MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)

FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SÉRIES : (SVT, SMP)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES

MATHÉMATIQUES (MODÈLE 3)

Rationnel

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

***N.B :** Le sujet est composé de trois parties A, B et C. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.*

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (40 pts / 4 pts par question).

1- i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{2}$, si $z = 1 - i$, on a alors $z^{11} = \ldots\ldots\ldots$

2- On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5
y	215	257	268	285	303	324

La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés permet de prévoir que, pour $x = 10$, on aura (à l'unité près) $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$

3- La courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction $f : x \ln(x+1)$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x = \ldots\ldots\ldots$

4- La limite quand x tend vers plus l'infini de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2E(x)}{x-1}, (x > 1)$; où $E(x)$ désigne la partie entière de x, est **…**

5- Soit z un nombre complexe. Si $z = \left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, on a alors $z^6 = \ldots\ldots.$

6- Un entrepreneur a creusé un puits selon le tarif suivant : 200 gourdes pour le premier mètre, 600 gourdes pour le deuxième mètre, 1800 gourdes pour le troisième mètre, et ainsi de suite.
Si le puits a couté 8000 gourdes, alors on peut dire que la profondeur atteinte est de … mètres.

7- (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 4$ et de raison $r = 2$. La somme des 20 premiers termes de (U_n) est …..

8- Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. La transformation par laquelle le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ telle que $z' = 3z - 2 + 4i$ a pour éléments caractéristiques : rapport … et centre $\Omega(\ldots;\ldots)$

9- Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé. Si l'espérance mathématique de X est $\frac{7}{5}$, alors l'espérance mathématique de $7 - 5X$ est égale à …..

10- Une fonction numérique f est telle que $f' = -3x^2 + 6x - 1$ et $f(1) = -1$. On peut donc écrire : $f : x \mapsto \ldots\ldots\ldots$

PARTIE B.- Obligatoire. (20 pts)

a et b étant 2 réels donnés. Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right)e^x$

1) Déterminer a et b sachant que la dérivée première f' de f est définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f'(x) = \frac{(x-2)^2 e^x}{x^2}$.

2) On suppose que $a = 1$ et $b = -4$.
a) Etudier les variations de f, puis tracer sa courbe ($\mathscr{C}$) dans le plan muni d'un repère orthonormal.
b) Ecrire l'équation de la tangente à ($\mathscr{C}$) en son point P d'abscisse 1.

PARTIE C.- Traiter deux des quatre exercices suivants. (15 pts par exercice)

1. Un sac contient 6 boules rouges numérotées de 1 à 6 et 3 boules blanches numérotées de 1 à 3.
On extrait simultanément 2 boules portant les numéros a et b.

a) Quelle est la probabilité pour que l'on ait $a = b$?
b) Quelle est la probabilité pour que les 2 boules tirées soient de couleurs différentes.
c) A chaque tirage, on associe la variable aléatoire X définie de la façon suivante :
- si les 2 boules sont blanches, X prend la valeur $a + b$.
- si les 2 boules sont rouges, X prend la valeur $|a - b|$.
- si les 2 boules sont de couleurs différentes, X prend la valeur 0.

1) Déterminer la loi de probabilité de X.
2) Calculer la variance de X.

2. On place un capital initial C_0 de 70 000 gourdes à intérêts composés au taux annuel de 9%.
Soit C_n le capital dont on dispose au bout de n années.

1) Montrer que (C_n) est une suite géométrique. Donner sa raison. Calculer C_7.
2) Au bout de combien d'années de placement, le capital acquis dépassera-t-il le triple du capital initial?

3. 1) Écrire la liste des diviseurs positifs des entiers 4494, 1092 et 728.
2) En déduire le PGCD de (4494, 1092, 728).
3) La fraction $\frac{728}{1092}$ est-elle irréductible ?

4. Le tableau suivant donne le poids y en kg d'un nourrisson x jours après sa naissance.

x_i	5	7	10	14	18	22	26
y_i	3,61	3,70	3,75	3,85	3,90	4,05	4,12

1) Représenter le nuage de points associé à cette série.
2) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x et représenter cette droite sur le graphique.
3) Donner une estimation du poids du nourrisson 30 jours de naissance.

Rationnel

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C1 : Savoir déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe z à la puissance *n*, avec $z = a + ib$ *a* et *b* réels

C2 : Savoir utiliser la droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés pour déterminer l'ordonnée (à l'unité près) d'un point dont on connait l'abscisse

C3 : savoir préciser l'asymptote verticale d'une fonction logarithmique

C4 : Savoir calculer la limite au voisinage de plus infini d'une fonction fractionnaire avec partie entière de *x*

C5 : Savoir élever un nombre complexe à la puissance *n*, connaissant sa forme polaire

C6 : Savoir utiliser la formule permettant de calculer la somme des n termes d'une suite géométrique pour résoudre un problème concret

C7 : Savoir calculer la somme des vingt premiers termes d'une suite arithmétique dont le premier terme U_0 et la raison *r* sont connus

C8 :Savoir préciser une transformation ponctuelle considérée en donnant ses éléments caractéristiques

C9 : Savoir utiliser les propriétés de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire X pour déterminer celle d'une variable aléatoire de la forme $aX + b$

C10 : Savoir déterminer une primitive particulière d'une fonction polynôme.

