GRAFOS

Definiciones. Grados. Paseos

1. Se espera que una pastora traslade un lobo, una oveja y un saco de coles a través de un río por medio de una txalupa. La txalupa es pequeña, y la pastora sólo puede llevar uno de los tres cada vez. Además, no puede dejar solos al lobo y a la oveja ni a la oveja y al saco de coles. Con el objeto de determinar cómo debe proceder, describe los pasos que debe seguir mediante un grafo no dirigido. Considera que los vértices del grafo representan todas las configuraciones permitidas. Por ejemplo: la pastora, el lobo, la oveja y las coles están todas a un lado del río en la configuración inicial; la pastora, el lobo, la oveja y las coles están todas al otro lado del río en la configuración final. La pastora, el lobo y la oveja están a un lado del río en tanto que las coles están al otro lado es una configuración intermedia permitida. Habrá una arista entre dos vértices si la pastora puede realizar un viaje a través del río de manera que la configuración correspondiente a uno de los vértices pueda transformarse en la correspondiente al otro vértice, y recíprocamente. Construye el grafo y determina todas las posibles maneras en que la pastora transporta los objetos a través del río.

2. Si G es un grafo simple no dirigido sin lazos con n vértices y m aristas, demuestra que $2m \leq n^2 - n$.

3. Determina el número de vértices para los siguientes grafos o multigafos G. (a) G tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3. (b) G es regular con 15 aristas. (c) G tiene 10 aristas con dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

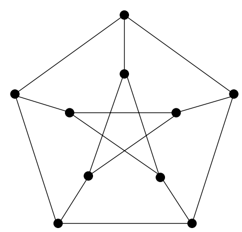
4. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. ¿Cuál es el valor más grande posible para el número de vértices si el número de aristas es 19 y $d(x) \geq 4$ para cualquier $x \in V$?

5. Sea G un grafo no dirigido sin lazos 3-regular con n vértices y m aristas. Si $m = 2n - 6$, calcula n y m.

6. Sea G un grafo no dirigido sin lazos con n vértices y m aristas, sea $\delta = \min_{x \in V} d(x)$ y $\Delta = \max_{x \in V} d(x)$. Prueba que $\delta \leq 2m/n \leq \Delta$.

7. Un grafo se dice que es cúbico si es 3-regular. Prueba que todo grafo cúbico tiene un número par de vértices.

8. Sea G un grafo no dirigido conexo. La *distancia* entre dos vértices se define como el número mínimo de aristas entre ellos. El *diámetro* se define como el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices.



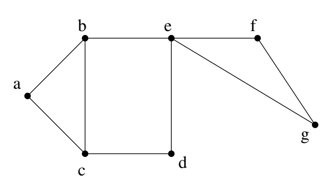
(a) ¿Cuál es el diámetro del grafo de la figura? (b) Si los vértices del grafo representan ordenadores y las aristas representan líneas de comunicación de datos entre los ordenadores, ¿cuál es el significado físico del diámetro del grafo? (c) Si d denota el diámetro del grafo, n el número de vértices y δ el máximo de los grados de los vértices, demuestra:

$$n \leq 1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \delta(\delta - 1)^2 + \ldots + \delta(\delta - 1)^{d-1}$$

(d) Interpreta este resultado en el ejemplo de la red de ordenadores.

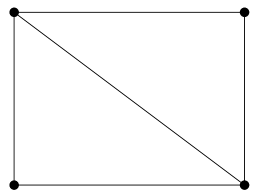
9. Entre las muchas habitaciones de una vieja mansión existe un fantasma en cada habitación que tiene un número par de puertas. Si la mansión tiene sólo una entrada, demuestra que una persona que entra desde el exterior siempre podrá llegar a una estancia en la cual no hay un fantasma.

