Teoría de Grafos

Matemática Discreta

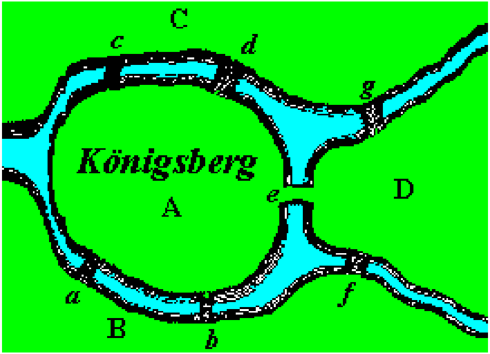
UPV/EHU

Introducción

La Teoría de Grafos tiene su inicio en un artículo publicado por Euler en 1736 sobre el Problema de los siete puentes de Königsberg:

La ciudad de Königsberg está atravesada por un río que la divide en 4 zonas comunicadas por 7 puentes.

El Problema consiste en encontrar la forma de recorrer la ciudad cruzando cada puente exactamente una vez y regresando al punto de partida.



Introducción

A partir de este problema, Euler desarrolló algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de grafos.
El objetivo de esta teoría es modelizar situaciones en las que hay una cantidad discreta de objetos y éstos están relacionados entre sí.
Por ejemplo, en el problema de los puentes tenemos las 4 zonas de la ciudad que están relacionadas por los 7 puentes.

Se pueden encontrar muchas aplicaciones de la teoría de grafos en Informática: representación de datos, diseño de redes, diseño de circuitos integrados, gráficos por ordenador, redes neuronales etc.

Definiciones

Definición

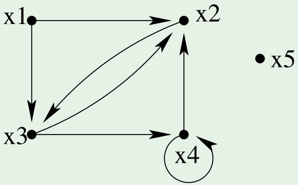
Un grafo dirigido *o* digrafo *(sobre V) es un par (V, E), donde V es conjunto finito no vacío y $E \subseteq V \times V$.*

Los elementos de V se llaman vértices *o* nodos *y los de E se llaman* aristas.

Ejemplo

$$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\},$$

$$E = \{(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_3, x_2), (x_3, x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_4)\}.$$



Definiciones

Definición

Dada una arista (a, b)*, diremos que:*

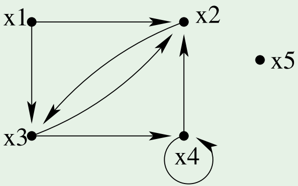
- *la arista es* incidente *con los vértices* a *y* b*.*
- a *es* adyacente hacia b*.*
- b *es* adyacente desde a*.*
- a *es* origen *o* fuente *de la arista.*
- b *es* término *o* vértice terminal *de la arista.*

Si $a = b$*, la arista* (a, a) *se llama* lazo*.*

Un vértice aislado *es un vértice que no tiene aristas incidentes.*

Definiciones

Ejemplo



La arista (x_3, x_4) es incidente con los vértices x_3 y x_4.
El vértice x_3 es origen y el vértice x_4 es término de la arista (x_3, x_4).
El vértice x_3 es adyacente hacia el vértice x_4 y el vértice x_4 es adyacente desde el vértice x_3.
La arista (x_4, x_4) es un lazo.
El vértice x_5 es aislado.

Definiciones

Definición

Cuando no importa la dirección de las aristas, es decir, cuando

$$(a, b) \in E \Rightarrow (b, a) \in E,$$

el grafo $G = (V, E)$ *se llama* grafo no dirigido.

En un grafo no dirigido hay aristas no dirigidas*:*

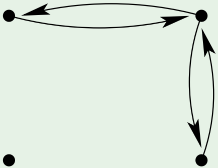
$$\{a, b\} = \{(a, b), (b, a)\}.$$

Si $a = b$, *tendremos un* lazo*:* $\{a, a\} = (a, a)$

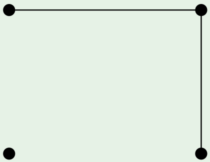
Si no se especifica si un grafo G es dirigido o no, supondremos que es no dirigido.

Definiciones

Ejemplo



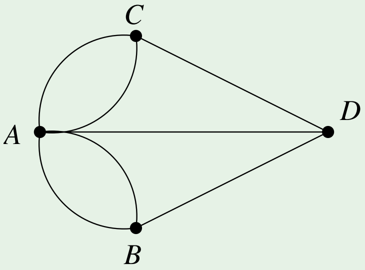
Grafo no dirigido sin lazos con 2 aristas no dirigidas.
Podemos representar cada arista no dirigida por una línea:



Definiciones

Ejemplo

El problema de los puentes de Königsberg puede representarse mediante el siguiente grafo no dirigido. Los vértices representan las zonas de la ciudad y las aristas no dirigidas representan los puentes.



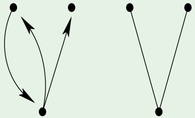
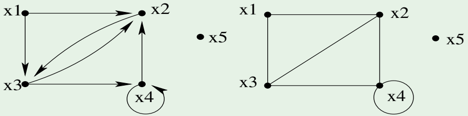
Este grafo tiene 7 aristas no dirigidas:
$\{A, B\}$, $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, D\}$ y $\{C, D\}$

Definiciones

Definición

Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, el grafo no dirigido asociado *es el grafo obtenido de G sin tener en cuenta la dirección de las aristas.*
Si se obtiene más de una arista no dirigida incidente con un par de vértices distintos de G, entonces sólo una de estas aristas se dibuja en el grafo no dirigido asociado.

Ejemplos

- 
- 

Definiciones

Definición

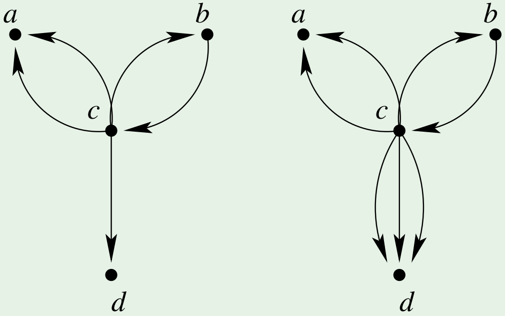
Un grafo $G = (V, E)$ *es un* multigrafo *si existen* $a, b \in V$ *con dos o más aristas de la forma:*

- (a, b) *para un grafo dirigido.*
- $\{a, b\}$ *para un grafo no dirigido.*

El número de aristas de la forma (a, b) $(\{a, b\})$ *se llama* multiplicidad *de la arista* (a, b) $(\{a, b\})$.
G *es un* k-grafo *si ninguna de sus aristas tiene multiplicidad mayor que* k.
Un grafo es simple *si no es multigrafo. Es decir, si todas sus aristas tienen multiplicidad* 1.

Definiciones

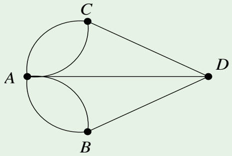
Ejemplo



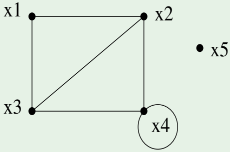
El primero es un 2-grafo dirigido y el segundo, un 3-grafo dirigido.

Definiciones

Ejemplos

- 

  2-grafo no dirigido.

- 

  Grafo simple.

Grados de los vértices

Definición

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **dirigido** *y sea* $a \in V$.

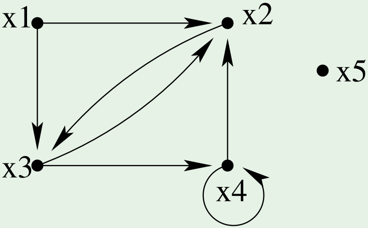
- *El* grado de salida *de* a *es el número de aristas que salen de* a. *Se denota con* $d^+(a) = \#\{b \mid (a, b) \in E\}$.
- *El* grado de entrada *de* a *es el número de aristas que llegan a* a. *Se denota con* $d^-(a) = \#\{b \mid (b, a) \in E\}$.

