**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)**
**FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL**
**SÉRIE : (SES)**

**EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES**
**MATHÉMATIQUES (MODÈLE 3)**

# ELASTICITE

*Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. Le silence est obligatoire*

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

***N.B :** Le sujet est composé de deux parties A,B et C. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.*

**PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).**

1.- La fonction numérique $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$ est telle que $f(\ln 2)$ = ……….

2.- Si $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+2e^{-x}}{e^x+1}\right)$ alors la fonction dérivée 1ère de $f$ est $f'(x)=\ldots$

3.- Si 13 est le 3ème terme d'une suite arithmétique et 28 le 6ème terme de cette suite, alors la raison de cette suite est $r$ = ……….

4.- Le troisième terme de la suite $U$ définie pour tout entier naturel $n$ par $U_n=\dfrac{3^{n+2}}{n!}$ est le réel ……….

5.- Soit $(U_n)$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n=e^{2n+3}$. $(U_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ = ……….

6.- La forme exponentielle du nombre complexe $z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ est $z=$

7.- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, $A$, $B$ et $C$ sont les points d'affixes respectives: $3+2i$, $-1+3i$ et $-2-2i$. L'affixe $z_G$ du barycentre $G$ des points massifs ($A$; 2), ($B$; -3) et ($C$;-5) s'écrit $z_G=\ldots$

8.- Si $A$ et $B$ sont deux évènements incompatibles d'un espace probabilisé fini ($\Omega$, $\mathcal{P}(\Omega)$, $p$) tels que $p(A)=\dfrac{1}{6}$ et $p(B)=\dfrac{1}{2}$ alors, on a : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=\ldots$

9.- Un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotés 1; 2; 3; 4; 5 et 6 est lancé. La probabilité qu'il s'immobilise sur un numéro pair ou impair est égale à …………..

10.- Dans le tableau ci-dessous, $x_i$ et $y_i$ désignent respectivement la note obtenue au bacc et celle obtenue à un concours par cinq élèves d'une même classe :

| | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Note $x_i$ | 7 | 10 | 11 | 13 | 16 | 57 |
| Note $y_i$ | 8 | 9 | 12 | 12 | 13 | 54 |

Le point moyen $G$ du nuage correspondant a donc pour coordonnées (….. ; …..)

**PARTIE B.- Exercice obligatoire. (25 pts)**

Une entreprise de loisirs possède 60 bateaux et les loue à la semaine. Le coût de fonctionnement hebdomadaire $C(q)$, exprimé en milliers de gourdes, correspondant à la location d'un nombre $q$ de bateaux est donné par :
$C(q) = 15 + 2q - 40\ln(0{,}1q + 1)$

a) Calculer $C(10)$ et $C(20)$. Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de bateaux loués?

b) On considère la fonction définie sur l'intervalle [0; 60] par $f(x) = 15 + 2x - 40\ln(0{,}1x + 1)$
Étudier les variations de $f$ sur [0; 60]
En déduire le coût de fonctionnement hebdomadaire minimal.

**PARTIE C.- Traiter l'un (1) des trois exercices . (25 pts)**

1. On note $U$ le nombre complexe défini par :
$U=z^2-2\overline{z}+1$
   1) On pose $z = x + iy$, ($x$ et $y$ étant des réels) Déterminer en fonction de $x$ et de $y$ la partie réelle $X$ et la partie imaginaire $Y$ du nombre complexe $U$.
   2) Déterminer, puis représenter, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ , l'ensemble des points $M$ d'affixe $z$ tels que $U$ soit un nombre réel.
   3) Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $U$ soit nul.
   4) Soit $A$, $B$ et $C$ les images respectives des nombres complexes : 1; $-1+2i$ et $-1-2i$ Construire $A$, $B$ et $C$ puis, montrer que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle.

2. Dans une caisse, il y a 24 bouteilles de jus dont 8 d'orange, 6 de raisin, 3 d'ananas et 7 de pomme. On tire au hasard et simultanément 4 bouteilles de la caisse et on désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de bouteilles de jus de raisin obtenue à l'issue du tirage.
   a) Calculer la probabilité d'obtenir :
      1) 4 bouteilles de jus de fruits différents.
      2) 4 bouteilles de jus d'un même fruit.
   b) 1) Déterminer la loi de probabilité de X
      2) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3. On considère les impôts payés entre 1980 et 2000 par 2000 contribuables d'une commune rurale.

| Montant | [0;400[ | [400; 800[ | [800; 1200[ | [1200; 1600[ |
|---|---|---|---|---|
| Effectifs | 190 | 410 | 520 | 560 |

| [1600; 2000[ | [2000; 2400[ | [2400; 2800[ |
|---|---|---|
| 170 | 95 | 55 |

   a) Construire l'histogramme de cette série.
   b) Déterminer la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.

## Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

**C1 : Savoir appliquer les propriétés liant le logarithme avec l'exponentiel pour calculer l'image d'un réel par une fonction**

- ⇨ On se rappellera que : $e^{\ln x} = \ln e^{x} = x$

**C2 : Savoir calculer la dérivée d'une fonction composée de la forme $\ln(U)$ étant une fonction exponentielle**

- ⇨ On doit, dans ce cas, appliquer les propriétés : $(\ln(U))' = \frac{U'}{U}$ et $\left(\frac{V}{W}\right)' = \frac{V'W - W'V}{W^2}$

**C3 : Savoir déterminer la raison d'une suite arithmétique dont on connait deux termes quelconques.**

- ⇨ La formule $U_n = U_p + (n-p)r$ , avec $n > p$ , permettra de trouver aisément cette raison *r*.

**C4 : Savoir déterminer un terme quelconque d'une suite définie en fonction de n (de manière explicite)**

- ⇨ On ne fait que remplacer *n* par la valeur convenable.

**C5 : Savoir déterminer la raison d'une suite géométrique dont le terme général $U_n$ est donné en fonction de *n***

- ⇨ Le calcul du quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ donne la raison *q* automatiquement.

**C6 : Savoir donner la forme exponentielle d'un nombre complexe dont la forme cartésienne est connue.**

- ⇨ Pour cela, il faudra d'abord trouver le module et un argument de ce nombre complexe.
  Car, si $z = a + ib$ , avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on pourra alors écrire $z = \rho \cdot e^{i\theta}$

**C7 : Savoir donner l'écriture cartésienne de l'affixe $z_G$ du barycentre G de trois points pondérés (ou massifs) donnés, les affixes respectives des trois points étant connues**

- ⇨ Sachant que $z = a + ib$ est l'affixe du point $M(a\,;b)$, on peut écrire la relation vectorielle traduisant que G est barycentre du système donné. Les coordonnées de G étant trouvées, il sera donc aisé de donner l'écriture de l'affixe $z_G$

**C8 : Savoir exploiter l'incompatibilité de deux évènements et appliquer la formule des probabilités totales pour trouver la probabilité d'un certain évènement composé**

- ⇨ Se rappeler que *A* et *B* sont incompatibles ssi $A \cap B = \phi$ , que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

**C9 : Savoir utiliser la formule de Laplace pour calculer la probabilité d'un évènement, lorsque la situation d'équiprobabilité est reconnue**

- ⇨ D'après Laplace, lorsqu'il y a équiprobabilité, la probabilité d'un évènement *A* est donné par :
  $$P(A) = \frac{card A}{card \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorisables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

**C10 : Savoir déterminer les coordonnées du point moyen G d'un nuage associé à une série statistique double $(X\,;Y)$**

- ⇨ On se rappellera que l'abscisse et l'ordonnée de ce point moyen G sont respectivement la moyenne des $x_i$ et celle des $y_i$.

# Correction du texte

## Partie A.-

1.- La fonction numérique *f* définie sur ℝ par : $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}$ est telle que $f(ln\,2)=\frac{8}{5}$

***Démarche:*** $f(x)=\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\Rightarrow f(ln\,2)=\frac{2e^{ln\,2}}{e^{ln\,2}+e^{-ln\,2}}\Rightarrow f(x)=\frac{2\times 2}{2+\frac{1}{e^{ln\,2}}}\Rightarrow f(x)=\frac{4}{2+\frac{1}{2}}=\frac{8}{5}$

2.- Si *f* est la fonction définie sur ℝ par $f(x)=ln\left(\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+1}\right)$ alors la fonction dérivée 1ère de *f* est $f'(x)=\frac{e^{2x}-4e^x-2}{(e^x+1)(e^{2x}+2)}$

