בסה"כ:

$$y = \tilde{C}e^{\tilde{A}t}p(0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 4e^{3t} - 16e^{-3t}$$

2.4) תחילה נציין כי פונקציית התמסורת (מחלוקת הפולינומים האופייניים) שנצפה לקבל היא:

$$H^{\mathcal{L}}(s) = \frac{(s-1)}{s^2-9}$$

נשתמש במרחב המצב ובנוסחה כדי למצוא בדרך נוספת את פונקציית התמסורת:

$$\boxed{H^L(s) = \frac{Y^L(s)}{X^L(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + d}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ -9 & s \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2-9}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 9 & s \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d = 0$$

$$H^{\mathcal{L}}(s) = C(sI - A)^{-1}B + d = \frac{1}{s^2-9}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & 1 \\ 9 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2-9}\begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2-9}(s-1)$$

קיבלנו את אותה פונקציית תמסורת ולכן עבור התמרת לפלס ישירה על 2 האגפים, ובאמצעות נוסחאות מרחב המצב.