Teoría de números. Ejercicios

Números enteros. Números primos. Divisibilidad

1. ¿Existen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tales que cumplen?

   1.1 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ con $3x + 6y + 9z = 1000$

   1.2 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ con $6x + 9y + 15z = 107$

   1.3 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ con $5x + 10y + 20z = 1003$

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ trś números enteros positivos.

   2.1 Busca los valores de a, b y c que cumplan la condición: $31 \mid (5a + 7b + 11c)$

   2.2 Sabiendo que a, b y c cumplen $31 \mid (5a + 7b + 11c)$ demuestra que se cumplen:

   - $31 \mid (21a + 17b + 9c)$
   - $31 \mid (6a + 27b + 7c)$

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Si $b \mid a$ y $b \mid (a + 2)$, demuestra que $b = 1$ o $b = 2$.

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y ambos impares. Demuestra que $a^2 + b^2$ es últiplo de 2 pero no de cuatro, es decir, $2 \mid (a^2 + b^2)$ pero $4 \nmid (a^2 + b^2)$.

5. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ entero y positivo.

   5.1 Demuestra que si $n \geq 2$ es compuesto, entonces existe algún p primo tal que $p \mid n$ y $p \leq \sqrt[2]{n}$.

   5.2 Utilizando lo demostrado en el anterior ejercicio analiza si los siguientes números son primos: $n = 811$, $n = 467$, $n = 911$.

6. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, y tomemos la representación en base 10 del número r

$$r = r_0 + r_1 10 + \cdots + r_{n-1} 10^{n-1} + r_n 10^n$$

   donde $0 \leq r_i \leq 9$ para $1 \leq i \leq n - 1$ y donde $0 < r_n \leq 9$. Demuestra, utilizando las propiedades de divisibilidad $9 \mid r$ si y solo si $9 \mid r_n + r_{n-1} + \cdots + r_0$.

7. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$,y tomemos su representación en base 10 :

$$n = r_k 10^k + r_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + r_1 10 + r_0$$

   Demuestra, utilizando las propiedades de divisibilidad, las siguientes afirmaciones:

   7.1 $2 \mid n$ si y solo si $2 \mid r_0$.

   7.2 $4 \mid n$ si y solo si $4 \mid (r_1 10 + r_0)$.

División de Euclides. Máximo común divisor

8. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, si $a + b = 60$ y si $\mathrm{mcd}(a, b) = 12$, calcula los números a y b. Otro tanto para el caso $a + b = 75$.

9. Para cada par $a, b \in \mathbb{Z}^+$ calcula con el algoritmo de Euclides $\mathrm{mcd}(a, b)$. Y represéntalo como combinación lineal de a y b. Determina si a y b son primos relativos.

    9.1 $a = 231, b = 1820$; 9.2 $a = 1369, b = 2597$;

    9.3 $a = 2689, b = 4001$; 9.4 $a = 7982, b = 7983$;

    9.5 $a = 102, b = 28$.

10. Mediante el algoritmo de Euclides calcula $\mathrm{mcd}(-187, 154)$.

11. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, con a y b primos relativos, es decir, $zkh(a, b) = 1$.

    11.1 Demuestra que si $a \mid bc$, entonces se cumple $a \mid c$.

    11.2 Si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$, ¿Puedes demostrar lo mismo?

12. Sean $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, con $d = \mathrm{mcd}(a, b)$. Demuestra que $\mathrm{mcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.

13. Si a y b son números primos relativos, demuestra que se cumple una de las dos siguientes condiciones, o bien $\mathrm{mcd}(a - b, a + b) = 1$ o bien $\mathrm{mcd}(a - b, a + b) = 2$.

14. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, calcula $\mathrm{mcd}(n, n + 1)$ y $\mathrm{mcm}(n, n + 1)$.

15. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$.

    15.1 Supongamos que a y b son números primos relativos. Demuestra que si c es múltiplo común de a y de b, entonces también lo es de ab, es decir, $a \mid c$ y $b \mid c$ entonces $ab \mid c$.

    15.2 Si $\mathrm{mcd}(a, b) \neq 1$, con $a \mid c$ y $b \mid c$, ¿ Es posible llegar a la conclusión de que $ab \mid c$?

16. Calcula $\mathrm{mcm}(500, 120)$ utilizando el teorema fundamental de la aritmética, (descomponiendo en multiplicación de números primos).

17. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Demuestra que si $d = a + bc$, entonces $\mathrm{mcd}(b, d) = \mathrm{mcd}(a, b)$.

18. Sean $a, b, k \in \mathbb{Z}^+$. Demuesra que $\mathrm{mcd}(ka, kb) = k\ zkh(a, b)$.

19. Sean $a, b \in \mathbb{Z}^+$ enteros positivos.

    19.1 Si $p \in \mathbb{Z}^+$ es primo, demuestra que:

    $$p \mid ab \quad \text{bada,} \quad p \mid a \text{ edo } p \mid b.$$

    19.2 Si $p \in \mathbb{Z}^+$ no es primo, ¿Se puede llegar a la misma conclusión? Si no es así busca un contraejemplo.