***Démarche :*** $f(x)=ln\left(\frac{e^x+2e^{-x}}{e^x+1}\right)\Leftrightarrow f(x)=ln(e^x+2e^{-x})-ln(e^x+1)$

*On obtient alors :* $f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}-\frac{e^x}{e^x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^{2x}-4e^x-2}{(e^x+1)(e^{2x}+2)}$

3.- Si 13 est le 3ème terme d'une suite arithmétique et 28 le 6ème terme de cette suite, alors la raison de cette suite est $\boldsymbol{r=5}$

***Démarche :*** *On donne* $U_3=13$ *et* $U_6=28$

*On sait que* $U_6=U_3+3r$

*On a alors :* $r=\frac{U_6-U_3}{3}=\frac{28-13}{3}=5$

4.- Le troisième terme de la suite $U$ définie pour tout entier naturel *n* par $U_n=\frac{3^{n+2}}{n!}$ est le réel $U_2=\frac{81}{2}$

***Démarche :*** *On donne* $U_n=\frac{3^{n+2}}{n!},\forall n\in\mathbb{N}$

*Le troisième terme est donc* $U_2=\frac{3^4}{2!}=\frac{81}{2}$

5.- Soit $(U_n)$ la suite réelle définie sur ℕ par $U_n=e^{2n+3}$. $(U_n)$ est une suite géométrique de raison $q=e^2$

*Démarche :* $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=e^{2n+3}$. $(U_n)$ *étant une suite géométrique,* $\exists q\in\mathbb{R}$ *tel que* $U_{n+1}=qU_n\Rightarrow q=\frac{U_{n+1}}{U_n}$

*Il vient* $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{e^{2(n+1)+3}}{e^{2n+3}}=\frac{e^{2n+5}}{e^{2n+3}}=e^{2n+5-(2n+3)}=e^2$

6.- La forme exponentielle du nombre complexe $z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est $z=e^{i2\frac{\pi}{3}}$

***Démarche :*** *Calcul de* $\rho$ *et* $\theta$

$$\rho=|z|=\sqrt{[Re(z)]^2+[Im(z)]^2}\Rightarrow\rho=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$$

$$\cos\theta=\frac{a}{\rho}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-1}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{b}{\rho}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\theta=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z$$

*D'où* $z=e^{i2\frac{\pi}{3}}$

7.- Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, *A*, *B* et *C* sont les points d'affixes respectives: 3+2*i*, -1+3*i* et -2-2i. L'affixe $z_G$ du barycentre *G* des points massifs (*A*; 2), (*B*; -3) et (*C*;-5) s'écrit $z_G=-\frac{1}{4}-\frac{15}{4}i$

***Démarche :*** *On peut écrire* (*3* ; 2), (-*1* ; 3) et (-*2* ;-2)

*Le barycentre est assuré car* $\boldsymbol{2-3+5=4\neq 0}$ *donc G existe et il est unique*

$$2\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

$$x_G=\frac{2\times 3+(-3)\times(-1)+5\times(-2)}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$y_G=\frac{2\times 2+(-3)\times(3)+5\times(-2)}{4}=-\frac{15}{4}$$

*D'où* $z_G=-\frac{1}{4}-\frac{15}{4}i$

8.- Si $A$ et $B$ sont deux évènements incompatibles d'un espace probabilisé fini ($\Omega$, $\mathcal{P}(\Omega)$, $p$) tels que $p(A)=\frac{1}{6}$ et $p(B)=\frac{1}{2}$ alors, on a : $p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-p(A)-p(B)$

*Démarche :A et B étant incompatibles, on a* $A\cap B=\phi$

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-p(A\cup B)$$

$$\Rightarrow p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-[p(A)+p(B)-p(A\cap B)]=1-p(A)-p(B)+p(A\cap B)$$

*or* $p(A\cap B)=p(\phi)=0$

$$\Rightarrow p(\overline{A}\cap\overline{B})=1-p(A)-p(B)$$

9.- Un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotés 1; 2; 3; 4; 5 et 6 est lancé. La probabilité qu'il s'immobilise sur un numéro pair ou impair est égale à $p(\Omega)=1$

***Démarche :*** *La probabilité qu'il s'immobilise sur un numéro pair ou impair correspond à la probabilité de l'évènement certain* $p(\Omega)=1$