10. Para el grafo de la figura, determinar (a) un paseo $b - d$ que no sea un recorrido; (b) un recorrido $b - d$ que no sea un camino; (c) un camino $b - d$; (d) un paseo cerrado $b - b$ que no sea un circuito; (e) un circuito $b - b$ que no sea un ciclo; (f) un ciclo $b - b$.



11. Sea k un entero positivo fijo y sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos tal que $d(x) \geq k$ para todo $x \in V$. Demuestra que G contiene un camino de longitud k.

12. Dado el grafo de la figura, hallar el número de paseos de longitud 5 entre cada par de vértices.



Subgrafos. Complementario. Isomorfismos

1. Sea G un grafo no dirigido conexo sin lazos y sea e una arista de G. Demuestra que la arista e es parte de un ciclo si y sólo si $G - e$ es conexo.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido sin lazos, donde

$$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_{10}\}.$$

Si $d(x_1) = 2$, $d(x_2) = 3$, $d(x_3) = 3$, $d(x_4) = 5$, $d(x_5) = 1$, $d(x_6) = 2$, $d(x_7) = 5$, $d(x_8) = 2$, $d(x_9) = 3$, $d(x_{10}) = 2$, determina el grado de los vértices del grafo complementario.

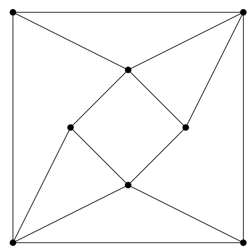
3. Sea G un grafo no dirigido sin lazos con n vértices y m aristas. ¿Cuántas aristas hay en $\overline{G}$?

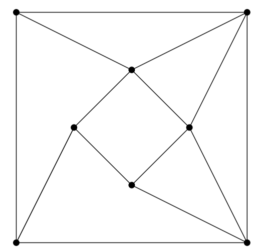
4. Probar que los ocho vértices y las doce aristas de un cubo forman un grafo bipartito.

5. Sea G un ciclo de n vértices y $\overline{G}$ su complementario. Prueba que G y $\overline{G}$ son isomorfos si y sólo si $n = 5$.

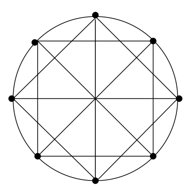
6. Para $p \geq 3$, la *rueda con p radios*, R_p, es el grafo formado por un ciclo de longitud p y un vértice adicional que es adyacente a los p vértices del ciclo. ¿Es alguno de estos grafos R_p isomorfo a un grafo completo?

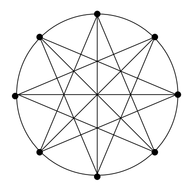
7. Para los dos grafos de la figura, calcula el grado de cada vértice. ¿Son isomorfos?





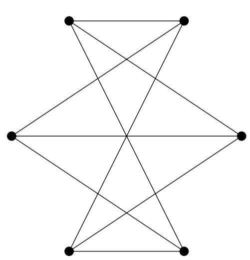
8. (a) Si G_1 y G_2 son grafos no dirigidos sin lazos, demostrar que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos. (b) Determinar si los grafos de la figura son isomorfos.

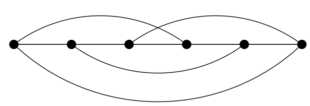


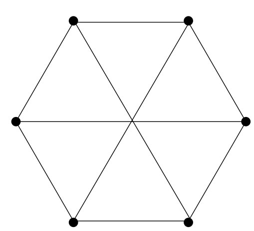


9. Sea G un grafo no dirigido sin lazos con n vértices. G se llama *autocomplementario* si es isomorfo a su complementario $\overline{G}$. (a) Si G es autocomplementario, ¿cuántas aristas tiene? (b) Encontrar un ejemplo de grafo autocomplementario para $n = 4$ y otro para $n = 5$. (c) Demuestra que si G es autocomplementario, $n = 4k$ ó $n = 4k + 1$ para algún entero k.