$d^+(a)$ *y* $d^-(a)$ *se llaman* semigrados *de* a *y llamaremos* grado *de* a *a la suma de los semigrados de* a.
Se denota con $d(a)$,

$$d(a) = d^+(a) + d^-(a).$$

Grados de los vértices

Ejemplo



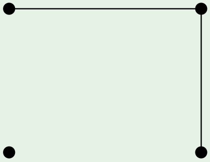
$$d^+(x_2) = 1, \quad d^-(x_2) = 3, \quad d(x_2) = 4.$$

Grados de los vértices

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo **no dirigido** *y sea $a \in V$.*
El grado *de a es el número de aristas incidentes con a.*
Se denota con $d(a)$.
En este caso, un lazo $\{a, a\}$ se considera como 2 aristas incidentes con a.
Un vértice a se llama vértice pendiente *o* colgante *si $d(a) = 1$.*

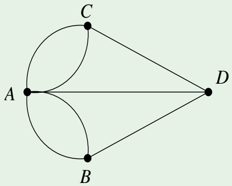
Ejemplo



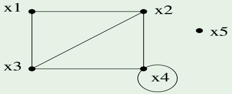
Dos vértices pendientes y un vértice de grado 2.

Grados de los vértices

Ejemplos

- 

  $d(A) = 5, \quad d(B) = d(C) = d(D) = 3$. No hay vértices pendientes.

- 

  $d(x_1) = 2, \quad d(x_2) = d(x_3) = 3, \quad d(x_4) = 4, \quad d(x_5) = 0$. No hay vértices pendientes.

Grados de los vértices

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido** *con* m *aristas. Entonces la suma de los grados de todos los vértices es el doble del número de aristas. Es decir,*

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2m.$$

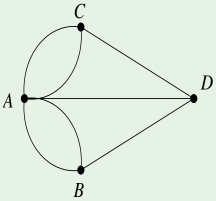
Idea de la demostración: cada arista $\{a, b\}$ contribuye con una unidad a $d(a)$ y otra a $d(b)$, y, por tanto, con dos unidades a $\sum_{x \in V} d(x)$.

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido***. Entonces el número de vértices de grado impar es par.*

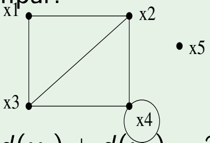
Grados de los vértices

Ejemplos

- 

  $n = 4, m = 7,\ d(A) + d(B) + d(C) + d(D) = 5 + 3 + 3 + 3 = 2 \cdot 7.$

- Hay 4 vértices de grado impar.

  $d(x_1) + d(x_2) + d(x_3) + d(x_4) + d(x_5) = 2 + 3 + 3 + 4 + 0 = 2 \cdot 6.$

  Hay 2 vértices de grado impar.

Grados de los vértices

Demostración del Corolario

Sea $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y supongamos que hay p vértices de grado par y q vértices de grado impar ($p + q = n$).

$$\begin{array}{ll} x_1, \ldots, x_p \text{ gr. par} & d(x_i) = 2k_i,\ i = 1, \ldots, p; \\ x_{p+1}, \ldots, x_{p+q} \text{ gr. impar} & d(x_i) = 2k_i + 1,\ i = p+1, \ldots, p+q. \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} 2m = \sum_{x \in V} d(x) &= \sum_{i=1}^{p} d(x_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} d(x_i) \\ = \sum_{i=1}^{p} (2k_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} (2k_i + 1) &= 2 \sum_{i=1}^{p+q} k_i + q. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$q = 2 \left(m - \sum_{i=1}^{p+q} k_i \right).$$

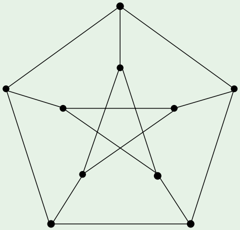
□

Grados de los vértices

Definición

Un grafo **no dirigido** *se llama* regular *si todos los vértices tienen el mismo grado*
y se llama k-regular *si todos los vértices son de grado* k.

Ejemplo



3-regular

Paseos en un grafo

Definición

Dado $G = (V, E)$ un grafo **no dirigido***, sean $x, y \in V$ dos vértices (no necesariamente distintos).*
Un paseo $x - y$ *en G es una sucesión alternada finita*

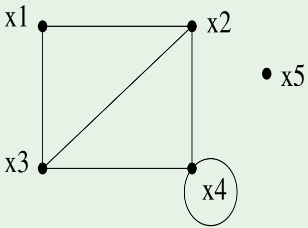
$$x = x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, e_3, \cdots, e_{p-1}, x_{p-1}, e_p, x_p = y$$

de vértices y aristas de G, que comienza en el vértice x y termina en el vértice y, y que contiene las p aristas $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$, $i = 1, \cdots, p$.
Se llama longitud *del paseo al número de aristas (p).*
Si $p = 0$, entonces $x = y$ y el paseo se llama trivial.
Si $x = y$ y $p \geq 1$, el paseo se llama cerrado. *En caso contrario, se llama paseo* abierto.

Observación. Cuando el grafo sea simple, no hace falta especificar las aristas.

Paseos en un grafo

Ejemplo



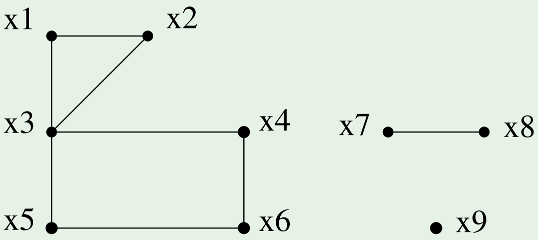
x_1, x_3, x_2 representa el paseo abierto $x_1 - x_2$ de longitud 2:

$$x_1, \{x_1, x_3\}, x_3, \{x_3, x_2\}, x_2.$$

$x_1, x_3, x_2, x_4, x_3, x_2, x_1$
es un paseo cerrado de longitud 6.

Paseos en un grafo

Ejemplo



x_1, x_3, x_5 paseo abierto de longitud 2:

$$x_1, \{x_1, x_3\}, x_3, \{x_3, x_5\}, x_5.$$

x_1, x_2, x_3, x_1
paseo cerrado de longitud 3.

Paseos en un grafo: recorrido (circuito), camino (ciclo)

Definición

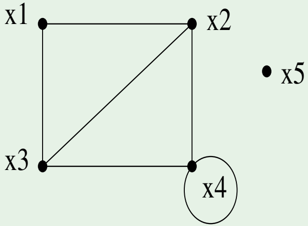
Dado un paseo $x - y$ en un grafo **no dirigido** $G = (V, E)$,

- *Si no se repite ninguna arista, entonces el paseo es un* recorrido $x - y$*.* *Un recorrido $x - x$ cerrado es un* circuito*.*
- *Si no se repite ningún vértice, entonces el paseo es un* camino $x - y$*.* *Un camino $x - x$ cerrado es un* ciclo*.*

Convenio. En circuitos supondremos siempre la existencia de al menos una arista.
Cuando existe sólo una arista, entonces el circuito es un lazo.
En ciclos supondremos siempre la existencia de al menos tres aristas distintas.

Paseos, recorridos y caminos en un grafo

Ejemplo



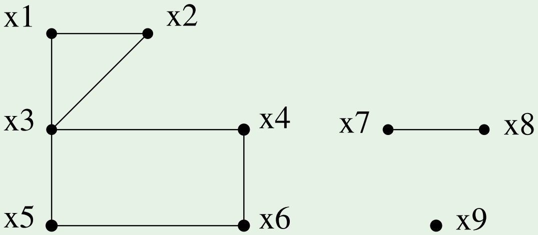
x_1, x_2, x_3
recorrido, camino.

x_1, x_3, x_2, x_4, x_3
recorrido, no camino.

x_1, x_2, x_3, x_1
circuito, ciclo.

Paseos, recorridos y caminos en un grafo

Ejemplo



x_1, x_2, x_3, x_5, x_6
recorrido, camino.

$x_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5$
recorrido, no camino.

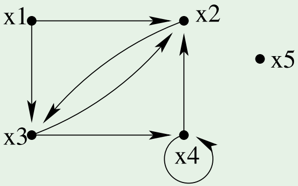
$x_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5, x_3$
circuito, no ciclo.

x_3, x_1, x_2, x_3
ciclo.

Paseos, recorridos y caminos en un grafo

Para grafos **dirigidos** usaremos el adjetivo *dirigido*:
paseos dirigidos, *caminos dirigidos*, *ciclos dirigidos*, etc.

Ejemplo



x_1, x_2, x_3, x_2
recorrido (no camino) dirigido.

x_3, x_4, x_2, x_3
ciclo dirigido.

Paseos y caminos en un grafo

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido** *y sean* $x, y \in V$, $x \neq y$.

existe un paseo $x - y$ *si y sólo si existe un camino* $x - y$.