10.- Dans le tableau ci-dessous, $x_i$ et $y_i$ désignent respectivement la note obtenue au bacc et celle obtenue à un concours par cinq élèves d'une même classe :

| | | | | | | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Note $x_i$ | 7 | 10 | 11 | 13 | 16 | 57 |
| Note $y_i$ | 8 | 9 | 12 | 12 | 13 | 54 |

Le point moyen $G$ du nuage correspondant a donc pour coordonnées **G (11,4 ; 10,8)**

***Démarche :***

$$\bar{x}=\frac{7+10+11+13+16}{5}=11{,}4$$

$$\bar{y}=\frac{8+9+12+12+13}{5}=10{,}8$$

*D'où* $G(11{,}4\,;10{,}8)$

# Partie B-Exo obligatoire

60 bateaux

$C(q)$, exprimé en milliers de gourdes, correspondant à la location d'un nombre $q$ de bateaux est donné par :

$C(q)=15+2q-40\ln(0{,}1q+1)$

a) Calcul de $C(10)$ et $C(20)$ Pour $q=10$,

$C(10)=15+2(10)-40\ln(0{,}1\times 10+1)$

$C(10)=15+20-40\ln 2$

$C(10)=35-40\ln 2$

$C(10)=7{,}27$ milliers de gourdes

Pour $q=20$,

$C(20)=15+2(20)-40\ln(0{,}1\times 20+1)$

$C(20)=15+40-40\ln 3$

$C(20)=11{,}06$ milliers de gourdes

En effet $\frac{10}{20}\neq\frac{7{,}27}{11{,}06}$, le coût de fonctionnement hebdomadaire n'est pas proportionnel au nombre de bateaux loués.

$C(60)=15+2(60)-40\ln(0{,}1\times 60+1)$

$C(60)=15+120-40\ln 7$

$C(60)=135-40\ln 7$

$C(60)=57{,}17$ milliers de gourdes

b) $f$ définie sur l'intervalle [0 ; 60] par : $f(x)=15+2x-40\ln(0{,}1x+1)$

Etudions les variations de *f* sur [0 ; 60]

$$f'(x) = 2 - 40\left(\frac{0{,}1}{0{,}1x+1}\right)$$
$$f'(x) = 2 - \frac{4}{0{,}1x+1}$$
$$f'(x) = \frac{2(0{,}1x+1)-4}{0{,}1x+1}$$
$$f'(x) = \frac{0{,}2x+2-4}{0{,}1x+1}$$
$$f'(x) = \frac{0{,}2x-2}{0{,}1x+1}$$

Soit $f'(x) = 0 \Rightarrow 0{,}2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 10$

| $x$ | 0 | | 10 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | 7,27 min | ↗ | |

$f(0) = 15$
$A(0{,}15)$
$f(10) = 7{,}27$
$f(20) = 11{,}06$
$f(60) = 57{,}17$

c) Tableau de variations de $f$

| $x$ | 0 | | 10 | | 20 | | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | – | 0 | + | ⋮ | + | |
| $f(x)$ | 15 | ↘ | 7,27 | ↗ | 11,06 | ↗ | 57,17 |

Le coût de fonctionnement hebdomadaire minimal est de 7,27 milliers de gourdes

# Partie C.-

## Exo #1-

**1)** $U = z^2 - 2\bar{z} + 1$

1) $z = x + iy \quad x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
$\bar{z} = x - iy$

Déterminons en fonction de *x* et de *y* la partie réelle *X* et la partie imaginaire *Y* du nombre complexe *U*.

$U = (x + iy)^2 - 2(x - iy) + 1$
$U = x^2 + 2xiy + i^2y^2 - 2x + 2iy + 1$
$U = x^2 - y^2 - 2x + 1 + i(2y + 2xy)$

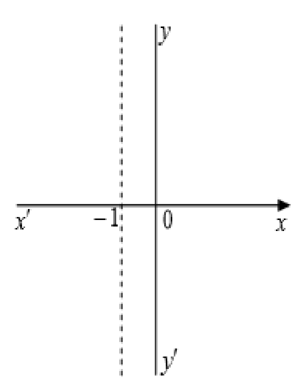
D'où Re( $X$ ) = $x^2 - y^2 - 2x + 1$ et

Im($Y$ ) = $2y + 2xy$ ou Im($Y$ ) = $2y + (1+x)$

2) Déterminons, puis représentons dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{U},\vec{V})$ l'ensemble des points. *M* d'affixe *z* tels que *U* soit un nombre réel ssi Im($U$ ) = Im ($Y$ ) = 0

$2y + 2xy = 0$
$2y(1 + x) = 0$
$y = 0$ ou $x = -1$

Pour que le nombre complexe *U* soit un nombre réel, il faudrait que $x = -1$ ou $y = 0$.



