MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE (MENFP)
FILIÈRE D'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL / SÉRIE : (LLA)

EXAMENS DE FIN D'ÉTUDES SECONDAIRES
MATHÉMATIQUES (MODELE 3)

CARTESIEN

Consignes : 1. L'usage de la calculatrice programmable est interdit 2. Le téléphone est interdit dans les salles
3. Le silence est obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

***N.B :** Le sujet est composé de deux parties A et B. Dans chaque exercice, le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherches, même incomplètes ou non fructueuses, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation.*

PARTIE A.- Recopier et compléter les phrases suivantes (1 à 10). (50 pts / 5 pts par question).

1- Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble S des solutions de l'équation $(\ln x)^3 = \ln x$ est $S =$ ………

2- Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = e^{-x}\ln x$. L'ensemble de définition de f est l'intervalle I tel que $I =$ ……….

3- Une fonction numérique f est définie par $f(x) = e^{2x} + x$. Si f' est la dérivée première de f, alors le rapport $\dfrac{f'(0)}{f(0)}$ est égal à ……….

4- La valeur exacte de la somme 1 + 14 + 27 + … + 261 est le naturel ……….

5- La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 3(0{,}1)^n\, 5^{2n}$ est une suite géométrique dont la raison est égale à ………..

6- On considère la suite arithmétique de 1^er terme U_0 et de raison r. Si $U_2 + U_5 + U_8 = 210$, avec $U_0 = 2r$, alors on a $U_0 =$ ……..

7- A et B sont deux événements d'un espace probabilisé. Si $p(A) = 0{,}6$, $p(\overrightarrow{B}) = 0{,}2$ et $p(A \cap B) = 0{,}5$, alors on a $p(\overline{A} \cap B) =$.........

8- Si l'écart-type d'une variable aléatoire X est $\sigma(X) = 5$, alors la variance de $(-2X)$ est égale à ………

9- Si 7; 9; 10; 11; 11; 12; 13 et 15 sont les notes obtenues durant l'année scolaire aux contrôles de mathématiques par l'élève Marvens, alors sa moyenne annuelle en math est égale à ………….

10- Si une série double, de point moyen $G(5;\ 14{,}8)$, est ajustée par la droite d'équation $y = 3x + b$, on a alors $b =$ …….

PARTIE B.- Traiter deux(2) des quatre exercices suivants (25pts par exercice)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + e^x$

a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
b) Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à f en $-\infty$.
c) Calculer la dérivée de f et étudier son signe.
d) Dresser le tableau de variations de f.

2. On considère une suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = 3\times 2^n$.

1) Étudier la monotonie de la suite (U_n).
2) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. Que peut-on alors en déduire ?
3) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.
4) Exprimer en fonction de n la somme : $S_n = U_0 + \ldots + U_n$

3. Dans un des parcs de la ville de Boston, il y a un problème de délinquance durant les mois d'été. Un jeune policier a choisi un échantillon aléatoire de 10 journées (parmi les 90 jours de l'été) et a recueilli les données suivantes. Pour chaque journée, x représente le nombre de policiers patrouillant dans le parc et y représente le nombre de délinquants cette journée-là.

x	10	15	16	1	4	6	18	12	14	7
y	5	2	1	9	7	8	1	5	3	6

1) a) Tracer le nuage de points correspondant.
b) Selon ce nuage, peut-on dire que la valeur calculée de r (coefficient de corrélation) sera positive, négative ou nulle ? Expliquer.
2) Calculer le coefficient r de corrélation.

4. Sur un compact disque de danse à 10 pistes, il y a 6 danses lentes et 4 danses rapides. À l'aide du générateur aléatoire, on compose au hasard un programme de danses toutes différentes. Sachant que le programme comporte 3 danses, déterminer les probabilités des événements suivants :

1) A : « le programme comporte deux danses lentes et une rapide ».
2) B : « le programme comporte au moins une danse rapide ».