Demostración

Sólo si: Supongamos que existe un paseo $x - y$.
Entre todos los paseos $x - y$, seleccionamos el de longitud menor:

$$x = x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k = y$$

Si este paseo no es un camino entonces existen vértices repetidos: existen p, q tales que $0 \leq p < q \leq k$ y $x_p = x_q$.
Pero, entonces

$$x = x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}, x_q, x_{q+1}, \cdots, x_k = y$$

es un paseo $x - y$ de longitud menor que k.
Si:
Inmediato, ya que un camino es un paseo.

$\square$

Conectividad en un grafo

Definición

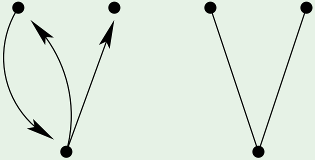
Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido**. *Decimos que* G *es* conexo *si para dos vértices distintos cualesquiera* x *e* y *de* G *existe un paseo* $x - y$.
(Por el Teorema anterior esto es equivalente a decir que para dos vértices distintos cualesquiera x *e* y *de* G *existe un camino* $x - y$.*)*

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **dirigido**. *Decimos que* G *es* conexo *si el grafo no dirigido asociado es conexo.*

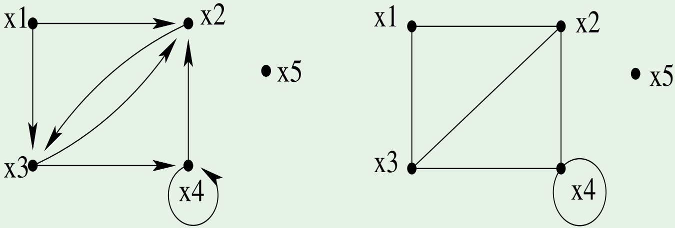
Un grafo que no es conexo se dice disconexo.

Conectividad en un grafo

Ejemplos

- 

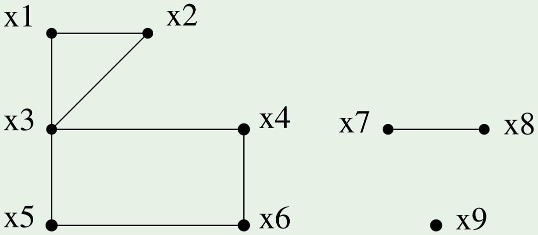
Conexos.

- 

Disconexos.

Conectividad en un grafo

Ejemplo



Disconexo

Conectividad en un grafo

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo **no dirigido**.
La relación

$$x\mathcal{R}y \ \text{ si y sólo si existe un paseo } \ x - y$$

es una relación de equivalencia en V.

Demostración

- $\mathcal{R}$ reflexiva: ¿$(\forall x \in V) \quad x\mathcal{R}x$?
  Sea $x \in V$. Existe el paseo trivial $x - x$. Luego $x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ simétrica: ¿$(\forall x, y \in V) \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$?
  Sean $x, y \in V$,

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow \ \text{existe un paseo } x = x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}, x_p = y \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \text{existe un paseo } y = x_p, x_{p-1}, \cdots, x_1, x_0 = x \Rightarrow y\mathcal{R}x.$$

Conectividad en un grafo

- $\mathcal{R}$ transitiva: ¿$(\forall x, y, z \in V) \quad x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$?
  Sean $x, y, z \in V$,

  $$\begin{array}{l} x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ existen paseos } x = x_0, \cdots, x_p = y \;\wedge\; y = y_0, \cdots, y_q = z \Rightarrow \\ \Rightarrow \text{ existe un paseo } x = x_0, \cdots, x_p = y = y_0, y_1, \cdots, y_q = z \Rightarrow \\ \Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{array}$$

$\square$

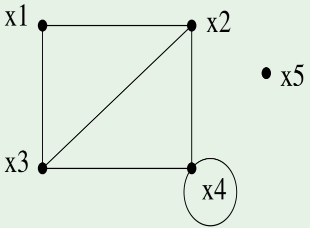
Definición

Sean $V_1, \cdots, V_q$ las clases de equivalencia para la relación definida en el Teorema anterior.
Llamaremos componentes conexas *de G a los grafos $G_1 = (V_1, E_1), \cdots, G_q = (V_q, E_q)$, donde, para $i = 1, \cdots, q$, E_i es el conjunto de aristas incidentes con los vértices de V_i.*
El número de componentes de G lo denotaremos por $\kappa(G)$.

Consecuencia. G es conexo si y sólo si $\kappa(G) = 1$.

Conectividad en un grafo

Ejemplo



$$\kappa(G) = 2, \quad G_1 = (V_1, E_1), \quad G_2 = (V_2, E_2),$$

donde

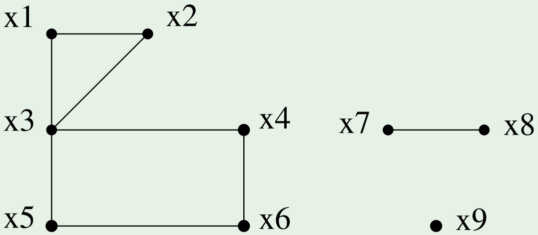
$$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad V_2 = \{x_5\};$$

$$E_1 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_2, x_4\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_4\}\},$$

$$E_2 = \emptyset.$$

Conectividad en un grafo

Ejemplo



$$\kappa(G) = 3, \quad G_1 = (V_1, E_1), \quad G_2 = (V_2, E_2), \quad G_3 = (V_3, E_3)$$

$$V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \quad V_2 = \{x_7, x_8\}, \quad V_3 = \{x_9\};$$

$$E_1 = \begin{array}{l} \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_6\}, \\ \{x_5, x_6\}\}, \end{array},$$

$$E_2 = \{\{x_7, x_8\}\}, \quad E_3 = \emptyset.$$

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Definición

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple no dirigido sin lazos con* n *vértices, donde* $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
Llamaremos matriz de adyacencia *asociada a* G *a la matriz* $A = (a_{ij})$ *de dimensiones* $n \times n$*, donde*

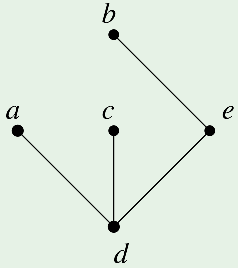
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i, x_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si } x_i, x_j \text{ no son adyacentes} \end{cases}.$$

La matriz A es simétrica, con todos los elementos de la diagonal principal iguales a 0.
Contiene toda la información sobre la estructura del grafo G y puede usarse para representar a G.
Para cada vértice $x_i \in V$,

$$d(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}.$$

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Ejemplo



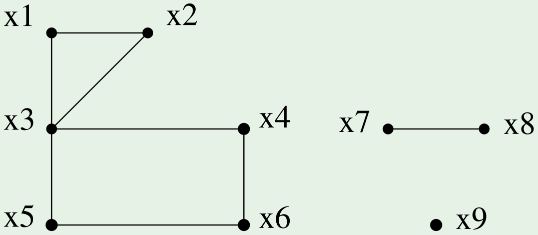
Tomando los vértices en orden alfabético:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La suma de los elementos de la quinta fila o columna es 2, $d(e) = 2$.

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Ejemplo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido sin lazos, con el conjunto de vértices $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$; y sea A la matriz de adyacencia asociada a G. Entonces el elemento (i, j) de la matriz A^p es el número de paseos $x_i - x_j$ de longitud p.

Demostración

Por **inducción** sobre p.
Si $p = 1$, entonces $A^p = A$.
El número de paseos $x_i - x_j$ de longitud 1 es

$$\begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E \end{cases} ;$$

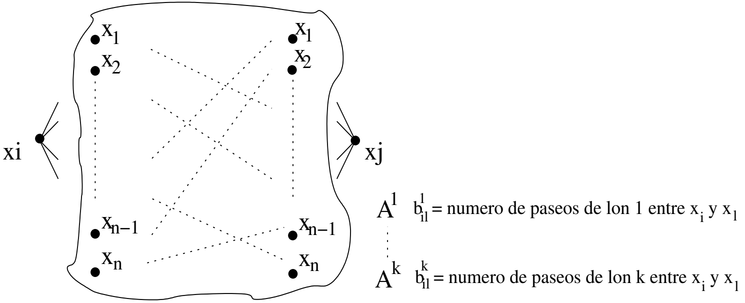
es decir, el elemento (i, j) de la matriz A.
Supongamos que el Teorema es cierto para $p = k$,
es decir, que el elemento (i, j) de la matriz A^k es el número de paseos $x_i - x_j$ de longitud k,
y veamos que se cumple para $p = k + 1$.

