MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)

FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL
SÉRIES : (SVT, SMP)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
MATHÉMATIQUES (MODÈLE 1)

Paramètre

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : ***Le sujet est composé de trois parties A , B et C. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.***

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).

1- Si, pour tout entier naturel n, une suite (U_n) vérifie la relation $\frac{2n^2-3}{n^2+1} \le U_n \le \frac{2n^2+3}{n^2+1}$, alors la limite de la suite (U_n) est égale à …………..

2- Soit les intégrales suivantes. $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$, alors la valeur exacte de $I + J$ est égale à …………

3- Soit la série statistique suivante :

x	1	2	3
y	4	5	6

Le coefficient de corrélation de la série est r = ………

4- Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), p)$ tels que : $P(A) = \frac{3}{10}$ et $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$. La probabilité de l'événement B est donc $p(B)$ = ………

5- Soit (V_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = 2^{3n}$. Si V_n est un multiple de 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $V_{n+1} = kV_n$ pour k = ……….

6- L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $E(3x-2) = 6$ est S = …….

7- Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln\left(\frac{e^x}{y}\right)$ est égal à ………

8- La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y - 2$, vérifiant la condition $y(0) = 4$, est telle que $y(x)$ = ………

9- Les deux racines carrées du nombre complexe $z = 3 + 4i$ sont z_1 = ………… et z_2 = ………..

10- Soit $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -3 + 2i$ deux nombres complexes. La forme algébrique du nombre complexe $p = iz_1 - 3\overline{z_2}$ est telle que p = ………

PARTIE B.- Obligatoire. (20 pts)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$f(x) = x + \frac{1+\ln x}{x}$ et $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Calculer $f'(x)$, la dérivée 1ère de la fonction f.
2) g est la fonction définie par $g(x) = x - 1 - \ln x$.
Étudier le sens de variations de g puis, son signe. En déduire la position de $(\mathscr{C})$ de f par rapport à la droite $y = x + 1$.
3) Écrire l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse $x = a$, puis préciser la valeur de a pour laquelle cette tangente passe par l'origine du repère.

PARTIE C.- Traiter deux des quatre exercices suivants. (15 pts par exercice)

1. Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, $b = -\overline{a}$ et $c = 3i$.

I- 1) Écrire les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle.
2) Placer les points A, B et C dans le repère.
3) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral

2. Un sac contient 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 3 boules blanches numérotées de 1 à 3.
On extrait simultanément 2 boules du sac

a) Quelle est la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de couleurs différentes.
b) A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :
- si les 2 boules sont blanches, X prend la valeur $a + b$.
- si les 2 boules sont rouges, X prend la valeur $|a-b|$.
- si les 2 boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer la variance de X.

3. Une suite réelle (U_n) est telle que $U_0 = -5$ et $U_{n+1} = U_n + 4n + 5$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) On pose $V_n = U_n - 2n^2$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique que l'on précisera.
   b) Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

4. Voici l'évolution du tirage (en milliers d'exemplaires) d'un journal durant les sept derniers mois.

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Tirage y_i	6	4	6	8	10	10	12

a) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
b) Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de y en x.

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C1 : Savoir utiliser le théorème des gendarmes dans la détermination de la limite d'une suite

- Se rappeler que, si $U_n \leq V_n \leq W_n$ et si $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} W_n = l$, on peut alors conclure que $\lim\limits_{+\infty} V_n = l$

C2 : Savoir appliquer la propriété de linéarité dans le calcul d'une intégrale.

- Se rappeler que : $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) + g(x)]dx$

C3 : Savoir calculer le coefficient de corrélation d'une série statistique double.

- Se rappeler des formules suivantes :

$$r = \frac{cov(X;Y)}{\sqrt{var(X)\cdot var(Y)}} = \frac{cov(X;Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} \quad ; \quad cov(X;Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X}\cdot\overline{Y} \qquad \overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} \text{ et } \overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n}$$

C4 : Savoir appliquer la formule des probabilités totales dans le cas de deux évènements indépendants.