Commentaires ou suggestions autour des compétences disciplinaires à développer

C_1 : Savoir résoudre dans R une équation logarithmique simple

- ⇨ Dans ce cas, on appliquera les propriétés relatives aux logarithmes.

C_2 : Savoir déterminer l'ensemble de définition d'une fonction dans la définition de laquelle interviennent le logarithme et l'exponentielle

- ⇨ Dans ce cas, il est question d'appliquer les propriétés relatives aux logarithmes et à l'exponentielle.

C_3 : Savoir calculer l'image d'un réel par une fonction et par sa dérivée première, cette fonction comportant une expression exponentielle

- ⇨ On se rappellera que $f(x)=u+v \Rightarrow f'(x)=u'+v'$ et $u(x)=e^{ax} \Rightarrow u'(x)=a\cdot e^{ax}$.

C_4 : Savoir calculer la somme d'un certain nombre n de termes d'une suite arithmétique dont le premier terme U_1, le n^e terme U_n et la raison r sont connus.

- ⇨ Dans ce cas, on peut trouver le nombre n des termes par la formule $U_n = U_1 + (n-1)\cdot r$. On pourra ensuite poser $S_n = \frac{U_1 + U_n}{2}$.

C_5 : Savoir calculer la raison d'une suite géométrique dont on connait l'expression du terme général en fonction de n.

- ⇨ Dans ce cas, le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ conduit automatiquement à la raison.

C_6 : Savoir déterminer le premier terme U_0 d'une suite arithmétique dont on connait la somme de trois termes et l'expression de U_0 en fonction de la raison.

- ⇨ Dans ce cas, on peut tirer chacun des trois termes en fonction de U_0 et de la raison. Et, par substitution on aura la valeur de l'inconnue U_0 demandée.

C_7 : Savoir exploiter certains résultats de l'algèbre des ensembles pour calculer la probabilité d'un évènement particulier

- ⇨ Dans ce cas, on se rappellera que $P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$ et $P(B)-P(\overline{B})=1$.

C_8 : Savoir calculer la variance d'une variable aléatoire en appliquant les propriétés relatives à la variance et à la formule liant l'écart-type et la variance d'une variable aléatoire.

- ⇨ Ici on se rappellera que $var(aX) = a^2 \cdot var(X)$ et $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$.

C_9 : Savoir déterminer la moyenne arithmétique d'un certain nombre de notes obtenues par un élève durant une année aux contrôles de mathématiques.

- ⇨ Dans ce cas, on doit diviser la somme des notes par le nombre total de notes.

C_{10} : Savoir utiliser les coordonnées d'un point moyen G pour déterminer l'ordonnée à l'origine b dans l'équation d'une droite d'ajustement des points de ce nuage.

- ⇨ Dans ce cas, il suffira de remplacer x et y par leurs valeurs qui sont les coordonnées du point G dans l'équation de la droite.

Correction du texte

Partie A.-

1- Dans ℝ, l'ensemble S des solutions de l'équation $(\ln x)^3 = \ln x$ est $S = \left\{ \frac{1}{e}, 1, e \right\}$.

Démarche : *On a* $(\ln x)^3 = \ln x \Rightarrow (\ln x)^3 - \ln x = 0$. En posant $\ln x = t$ avec $x > 0$ on peut écrire $t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow t = 0, t = -1 \text{ ou } t = 1$

Pour $t = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0$ *, on a* $x = 1$

Pour $t = -1 \Leftrightarrow \ln x = -1$ *, on a* $x = \frac{1}{e}$

Pour $t = 1 \Leftrightarrow \ln x = 1$ *, on a* $x = e$

D'où $S = \left\{ \frac{1}{e}, 1, e \right\}$

2- Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$. L'ensemble de définition de f est l'intervalle I tel que $I = R_+^*$ *ou* $I = \left]0; +\infty\right[$