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Debemos probar que el elemento (i, j) de la matriz A^{k+1} es el número de paseos $x_i - x_j$ de longitud $k + 1$.
Sean $A^k = (b_{ij})$ y $A^{k+1} = (c_{ij})$.
Teniendo en cuenta que $A^{k+1} = A^k A$, se tiene que

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} b_{il} a_{lj}.$$

Cada paseo $x_i - x_j$ de longitud $k + 1$ consiste en un paseo $x_i - x_l$ de longitud k seguido de la arista (x_l, x_j), donde x_l es cualquier vértice ($l \in \{1, \cdots, n\}$).



Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Tenemos que b_{il}^k (el elemento i, j de la matriz A^k) nos da la cantidad de diferentes paseos de longitud k entre x_i y x_l. Si quiero llegar a x_j mediante un paseo de longitud $k+1$, el vértice previo a x_j será cualquiera de los posibles vértices del grafo, y desde esos vértices tendré que pasar en un único paso a x_j.

- Si $(x_l, x_j) \in E$, entonces $a_{lj} = 1$ y el número de paseos $x_i - x_j$ de longitud $k+1$ de la forma $x_i = y_0, y_1, \cdots, y_k = x_l, y_{k+1} = x_j$ es igual que el número de paseos $x_i - x_l$ de longitud k, es decir, $b_{il}a_{lj}$ es el número de paseos de longitud $k+1$ que se pueden hacer entre x_i y x_j de forma que el vértice previo a x_j sea x_l.
- Si $(x_l, x_j) \notin E$, entonces $a_{lj} = 0$ y el número de paseos $x_i - x_j$ de longitud $k+1$ de la forma $x_i = y_0, y_1, \cdots, y_k = x_l, y_{k+1} = x_j$ es $0 = b_{il}a_{lj}$.

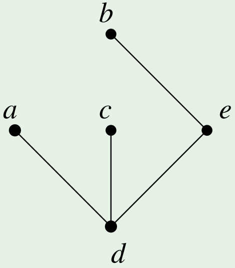
Por tanto, el número total de paseos $x_i - x_j$ de longitud $k+1$ es

$$\sum_{l=1}^{n} b_{il}a_{lj} = c_{ij}.$$

$\square$

Matriz de adyacencia asociada a un grafo

Ejemplo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

No hay paseos $a - c$ de longitud 3.
Hay cuatro paseos $d - e$ de longitud 3:

$$d, a, d, e; \quad d, c, d, e; \quad d, e, d, e; \quad \text{y} \quad d, e, b, e.$$

Subgrafos

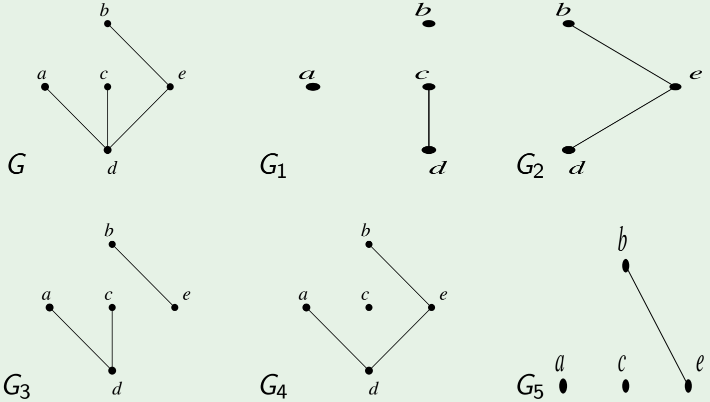
Definición

Sea $G = (V, E)$ *un grafo (dirigido o no).*
Diremos que $G_1 = (V_1, E_1)$ *es un* **subgrafo** *de* G *si:*

- $\emptyset \neq V_1 \subseteq V$;
- $E_1 \subseteq E$
  (cada arista de E_1 *es incidente con los vértices de* V_1*).*

Subgrafos.

Ejemplo



Subgrafo generador

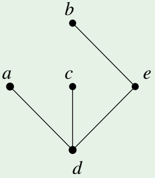
Definición

Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ *un subgrafo de* $G = (V, E)$*.*
Si $V_1 = V$ *diremos que* G_1 *es un* **subgrafo generador** *de* G*.*

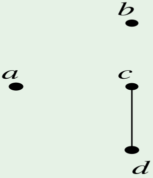
Por cada subconjunto de aristas obtenemos un subgrafo generador.
Por tanto, si G tiene m aristas entonces el número de subgrafos generadores es 2^m (número de subconjuntos de un conjunto de m elementos).

Subgrafo generador

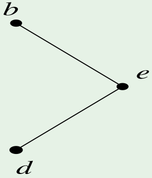
Ejemplo



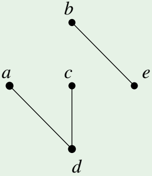
G



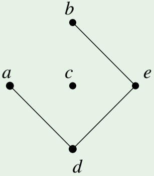
G_1



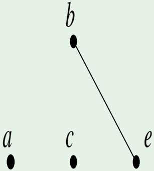
G_2



G_3



G_4



G_5

G_3 y G_4 subgrafos generadores de G.

G_1, G_2 y G_5 no son generadores de G.

G tiene $2^4 = 16$ subgrafos generadores.

Subgrafo inducido

Definición

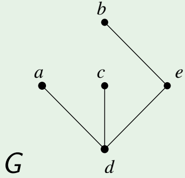
Sea $G = (V, E)$ *un grafo (dirigido o no), y* $\emptyset \neq U \subset V$.
Llamaremos **subgrafo de** G **inducido por** U *al subgrafo de* G *cuyo*

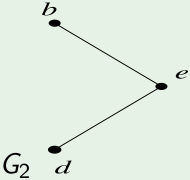
- *conjunto de vértices es* U;
- *conjunto de aristas es* $E \cap (U \times U)$
  (las aristas de E *incidentes con los vértices de* U*).*

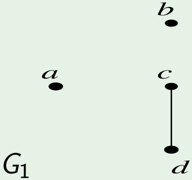
Denotaremos este subgrafo con $< U >$.

Subgrafo inducido

Ejemplo







$G_2 = \langle\{b, d, e\}\rangle$ $\qquad$ $G_1 \neq \langle\{a, b, c, d\}\rangle$ (falta arista $\{a, d\}$)

Subgrafos $G - v$ y $G - e$

Otro tipo especial de subgrafo se obtiene al eliminar un vértice o una arista:

Definición

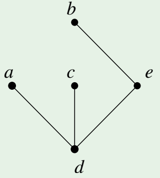
Sea $G = (V, E)$ un grafo (dirigido o no).

- *Dado $x \in V$, denotamos con $G - x$ el subgrafo $G - x = (V_1, E_1)$ tal que*
  - $V_1 = V \setminus \{x\}$;
  - *E_1 está formado por todas las aristas de E excepto las incidentes con el vértice x.*

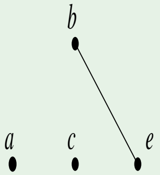
  (Por tanto, $G - x$ es el subgrafo inducido por V_1).
- *Dado $e \in E$, denotamos con $G - e$ el subgrafo $G - e = (V_1, E_1)$ tal que*
  - $V_1 = V$;
  - $E_1 = E \setminus \{e\}$.

Subgrafos $G - v$ y $G - e$

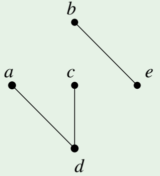
Ejemplo



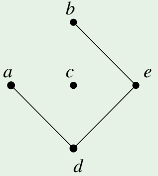
G



$G_5 = G - d$



$G_3 = G - \{d, e\}$



$G_4 = G - \{c, d\}$

Grafo completo: K_n

Para definir el complementario de un grafo necesitamos el concepto de grafo completo:

Definición

Sea $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto de n vértices.
El **grafo completo** *sobre V es un grafo simple no dirigido sin lazos tal que*

$$(\forall x, y \in V) \quad x \neq y \implies \text{ existe la arista } \{x, y\}.$$

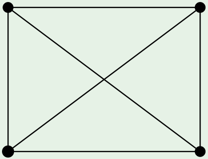
Denotaremos este grafo con K_n.