- Se rappeler que : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, avec $p(A \cap B) = p(A)\cdot p(B)$, lorsque A et B sont indépendants.

C5 : Savoir utiliser les propriétés sur les puissances dans l'étude d'une suite géométrique.

- Se rappeler que : $a^n \times a^p = a^{n+p}$

C6 : Savoir résoudre dans R une équation dans laquelle intervient la notion de partie entière d'un réel.

- Se rappeler que : $\forall n \in Z,\ E(x) = n \Rightarrow n \leq x \leq n + \boldsymbol{1}$

C7 : Savoir utiliser les propriétés relatives au logarithme pour transformer une écriture

- Se rappeler que : $\forall a > \boldsymbol{0}, \forall b > \boldsymbol{0}, \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

C8 : Savoir résoudre dans R une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ tout en respectant certaines conditions initiales

- Se rappeler que les solutions sur R d'une équation pareille sont les fonctions $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est une constante quelconque réelle.

C9 : Savoir déterminer la racine carrée d'un nombre complexe dont on connait la forme algébrique

- Si $z = a + ib$, ses deux racines carrées sont alors $z_{\boldsymbol{1}}$ et $z_{\boldsymbol{2}}$ de la forme $x + iy$ et vérifiant simultanément les relations : $x^{\boldsymbol{2}} - y^{\boldsymbol{2}} = a$; $x^{\boldsymbol{2}} + y^{\boldsymbol{2}} = \sqrt{a^{\boldsymbol{2}} + b^{\boldsymbol{2}}}$ et $xy = \frac{b}{\boldsymbol{2}}$

C10 : Savoir effectuer dans C une chaine d'opérations impliquant la détermination du conjugué d'un complexe, la somme et le produit de deux complexes

- Se rappeler que : si $z = a + ib$, alors on a $\overline{z} = a - ib$
  Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, alors on a : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ et $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Correction du texte

Partie A.-

1- Si, pour tout entier naturel n, une suite (U_n) vérifie la relation $\frac{2n^2-3}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{2n^2+3}{n^2+1}$, alors la limite de la suite (U_n) est égale à **2**

Démarche : *Soit* $V_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1}$ et $W_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$. *D'après le théorème d'encadrement, on a :* $V_n \leq U_n \leq W_n$*, si V et w ont la même limite l en* $+\infty$*, alors* $\lim\limits_{+\infty} U_n = l$

Or $\lim\limits_{+\infty} V_n = \lim\limits_{+\infty} W_n$

D'où $\lim\limits_{+\infty} U_n = 2$

2- Soit les intégrales suivantes. $I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx$ et $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$, alors la valeur exacte de $I + J$ est égale à $\frac{1}{2}$

Démarche : *on a :* $I + J = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+1)}{1+x^2}dx = \int_0^1 xdx \Rightarrow I + J = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

3- Soit la série statistique suivante :

x	1	2	3
y	4	5	6

Le coefficient de corrélation de la série est ***r* = 1**

Démarche : *Coefficient de corrélation r*

$$r = \frac{cov(X;Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} \quad \text{avec} \quad cov(X;Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X}\cdot\overline{Y}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \overline{X} = \frac{1+2+3}{3} \Rightarrow \overline{X} = 2 \quad ; \quad \overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} \Rightarrow \overline{Y} = \frac{4+5+6}{3} \Rightarrow \overline{Y} = 5$$

$$\Rightarrow cov(X,Y) = \frac{1\times4+2\times5+3\times6}{3} - 2\times5 = 0{,}66$$

$$\sigma(X) = \frac{\sum x_i^{\,2}}{n} - \overline{X}^2 \Rightarrow \sigma(X) = \frac{1+4+9}{3} - 4 = 0{,}66 \text{ et}$$

$$\sigma(Y) = \frac{\sum y_i^{\,2}}{n} - \overline{Y}^2 \Rightarrow \sigma(X) = \frac{16+25+36}{3} - 25 = 0{,}66$$

