Théorie des ∞-catégories

par

M. Nicolas

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Quasi-catégories

CHAPITRE 1

ENSEMBLES SIMPLICIAUX

1.1 Objets simpliciaux

1.1. *Catégorie des simplexes* — Si n est un entier naturel, on note $[n]$ l'ensemble

$$[n] := \{0, 1, \dots, n\}$$

muni de l'ordre usuel.

On définit alors une petite catégorie Δ, appelée catégorie des simplexes, dont les objets sont les $[n]$ pour $n \in \mathbf{N}$ et les morphismes sont les applications croissantes.

Définition 1.2. Étant donnée une catégorie C, un objet simplicial de C est un foncteur $\Delta^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$. La catégorie des objets simpliciaux de C est notée sC.

Un objet cosimplicial de C est un objet simplicial de C^{op}, autrement dit un foncteur $\Delta \to \mathsf{C}$.

1.3. *Simplexes* — Un objet simplicial $X \colon \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ d'une certaine catégorie C consiste en la donnée

— pour tout n, d'un objet $X_n := X([n])$ de C des n-simplexes de X

— pour tout $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq n$, d'un morphisme

$$d_i \colon X_n \to X_{n-1}$$

dit de i-ième face

— pour tout n et tout $0 \leq i \leq n$, d'une i-ième dégénérescence

$$s_i \colon X_n \to X_{n+1}$$

vérifiant les relations suivantes

C'est une conséquence du résultat de factorisation des morphismes de Δ (TODO).

Proposition 1.4. *Étant données deux catégories C et D, la catégorie $\mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ est complète (resp. cocomplète) si D l'est, et les foncteurs d'évaluation*

$$\mathrm{ev}_x \colon \mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \to \mathsf{D}$$

préservent[1] *les limites (resp. les colimites) pour tout objet x de C.*

Démonstration

Supposons D complète, et fixons $F \colon I \to \mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ un diagramme de $\mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$. Le foncteur F induit par adjonction un foncteur $I \times \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, puis un foncteur

$$F' \colon \mathsf{C} \to \mathrm{Fon}(I, \mathsf{D})$$

1. On dit que les limites (resp. les colimites) de $\mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ sont calculées terme à terme.

Par hypothèse sur D, il existe de plus un foncteur limite

$$\lim_I \colon \mathrm{Fon}(I, \mathsf{D}) \to \mathsf{D}$$

Pour tout morphisme $\alpha\colon i \to j$ de I, la commutativité du diagramme de $\mathrm{Fon}(\mathrm{Fon}(I, \mathsf{D}), \mathsf{D})$

$$\begin{tikzcd} \lim_I \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ev}_j \\ \mathrm{ev}_i \arrow[ur, "\alpha_*"'] & \end{tikzcd}$$

fournit, par précomposition par F', un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r] \arrow[d] & F(j) \\ F(i) \arrow[ur, "\alpha_*"'] & \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$, où $L := \lim_I \circ F'$.

Montrons que ces flèches font de L une limite du diagramme F. Fixons à cette fin un foncteur $G\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ et des transformations naturelles $G \to F(i)$ pour chaque $i \in I$ faisant commuter les diagrammes

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] & F(j) \\ F(i) \arrow[ur, "\alpha_*"'] & \end{tikzcd}$$

pour tout morphisme $\alpha\colon i \to j$ de I. L'évaluation en $x \in \mathsf{C}$ fournit un morphisme

$$u(x)\colon G(x) \to L(x)$$

naturel en x, autrement dit la famille $(u(x))_{x\in\mathsf{C}}$ définit une transformation naturelle

$$u\colon G \to L$$

Réciproquement, une telle transformation naturelle $u\colon G \to L$ induit une famille de transformations naturelles $G \to L \to F(i)$ indexée par $i \in I$, définissant un cône au-dessus de F.

Ces constructions sont manifestement inverses l'une de l'autre, d'où

$$L := \lim_I F$$

Par construction

$$\mathrm{ev}_x(L) = L(x) = \lim_I F'(x) = \lim_I \mathrm{ev}_x \circ F$$

pour tout $x \in \mathsf{C}$, autrement dit le foncteur $\mathrm{ev}_x\colon \mathrm{Fon}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \to \mathsf{D}$ commute aux limites.