K_n tiene

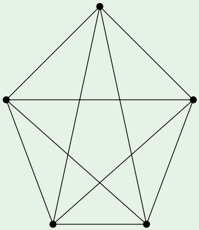
- n vértices,
- $\binom{n}{2}$ aristas,
- el grado de cada vértice es $n - 1$.

Grafo completo: K_n

Ejemplos



K_4



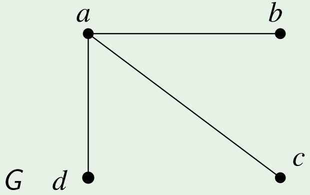
K_5

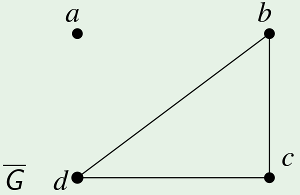
Grafo complementario $\overline{G}$

Definición

Sea $G = (V, E)$ *un grafo simple no dirigido sin lazos con* n *vértices,* $V = \{x_1, \cdots, x_n\}$.
El **complementario** *de* G, *denotado con* $\overline{G}$, *es el subgrafo de* K_n, $\overline{G} = (V, \overline{E})$, *donde* $\overline{E}$ *está formado por todas las aristas de* K_n *que no están en* E.
Si $G = K_n$ *entonces* $\overline{G}$ *es un grafo con* n *vértices y* 0 *aristas. Se llama grafo* nulo.

Ejemplo





Grafo bipartito

Definición

Diremos que $G = (V, E)$ *es un grafo* **bipartito** *si es un grafo simple no dirigido sin lazos y*

- *existen* V_1, V_2 *tales que* $V_1 \cup V_2 = V$*,* $V_1 \cap V_2 = \emptyset$*;*
- *cada arista de* G *es* $\{x, y\}$*, con* $x \in V_1$ *e* $y \in V_2$*.*

Si además se cumple que

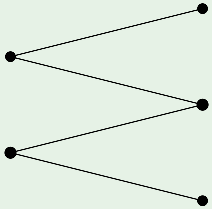
$$(\forall x \in V_1,\ \forall y \in V_2) \text{ existe una arista } \{x, y\},$$

entonces diremos que G *es un grafo* bipartito completo.
Si V_1 *tiene* n_1 *vértices y* V_2 *tiene* n_2 *vértices, este grafo se denota con* K_{n_1, n_2}*.*

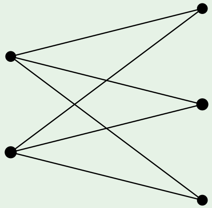
Grafo bipartito

Ejemplos

- Bipartito (no completo):



- Grafo bipartito completo $K_{2,3}$:



Isomorfismo de grafos

Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$ *dos grafos no dirigidos.*
Una función $f : V_1 \longrightarrow V_2$ *es un* isomorfismo *de grafos si*

- f *es biyectiva;*
- $(\forall x, y \in V_1) \quad \{x, y\} \in E_1$ *si y sólo si* $\{f(x), f(y)\} \in E_2$.

Si existe tal función se dice que G_1 *y* G_2 *son* isomorfos *y se denota*

$$G_1 \cong G_2.$$

La relación de isomorfía es una relación de equivalencia en el conjunto de grafos.

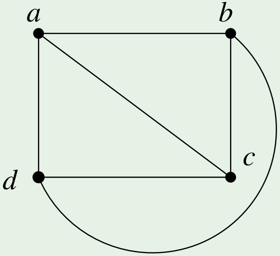
Isomorfismo de grafos

Si G_1 y G_2 son isomorfos entonces son esencialmente iguales.
Se diferencian en el nombre de los vértices o en la forma de representarlos.

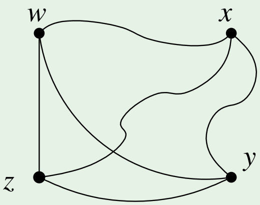
- tienen el mismo número de vértices;
- tienen el mismo número de aristas;
- tiene el mismo número de vértices con los mismos grados;
- tienen el mismo número de ciclos;
- etc.

Isomorfismo de grafos

Ejemplo



$G_1 = (V_1, E_1)$



$G_2 = (V_2, E_2)$

La función $f : V_1 \longrightarrow V_2$ definida por

$$f(a) = w, \quad f(b) = x, \quad f(c) = y, \quad f(d) = z,$$

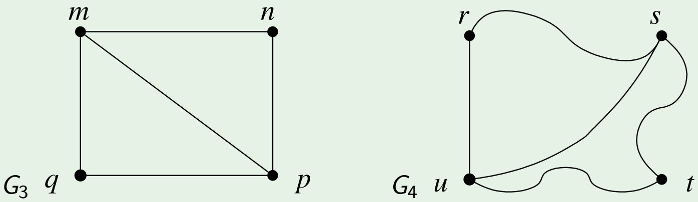
es un isomorfismo.

Cualquier función biyectiva entre V_1 y V_2 es un isomorfismo, ya que ambos grafos son completos.

$$G_1 \cong G_2 \cong K_4.$$

Isomorfismo de grafos

Ejemplo



La función g definida por

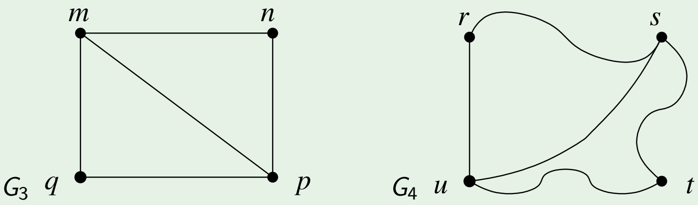
$$g(m) = r, \quad g(n) = s, \quad g(p) = t, \quad g(q) = u,$$

es biyectiva pero no es un isomorfismo, ya que $\{m, p\}$ es una arista de G_3, pero $\{g(m), g(p)\} = \{r, t\}$ no es una arista de G_4.
La función f definida por

$$f(m) = s, \quad f(n) = r, \quad f(p) = u, \quad f(q) = t,$$

es un isomorfismo.

Isomorfismo de grafos



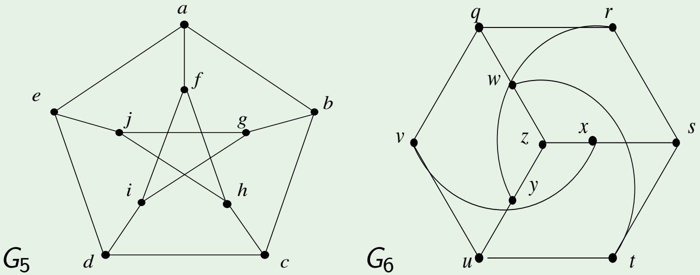
$$f(m) = s, \quad f(n) = r, \quad f(p) = u, \quad f(q) = t,$$

$$\begin{array}{c}
\{m, n\} \leftrightarrow \{f(m), f(n)\} = \{s, r\} \\
\{m, p\} \leftrightarrow \{f(m), f(p)\} = \{s, u\} \\
\{m, q\} \leftrightarrow \{f(m), f(q)\} = \{s, t\} \\
\{n, p\} \leftrightarrow \{f(n), f(p)\} = \{r, u\} \\
\{p, q\} \leftrightarrow \{f(p), f(q)\} = \{u, t\}
\end{array}$$

$$G_3 \cong G_4.$$

Isomorfismo de grafos

Ejemplo



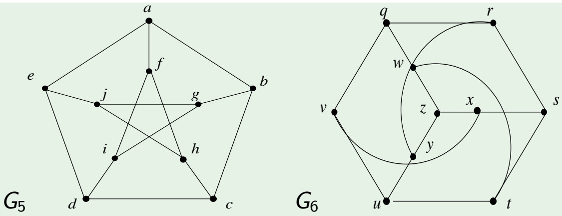
La función f definida por

$$f(a) = q, \quad f(b) = v, \quad f(c) = u, \quad f(d) = y, \quad f(e) = r,$$

$$f(f) = w, \quad f(g) = x, \quad f(h) = t, \quad f(i) = z, \quad f(j) = s,$$

es un isomorfismo.

