MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)
FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL
SÉRIES : (SVT, SMP)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
MATHÉMATIQUES (MODÈLE 2)

Analytique

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

N.B : Le sujet est composé de trois parties A, B et C. Dans chaque exercice, le candidat est invité éventuellement à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).

1- Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx$.
L'intégrale $I + J$ est égale à …………

2- Soit (U_n) une suite arithmétique dont le premier terme vaut la raison. Si la somme $U_2 + U_5 + U_7$ est égale à 187, alors la raison r de cette suite est égale à ….

3- On considère deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2m+1 \end{pmatrix}$; $m \in R$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. La valeur de m pour que $A = B$ est ……..

4- La forme algébrique du nombre complexe $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est …………

5- A et B sont deux points d'une droite euclidienne tels que $AB = 18$. Si G est le barycentre du système $\{(A,4);(B,5)\}$, alors $GA =$ ....

6- Si, pour tout entier naturel n, $|U_n - 1| \leq \frac{2}{n+1}$, alors la limite de la suite (U_n), quand $n \to \infty$, est égale à ……

7- Si V_1 et V_2 sont deux termes d'une suite géométrique (V_n) tels que $V_1 = 54$ et $V_4 = 16$, alors la raison q de cette suite est égale à ……….

8- Les données d'une série statistique $(x_i;\ y_i)$ sont inscrites dans le tableau suivant :

x_i	15	20	25	30	35	40
y_i	44,4	27	16,3	10	6,2	3,5

G_1 désigne le point moyen des 3 premières colonnes et G_2, celui des 3 dernières colonnes. L'équation de la droite (G_1G_2) est : $y =$ ………

9- Soit le nombre complexe : $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
L'argument principal de z est $\theta =$ ....

10- i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, le nombre complexe $z = -1 - i\sqrt{3}$ est l'affixe du point $M_z(\ldots;\ldots)$

PARTIE B.- Obligatoire. (20 pts)

Le prix d'équilibre d'une marchandise en fonction du temps est donné par : $f(t) = 140 - 40e^t$.
t est en mois et $f(t)$ en gourdes.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Donner le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$.
c) Calculer la valeur moyenne de ce prix d'équilibre sur l'intervalle $[0;\ 5]$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à la gourde près.

PARTIE C.- Traiter deux des quatre exercices suivants. (15 pts par exercice)

2. L'évolution de la population d'une région entre 1960 et 2000 a permis de construire le tableau suivant :

Année x_i	1960	1970	1980	1990	2000
Population y_i en millions	2,5	3	3,6	4,4	5,2

a) Construire, à l'aide de ces coordonnées, le nuage des points de coordonnées $(x_i;\ y_i)$; les unités graphiques seront de 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 1 million sur l'axe des ordonnées.
b) Calculer les coordonnées du point moyen de la série.
c) Calculer la covariance de (x, y).
d) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de y en x sous la forme $y = ax + b$, obtenue par la méthode des moindres carrés.

3. Au début de janvier 2000, une compagnie a mis sur le marché 20 000 unités d'un nouveau logiciel avec une perspective d'augmentation de l'offre de 2% par mois. La demande pour ce produit était, début janvier 2000, de 40000 unités par mois, avec une perspective de diminution de la demande de 1% par mois. On appelle U_n la quantité offerte de ce logiciel pour le n-ième mois après janvier 2000. On appelle V_n la quantité demandée de ce logiciel pour le n-ième mois après janvier 2000.

a) Quelle est la nature des suites (U_n) et (V_n) ainsi définies ?
b) En déduire l'expression de U_n et de V_n en fonction de n. Étudier le comportement des suites (U_n) et (V_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
c) Déterminer à partir de quel mois l'offre dépassera la demande (sous réserve que les perspectives de variations restent inchangées).

4. On considère les nombres $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_2 = 2(1-i)$.

1) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_1 et z_2
En déduire la forme trigonométrique du nombre complexe $z = \frac{z_1}{z_2}$

2) Déterminer la forme algébrique et la forme exponentielle du nombre complexe $z = \frac{z_1}{z_2}$
En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe z^{2020}

5. Dans un restaurant, on a constaté que :
80% des clients prennent un café
40% des clients prennent un dessert, dont les $\frac{3}{4}$ prennent aussi un café.

1) On choisit un client du restaurant au hasard.
   a) Quelle est la probabilité qu'il prenne un dessert et un café?
   b) Quelle est la probabilité qu'il ne prenne ni dessert ni café?
2) On choisit un client qui a pris un café. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas pris de dessert?

