MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)
FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL
SÉRIES : (SVT, SMP)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
MATHÉMATIQUES (MODÈLE 4)

Complexe

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles 3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

***N.B :** Le sujet est composé de deux parties A, B et C. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.*

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).

1- L'écriture simplifiée de l'expression $E=\dfrac{e^{3\ln 2}}{e^{-2}}$ est ………

2- L'intégrale définie $\int_{-2}^{0}(2x+1)(x^2+x)dx$ est égale à ………..

3- Si les données d'une série statistique $(x_i\,;y_i)$ ont permis d'obtenir $V(x)=2$ et $Cov(x,y)=8$; alors le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est égal au réel ….

4- Le module du nombre complexe $1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à ………

5- Soit $\overline{A}$ et B deux évènements incompatibles d'un espace probabilisé fini (Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$, p). Si $p(A)=0{,}7$ et $p(A\cap\overline{B})=0{,}5$, alors $p(B)=....$

6- Une urne contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 5 boules vertes. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 3 boules de même couleur est p=…

7- Soit a et α deux entiers naturels tels que $a=25\times 6^{\alpha}$. Si a possède 48 diviseurs positifs, alors la valeur de a est …..

8- Soit (W_n) une suite arithmétique de premier terme $W_1=-2$. Si $W_{80}=393$, alors la somme $S_{80}=W_1+W_2+...+W_{80}$ est égale à ….

9- La matrice $\begin{pmatrix}4 & n\\ -5 & 2\end{pmatrix}$ est symétrique, avec n=.....

10- Soit A et B deux points distincts du plan. Si C est le barycentre de (A,α) et (B,β) et $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, alors on a: $\alpha=...$ et $\beta=...$

PARTIE B.- Obligatoire. (20 pts)

1. On considère la fonction f définie par :
$f(x)=\ln[(x-1)(3-x)]$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

a) Déterminer le domaine de définition de f.
b) Calculer les limites de f en 1 et en 3. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $(\mathscr{C})$ de f.
c) Étudier les variations de f et tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
d) Écrire l'équation de la tangente à $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse $x_0=2$.

PARTIE C.- Traiter l'un des trois exercices suivants. (15 pts par exercice)

1. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ unité graphique 4 cm. A tout nombre complexe z différent de – i, n associe le nombre complexe

1) Si $z=x+iy$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

On vérifiera que $RE(z')=\dfrac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}$

2) En déduire la nature de :
a) L'ensemble E des points M d'affixe z, tels que z' soit un réel.
b) L'ensemble F des points M d'affixe z, tels que z' soit un imaginaire pur.
c) Représenter ces deux ensembles dans le plan.

2. On définit sur $\mathbb{N}$ les suites (U_n) et (V_n) par $U_0=1$; $V_0=2$ et, pour tout entier naturel n.

$$U_{n+1}=\frac{3U_n+V_n}{4}\quad\text{et}\quad V_{n+1}=\frac{3V_n+U_n}{4}$$

a) 1) Quelle est la nature de la suite (V_n-U_n)?
2) En déduire sa limite.
b) La suite (V_n-U_n) est-elle convergente?
c) On considère la suite (t_n) définie, sur $\mathbb{N}$ par $t_n=U_n+V_n$.
Démontrer que cette suite est constante.

3. La durée, en heure, de fonctionnement d'un appareil électroménager jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité P, appelée loi de durée de vie sans vieillissement. Elle est définie de la façon suivante : si on appelle X la variable aléatoire ainsi définie, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant l'instant t est donnée par :
$P(X\le t)=1-e^{-0{,}0005t}$
On admet que $(X\ge t)$ est l'événement contraire de l'événement $(X\le t)$ et il signifie que l'appareil tombe en panne après l'instant t.
a) Calculer la probabilité que l'appareil tombe en panne avant 2 000 heures de fonctionnement.
b) Calculer la probabilité que l'appareil tombe en panne après 10 000 heures de fonctionnement.

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C1 : Savoir utiliser les propriétés relatives au logarithme et à l'exponentielle pour simplifier une écriture.

⇨ Se rappeler que : $\forall a>0,\ e^{\ln a}=a$

C2 : Savoir calculer une intégrale définie d'une fonction se présentant sous la forme $U'U^m$

⇨ Se rappeler que $\int (U'U^m)dx=\frac{U^{m+1}}{m+1},\ avec\ m\neq -1$

C3 : Savoir calculer le coefficient directeur d'une droite de régression de *y* en *x*, $Var(X)$ **et** $\mathrm{cov}(X;Y)$ **étant connues.**

⇨ Se rappeler que cette droite est d'équation $y=ax+b$, avec $a=\frac{Cov(X;Y)}{Var(X)}$

C4 : Savoir calculer le module d'un nombre complexe se présentant en somme de l'unité et d'un autre complexe exprimé sous sa forme exponentielle.

⇨ Se rappeler que $z=\rho\cdot e^{i\theta}$ est la somme exponentielle d'un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, et que le module d'un nombre complexe z tel que $z=a+ib$ est donné par : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

C5 : Savoir calculer la probabilité d'un événement en se servant des lois de Morgan, de la formule des probabilités totales et de l'incompatibilité de deux événements.

