Principios de Diseño de Sistemas Digitales

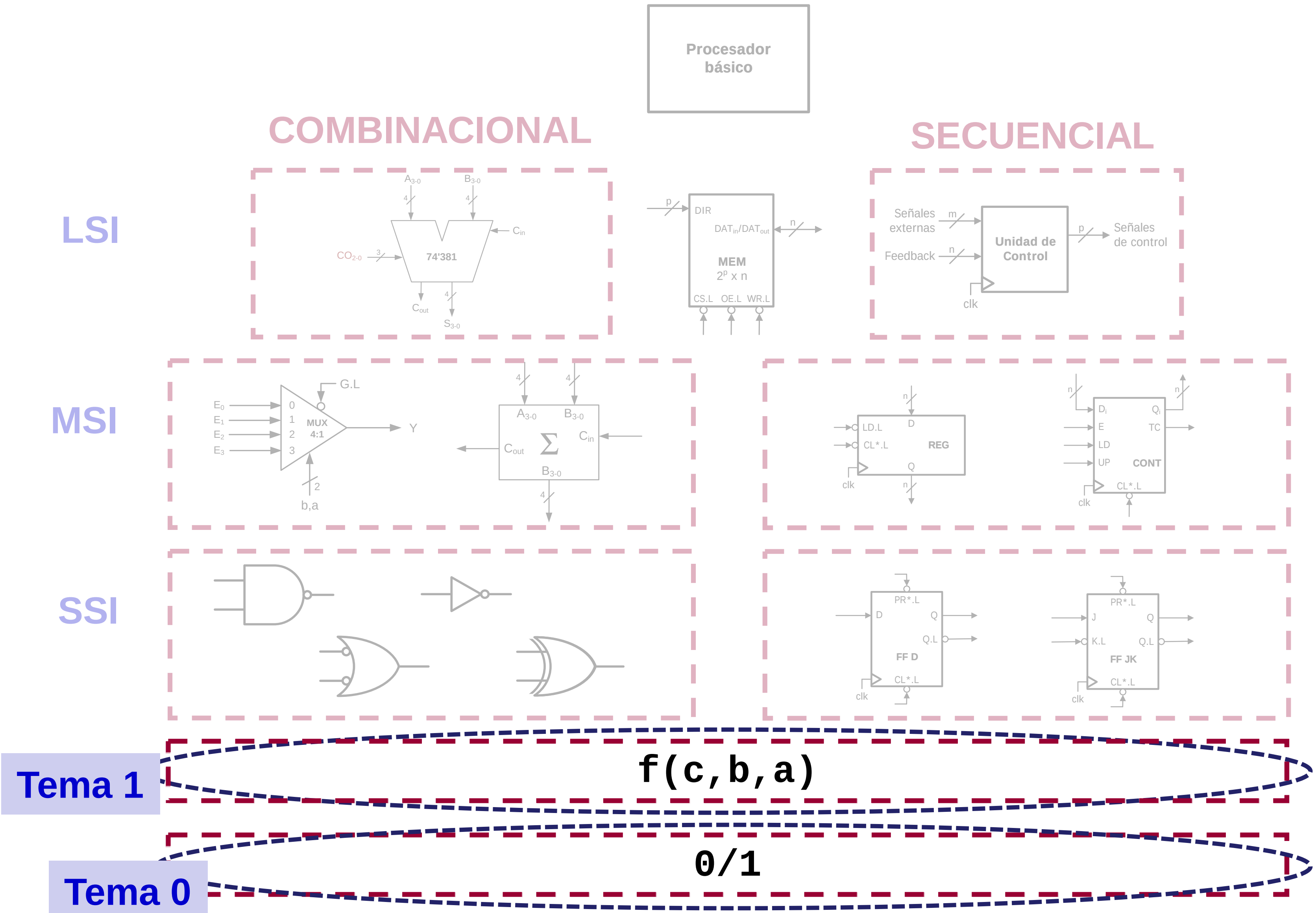
Grado en Ingeniería en Informática

Tema 1.
ÁLGEBRA DE BOOLE

informatika fakultatea
facultad de informática

Dpto. Arquitectura y Tecnología de Computadores

eman ta zabal zazu
UPV EHU


Procesador básico
COMBINACIONAL
SECUENCIAL
LSI
MSI
SSI
74'381
Unidad de Control
Señales externas
Feedback
Señales de control
clk
MEM
DIR
MUX 4:1
G.L
Y
b,a
REG
CONT
FF D
FF JK
Tema 1
f(c,b,a)
Tema 0
0/1