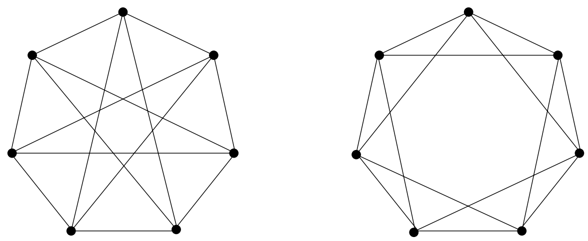
10. Probar que los siguientes grafos son isomorfos al $K_{3,3}$.





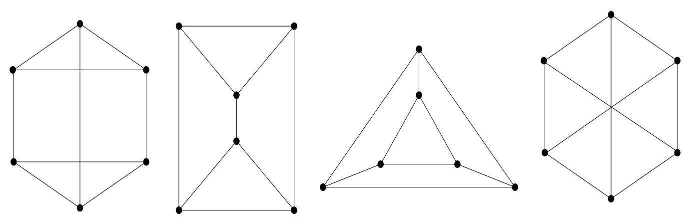


11. Establecer una isomorfía.

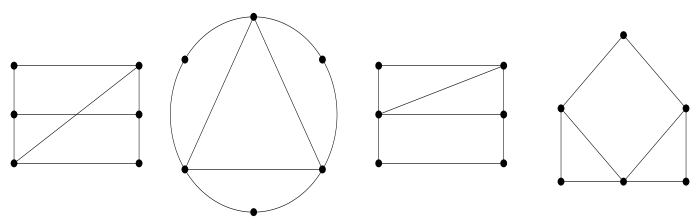


12. Para cada uno de los siguientes bloques de grafos, intentar establecer una isomorfía etiquetando los vértices isomorfos, o probar que no pueden serlo.

    (a)

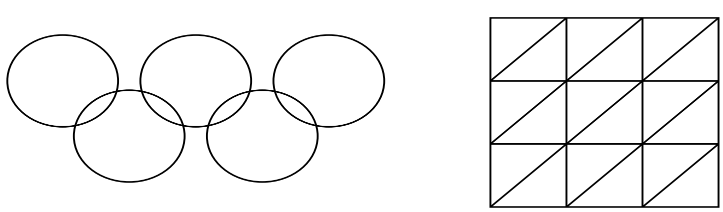


    (b)



Grafos eulerianos y hamiltonianos

1. Para cada uno de los grafos dibujados ver si tienen circuitos o recorridos eulerianos.



2. Determina los valores de n para los que el grafo completo K_n tiene un circuito euleriano. ¿Para qué valores de n tiene K_n un recorrido euleriano pero no un circuito euleriano?

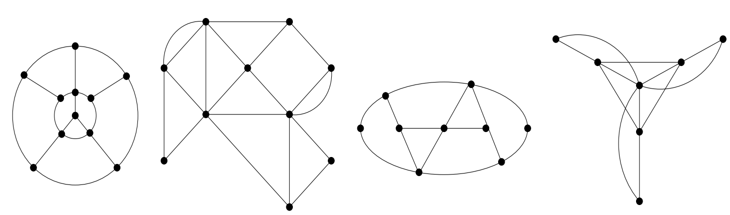
3. Se tienen 10 piezas de dominó con las siguientes numeraciones: $\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\}$. ¿Es posible disponerlas en una línea cerrada? Si la respuesta es afirmativa, dar la secuencia de colocación.

4. En un tablero de ajedrez, determina si es posible que un caballo realice secuencialmente todos sus movimientos posibles. Mismo ejercicio para el alfil y la torre (se considera que se hace un movimiento cuando se hace en cualquier dirección).