Démarche : *on a* $\forall x \in R, e^{-x} > 0 \text{ et } \ln x \in R$ pour tout x > 0. Donc la fonction $f(x) = e^{-x} \cdot \ln x$ est définie sur $I = R_+^*$

3- Une fonction numérique f est définie par $f(x) = e^{2x} + x$. Si f' est la dérivée première de f, alors le rapport $\frac{f'(0)}{f(0)}$ est égal à **3.**

Démarche : *On a* $f(x) = e^{2x} + x \Rightarrow f(0) = e^0 + 0 = 1 \text{ et } f'(x) = 2e^{2x} + 1 \Rightarrow f'(0) = 2e^0 + 1 = 3$

D'où $\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{3}{1} = 3$

4- La valeur exacte de la somme 1+14+27+….+261 est le naturel **2751**

Démarche : Il s'agit de la somme d'un certain nombre n de termes d'une suite arithmétique de premier terme $U_1 = 1$ et de raison $r = 13$. On peut donc poser $S_n = \frac{n(U_1 + U_n)}{2} = \frac{n \times (1 + 261)}{2}$

Or on a $U_n = U_1 + (n-1) \cdot r \Leftrightarrow 261 = 1 + (n-1) \cdot 13 \Leftrightarrow n = 21$

Il vient alors $S_{21} = \frac{21 \times (1 + 261)}{2} = 2751$

5- La suite (U_n) définie sur N par $U_n = 3(0{,}1)^n\, 5^{2n}$ est une suite géométrique dont la raison est égale à $\frac{5}{2}$

Démarche : *(U_n)* étant une suite géométrique, on *a* $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q, \forall n \in N$

Or on a $U_n = 3(0{,}1)^n\, 5^{2n} \Rightarrow U_{n+1} = 3(0{,}1)^{n+1}\, 5^{2n+2}$

d'où $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3(0{,}1)^{n+1}\, 5^{2n+2}}{3(0{,}1)^n\, 5^{2n}} = \frac{5}{2}$

6- On considère la suite arithmétique de 1[er] terme U_0 et de raison r. Si U_{2+} U_5+ U_8 = 210, avec $U_0 = 2r$, alors on a $\boldsymbol{U_0 = 20}$.

Démarche : On donne U_{2+} U_5+ U_8=210.
Or on a $U_2 = U_0 + 2r$, $U_5 = U_0 + 5r$ et $U_8 = U_0 + 8r$.
Avec $U_0 = 2r$, on peut donc écrire
$U_0 + 2r + U_0 + 5r + U_0 + 8r = 210 \Rightarrow 2r + 2r + 2r + 5r + 2r + 8r = 210 \Rightarrow 21r = 210 \Rightarrow r = 10$
D'où $U_0 = 2 \times 10 = 20$

7- *A* et *B* sont deux évènements d'un espace probabilisé. si p(A)=0,6, p($\overline{B}$)=0,2 et p($A \cap B$)=0,5, alors on a $p(\overline{A} \cap B) = 0{,}3$
Démarche : On peut écrire $p(\overline{A} \cap B) = p(B) - p(A \cap B)$
Or $p(\overline{B}) = 1 - p(B)$ *et* $p(\overline{B}) = 0{,}2 \Rightarrow 0{,}2 = 1 - p(B) \Rightarrow p(B) = 0{,}8$
Il vient alors $p(\overline{A} \cap B) = 0{,}8 - 0{,}5 = 0{,}3$

8- Si l'écart-type d'une variable aléatoire *X* est $\sigma(X) = 5$, alors la variance de (-2*X*) est égale à **100**
Démarche : On sait que $var(aX) = a^2\, var(X)$
$\sigma(X) = 5 \Leftrightarrow var(X) = 25$
On a donc $var(-2X) = (-2)^2 \times 25 = 100$