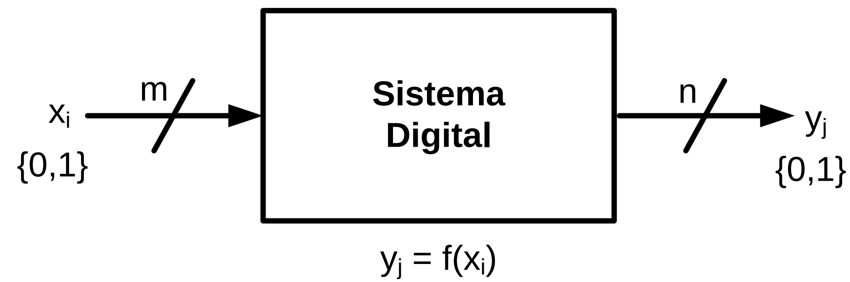
DETALLE DEL TEMARIO

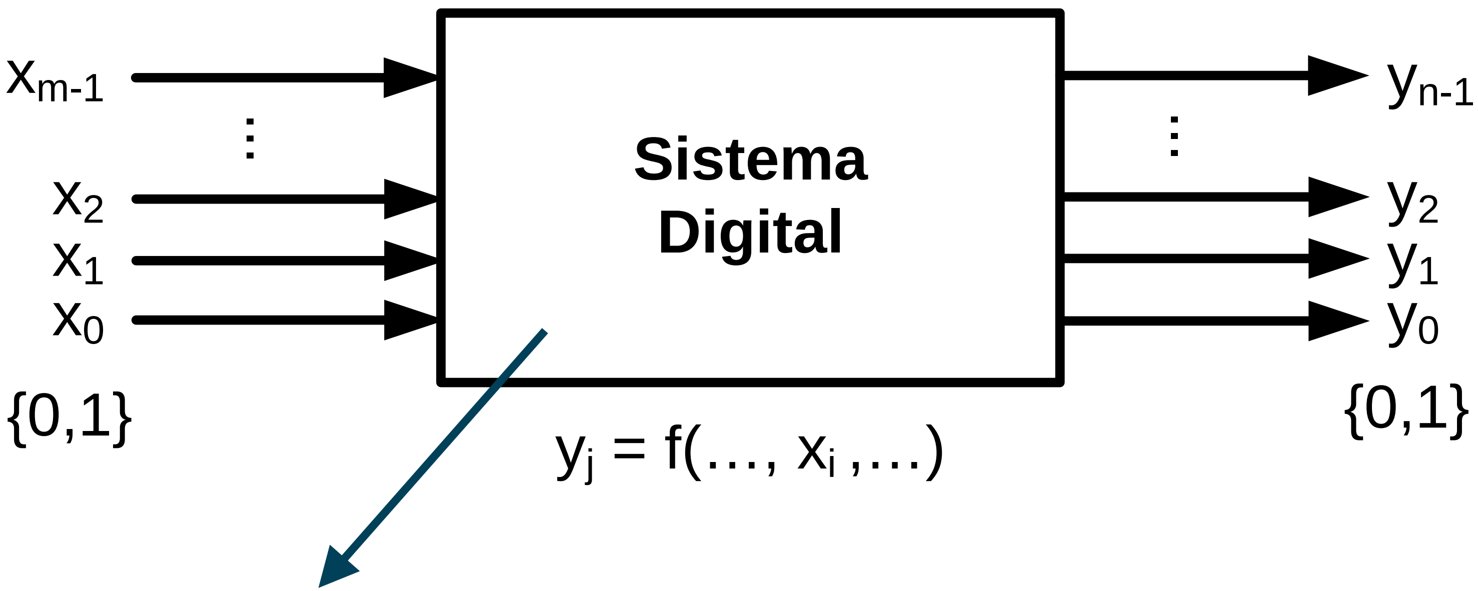
1.1. Álgebra de Boole y Álgebra de Conmutación: axiomas, teoremas y operaciones básicas.

1.2. Funciones lógicas.

- 1.2.1. Representaciones de las funciones lógicas.
- 1.2.2. Minimización de funciones lógicas. Mapas de Karnaugh
- 1.2.3. Términos irrelevantes (*don't care*).