Isomorfismo de grafos



Para encontrar el isomorfismo podemos seguir algunas pistas. Como un isomorfismo preserva adyacencias, preserva subestructuras, como caminos y ciclos.
En el grafo G_5 tenemos un ciclo de longitud 5:

$$a, f, i, d, e, a.$$

Hay que preservar esto al buscar el isomorfismo. En el grafo G_6 encontramos un ciclo de longitud 5 (hay otras posibilidades):

$$q, w, z, y, r, q.$$

En G_5 hay un camino que pasa por todos los vértices:

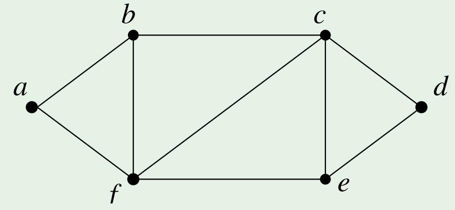
$$a, f, h, c, b, g, j, e, d, i.$$

Debe haber un camino correspondiente en el grafo G_6:

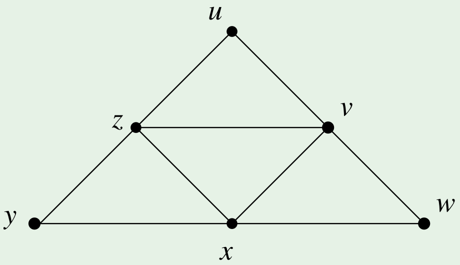
$$q, w, t, u, v, x, s, r, y, z.$$

Isomorfismo de grafos

Ejemplo



dos vértices
de grado 2



tres vértices
de grado 2

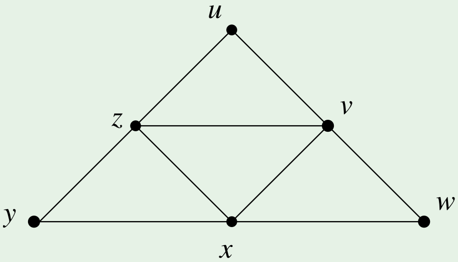
No son isomorfos.

Recorridos y circuitos eulerianos

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo **no dirigido** *sin vértices aislados.*
Llamaremos circuito euleriano *a un circuito que recorre cada arista de G exactamente una vez.*
Llamaremos recorrido euleriano *a un recorrido abierto que recorre cada arista de G exactamente una vez.*
Diremos que G es un grafo euleriano *si tiene un circuito euleriano.*

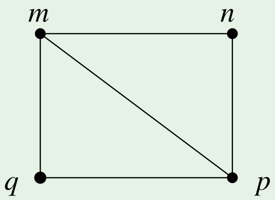
Ejemplo



Circuito euleriano: $u, v, z, x, v, w, x, y, z, u$.

Recorridos y circuitos eulerianos

Ejemplo



Recorrido euleriano:

$$m, n, p, m, q, p.$$

No es posible encontrar un circuito euleriano.
El grafo **no** es euleriano.

Recorridos y circuitos eulerianos

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido** *sin vértices aislados.*

$$G \text{ euleriano} \iff G \text{ conexo y todos los vértices de } G \text{ tienen grado par.}$$

Demostración

$\Rightarrow$: Supongamos que G es euleriano.

- ¿G es conexo?: como G no tiene vértices aislados, todos los vértices de V aparecerán al menos una vez en el circuito C.

  Dados dos vértices distintos cualesquiera $x, y \in V$, la parte del circuito C que empieza en x y acaba en y es un recorrido $x - y$.

- ¿Todos los vértices tienen grado par?: sea x un vértice cualquiera. Cada vez que el circuito C "llega" a x, "sale" de x por una arista diferente. Así, el circuito C pasa por dos aristas (nuevas) incidentes con x o por un lazo (nuevo) en x. En cada caso, cada vez que el circuito C pasa por x, se contribuye con dos unidades a $d(x)$. Por tanto, $d(x)$ es par.

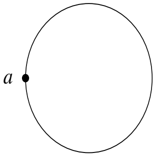
Recorridos y circuitos eulerianos

$\Leftarrow$: Supongamos que G es conexo y todo vértice tiene grado par.

$$¿G \text{ es euleriano?}$$

Inducción sobre el número de aristas m de G.

Si $m = 1$, entonces G es



y el circuito euleriano es inmediato.

Supongamos que cuando $m < p$ se puede construir un circuito euleriano.

Hay que demostrar que cuando $m = p$ también se puede construir un circuito euleriano.

Recorridos y circuitos eulerianos

Primero probaremos que, dado un vértice $x \in V$, existe un circuito C que contiene a x: Sea

$$x = y_0, f_1, y_1, \ldots, f_k, y_k$$

el recorrido más largo que comienza en x.
Veamos que para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x = y_i$.
Por reducción al absurdo:
Supongamos que para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x \neq y_i$.
Nos fijamos en el último vértice del recorrido: y_k

- Si $y_k = y_i$, para algún $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, el vértice y_k aparece en medio del recorrido y al final. Cada vez que aparece en medio del recorrido suma dos al grado y al final del recorrido suma uno al grado. Como por hipótesis todos los vértices del grafo son de grado par, en y_k debe incidir al menos otra arista que no se ha usado en el recorrido. Entonces podemos prolongar el recorrido, en contradicción con que el recorrido era el de mayor longitud.
- Si $y_k \neq y_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, el vértice y_k sólo aparece al final del recorrido. Como el grado de y_k es par y sólo hemos usado una arista incidente con y_k, debe haber al menos otra arista que no está en el recorrido. Eso querría decir, otra vez, que podríamos prolongar el recorrido (contradicción).

Recorridos y circuitos eulerianos

Queremos probar que, dado un vértice $x \in V$, existe un circuito que contiene a x.
Hemos probado que:si

$$x = y_0, f_1, y_1, \ldots, f_k, y_k$$

es el recorrido más largo que comienza en x, entonces para algún $i \in \{1, \ldots, k\}$, $x = y_i$.

Basta tomar:

$$x = y_0, f_1, \ldots, f_i, y_i = x.$$

Es un circuito que contiene a x.

Recorridos y circuitos eulerianos

Veamos ahora que G es euleriano.

Tomamos un vértice cualquiera $x \in V$.

Hemos probado que existe un circuito C que contiene a x.

Si en C están todas las aristas del grafo entonces es un circuito euleriano.
Si no están todas las aristas de G, eliminamos de G el circuito C y los vértices aislados que puedan quedar al eliminar C.
Obtenemos un grafo G' que podrá tener varias componentes conexas, $\{G_1, G_2, \ldots, G_l\}$.

Cada una de las componentes tiene un vértice común con C y es un grafo conexo con menos de p aristas y con todos los vértices de grado par.
Por hipótesis de inducción, para cada componente tendremos un circuito euleriano.

Recorridos y circuitos eulerianos

Para obtener el circuito euleriano de G empezaremos recorriendo C por cualquier vértice.

Al llegar a algún vértice común con alguna componente conexa, nos salimos de C y recorremos el circuito euleriano de la componente volviendo al vértice común.

En este vértice nos salimos de la componente y volvemos a C.

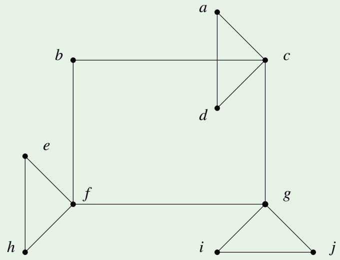
Después de pasar por todas las componentes volvemos a C y terminamos en el vértice que elegimos como inicial.

Este proceso tiene final porque el número de aristas es finito.

$\square$

Recorridos y circuitos eulerianos

Ejemplo



G

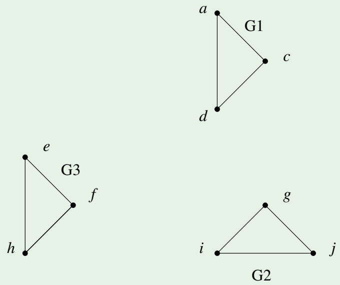
Elegimos un circuito:

$$C = bcgfb.$$

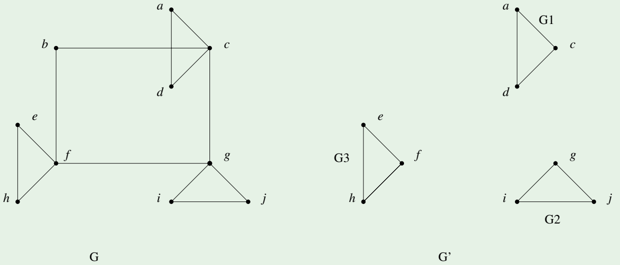
Quitamos a G las aristas de C y los vértices que queden aislados.