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C1 : Savoir appliquer la propriété de linéarité dans le calcul d'une intégrale

- ⇨ On a bien : $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x)+g(x)]dx$

C2 : Savoir déterminer la raison *r* d'une suite arithmétique, une indication sur son premier terme et la somme de quelques-uns de ces termes étant données

- ⇨ Dans ce cas, on peut toujours utiliser la relation $U_n = U_0 + nr$ pour réduire les inconnues dans la somme donnée

C3 : Savoir exploiter l'égalité de deux matrices pour déterminer un paramètre lié à un élément de l'une de ces dernières

- ⇨ On se rappellera que, lorsqu'il y a l'égalité entre deux matrices (nécessairement de même format), les éléments occupant des places homologues, dans l'une et dans l'autre, sont obligatoirement égaux.

C4 : Savoir écrire la forme algébrique (ou cartésienne) d'un nombre complexe donné sous sa forme exponentielle

- ⇨ À partir de la forme exponentielle d'un complexe, on peut très rapidement identifier son module et un de ses arguments.

  Ex : Si $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, alors on peut affirmer que son module est $\rho = 2$ et l'un de ses arguments est $\theta = \frac{\pi}{4}$

  Par sa forme trigonométrique $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$, on peut arriver à écrire sa forme algébrique.

C5 : Savoir utiliser la relation vectorielle définissant un barycentre et les opérations sur les vecteurs pour trouver la norme d'un vecteur ou la distance entre deux points.

- ⇨ On se rappellera de la relation $\alpha\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ qui traduit que G est barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\lambda)\}$

  Par ailleurs, la relation de Chasles qui permet d'écrire $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB}$ sera aussi d'une grande utilité.

C6 : Savoir préciser la limite d'une suite …, à partir de la définition rigoureuse ou en appliquant le théorème des gendarmes.

- ⇨ Si $U_n - l$ reste, à partir d'un certain rang, inférieure à tout nombre positif choisi à l'avance, on sait qu'on peut alors affirmer que (U_n) tend vers l

  Ou encore, si l'on a : $0 \le U_n - l \le 0$, à partir d'un certain rang, alors on a bien $(U_n) \to l$

C7 : Savoir déterminer la raison *q* d'une suite géométrique dont deux des termes sont donnés

- ⇨ On pourra utiliser la relation $V_n = V_n \times q^{n-p}$, avec $n > p$, pour arriver à déterminer la raison *q*.

C8 : Savoir déterminer l'équation de la droite d'ajustement d'un nuage de points par la méthode de Mayer

- ⇨ Après calcul des coordonnées des points moyens G_1 et G_2, on résoud le système $\begin{cases} y_{G_1} = ax_{G_1} + b \\ y_{G_2} = ax_{G2} + b \end{cases}$ pour déterminer les inconnues *a* et *b* de l'équation $y = ax + b$ recherchée

C9 : Savoir déterminer l'argument principal d'un nombre complexe qui est le résultat du produit d'un réel par le produit de deux autres complexes donnés sous leurs formes trigonométriques

- ⇨ On écrit ce nombre z sous la forme de $z = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$.

  Puis, on cherche l'argument (ou l'angle) ayant la même extrémité que θ dont la mesure est coincée entre $-\pi$ et $+\pi$

C10 :Savoir préciser les coordonnées dans le plan complexe du point représentant un nombre complexe dont la forme algébrique est donnée

- ⇨ Se rappeler que, pour tout $(a,b) \in R^2$, le nombre complexe $z = a + ib$ est représenté dans le plan complexe par le point $M_z(a;b)$

Correction du texte

Partie A.-

1- Soit $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 xdx$. L'intégrale I + J est égale à $\frac{\pi^3}{24}$

Démarche : *On a* $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 xdx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3}$

$\Rightarrow I+J=\frac{\pi^3}{24}$

2- Soit (U_n) une suite arithmétique dont le premier terme vaut la raison. Si la somme $U_2+U_5+U_7$ est égale à 187, alors la raison r de cette suite est égale à **11**

Démarche : *On donne* $U_0=r$ *et* $U_2+U_5+U_7=187$

En exprimant U_2, U_5, U_7 *en fonction de r , on obtient respectivement* $U_2=U_0+2r$, $U_5=U_0+5r$, $U_7=U_0+7r$

$U_2+U_5+U_7=187\Rightarrow U_0+2r+U_0+5r+U_0+7r=187$ *or* $U_0=r$

Il vient alors $\Rightarrow 17r=187$

$\Rightarrow r=11$

3- On considère deux matrices carrées d'ordre 2 telles que $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 2m+1\end{pmatrix}$; $m\in R$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

La valeur de m pour que $A=B$ est **1**

Démarche : $A=B\Rightarrow 2m+1=3\Rightarrow m=1$

4- La forme algébrique du nombre complexe $z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ est $z=-\sqrt{3}+i$