SISTEMA DIGITAL

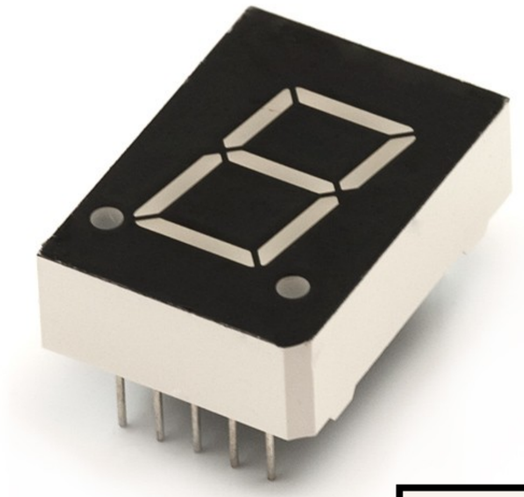


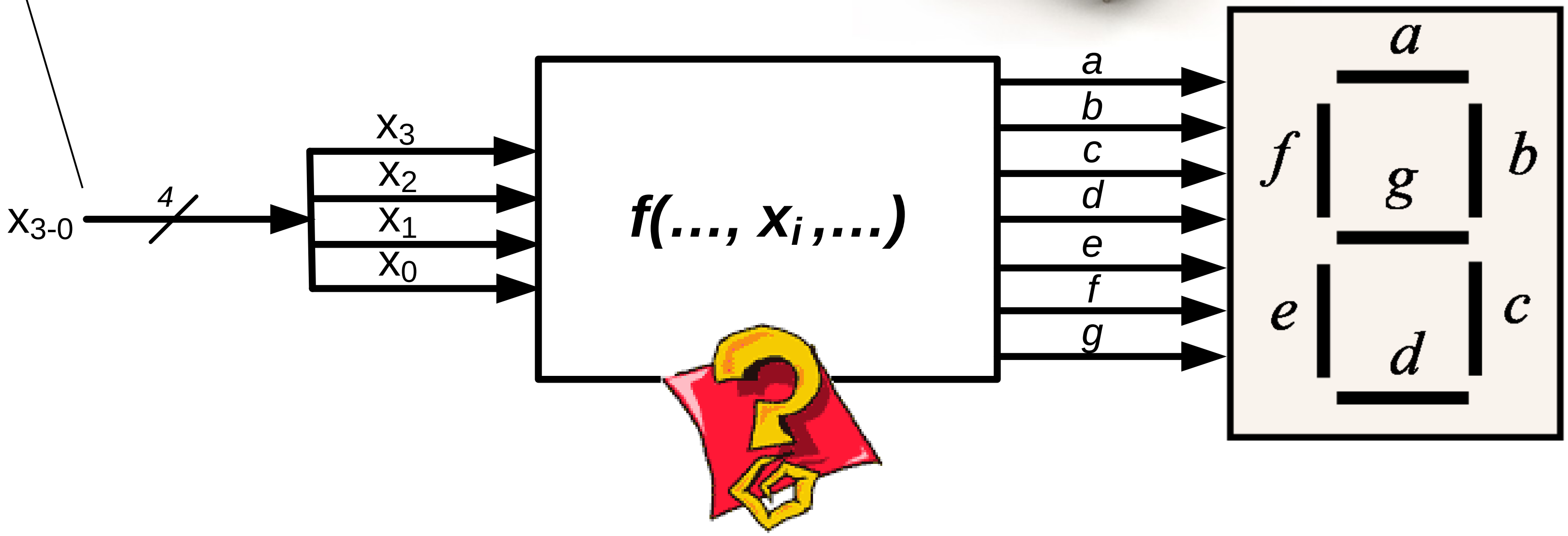


¿Comportamiento (funcionamiento)? ’ función lógica

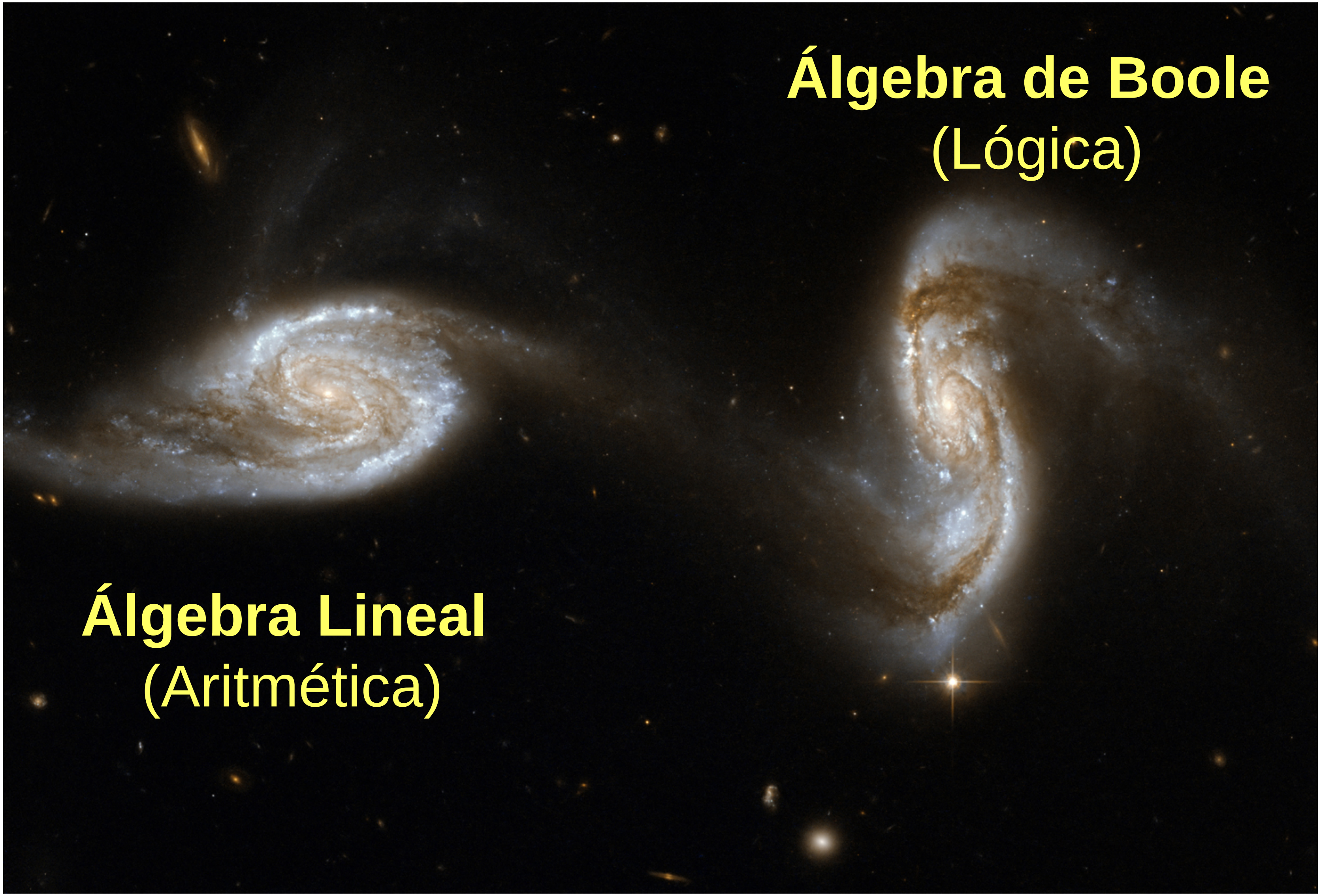
SISTEMA DIGITAL

Número natural en BCD {0, 1,…, 9}



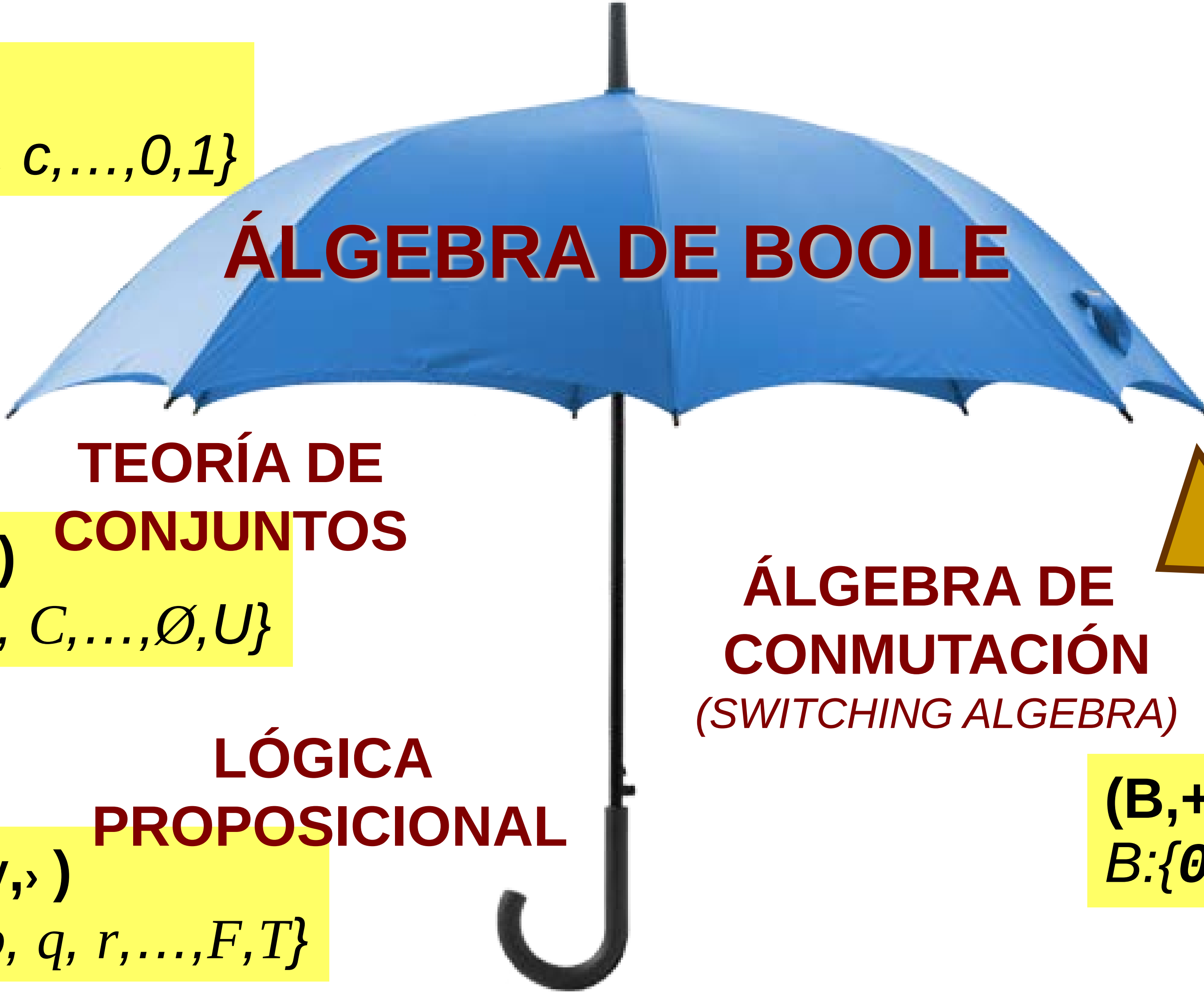