9- Si 7 ; 9 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 13 et 15 sont les notes obtenues durant l'année scolaire aux controles de mathématiques par l'élève Marvens, alors sa moyenne annuelle en math est égale à **11**
Démarche : *Soit* $\overline{X}$ *cette moyenne. On a bien*
$\overline{X} = \dfrac{7 + 9 + 10 + 11 + 11 + 12 + 13 + 15}{8} = 11$

10- Si une série double, de point moyen *G*(5 ; 14,8), est ajustée par la droite d'équation $y = 3x + b$,on a alors $b = -0{,}2$
Démarche : En remplaçant *x* par 5 et *y* par 14,8 dans l'équation, on aura :
$14{,}8 = 3 \times 5 + b \Rightarrow b = -0{,}2$

Partie B.-

Exo #1

1) $f(x) = x + e^x$

a) Déterminons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x) + \lim_{x \to -\infty} (e^x)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

b) Démontrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à f en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x+e^{x}-x]=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})=0$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$ alors la droite d'équation $y=x$ est asymptote à f en $-\infty$

c) Calcul de la dérivée de *f* et étudions son signe.

$f'(x)=1+e^{x}$

$\forall x\in R,\ e^{x}>0,\ 1+e^{x}>0$ donc $f'(x)>0$ et que f est strictement croissante.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	

d) Dressons le tableau de variation de *f.*

$Df=]-\infty,+\infty[$

$C\cap y'oy\Rightarrow x=0,\ f(0)=0+e^{0}$

$f(0)=1 \qquad A(0,1)$

$C\cap x'ox\Rightarrow y=0\Rightarrow x+e^{x}=0$

$e^{x}=-x \quad (faux)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1 A	$\nearrow$	$+\infty$

Exo #2- suite réelle

$\forall n\in N,\ U_n=3\times2^{n}$

1) Etudions la monotonie de la suite (U_n)

$U_{n+1}=3\times2^{n+1}\Rightarrow U_{n+1}=3.2^{n}\times2$ $U_{n+1}-U_n=3.2^{n}.2-(3\times2^{2})$

$U_{n+1}-U_n=3.2^{n}(2-1)$

$U_{n+1}-U_n=3.2^{n}>0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

donc $U_{n+1}-U_n>0\Rightarrow U_{n+1}>U_n$, la suite (U_n) est monotone croissante.

2) Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n

$U_{n+1}=3\times2^{n+1}$

$U_{n+1}=3.2^{n}.2$

$U_{n+1}=2U_n$

On peut en déduire que la suite (U_n) est géométrique de raison $q=2,\left(\dfrac{U_{n+1}}{U_n}=2\right)$

3) $U_n=U_0q_n$ avec $U_0=3$

$U_n = 3 \cdot (2)^n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 3 \cdot (2)^{+\infty}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

La suite (U_n) n'est pas convergente. Sa limite n'étant pas finie, elle est divergente.

4) Exprimons en fonction n de la somme.

$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$

$S_n = \sum_{i=0}^{n} U_i = \frac{U_0\left[1 - q^{n+1}\right]}{1-q} = \frac{3\left[1-(2)^{n+1}\right]}{1-2}$