Correction du texte

Partie A.-

1- i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{2}$, si $z=1-i$, on a alors $z^{11}=-32-32i$

2- On considère la série statistique à deux variables donnée par le tableau ci-dessous :

x	0	1	2	3	4	5
y	215	257	268	285	303	324

La droite d'ajustement obtenue par la méthode des moindres carrés permet de prévoir que, pour x = 10, on aura (à l'unité près) y = 425

3- La courbe ($\mathscr{C}$) de la fonction $f:x\mapsto \ln(x+1)$ a pour asymptote verticale la droite d'équation $x=-1$

4- La limite quand x tend vers plus l'infini de la fonction f définie par $f(x)=\frac{2E(x)}{x-1},(x>1)$; où $E(x)$ désigne la partie entière de x, est **2**

5- Soit z un nombre complexe. Si $z=\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, on a alors $z^6=64$

6- Un entrepreneur a creusé un puits selon le tarif suivant : 200 gourdes pour le premier mètre, 600 gourdes pour le deuxième mètre, 1800 gourdes pour le troisième mètre, et ainsi de suite.
Si le puits a couté 8000 gourdes, alors on peut dire que la profondeur atteinte est de **4 mètres**.

7- (U_n) est une suite arithmétique de premier terme $U_0=4$ et de raison $r=2$. La somme des 20 premiers termes de (U_n) est **460**

8- Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. La transformation par laquelle le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ telle que $z'=3z-2+4i$ a pour éléments caractéristiques : **rapport 3** et centre $\Omega(1,-2)$

9- Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé. Si l'espérance mathématique de X est $\frac{7}{5}$, alors l'espérance mathématique de $7-5X$ est égale à **0**

10- Une fonction numérique f est telle que $f'=-3x^2+6x-1$ et $f(1)=-1$.
On peut donc écrire $f:x\mapsto -x^3+3x^2-x-2$

Partie B.-

Exo #1

R-a : Détermination des réels a et b

$\forall x\in\mathbb{R}^*_+$,

$f(x)=\frac{(x-2)^2e^x}{x^2}\Leftrightarrow\left[\left(a+\frac{b}{x}\right)e^x\right]'=\frac{(x-2)^2e^x}{x^2}$, par identification, on a : $a=1$ *et* $b=-4$

R-2 a) Etude des variations de f et traçons ($\mathscr{C}$).

On a : $f(x)=\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$

I. Ensemble de définition :

$Df=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[=\mathbb{R}^*$

II. Limites aux bornes des intervalles de Df

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ $(Y=0)$ *A.H* *et* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (il y a une bP

Puis $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

de D.A $y'oy$)

En 0^- $f(x)\to+\infty$ en 0^+ $f(x)\to-\infty$ *(x=0)* A.V

III. Dérivée (continuité) – sens de variations

f est dérivable, donc continue, en tout point de Df et $\forall x\in Df$,

$f'(x)=\frac{(x-2)^2e^x}{x^2}\geq 0$

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	+	
$f(x)$		↗	‖	↗		↗	

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty,0[$, et sur $]0,+\infty[$, Au point d'abscisse 2 de ($\mathscr{C}$) la tangente est horizontale (donc un point d'inflexion)

IV. f n'admet pas d'extremum

V. Valeurs remarquables

NB : pour $x=0$, $f(0)$ n'est pas défini. Donc ($\mathscr{C}$) ne rencontre pas l'axe $y'oy$

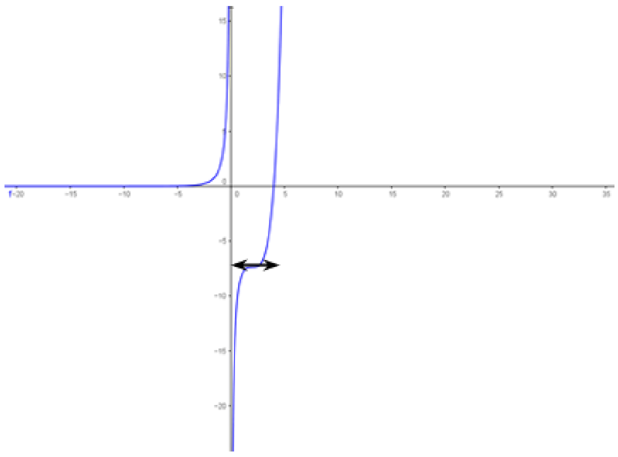
Pour $x=2$ on a $f(2)=-e^2\approx-7{,}39$

Pour $y=0$ on a $f(x)=0$ d'où $x=4$

VI. Tableau résumant les variation de f

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	0	+		+	
$f(x)$	0 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-e^2$	↗	0	↗	$+\infty$

Tracé de la courbe de ($\mathscr{C}$)