ÁLGEBRA DE BOOLE



ÁLGEBRA DE BOOLE

(B,+,·)
B:{a, b, c,…,0,1}



ÁLGEBRA DE BOOLE

TEORÍA DE CONJUNTOS

(B,U,))
B:{A, B, C,…,Ø,U}

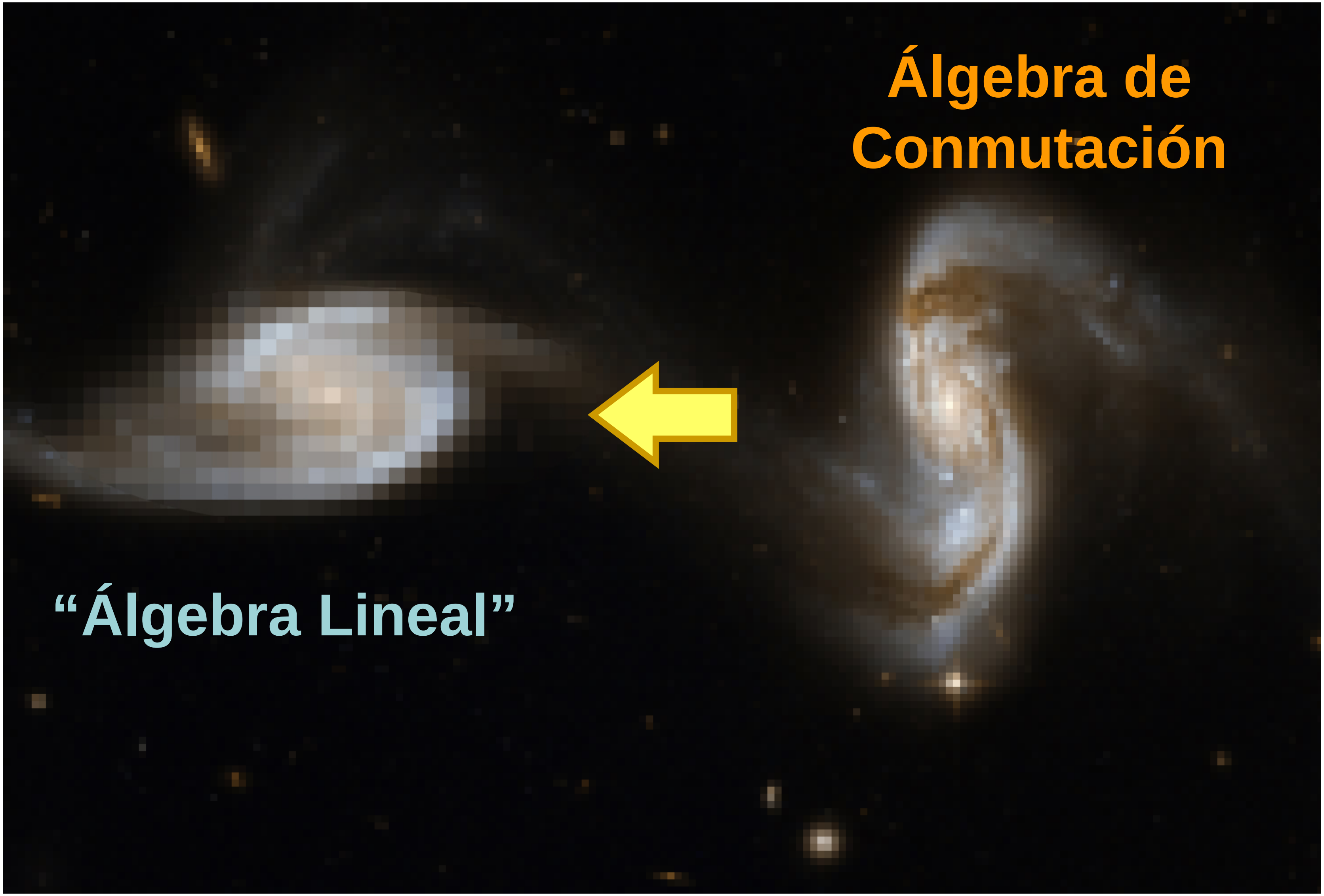
LÓGICA PROPOSICIONAL

(B,v,›)
B:{p, q, r,…,F,T}

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN
(SWITCHING ALGEBRA)

(B,+,·)
B:{0,1}

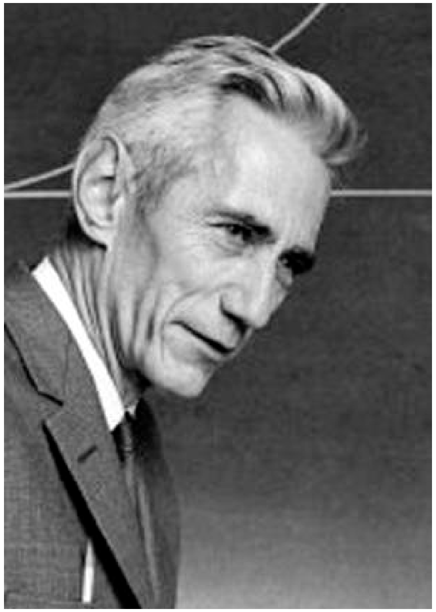
ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN



ÁLGEBRA DE BOOLE

- **George Boole** en 1845 propuso descripción algebraica de la Lógica:

  Álgebra de Boole.