Recorridos y circuitos eulerianos

Obtenemos tres componentes conexas G_1, G_2 y G_3.



Recorridos y circuitos eulerianos

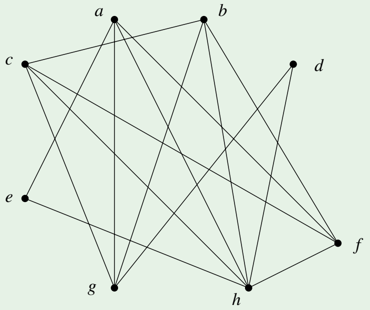


Para construir el circuito euleriano de G empezamos, por ejemplo, por b: bc. Al llegar a c entramos en la componente G_1 y recorremos el circuito de esta hasta volver a c: bcG_1c. Continuando así, obtenemos el circuito euleriano:

$$bcG_1cgG_2gfG_3fb = bc\underline{adc}g\,\underline{ijg}\,f\,\underline{ehf}\,b.$$

Recorridos y circuitos eulerianos

Ejemplo



G

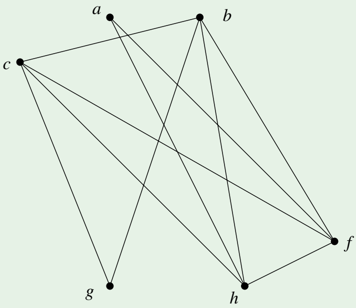
Elegimos, por ejemplo, un circuito que pase por los dos vértices de grado dos, d y e:

$$C = dheagd.$$

Quitamos a G las aristas de C y los vértices que quedan aislados.

Recorridos y circuitos eulerianos

Obtenemos



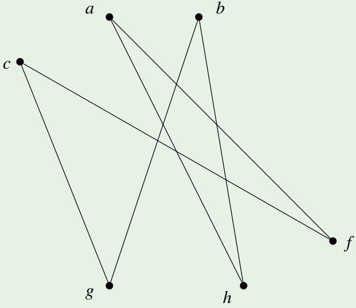
G'

En el grafo G' tomamos, por ejemplo, el circuito

$$C' = bchfb.$$

Quitamos a G' las aristas de C' y los vértices que quedan aislados.

Recorridos y circuitos eulerianos

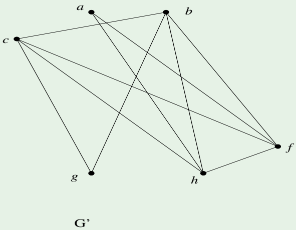


G''

En el grafo G'' todos los vértices son de grado dos y se puede encontrar fácilmente un circuito euleriano.
Por ejemplo:

$$E'' = afcgbha.$$

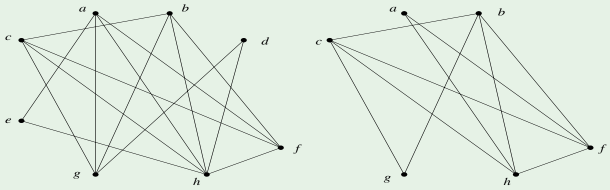
Recorridos y circuitos eulerianos



En G'' tenemos un circuito euleriano $E'' = afcgbha$.
En G' tenemos un circuito $C' = bchfb$.
Ahora buscamos un circuito euleriano en G'.
Tomamos un vértice cualquiera de C', por ejemplo, b.
Como b está en el grafo G'' entramos al grafo en ese mismo vértice y recorremos el circuito euleriano terminando en b.
Luego seguimos por el circuito C'.
Obtenemos un circuito euleriano en G':

$$E' = b\underline{hafcgb}chfb.$$

Recorridos y circuitos eulerianos



G **G'**

En G' tenemos un circuito euleriano $E' = bhafcgbchfb$.
En G tenemos un circuito $C = dheagd$.
Ahora buscamos un circuito euleriano en G.
Empezamos por cualquier vértice del circuito C, por ejemplo por d.
Seguimos por el circuito C hasta encontrar un vértice común con G', por ejemplo, h: $\quad dh$.
En h entramos en el grafo G'. Recorremos el circuito euleriano E' empezando por h: $\quad d\,\underline{hafcgbchfbh}$.
Nos salimos al circuito C en el vértice h y seguimos hasta terminar en d:

$$E = d\,h\underline{afcgb\underline{chfb}h}eagd.$$

Recorridos y circuitos eulerianos

Corolario

Sea $G = (V, E)$ *un grafo* **no dirigido** *sin vértices aislados.*

G tiene un recorrido (y no un circuito) euleriano $\Longleftrightarrow$ G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Demostración

$\underline{\Rightarrow}$: Supongamos que G tiene un recorrido (no circuito) euleriano $R : a - b$, con $a \neq b$.
Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{a, b\}$.
Entonces $R \cup \{a, b\}$ es un circuito euleriano en G'.
Aplicando el Teorema, en G' todos los vértices tienen grado par.
El grado de todos los vértices es igual en el grafo G y en el grafo G', excepto el de los vértices a y b, que aumenta en una unidad.
Es decir, si $d(x)$ es el grado de x en G y $d'(x)$ es el grado de x en G', entonces,

$$\begin{array}{ll} d(x) = d'(x) & \text{si } x \neq a, x \neq b, \\ d(a) = d'(a) - 1, & \\ d(b) = d'(b) - 1. & \end{array}$$

Por tanto, los únicos vértices de grado impar en G son a y b.

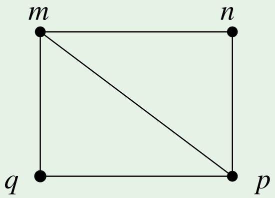
Recorridos y circuitos eulerianos

$\Leftarrow$: Supongamos que G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar $a \neq b$.
Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{a, b\}$.
G' es conexo y tiene todos los vértices de grado par.
Aplicando el Teorema, G' tiene un circuito euleriano C.
Eliminando la arista $\{a, b\}$ de C obtenemos un recorrido euleriano para G.
(Este recorrido comienza en uno de los vértices de grado impar y termina en el otro).

$\square$

Recorridos y circuitos eulerianos

Ejemplo



$$d(m) = d(p) = 3, \quad d(n) = d(q) = 2.$$

Recorrido euleriano:

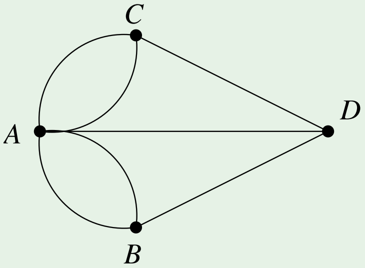
$$m, n, p, m, q, p.$$

Comienza en un vértice de grado impar y termina en el otro.

Recorridos y circuitos eulerianos

Ejemplo

En el grafo de los puentes de Königsberg



$$d(A) = 5, d(B) = d(C) = d(D) = 3.$$

No es posible encontrar ni un recorrido ni un circuito euleriano.
Los vértices representan las zonas de la ciudad y las aristas representan los puentes.
Luego no es posible recorrer la ciudad cruzando cada puente exactamente una vez.

Recorridos y circuitos eulerianos

Podemos extender los conceptos y resultados anteriores a grafos **dirigidos**.

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo **dirigido** *sin vértices aislados.*
Llamaremos circuito euleriano *a un circuito dirigido que recorre cada arista de G exactamente una vez.*

Teorema

Sea $G = (V, E)$ un grafo **dirigido** *sin vértices aislados.*

$$G \text{ tiene un circuito euleriano dirigido} \iff G \text{ es conexo y, para cualquier vértice } x \in V,\ d^+(x) = d^-(x).$$

Caminos y ciclos hamiltonianos

Definición

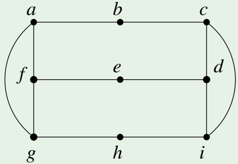
Sea $G = (V, E)$ un grafo **no dirigido** *con $n \geq 3$ vértices. Llamaremos* ciclo hamiltoniano *a un ciclo que contiene todos los vértices.*
Llamaremos camino hamiltoniano *a un camino abierto que contiene todos los vértices.*
Diremos que G es un grafo hamiltoniano *si tiene un ciclo hamiltoniano.*

Observaciones.