Equation de la tangente

$y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = \left(1 - \frac{4}{1}\right)e$

$f'(1) = \frac{(1-2)^2}{(1)^2}$

$f'(1) = e$

$f(x) = e(x-1) - 3e$

$y = ex - 4e$

Partie C.-

Exo #1

R-a : Probabilité pour que l'on ait $a=b$

$p_1 = \frac{3}{C_9^2} \Rightarrow p_1 = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

R-b : Loi de probabilité de X

$p_2 = \frac{6\times 3}{36} = \frac{1}{2}$

R-c : Loi de probabilité de X ou loi de X ou distribution de X

X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5 et la loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	
$p_i = (x_i)$	$18/36$	$5/36$	$4/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$\sum p_i = 1$

R-d : La variance de X est

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$V(X) = \frac{0^2\times 18 + 1^2\times 5 + ... + 5^2\times 2}{36} - \left(\frac{5+8+12+12+10}{36}\right)^2$$

D'où $V(X) = 2{,}60$

Exo #2

R-a : Montrons que (C_n) est une suite géométrique.

On a : $C_1 = C_0 + \frac{9}{100}C_0 \Rightarrow C_1 = 1{,}09C_0$

$C_{n+1} = C_n + \frac{9}{100}C_n \Rightarrow C_{n+1} = 1{,}09C_n$

Donc il existe $q \in \mathbb{R}$ -{0,1} $\forall n \in \mathbb{N}$,

$C_{n+1} = qC_n (q = 1{,}09) \Rightarrow C_{n+1} = 1{,}09$

Donc (C_n) est une s.g de raison $q=1{,}09$(et de premier terme $C_0=70000$ *gourdes*).

R-b : Calculons C_7

On a :

$C_7 = C_0 q^n \Rightarrow C_7 = 70000(1{,}09)^n = 3\times 70000$ donc

$(1{,}09)^n > 3 \Rightarrow n\ln 1{,}09 > \ln 3 \Rightarrow n > \frac{\ln 3}{\ln(1{,}09)}$ d'où $n \geq 13$

Au bout de 13 années le capital acquis dépassera le triple du capital initial.

Exo #3

R-1 : Liste des diviseurs positifs de :

$4494 = 2\times 3\times 7\times 107$ (décomposition primaire)

__*D*(4494)__ = {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42; 107; 241; 321; 642 ; 749 ; 1498 ; 2247 ; 4494}.

$1092 = 2\times 2\times 3\times 7\times 10$ (décomposition primaire)

__*D*(1092)__ = {1; 2; 3; 4; 6; 7; 12; 13; 14; 21; 26; 28; 39; 42; 52; 78; 84; 91; 156; 182; 273; 364; 546; 1092}.

$728 = 2\times 2\times 2\times 7\times 13$

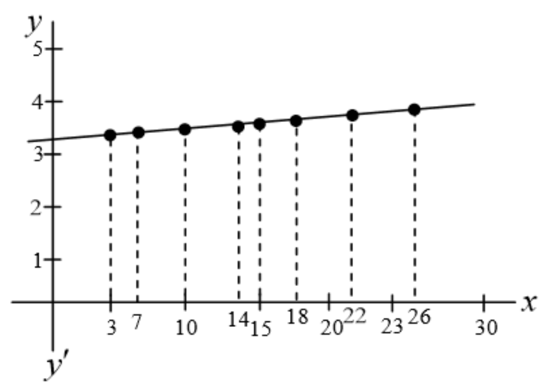
__*D*(728)__={1;2;4;7;8;13;14;26;28;52;56; 91 ; 104 ; 182 ; 364 ; 728}.

R-2 : On en déduit que PGCD (4494 ; 1092 ; 728) est égal à 14.

R-3 : Puisque PGCD (728 ; 1092) = 364≠0. La fraction $\frac{728}{1092}$ n'est pas irréductible (la fraction réduite équivalente est $\frac{2}{3}$) obtenue en divisant numérateur et dénominateur par 364

Exo #4

R-1 : Représentation du nuage de points associés



R-2 : Equation de la droite de régression de y en x (moindres carrés)

Le point moyen est $G(\bar{x}, \bar{y})$ avec

$\bar{x} = \frac{5+7+10+14+18+22+26}{7} = 14{,}57$ et

$\bar{y} = \frac{3{,}61+3{,}70+...+4{,}12}{7} = 3{,}85$

D'où $G(14{,}57;3{,}85)$ de plus $V_X = 52{,}56$ et $Cov(x,y) = 1{,}30$ d'où la pente de la droite de régression de y en x est $a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V_X} = \frac{1{,}30}{52{,}56} = 0{,}025$

Enfin :

$y = a(x - \bar{x}) + \bar{y} \Rightarrow 0{,}025(x - 14{,}57) + 3{,}85$ d'où

$y = 0{,}025(30) + 3{,}48$

(voir la représentation de cette droite sur le graphique).

R-3 : Estimation du poids du nourrisson 30 jours après naissance pour .. on a :