- **Claude Shannon** en 1938 demostró que el binario y el álgebra booleana podían simplificar el diseño de circuitos digitales:

  Álgebra de Conmutación

ÁLGEBRA DE BOOLE

(B,+,·)

B:{a, b, c,…,0,1}

AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- Un álgebra:
  - Conjunto de elementos.
  - Unas operaciones con dichos elementos.
  - Un conjunto de **axiomas**.

  } **Leyes** y **teoremas**

- **Axiomas** del Álgebra de Boole para:
  - Un conjunto de elementos B: {a, b, c, …}.
  - Dos operaciones cerradas: (**+**, •).
    - Suma **'+'**
    - Producto **'•'**

AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Axioma A1:** El conjunto B es cerrado

$$\forall a,b \in B \rightarrow a+b \in B$$

$$\forall a,b \in B \rightarrow a \cdot b \in B$$

- **Axioma A2:** Existen al menos 2 elementos distintos

$$\exists a,b \in B / a \neq b$$

- **Axioma A3:** Existe elemento neutro

$$\exists 0 \in B / \forall a \in B \rightarrow a+0=a$$

$$\exists 1 \in B / \forall a \in B \rightarrow a \cdot 1=a$$

AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Axioma A4:** Propiedad Conmutativa

$$\forall a, b \in B \rightarrow a + b = b + a$$

$$\forall a, b \in B \rightarrow a \cdot b = b \cdot a$$

- **Axioma A5:** Propiedad Asociativa

$$\forall a, b, c \in B \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\forall a, b, c \in B \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

(Propiedad Distributiva del Producto respecto a la Suma o Factor Común)

- **Axioma A6:** Propiedad Distributiva

a+bc = (a+b)(a+c)

$$\forall a,b,c \in B \rightarrow a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c)$$

$$\forall a,b,c \in B \rightarrow a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

a(b+c) = ab + ac

- **Axioma A7:** Existe Elemento Complementario

$$\forall a \in B \quad \exists \overline{a} \in B / a\cdot\overline{a}=0$$

$$\forall a \in B \quad \exists \overline{a} \in B / a+\overline{a}=1$$

TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Teorema T1:** Ley de Idempotencia (o de Tautología)

$$\forall a \in B \rightarrow a + a = a$$

$$\forall a \in B \rightarrow a \cdot a = a$$

- **Teorema T2:** Teorema de los Elementos Dominantes

$$\forall a \in B \rightarrow a \cdot 0 = 0$$

$$\forall a \in B \rightarrow a + 1 = 1$$

- **Teorema T3:** Ley de Absorción

$$\forall a, b \in B \rightarrow a + (a \cdot b) = a$$

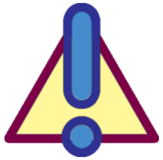
$$\forall a, b \in B \rightarrow a \cdot (a + b) = a$$

TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Teorema T4:** Ley de Involución

$$\forall a \in B \rightarrow \overline{\overline{a}} = a$$

- **Teorema T5:** Ley de Adyacencia



$$\forall a, b \in B \rightarrow ab + a\overline{b} = a$$

$$\forall a, b \in B \rightarrow (a+b)(a+\overline{b}) = a$$

- **Teorema T6:** Ley de Simplificación

$$\forall a, b \in B \rightarrow a + \overline{a} \cdot b = a + b$$

$$\forall a, b \in B \rightarrow a \cdot (\overline{a} + b) = a \cdot b$$

TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

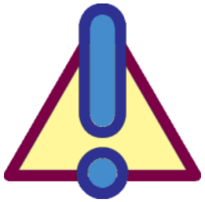
- **Teorema T7:** Complementario de los Elementos Neutros

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

- **Teorema T8:** Leyes de De Morgan

$$\forall a, b \in B \rightarrow \overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$
$$\forall a, b \in B \rightarrow \overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a + b} \neq \overline{a} + \overline{b}$$
$$\overline{a \cdot b} \neq \overline{a} \cdot \overline{b}$$



TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE

- **Teorema T7:** Complementario de los Elementos Neutros

$$\overline{0} = 1$$

Principio de Dualidad

Todo axioma tiene 2 formas equivalentes si:

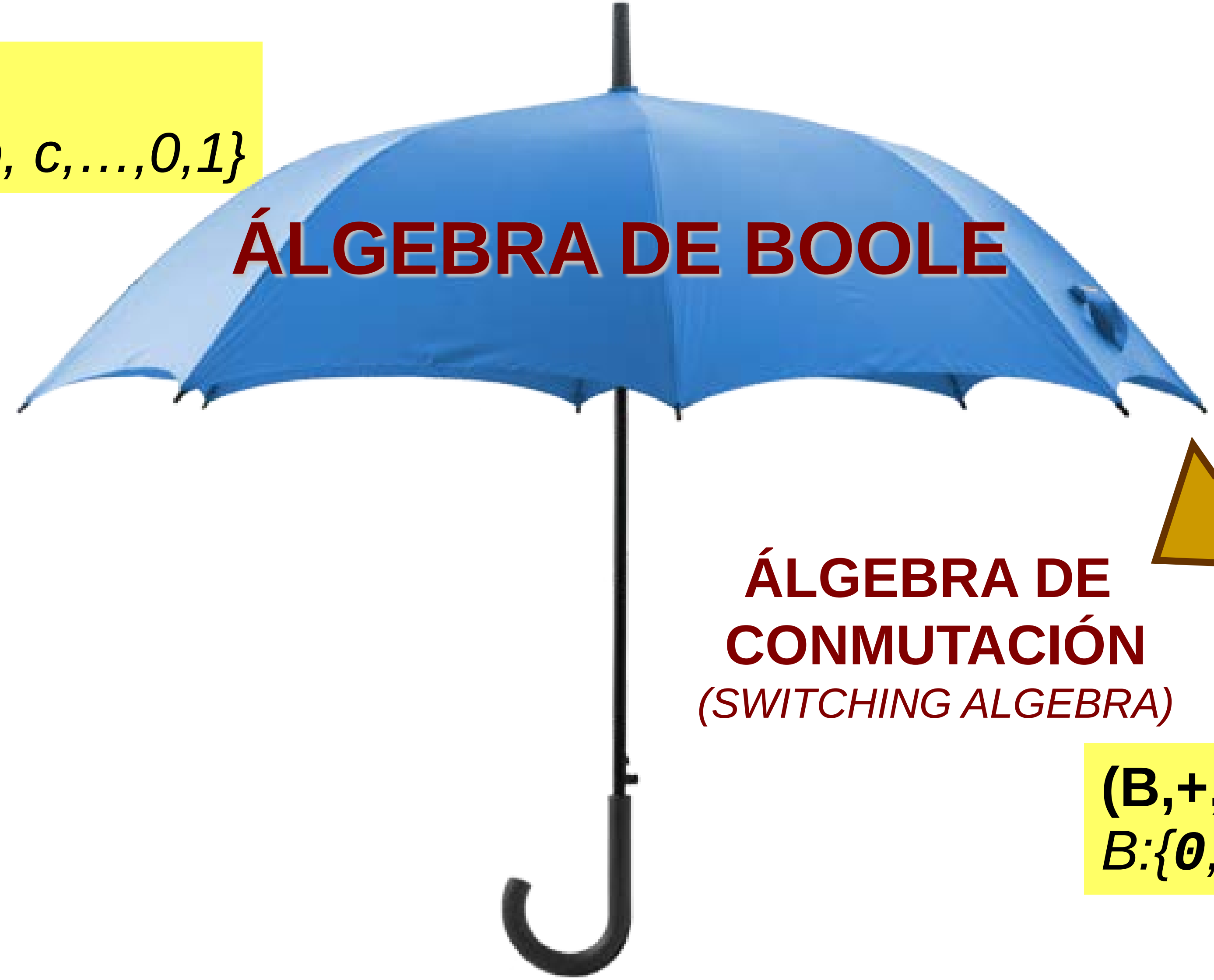
- se intercambia suma por producto (**+** ⬄ •),
- se intercambian los elementos neutros (0 ⬄ 1).

$$\overline{a+b} \neq \overline{a} + \overline{b}$$

$$\overline{a \cdot b} \neq \overline{a} \cdot \overline{b}$$

ÁLGEBRA DE BOOLE

(B,+,·)
B:{a, b, c,…,0,1}



ÁLGEBRA DE BOOLE

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN
(SWITCHING ALGEBRA)

(B,+,·)
*B:{**0**,**1**}*

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

- Sólo dos elementos.
  - **B = {0 , 1}**
- Dos operaciones cerradas.
  - **Suma lógica ‘+’**
  - **Producto lógico ‘•’**

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

Las operaciones del Álgebra de Conmutación se definen de forma **exhaustiva** por su Tabla de Verdad.

Suma lógica

a	b	a+b
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Producto lógico

a	b	a•b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

Y el complementario, se denomina inversión lógica o:

Negación

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

ÁLGEBRA DE CONMUTACIÓN

- Se comprueba que las operaciones así definidas verifican los Axiomas de Huntington (A1,…,A7).

- En consecuencia, son de aplicación los teoremas y leyes del Álgebra de Boole (T1,…,T8).