$z=2e^{i\frac{5\pi}{6}}\Rightarrow z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\Rightarrow z=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

Démarche : $\Rightarrow z=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow z=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$\Rightarrow z=-\sqrt{3}+i$

5- A et B sont deux points d'une droite euclidienne tels que $AB=18$. Si G est le barycentre du système $\{(A,4);(B,5)\}$, alors $GA=10$

Démarche : $G=Bar\{(A,4);(B,5)\}$

G existe si $4+5=9\neq 0$ *et est unique*

$4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Rightarrow 4\overrightarrow{GA}+5(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$\Rightarrow 9\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \|\overrightarrow{GA}\|=\left|-\frac{5}{9}\right|\|\overrightarrow{AB}\|\Rightarrow GA=\frac{5}{9}\times 18$

$\Rightarrow GA=10$

6- Si, pour tout entier naturel n, $|U_n-1|\leq\frac{2}{n+1}$, alors la limite de la suite (U_n), quand $n\to\infty$, est égale à **1**

Démarche : $\forall n\in N,\ -\frac{2}{n+1}\leq U_n-1\leq\frac{2}{n+1}\Rightarrow\frac{n-1}{n+1}\leq U_n-1\leq\frac{n+3}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n=1$ *car* $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$

7- Si V_1 et V_2 sont deux termes d'une suite géométrique (V_n) tels que $V_1=54$ et $V_4=16$, alors la raison q de cette suite est égale à $\frac{2}{3}$

$$V_4 = V_1 q^3$$

Démarche $: 16 = 54q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{16}{54} = \frac{8}{27}$

$$q = \frac{2}{3}$$

8- Les données d'une série statistique $(x_i ; y_i)$ sont inscrites dans le tableau suivant :

x_i	15	20	25	30	35	40
y_i	44,4	27	16,3	10	6,2	3,5

G_1 désigne le point moyen des 3 premières colonnes et G_2, celui des 3 dernières colonnes.
L'équation de la droite (G_1G_2) est : $y = -1{,}51x + 59{,}41$

Démarche : *Coordonnées des points* $G_1(x_1 ; y_1)$ *et* $G_2(x_2 ; y_2)$

$x_1 = \frac{15+20+25}{3} \Rightarrow x_1 = 20$; $y_1 = \frac{44{,}4+27+16{,}3}{3} \Rightarrow y_1 = 29{,}23$ $G_1(20;29{,}23)$

$x_2 = \frac{30+35+40}{3} \Rightarrow x_1 = 35$; $y_2 = \frac{10+6{,}2+3{,}5}{3} \Rightarrow y_2 = 6{,}56$ $G_2(35;6{,}56)$

L'équation de la droite (G_1G_2): $y = ax + b$

$$\begin{cases} 20a + b = 29{,}23 \\ 35a + b = 6{,}56 \end{cases} \Rightarrow a = -1{,}51 \text{ et } b = 59{,}41$$

D'où $y = -1{,}51x + 59{,}41$

9- Soit le nombre complexe : $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

L'argument principal de z est $\theta =$

Démarche : On donne $z = -3\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

On peut encore écrire :

$$z = -3\left[\cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \Rightarrow z = 3\left(-\cos\frac{11\pi}{28} - i\sin\frac{11\pi}{28}\right)$$

Ce nombre z admet donc pour argument $\theta = \pi + \frac{11\pi}{28} \Rightarrow \theta = \frac{39\pi}{28}$

Pour trouver l'argument principal, on fait $\frac{39\pi}{28} - 2\pi = \frac{39\pi - 56\pi}{28} = -\frac{17\pi}{28}$

10- i étant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$, le nombre complexe $z = -1 - i\sqrt{3}$ est l'affixe du point $M_z = (-1;-\sqrt{3})$

Démarche : On donne $z = -1 - i\sqrt{3}$

On a Ré(z)=-1 et Im(z)= $-\sqrt{3}$

Le point représentant ce nombre complexe z *est donc* $M_z(-1;-\sqrt{3})$

Partie B.-

R-a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = -\infty$

R-b : Sens de variation de f sur $[0, +\infty[$

Comme $\forall t \in [0, +\infty[$, $f'(t) = -40e^t < 0$ donc f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$

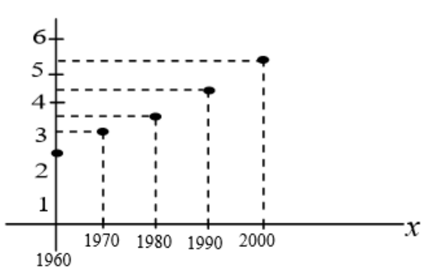
R-c : la valeur moyenne de ce prix d'équilibre sur $[0,5]$ est $\mu = \frac{1}{5-0}\int_0^5 f(t)dt$