D'où $r = \frac{0{,}66}{\sqrt{0{,}66}\times\sqrt{0{,}66}} \Rightarrow r = 1$

4- Soit A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé fini (Ω, $\mathcal{P}$(Ω), p) tels que : $P(A) = \frac{3}{10}$ et $P(A \cup B) = \frac{13}{20}$. La probabilité de l'événement B est donc ***p*(*B*) =** $\frac{1}{2}$

Démarche : *A et B étant deux évènements indépendants on a* $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$.vv

Or on a $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$dd

Il vient alors $\frac{13}{20} = \frac{3}{10} + p(B) - \frac{3}{10}p(B) \Rightarrow p(B) = \frac{1}{2}$

5- Soit (V_n) une suite définie sur ℕ par $V_n = 2^{3n}$. Si V_n est un multiple de 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $V_{n+1} = kV_n$ pour k = 8

Démarche : *On donne* $V_n = 2^{3n} \Rightarrow V_{n+1} = 2^{3n+3} = 2^3 \times 2^{3n} = 8 \times 2^{3n}$

D'où $k = 8$

6- L'ensemble des solutions dans ℝ de l'équation est $S = \left[\frac{8}{3}; 3\right[$

Démarche : *On donne* $E(3x-2) = 6$

Or $E(x) = n, n \in Z \Rightarrow n \leq x < n+1 \Leftrightarrow E(x) \leq x < n+1$

On a donc $6 \le 3x-2<7 \Rightarrow \frac{8}{3} \le x < 3$

D'où $S=\left[\frac{8}{3};3\right[$

7- Pour tous réels x et y strictement positifs, $ln\left(\frac{e^x}{y}\right)$ est égal à $x - ln\, y$

Démarche : $x>0, y>0, ln\left(\frac{e^x}{y}\right) = ln\, e^x - ln\, y = x - ln\, y$

8- La solution sur ℝ de l'équation différentielle $y' = y - 2$, vérifiant la condition $y(0) = 4$, est telle que $y(x) = 2e^x + 2$

Démarche : *posons* $y' - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow y = ke^x$
Cherchons k
$ke^0 + 2 = 4 \Rightarrow k = 2$
Les solutions sont donc de la forme $y = 2e^x + 2$

9- Les deux racines carrées du nombre complexe $z = 3 + 4i$ sont $z_1 = -2 - i$ et $z_2 = 2 + i$

Démarche : $z = 3 + 4i \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \\ x^2 - y^2 = 5 & (3) \end{cases}$

Dans (1) et (3), on a : $2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$
Pour $x = -2$, dans (2) $y = -1$
Pour $x = 2$, dans (2) $y = 1$
D'où $z_1 = -2 - i$ et $z_2 = 2 + i$

10- Soit $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -3 + 2i$ deux nombres complexes. La forme algébrique du nombre complexe $p = iz_1 - 3\overline{z_2}$ est telle que $p = 10 + 7i$
Démarche : On a $p = iz_1 - 3\overline{z_2} \Rightarrow p = i(1-i) - 3(-3-2i) \Rightarrow p = 10 + 7i$

Partie B.-

$f(x) = x + \frac{1 + \ln x}{x}$, et $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Calculons $f'(x)$, la dérivée 1ère de la fonction f.

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}(x) - 1(1 + \ln x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1 - 1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - \ln x}{x^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x) = 1 - \frac{\ln x}{x^2}}$$

2) g est la fonction définie par $g(x) = x - 1 - \ln x,\ x > 0$

Etudions le sens de variation de g puis, son signe.