FUNCIONES LÓGICAS (O DE CONMUTACIÓN)

- Dadas *n* variables booleanas se pueden definir 2^{2^n} funciones diferentes:

n variables; 2^{2^n} funciones; 2^n filas

x_{n-1}	x_{n-2}	…	x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	…	f_{r-3}	f_{r-2}	f_{r-1}
0	0	…	0	0	0	0	0	0	…	1	1	1
0	0	…	0	0	0	0	0	0	…	1	1	1
0	0	…	1	0	0	0	0	0	…	1	1	1
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
1	1	…	0	1	0	0	0	0	…	1	1	1
1	1	…	1	0	0	0	1	1	…	0	1	1
1	1	…	1	1	0	1	0	1	…	1	0	1

FUNCIONES LÓGICAS (O DE CONMUTACIÓN)

- $n = 1 \rightarrow 4$ funciones

a	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$ $\quad f_1 = a$ $\quad f_2 = \overline{a}$ $\quad f_3 = 1$

FUNCIONES LÓGICAS (O DE CONMUTACIÓN)

- n = 2 → 16 funciones

$$f_6 = \overline{a}b + a\overline{b} = a \oplus b$$ *suma exclusiva*

$$f_9 = \overline{a}\overline{b} + ab = a \otimes b$$ *equivalencia*

a	b	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$f_1 = a \cdot b$$

$$f_7 = a + b$$

FUNCIONES LÓGICAS (O DE CONMUTACIÓN)

- n = 2 → 16 funciones

$f_6 = \overline{a}b + a\overline{b} = a \oplus b$ *suma exclusiva*

$f_9 = \overline{a}\overline{b} + ab = a \otimes b$ *equivalencia*

Principio de Dualidad (ampliación)

Todo axioma tiene 2 formas equivalentes si:

- se intercambia suma por producto (**+** ⇔ **•**),
- se intercambian los complementarios (a ⇔ $\overline{\text{a}}$).

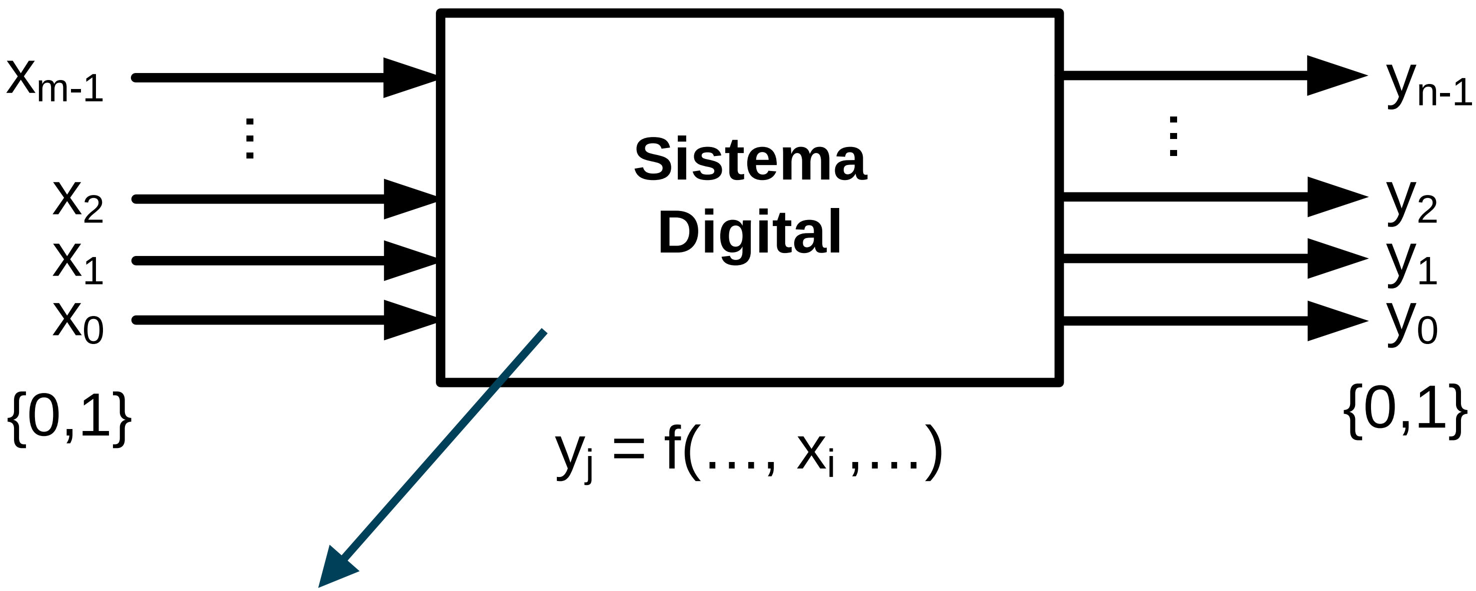
antes (0 ⇔ 1)

$f_1 = a \cdot b$

$f_7 = a + b$

SISTEMA DIGITAL

¡Pero no perdamos la perspectiva!



¿Comportamiento (funcionamiento)? ’ función lógica

SISTEMA DIGITAL

- **Problema: ¿Cómo obtener una función lógica a partir de una tabla de verdad?**

x_2	x_1	x_0	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

¿$f(x_2,x_1,x_0)$?