1. Eliminando una arista de un ciclo hamiltoniano, obtenemos un camino hamiltoniano.
2. Si un grafo tiene un camino hamiltoniano entonces es conexo.
3. No existen condiciones necesarias y suficientes que garanticen la existencia de un ciclo o camino hamiltoniano. Estudiaremos teoremas que dan condiciones necesarias y teoremas que dan condiciones suficientes.

Caminos y ciclos hamiltonianos

Ejemplo



Camino hamiltoniano: $a, b, c, d, e, f, g, h, i$.

¿Existe un ciclo hamiltoniano? Como G tiene nueve vértices, si existe un ciclo hamiltoniano, éste debe tener nueve aristas. Comencemos en el vértice b. Debido a la simetría del grafo, no importa si vamos hacia a o hacia c. Iremos hacia c, desde donde podemos pasar a d o i. Usando otra vez la simetría, vamos a d. La arista $\{c, i\}$ ya no puede formar parte del ciclo, puesto que ya no podemos volver al vértice c. Ahora podemos continuar hacia e o hacia i. Si continuamos hacia e, la arista $\{d, i\}$ ya no puede formar parte del ciclo, con lo que una vez que lleguemos a i no podremos continuar. Si continuamos hacia i, la arista $\{e, d\}$ ya no puede formar parte del ciclo, con lo que una vez que lleguemos a e no podremos continuar. Por tanto, este grafo no tiene un ciclo hamiltoniano.

Caminos y ciclos hamiltonianos

Sugerencias para tratar de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo $G = (V, E)$.

- Si G es hamiltoniano, entonces, para todo vértice $x \in V$, $d(x) \geq 2$.
- Si $a \in V$ y $d(a) = 2$, entonces las dos aristas incidentes con a deben aparecer en cualquier ciclo hamiltoniano de G.
- Si $a \in V$ y $d(a) > 2$, para construir un ciclo hamiltoniano, una vez que hemos pasado por a, dejamos de tener en cuenta las aristas no utilizadas incidentes con a.
- Al construir un ciclo hamiltoniano para G, no podemos obtener un ciclo para un subgrafo de G a menos que contenga todos los vértices de G.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones suficientes

Condiciones suficientes para que un grafo tenga un camino o un ciclo hamiltoniano.

Teorema

$G = (V, E)$ sin lazos con $n \geq 3$ vértices.
Si

$$\forall x, y \in V \quad (x \neq y) \quad d(x) + d(y) \geq n - 1,$$

entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Como consecuencia inmediata se tiene:

Corolario

$G = (V, E)$ sin lazos con $n \geq 3$ vértices.
Si

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n-1}{2},$$

entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones suficientes

Ejemplo

Queremos programar 7 exámenes en 7 días, de forma que dos exámenes del mismo profesor no se programen en días consecutivos. Ningún profesor realiza más de cuatro exámenes.
¿Es posible?
Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que:

- Vértices: Exámenes ($n = 7$ vértices).
- Aristas: Trazamos una arista entre 2 vértices si corresponden a exámenes de diferentes profesores.

¿Hay un camino hamiltoniano? ¿Grado de cada vértice?

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq 3 = \frac{n-1}{2}.$$

Por tanto, G tendrá un camino hamiltoniano que corresponde a una programación adecuada de los 7 exámenes.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones suficientes

Teorema

$G = (V, E)$ sin lazos con $n \geq 3$ vértices.
Si

$$\forall x, y \in V \quad (x, y \text{ no adyacentes}) \quad d(x) + d(y) \geq n,$$

entonces G es hamiltoniano.

Como consecuencia inmediata se tiene:

Corolario

$G = (V, E)$ sin lazos con $n \geq 3$ vértices.
Si

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq \frac{n}{2},$$

entonces G es hamiltoniano.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones suficientes

Ejemplo

En un grupo de 20 personas, todas conocen al menos a 10. ¿Pueden sentarse alrededor de una mesa circular de forma que cada persona conozca a las dos personas sentadas a su lado?
Sea $G = (V, E)$ un grafo tal que:

- Vértices: Personas ($n = 20$ vértices).
- Aristas: Trazamos una arista entre 2 vértices si corresponden a personas que se conocen.

¿Hay un ciclo hamiltoniano? ¿Grado de cada vértice?

$$\forall x \in V \quad d(x) \geq 10 = \frac{n}{2}.$$

Por tanto, G tendrá un ciclo hamiltoniano que corresponde a una disposición adecuada de las 20 personas alrededor de la mesa.

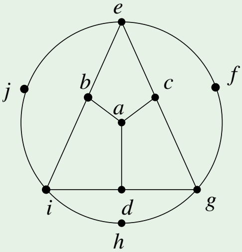
Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones necesarias

Condiciones necesarias para que un grafo tenga un camino o un ciclo hamiltoniano.

Teorema

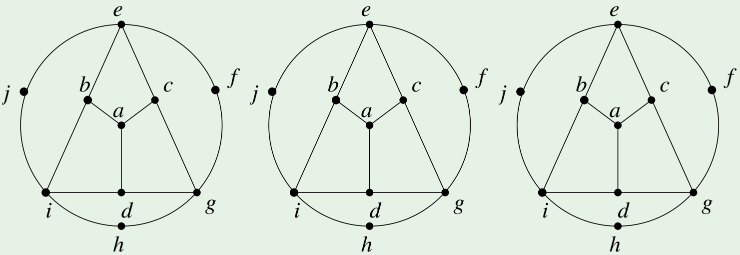
Dado un grafo $G = (V, E)$ bipartito con el conjunto de vértices V dividido como $V = V_1 \dot{\cup} V_2$.
Si G es hamiltoniano, entonces $\mid V_1 \mid = \mid V_2 \mid$.

Ejemplo



¿Bipartito?

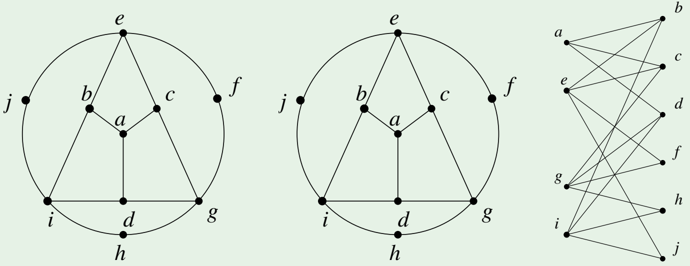
Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones necesarias



Se etiqueta el vértice a con la letra x.
Los vértices adyacentes a a se etiquetan con la letra y.
Después se etiquetan los vértices no etiquetados adyacentes a b, c o d con la letra x, y así sucesivamente.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones necesarias

El grafo es bipartito:



$$V = V_1 \dot{\cup} V_2, \quad V_1 = \{a, e, g, i\}, \quad V_2 = \{b, c, d, f, h, j\}$$

Como G tiene 10 vértices, si hubiera un camino hamiltoniano debería haber una sucesión alternativa de cinco letras x y cinco letras y.
Como $\mid V_1 \mid = 4$ y $\mid V_2 \mid = 6$, este grafo no tiene un camino hamiltoniano.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones necesarias

Notación. Dado un grafo $G = (V, E)$, y un subconjunto de vétices $V' \subset V$, denotamos con $G - V'$ el grafo (V_1, E_1), donde $V_1 = V \setminus V'$ y E_1 está formado por todas las aristas de E excepto las incidentes con los vértices de V'.

Teorema

Si $G = (V, E)$ es un grafo hamiltoniano, entonces para cualquier subconjunto $V' \subset V$, $\emptyset \neq V' \neq V$,

$$\kappa(G - V') \leq \mathrm{card}(V').$$

Corolario

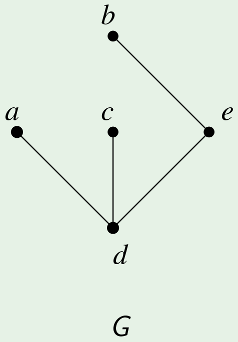
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Si existe un subconjunto $V' \subset V$, $\emptyset \neq V' \neq V$, tal que

$$\kappa(G - V') > \mathrm{card}(V')$$

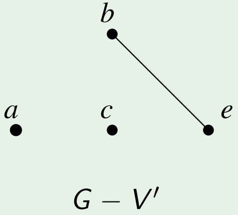
entonces el grafo G no es hamiltoniano.

Caminos y ciclos hamiltonianos. Condiciones necesarias

Ejemplo



$V' = \{d\}$



$\mathrm{card}(V') = 1$. $\kappa(G - V') = 3$. El grafo no es hamiltoniano.