Déduisons en la position de $(\mathscr{C})$ de f par rapport à la droite $y = x + 1$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{x-1}{x} \Rightarrow x = 1 \quad pour \quad g'(x) = 0$$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	0	↗	

- $x \in]0,1[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur cet intervalle
- $x \in]1,+\infty[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle

$g(x) = x - \ln x - 1 = x - (1 + \ln x)$

D'après l'étude des variations de g, on voit que :

$x \in]0,1[\Rightarrow g(x) > 0$, $x = 1 \Rightarrow g(x) = 0$

$x \in]1,+\infty[\Rightarrow g(x) > 0$

on peut résumer que :

$x \in]0,+\infty[\Rightarrow g(x) \geq 0$

Position de ($\mathscr{C}$) par rapport f

$$f(x) - y = x + \frac{1 + \ln x}{x} - x - 1 \Rightarrow f(x) - y = -1 + \frac{1 + \ln x}{x} \Rightarrow f(x) - y = \frac{-x + 1 + \ln x}{x}$$

$$\Rightarrow f(x) - y = -\frac{g(x)}{x}, \ x > 0, \ g(x) > 0$$

Donc $f(x) - y < 0$ la courbe est en dessous de la droite : $y = x - 1$

3) Écrivons l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}$) d'abscisse $x = a, (a > 0)$, puis précisons la valeur de a pour laquelle cette tangente passe par l'origine du repère.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad or \quad x_0 = a$$
$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (1)$$

$$f(a) = a + \frac{1 + \ln a}{a} \Rightarrow f(a) = \frac{a^2 + 1 + \ln a}{a} \Rightarrow f'(a) = \frac{a^2 - \ln a}{a^2}$$

Il vient dans (1)

$$y = \left(\frac{a^2 - \ln a}{a^2}\right)(x - a) + \frac{a^2 + 1 + \ln a}{a}$$

$$y = \left(\frac{a^2 - \ln a}{a^2}\right)x - \left(\frac{a^2 - \ln a}{a}\right) + \frac{a^2 + 1 + \ln a}{a}$$

$$y = \left(\frac{a^2 - \ln a}{a^2}\right)x + \frac{\ln a - a^2 + a^2 + 1 + \ln a}{a}$$

$$y = \left(\frac{a^2 - \ln a}{a^2}\right)x + \frac{1 + 2\ln a}{a}$$

$$1 + 2\ln a = 0 \Rightarrow 2\ln a = -1 \Rightarrow \ln a = -\frac{1}{2}$$

$$\ln a = \ln e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow a = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\boxed{a = \frac{\sqrt{e}}{e}}$$

Partie C.-

Exo # 1-

Repère orthonormé direct $\left(0, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2cm

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$b = -\bar{a} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \rightarrow B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$c = 3i \rightarrow C(0;3)$$

1) Écrivons les nombres complexes a, b et c sous forme exponentielle

$$|a| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} \Rightarrow |a| = \sqrt{3}$$

Soit θ_1 un argument de a

$$\tan\theta_1 = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan\theta_1 = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan\theta_1 = \sqrt{3}$$

$$\tan\theta_1 = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

La forme abregée de a est :

$$a = \left[\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

Soit θ_2 un argument de b

$$\cos\theta_2 = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}\ (-)$$

$$\sin\theta_2 = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\theta_2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}(+)$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{quadrant 2 arcs supplémentaires}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_2 = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\theta_2 = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta_2 = \cos\frac{2\pi}{3} \\ \sin\theta_2 = \sin\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$$

La forme polaire de b est :

$$b = \left[\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$|c| = \sqrt{(0)^2 + (3)^2} \Rightarrow |c| = 3$$

N.B : Tout complexe imaginaire pur bi avec $b>0$, a pour argument $\frac{\pi}{2}$

Soit θ_3 un argument de c

$$\theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z$$

La forme polaire de c est :

$$c = \left[3, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{c = 3e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

2) Plaçons les points A, B et C dans le repère

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \to A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$b = -\bar{a} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \to B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

$$c = 3i \to C(0;3)$$

3) Démontrons que le triangle ABC est équilatéral

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ donc le triangle ABC est équilatéral

$$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Exo # 2-

a) Déterminons la probabilité pour que les boules soient de couleurs différentes

Soit B cet évènement

$$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} \Rightarrow p(B) = \frac{C_6^1 \times C_3^1}{C_9^2} \Rightarrow \boxed{p(B) = \frac{1}{2}}$$

b)

1. Déterminons la loi de probabilité de X

X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4 ,5 et la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X=x_i)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$