$S_n = -3\left[1-(2)^{n+1}\right] ou\ S_n = -3 + 3 \cdot (2)^{n+1}$

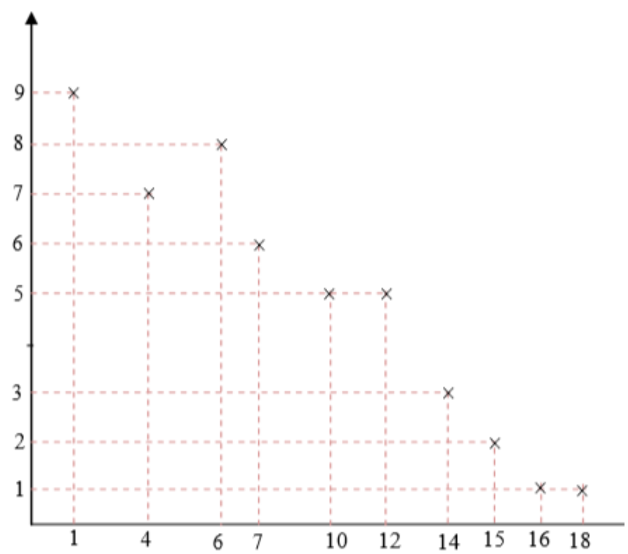
Exo #3- Statistique

Tableau de calcul

x	10	15	16	1	4	6	18	12	14	7	103
y	5	2	1	9	7	8	1	5	3	6	47
x_i^2	100	225	256	1	16	36	324	144	196	49	1347
y_i^2	25	4	1	81	49	64	1	25	9	36	295
$x_i y_i$	50	30	16	9	28	48	18	60	42	42	343

1) Traçons le nuage de points correspondant

a)



b) Tout d'abord, le coefficient de corrélation linéaire ou coefficient de Pearson d'une série statistique double de variables X et Y est le nombre r (sans unité) définie par $r(X,Y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ avec $-1 \le r \le 1$

r sera négatif car l'allure générale du nuage de points présente les grandes valeurs x associées aux petites valeurs y et vice-versa. De gauche à droite, la droite des moindres carrés s'abaisse.

2) Calculons le coefficient r de corrélation

$$r(X,Y)=\frac{Cov(x,y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \text{ avec } Cov(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i y_i}{n}-\overline{x}\,\overline{y}$$

$$\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n} \qquad \overline{y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{n}$$

$$\overline{x}=\frac{10+15+16+1+4+6+18+12+14+7}{10}\Rightarrow \overline{x}=10{,}3$$

$$\overline{y}=\frac{5+2+1+9+7+8+1+5+3+6}{10}\Rightarrow \overline{y}=4{,}7$$

$$Cov(x,y)=\frac{343}{10}-(10{,}3)(4{,}7)=34{,}3-48{,}41$$

$$Cov(x,y)=-14{,}11$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}\Rightarrow avec\ V(X)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\overline{x^2}$$

$$V(X)=\frac{1347}{10}-(10{,}3)^2$$

$$V(X)=134{,}7-106{,}09$$

$$V(X)=28{,}61\Rightarrow \sigma(X)=\sqrt{28{,}61}=5{,}35$$

$$V(Y)=\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^2}{n}-\overline{Y^2}\Rightarrow V(Y)=\frac{295}{100}-(4{,}7)^2$$

$$V(Y)=29{,}5-22{,}09$$

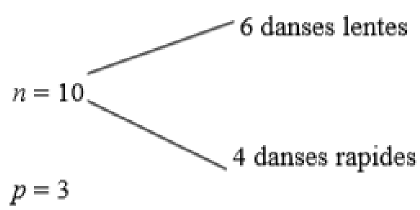
$$V(Y)=7{,}41 \qquad \sigma(Y)=2{,}72$$

$$\sigma(X)=\sqrt{7{,}41}$$

D'où $r(X,Y)=\dfrac{-14{,}11}{5{,}35\times 2{,}72}\Rightarrow r(X,Y)=\dfrac{-14{,}11}{14{,}552}$

$$r(X,Y)=-0{,}96$$

Exo #4- Probabilité



1) A : « « le programme comporte deux lentes et une rapide».

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}\Rightarrow p(A)=\frac{C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{60}{120}\Rightarrow p(A)=\frac{1}{2}\ ou\ 0{,}5$$

2) B : « « le programme comporte au moins une danse rapide».

$$p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}\Rightarrow p(B)=\frac{C_4^1\times C_6^2+C_4^2\times C_6^3\times C_4^3\times C_6^0}{C_{10}^3}=\frac{60+36+4}{120}\Rightarrow p(B)=\frac{100}{120}\ ou\ 0{,}83$$