$$ext{MSE}(\hat{ heta}) = \mathbb{E}_{ heta}\left[(\hat{ heta} - heta)^2
ight]$$

 $\mathbf{E}_{m{ heta}} \left[ \left( \hat{m{ heta}} - \mathbb{E}_{m{ heta}}[\hat{m{ heta}}] 
ight)^2 
ight] + \left( \mathbb{E}_{m{ heta}}[\hat{m{ heta}}] - m{ heta} 
ight)^2$ 

 $= \operatorname{Var}_{\theta}(\hat{\theta}) + \operatorname{Bias}_{\theta}(\hat{\theta}, \theta)^{2}$ 

 $\mathbf{E}_{ heta}\left[\left(\hat{ heta}-\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}]
ight)^{2}
ight]+2\left(\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}]- heta
ight)\left(\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}]-\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}]
ight)+\left(\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}]- heta
ight)^{2}$ 

 $\mathbb{E}_{ heta}[\hat{ heta}] - heta = ext{const.}$ 

 $\mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] = \mathrm{const.}$ 

$$egin{aligned} &= \mathbb{E}_{ heta} \left[ \left( \hat{ heta} - \mathbb{E}_{ heta} [\hat{ heta}] + \mathbb{E}_{ heta} [\hat{ heta}] - heta 
ight)^2 
ight] \ &= \mathbb{E}_{ heta} \left[ \left( \hat{ heta} - \mathbb{E}_{ heta} [\hat{ heta}] 
ight)^2 + 2 \left( \hat{ heta} - \mathbb{E}_{ heta} [\hat{ heta}] 
ight)^2 
ight] \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_{m{ heta}} = \mathbf{E}_{m{ heta}} \left[ \left( \hat{m{ heta}} - \mathbf{E}_{m{ heta}} [\hat{m{ heta}}] 
ight)^2 + 2 \left( \hat{m{ heta}} - \mathbf{E}_{m{ heta}} [\hat{m{ heta}}] 
ight) \left( \mathbf{E}_{m{ heta}} [\hat{m{ heta}}] - \check{m{ heta}} 
ight) + \left( \mathbf{E}_{m{ heta}} [\hat{m{ heta}}] - m{ heta} 
ight)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E}_{\theta} \left[ \left( \hat{\theta} - \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] \right)^2 \right] + \mathbb{E}_{\theta} \left[ 2 \left( \hat{\theta} - \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] \right) \left( \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta \right) \right] + \mathbb{E}_{\theta} \left[ \left( \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta \right)^2 \right]$$

$$= \mathbb{E}_{\theta} \left[ \left( \hat{\theta} - \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] \right)^{2} \right] + 2 \left( \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta \right) \mathbb{E}_{\theta} \left[ \hat{\theta} - \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] \right] + \left( \mathbb{E}_{\theta}[\hat{\theta}] - \theta \right)^{2}$$

$$=\mathbb{E}_{\epsilon}$$