$\sum p_i = 1$

2. Calcul de la variance de X

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \sum x_i^2 p_i \Rightarrow E(X^2) = (0)^2 \times \frac{18}{36} + (1)^2 \times \frac{5}{36} + (2)^2 \times \frac{4}{36} + (3)^2 \times \frac{4}{36} + (4)^2 \times \frac{3}{36} + (5)^2 \times \frac{2}{36}$$

$$E(X^2) = \frac{155}{36} \Rightarrow E(X^2) = 4{,}3$$

$$E(X) = \sum x_i p_i \Rightarrow E(X^2) = (0) \times \frac{18}{36} + (1) \times \frac{5}{36} + (2) \times \frac{4}{36} + (3) \times \frac{4}{36} + (4) \times \frac{3}{36} + (5) \times \frac{2}{36}$$

$$E(X) = \frac{47}{36} \Rightarrow E(X) = 1{,}30$$

D'où $V(X) = 4{,}3 - (1{,}3)^2 \Rightarrow V(X) = 4{,}3 - 1{,}69 \Rightarrow \boxed{V(X) = 2{,}61}$

Exo # 3-

$$\begin{cases} U_0 = -5 \\ U_{n+1} = U_n + 4n + 5 \end{cases}$$

1) Calcul de U_1 et U_2

$n = 0,\ U_1 = U_0 + 4(0) + 5 \Rightarrow U_1 = 0$

$n = 1,\ U_2 = U_1 + 4(1) + 5 \Rightarrow U_1 = 9$

2) $V_n = U_n - 2n^2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

a. (V_n) est une suite arithmétique ssi, $\exists r \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - V_n = r$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 2(n+1)^2 \Rightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 2(n^2 + 2n + 1)$

$V_{n+1} = U_{n+1} - 2n^2 - 4n - 2 \quad or \quad U_{n+1} = U_n + 4n + 5$

$V_{n+1} = U_n + 4n + 5 - 2n^2 - 4n - 2 \Rightarrow V_{n+1} = U_n - 2n^2 + 3$

Faisons leur différence

$V_{n+1} - V_n = U_n - 2n^2 + 3 - U_n + 2n^2$
$V_{n+1} - V_n = 3$

$V_0 = U_0 - 2(0)^2 \Rightarrow V_0 = -5$

(V_n) est une suite arithmétique de raison *r = 3* et de premier terme $V_0 = -5$

b. Exprimons V_n puis U_n en fonction de n

$V_n = V_0 + nr \Rightarrow V_n = -5 + 3n$

$U_n = V_n + 2n^2 \Rightarrow U_n = -5 + 3n + 2n^2$

Exo # 4-

a) Calculons les coordonnées du point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$ de ce nuage

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} \Rightarrow \overline{X} = \frac{28}{7} = 4$$
$$\overline{Y} = \frac{\sum y_i}{n} \Rightarrow \overline{X} = \frac{6+4+6+8+10+10+12}{7} \Rightarrow \overline{Y} = \frac{56}{7} = 8$$

Donc $G(4,8)$

b) Déterminons par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite de régression de *y* en *x*

$y = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)}$

$$\text{cov}(X;Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n} - \overline{X} \cdot \overline{Y}$$
$$\text{cov}(X;Y) = \frac{6+8+18+32+50+60+84}{7} - (4)(8)$$
$$\text{cov}(X;Y) = \frac{258}{7} - 32 = 4{,}86$$

$$V(X) = \frac{\sum x_i^2}{n} - \overline{X}^2$$
$$V(X) = \frac{140}{7} - 16 \Rightarrow V(X) = 4$$

D'où la pente de la droite de régression de *y* en *x* est :

$$a = \frac{\text{cov}(x, y)}{V(x)} \Rightarrow a = \frac{4{,}86}{4} = 1{,}215$$

$$\overline{y} = a\overline{x} + b \Rightarrow 8 = 1{,}215(4) + b \Rightarrow 8 = 4{,}86 + b \Rightarrow b = 3{,}14$$

D'où $y = 1{,}215x + 3{,}14$