⇨ Se rappeler que : $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};P(\overline{A\cap B})=1=p(A\cap B);$

$p(A\cap B)=p(A)+p(B)-p(A\cup B)$ sans oublier que $A\cap B=\phi$, lorsque A et B sont incompatibles.

C6 : Savoir calculer la probabilité d'un évènement correspondant au tirage simultané de boules d'une urne.

=> Se rappeler que : 1) Le tirage simultané correspondant a la notion de combinaison.

2) Une telle probabilité est calculée en utilisant la formule de Laplace.

3) Les boules tirées seront toutes noires, toutes blanches ou toutes vertes.

C7 : Savoir utiliser la décomposition d'un entier en produit de ses facteurs premiers et le nombre de ses diviseurs pour calculer un exposant inconnu dans une puissance.

C8 : Savoir calculer la somme des // premiers termes d'une suite arithmétique dont les premier et dernier terme sont connus.

⇨ Se rappeler que $S_n=U_1+U_2+...+U_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)$

C9 : Savoir appliquer la définition d'une matrice symétrique pour trouver la valeur de l'un de ses éléments.

⇨ Se rappeler qu'une matrice A est dite symétrique $\Leftrightarrow A^t=A$

C10 : Savoir utiliser une relation vectorielle impliquant le barycentre d'un système pour déterminer les coefficient respectifs des points.

⇨ On cherchera l'écriture vectorielle correcte, puis on trouvera par analogie les coefficients Inconnus.

Correction du texte

Partie A.-

1- L'écriture simplifiée de l'expression $E = \dfrac{e^{3\ln 2}}{e^{-2}}$ est $8e^2$

2- L'intégrale définie $\int_{-2}^{0} (2x+1)(x^2+x)dx$ est égale à **-2**

3- Si les données d'une série statistique $(x_i\,;y_i)$ ont permis d'obtenir $V(x)=2$ et $Cov(x,y)=8$; alors le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est égal au réel **4**

4- Le module du nombre complexe $1+e^{i\frac{\pi}{4}}$ est égal à $\sqrt{2+\sqrt{2}}$

5- Soit $\overline{A}$ et B deux évènements incompatibles d'un espace probabilisé fini $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ p)$. Si $p(A)=0{,}7$ et $p(A\cap\overline{B})=0{,}5$, alors $p(B)=....$

6- Une urne contient 3 boules noires, 4 boules blanches et 5 boules vertes. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. La probabilité de tirer 3 boules de même couleur est $p=\dfrac{3}{44}$

7- Soit a et α deux entiers naturels tels que $a=25\times 6^{\alpha}$. Si a possède 48 diviseurs positifs, alors la valeur de a est **5400**

8- Soit (W_n) une suite arithmétique de premier terme $W_1=-2$. Si $W_{80}=393$, alors la somme $S_{80}=W_1+W_2+...+W_{80}$ est égale à **15640**

9- La matrice $\begin{pmatrix} 4 & n \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ est symétrique, avec n=**-5**

10- Soit A et B deux points distincts du plan. Si C est le barycentre de (A,α) et (B,β) et $\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$, alors on a: $\alpha=4t$ et $\beta=t$ (avec $t\in\mathbb{R}^*$)

Partie B.-

R-a) Domaine de définition de f

Df =]1; 3[

R-b) calcul des limites de f en 1 et en 3.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$

On en déduit que les droites d'équation respectives x = 1 et x = 3 sont asymptotes (verticales) à la courbe ($\mathscr{C}$) de f.

R-c) Étudions les variations de f

Domaine de définition Df =]1; 3[

$\lim\limits_{1^+} f=-\infty$ et $\lim\limits_{3^-} f=-\infty$ (x = 1) et (x = 3) sont asymptotes verticales

<u>Dérivée – continuité – sens de variation</u>

f est dérivable (donc continue) sur son domaine de définition et $\forall x\in]1,3[$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{3-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3-x-x+1}{(x-1)(3-x)}$$

$$f'(x)=\frac{-2x+4}{(x-1)(3-x)}$$

Sur]1, 3[, $f'(x)$ est de même signe que $-2x+4$ car $(x-1)(3-x)>0$.

Donc, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -2x+4=0$

$-2x=-4\Rightarrow x=2$

Tableau de signe de $f'(x)$

x	1		2		3
$-2x+4$		+	0	−	
$(x-1)(3-x)$		+		+	
$f'(x)$		+	0	−	
		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

<u>Extremum : Sommet</u>

f admet un seul extrémum qui est un maximum atteint en x_0 = 2, donc de valeur $f(2)=\ln[(2-1)(3-2)]=\ln 1=0$.

D'où $S(2, 0)$ est le sommet de ($\mathscr{C}$).