Soit $\mu = \frac{1}{5}\left[140t - 40e^t\right]_0^5 \Rightarrow \mu = 140 - 8e^5$ et est arrondie à la gourde près, cette moyenne est $\mu = -1047$ Gourdes

Partie C.-

Exo #1

R-a : Construction du nuage de points



R-b : coordonnées du point moyen G de la série

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}=\dfrac{1860+1970+...+2200}{5}=1980\\ \bar{y}=\dfrac{2,5+3+...+5,2}{5}=3,74\end{array}\right\rangle G(1980;3,74)$$

R-c : calcul de la covariance de (x,y)

$$\text{cov}(x,y)=\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}\Rightarrow \text{cov}(x,y)=\frac{1960\times 2,5+1970\times 3+...+2000\times 5,2}{5}-(1980\times 3,74)$$

$$\Rightarrow \text{cov}(x,y)=13,6$$

R-d : Equation de la droite d'ajustement

$y=ax+b$ avec $a=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{V_X}$ or $V_X=\dfrac{\sum x_i^2}{N}-\overline{x^2}=200$

D'où $a=0,068$, de plus

$$y-\bar{y}=a(x-\bar{x})\Rightarrow y=a(x-\bar{x})+\bar{y}$$

$$y=0,068x-130,9$$

Exo #2

D'après les données on a :

$U_{n+1}=U_n+0,02\ U_n$

Soit $U_{n+1}=(1,02)U_n$

$V_{n+1}=V_n-0,01V_n$

Soit $V_{n+1}=(0,99)=V_n$

Donc :

R-a : Les suites (U_n) et (V_n) sont des suites géométriques de raison respectives $q_1=1,02$ et $q_2=0,99$

R-b : Expression de U_n puis V_n en fonction de r

On a :

$U_n=20000(1,02)^n$ *et* $V_n=40000(0,99)^n$

Comportement de (U_n) et (V_n) quand

$$n\to+\infty\ car\begin{cases}q_1=1,02>1\\ q_2=0,99;-1<q_2<1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=+\infty\quad et\quad \lim_{n\to+\infty}V_n=0$$

R-c : A partir de quel mois l'offre dépassera la demande :

On a, dans ce cas $U_n>V_n$

$$\Rightarrow 20000(1,02)^n>40000(0,99)^n$$

$$(1,02)^n>2(0,99)^n$$

$$n\ln(1,02)>\ln 2+n\ln(0,99)$$

$$n\ln\left(\frac{1,02}{0,99}\right)>\ln 2\Rightarrow n>\frac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{1,02}{0,99}\right)}$$

D'où $n>23,25\quad soit\quad n\geq 24$

L'offre dépassera la demande à partir du 24ème mois suivant janvier 2000(soit Janvier 2002)

Exo #3

R-1 : Pour z_1 : module : $2\sqrt{2}$, un argument $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

Pour z_2 : module : $2\sqrt{2}$, un argument $\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

Déduction.

La forme trigonométrique du complexe z tel que

$z=\dfrac{z_1}{z_2}$ est $z=\cos\dfrac{7\pi}{12}+i\sin\dfrac{7\pi}{12}$

R-2 : Forme algébrique et forme exponentielle de z

On a: $z=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}i$ et $z=e^{i\frac{7\pi}{12}}$

Déduisons : comme $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{7\pi}{12}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

D’où $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ de même : $\cos\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{2}$

D’où $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

R-3 : Ecriture de z^{2020} sous forme algébrique

$$z^{2020} = \left(e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{2020} = e^{i\frac{14140\pi}{12}} = e^{i\frac{3535\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

D’où $z^{2020} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exo #4

R-1 : a) Il y a $\left(40\times\frac{3}{4}\right)$% des clients qui prennent un dessert et aussi un café. Soit 30% des clients. La probabilité que le client prenne un dessert et un café est $p_1 = 0{,}3$

b) La probabilité que le client prenne ni dessert ni café est $p\left(\overline{D}\cap\overline{C}\right)$ c’est-à-dire $p\left(\overline{D\cup C}\right)$. Or $p(D\cup C) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}9$ d’où $p\left(\overline{D\cup C}\right) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

En résumé : la probabilité que le client ne prenne ni dessert, ni café est $p_2 = 0{,}1$

R-2 : Si le client a pris le café, la probabilité qu’il n’ait pas pris le dessert est $p_3 = \frac{\overline{D}}{C}$

$p_3 = \frac{50}{80} = 0{,}625$

$\rightarrow D$	30	10	$\rightarrow 40$
$\overline{D}$	50	10	$\rightarrow 60$
	80	20	