3) Déterminons l'ensemble des nombres complexes $z$ tels que $U$ soit nul. $U$ nombre complexe nul ssi $Ré(U) = 0$ et $Im(U) = 0$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

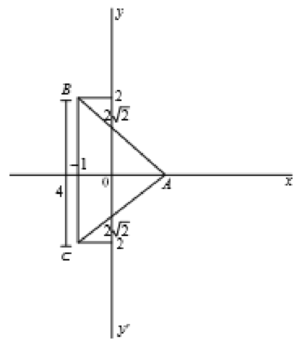
D'où ($x = 1$ et $y = 0$) ou ($x = -1$ et $y = -2$) ou ($x = -1$ et $y = 2$)

4) Construisons $A$, $B$ et $C$ les images respectives des nombres complexes : 1 ; $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$

$z_A = 1 \rightarrow A(1,0)$

$z_B = -1 + 2i \rightarrow B(-1,2)$

$z_C = -1 - 2i \rightarrow C(-1,-2)$




Montrons que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle.

**Cas 1 :**

Le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ si

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = i \quad ou \ -i$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 - 2i - 1}{-1 + 2i - 1}$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 - 2i}{-2 + 2i}$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(-2 - 2i)(-2 - 2i)}{(-2 + 2i)(-2 - 2i)}$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{4 + 4i + 4i + 4i^2}{(-2)^2 - (2i)^2}$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{8i}{4 + 4}$$

$$\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{8i}{8} \Rightarrow \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = i$$

Ce qui prouve que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$.

**Cas 2 :**

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B) = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B) = AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (2 - 0)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = d(A,B) = AB = 2\sqrt{2}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = d(BC) = BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = d(BC) = BC = \sqrt{(-1 + 1)^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = d(BC) = BC = 4$$

De plus,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{4 - 4}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{0}$

Conclusion, le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$ car $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \neq \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$ *et* $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{0}$

**<u>Cas 3 :</u>**

$d(A,B) = d(A,C) = 2\sqrt{2}$

Le triangle $ABC$ est isocèle en $A$

D'autre part :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

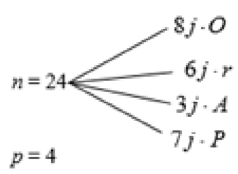
$(4)^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$

$16 = 2(2\sqrt{2})^2$

$16 = 16$

On en déduit que le triangle $ABC$ est rectangle isocèle en $A$.

**Exo # 2-**




*X :* Variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre de bouteilles de jus de raisin obtenu à l'issue du tirage.

a) Calcul de la probabilité d'obtenir :
   1) 4 bouteilles de jus de fruits différents
      Soit $A$ cet événement et $\Omega$ l'espace échantillonnal

$$p(A) = \frac{cardA}{card\Omega} \Rightarrow p(A) = \frac{C_8^1 \times C_6^1 \times C_3^1 \times C_7^1}{C_{24}^4}$$

$$p(A) = \frac{1008}{10626} \Rightarrow p(A) = 0{,}095$$

   2) 4 bouteilles de jus d'un même fruit
      Soit $B$ cet événement
      4 bouteilles de jus d'un même fruit

$$p(B) = \frac{cardB}{card\Omega} \Rightarrow p(B) = \frac{C_8^4 + C_6^4 + C_7^4}{C_{24}^4}$$

$$p(A) = \frac{120}{10626} \Rightarrow p(A) = 0{,}011$$

Déterminons la loi de probabilité de $X$.