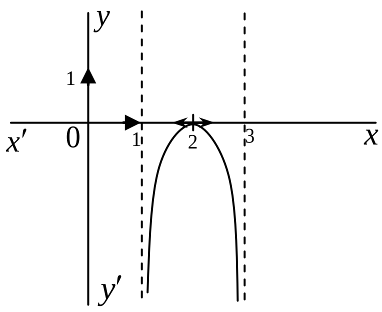
Valeurs remarquables (point d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec les axes)
Comme $0 \neq Df$, ($f(0)$ n'existe pas), donc ($\mathscr{C}$) ne coupe pas $y'oy$ (l'axe des ordonnées)
De plus, $f(x) = 0$ si $\ln(x – 1)(3 – x) = 0 = \ln 1$
$(x-1)(3-x)=1 \Leftrightarrow (x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$ on retrouve le point $S(2, 0)$ $\mathscr{C}$ est tangente à $x'ox$) en S.

Tableau résumant les variations de *f*

x	1		2		3
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$ ‖

Donc *f* est strictement croissante sur $]1, 2]$ et strictement décroissante sur $[2, 3[$.

Tracé de la courbe $\mathscr{C}$



d) Équation de la tangente : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
$f'(2) = 0$ et $f(2) = 0$
Donc, on a : $y = 0$

Partie C.-

<u>Exo #1</u>
R-1) Exprimons $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ en fonction de x et y : avec $z = x + iy$ on obtient $z' = \dfrac{(x-2)+(y+1)i}{x+(y+1)i}$

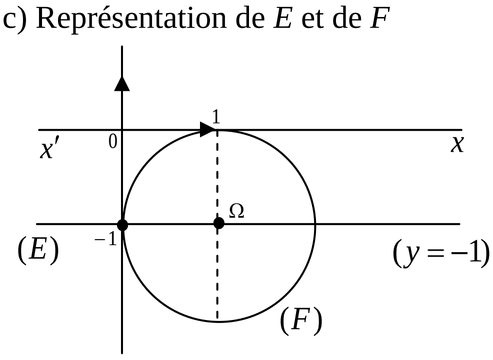
En multipliant par le conjugué du déno, on obtient $z' = \dfrac{[(x-2)+(y+1)i][x-(y+1)i]}{[x+(y+1)i][x-(y+1)i]}$

On en déduit que $\text{Re}(z') = \dfrac{x^2+y^2-2x+2y+1}{x^2+(y+1)^2}$ et $\text{Im}(z') = \dfrac{2+2y}{x^2+(y+1)^2}$ (avec $x \neq 0$ ou $y \neq -1$)

R-2) a) L'ensemble E des points M d'affixe z, tels que z' soit un réel est défini par $\text{Im}(z') = 0$ c'est-à-dire $2 + 2y = 0$. E est donc une droite parallèle à l'axe $(O; \vec{u})$ d'équation $y = -1$ privée du point $A(0, –1)$

R-2) b) L'ensemble F des points M d'affixe z tels que z' soit un imaginaire pur est défini par $\text{Re}(z') = 0$, c'est-à-dire que F a pour équation $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ ($x \neq 0$ où $y \neq 1$). F est donc un cercle de centre $\Omega(1, –1)$ et de rayon $r = 1$ privé du point $A(0, –1)$.

R-2) c) Représentation de E et de F



<u>Exo #2</u>

R-a) 1) Nature de la suite $(V_n – U_n)$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{3V_n + U_n - 3U_n - V_n}{4}$ c'est-à-dire $V_{n+1} - U_{n+1} = \dfrac{1}{2}(V_n - U_n)$, donc $(V_n - U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ donc convergente (de limite 0)

R-a) 2) Déduction : Puisque $(V_n - U_n)$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ (d'où $-1 < q < 1$) donc $(V_n - U_n)$ est convergente de limite 0 :
$\lim(V_n - U_n) = 0$.

R-b) La suite $(V_n - U_n)$ est convergente. Elle converge vers 0.

R-c) Démontrons que la suite (t_n) est constante :
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $t_{n+1} = U_{n+1} + V_{n+1}$

$t_{n+1} = \dfrac{3U_n + V_n + 3V_n + U_n}{4} = U_n + V_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n$ c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$,
$t_{n+1} - t_n = 0$, donc la suite (t_n) est effectivement constante et sa valeurs constante est $t_0 = U_0 + V_0 = 3$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 3$

Exo #3

R-a) Calcul de $P(X \leq 2000)$

$P(X \leq 2000) = 1 - e^{-0,0005(2000)}$

$P(X \leq 2000) = 1 - e^{-1} = 1 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{e-1}{e}$

$P(X \leq 2000) = 0,632$

R-b) Calcul de $P(X > 10000)$

$P(X > 10000) = 1 - P(X \leq 10000)$ or $P(X \leq 10000) = 1 - e^{-0,0005 \times 10000}$

$P(X \leq 10000) = 1 - e^{-5} = 1 - \dfrac{1}{e^5} = \dfrac{e^5 - 1}{e^5}$ d'où $P(X > 10000) = 1 - \dfrac{e^5 - 1}{e^5} = \dfrac{1}{e^5}$

$P(X > 10000) = e^{-5} \approx 0,0067$