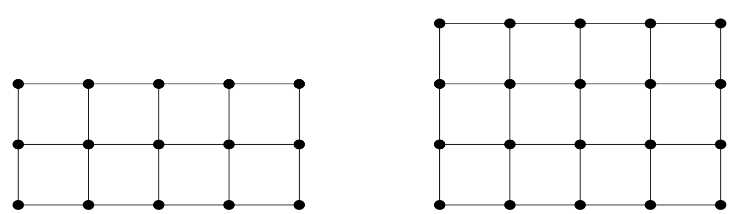
5. Dá un ejemplo de un grafo conexo tal que: (a) no tenga circuitos eulerianos ni ciclos hamiltonianos. (b) tenga un circuito euleriano pero no tenga ciclos hamiltonianos. (c) tenga un ciclo hamiltoniano pero no un circuito euleriano. (d) tenga un ciclo hamiltoniano y un circuito euleriano.

6. ¿Existen grafos en los que todo circuito euleriano es ciclo hamiltoniano? Si la respuesta es afirmativa, caracterízalos.

7. Encuentra un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada grafo o multigrafo de la figura. Si el grafo no tiene un ciclo hamiltoniano, determina si tiene un camino hamiltoniano.



8. (a) Encuentra un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la figura.



(b) Consideremos un grafo no dirigido formado por una malla de tamaño $p \times q$ $(p, q > 1)$. Demuestra que el grafo tiene un ciclo hamiltoniano si y sólo si p es par ó q es par.

9. (a) Dibuja un grafo sin lazos con n vértices que tenga un camino hamiltoniano pero que tenga dos vértices a y b con $d(a) + d(b) < n - 1$. (b) Dibuja un grafo sin lazos con n vértices que tenga un ciclo hamiltoniano pero que tenga dos vértices a y b no adyacentes con $d(a) + d(b) < n$.

10. En un grupo de 12 personas, todas conocen al menos a 6. Demuestra que pueden sentarse alrededor de una mesa circular de forma que cada persona conozca a las dos personas sentadas a su lado.

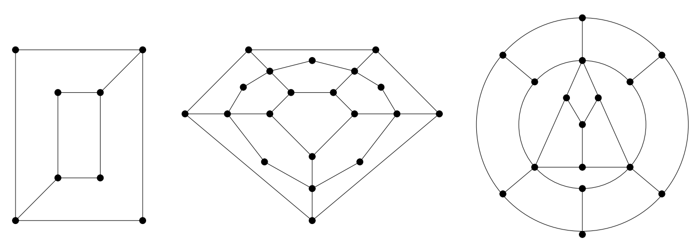
11. Once personas planean salir a cenar juntas durante varios días. Se sentarán en una mesa redonda, y el plan consiste en que cada persona tenga diferentes vecinos en cada cena. ¿Durante cuántos días podrá hacerse esto?

12. Sea G un grafo no dirigido, sin lazos, 6-regular con 11 vértices. Demuestra que G es hamiltoniano.

13. Sea G un grafo no dirigido, sin lazos, k-regular con n vértices. Si $n \geq 2k + 2$, demuestra que el grafo complementario de G es hamiltoniano.

14. Sea C_n un ciclo no dirigido con n vértices, $n \geq 5$. Demuestra que el grafo complementario de C_n es hamiltoniano.

15. Probar que los siguientes grafos no son hamiltonianos.



16. (a) Dado un grafo bipartito completo K_{n_1,n_2}, donde el conjunto de vértices está dividido en V_1 y V_2 con $\mid V_1 \mid = n_1$ y $\mid V_2 \mid = n_2$,
    i. ¿Cuál es el grado de los vértices de V_1 y V_2?
    ii. ¿Para qué valores de n_1 y n_2 tiene circuito euleriano?
    iii. ¿Para qué valores de n_1 y n_2 tiene ciclo hamiltoniano?

    (b) Dado un grafo bipartito completo K_{n_1,n_2} con $m = 16$ aristas, siendo $n_1 \leq n_2$, determina n_1 y n_2 para los siguientes supuestos.

i. El grafo tiene circuito euleriano y ciclo hamiltoniano.
ii. El grafo tiene circuito euleriano pero no ciclo hamiltoniano.