Les valeurs prises par $X$ sont : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$p(X = 0) = \frac{C_6^0 \times C_{18}^4}{C_{24}^4} \Rightarrow p(X = 0) = \frac{3060}{10626}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_6^1 \times C_{18}^3}{C_{24}^4} \Rightarrow p(X = 1) = \frac{4896}{10626}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_6^1 \times C_{18}^2}{C_{24}^4} \Rightarrow p(X = 2) = \frac{2295}{10626}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_6^3 \times C_{18}^1}{C_{24}^4} \Rightarrow p(X = 0) = \frac{360}{10626}$$

$$p(X = 4) = \frac{C_6^4 \times C_{18}^0}{C_{24}^4} \Rightarrow p(X = 4) = \frac{15}{10626}$$

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{3060}{10626}$ | $\frac{4896}{10626}$ | $\frac{2295}{10626}$ | $\frac{360}{10626}$ | $\frac{15}{10626}$ |

Calcul de l'espérance mathématique et la variance de $X$

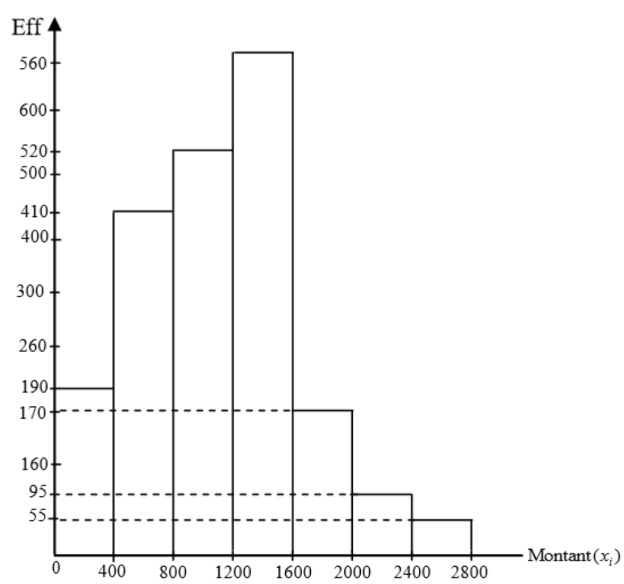
$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i p_i$$
$$E(X)=0\times\frac{3060}{10626}+1\times\frac{4896}{10626}+2\times\frac{2295}{10626}+3\times\frac{360}{10626}+4\times\frac{15}{10626}$$
$$E(X)=\frac{4896}{10626}+\frac{4590}{10626}+\frac{1080}{10626}+\frac{60}{10626}$$
$$E(X)=\frac{10626}{10626}\Rightarrow E(X)=1$$

Calcul de la variance de $X$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$
$$Var(X)=0^2\times\frac{3060}{10626}+1^2\times\frac{4896}{10626}+2^2\times\frac{2295}{10626}+3^2\times\frac{360}{10626}+4^2\times\frac{15}{10626}-(1)^2$$
$$Var(X)=\frac{4896}{10626}+\frac{9180}{10626}+\frac{3240}{10626}+\frac{240}{10626}-1$$
$$Var(X)=1{,}65-1$$
$$Var(X)=0{,}65$$

**Exo # 3-**

a) Construisons l'histogramme de cette série




b) Déterminons la moyenne, la variance et l'écart-type de cette série.
Les valeurs centrales des classes sont : 200, 600, 1000, 1400, 1800, 2200, 2600.
Les produits des valeurs centrales par les effectifs sont.

$$\overline{X}=\frac{200\times190+600\times410+1000\times520+1400\times560+1800\times170+2200\times95+2600\times55}{2000}$$
$$\overline{X}=1123$$

Calcul de la variance
En règle générale, on préfère utiliser les notions de variance et d'écart-type comme caractéristiques de dispersion

$$V = \frac{x_1\left(x_1 - \bar{x}\right)^2 + ... + np\left(x_p - \bar{x}\right)^2}{n}$$

$$V = \frac{190\times(200-1123)^2 + 410\times(600-1123)^2 + 520\times(1000-1123)^2 + 560\times(1400-1123)^2 + 170\times(1800-1123)^2 + 95\times(2200-1123)^2 + 55\times(2600-1123)^2}{2000}$$

$$V = \frac{190\times(-923)^2 + 410\times(-523)^2 + 520\times(-123)^2 + 560\times(-277)^2 + 170\times(677)^2 + 95\times(1077)^2 + 55\times(1477)^2}{2000}$$

$$V = \frac{632942000}{2000} \Rightarrow V = 316471$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3164471} \Rightarrow \sigma(X) = 562,56$$

NB : Plus l'écart-type est grand, plus les valeurs de la variable sont dispersées autour de la moyenne; plus il est petit, plus les valeurs de la variable sont groupées près de la moyenne