Corollaire 1.5. *La catégorie* sC *est complète (resp. cocomplète) dès que la catégorie* C *l'est, et les foncteurs d'évaluation* $\mathrm{ev}_n\colon \mathsf{sC} \to \mathsf{C}$ *préservent les limites (resp. colimites).*

1.6. *Objet opposé* — Le squelette de la catégorie FinLin des ensembles finis totalement ordonnés s'identifie à Δ, si bien que l'involution

$$\mathsf{op}\colon \mathsf{FinLin} \simeq \mathsf{FinLin}$$

envoyant un ensemble fini totalement ordonné I sur l'objet I^{op} de même ensemble sous-jacent mais d'ordre opposé induit une unique involution

$$\mathsf{op}\colon \Delta \simeq \Delta$$

faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathsf{FinLin} \arrow[r, "\mathsf{op}"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathsf{FinLin} \arrow[d, "\simeq"] \\ \Delta \arrow[r, "\mathsf{op}"] & \Delta \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des équivalences de catégories.

Concrètement, l'endofoncteur $\mathsf{op}\colon \Delta \to \Delta$ envoie chaque ensemble $[n]$ sur lui-même, et une flèche $\alpha\colon [m] \to [n]$ sur le morphisme $\alpha^{\mathsf{op}}\colon [m] \to [n]$ défini par

$$\alpha^{\mathsf{op}}(i) := n - \alpha(m-i)$$

pour tout $0 \leq i \leq m$.

La précomposition par $\mathsf{op}\colon \Delta \simeq \Delta$ fournit alors naturellement un automorphisme involutif

$$\mathsf{op}\colon \mathsf{sC} \simeq \mathsf{sC}$$

pour toute catégorie C, envoyant un objet simplicial X de C sur l'objet opposé X^{op}.

1.2 Ensembles simpliciaux

Définition 1.7. Un ensemble simplial est un objet simplicial dans Ens, donc un préfaisceau

$$X\colon \Delta^{\mathsf{op}} \to \mathsf{Ens}$$

Un sous-ensemble simplicial de X est un ensemble simplicial Y pour lequel $Y_n \subseteq X_n$ pour tout n, et tel que ces inclusions s'assemblent en une flèche $Y \to X$.

Remarque 1.8. Si X est un ensemble simplicial, un famille $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'ensembles $Y_n \subseteq X_n$ détermine un sous-ensemble simplicial $Y \subseteq X$ si et seulement si la fonction

$$f^*\colon X_n \to X_m$$

envoie Y_n sur Y_m pour toute flèche $f\colon [m] \to [n]$. Il est bien sûr suffisant de le vérifier seulement pour les faces et les dégénérescences.

Proposition 1.9. *La catégorie* sEns *des ensembles simpliciaux est bicomplète, et les (co)limites se calculent terme à terme.*

Démonstration

La catégorie Ens est bicomplète, et le corollaire 1.5 permet de conclure.

Définition 1.10. Si n est un entier naturel, le n-simplexe standard désigne l'ensemble simplicial

$$\Delta^n := \mathrm{Hom}_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$$

représenté par $[n]$.

La formule $[n] \mapsto \Delta^n$ définit un objet cosimplicial $\Delta^\bullet$ de sEns.

Remarque 1.11. Le lemme de Yoneda fournit pour tout n un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\Delta^n, -) \simeq \mathrm{ev}_n$$

entre foncteurs $\mathsf{sEns} \to \mathsf{Ens}$, donné par la formule $\sigma \mapsto \sigma\big(\mathsf{id}_{[n]}\big)$.

Cette identification est naturelle en n, au sens où le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\Delta^n, -) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\Delta^m, -) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{ev}_n \arrow[r, "\alpha^*"] & \mathrm{ev}_m
\end{tikzcd}$$

commute pour tout $\alpha\colon [m] \to [n]$. Autrement dit, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\Delta^\bullet, -) \simeq \mathrm{ev}_\bullet$$

entre objets simpliciaux de $\mathrm{Fon}(\mathsf{sEns}, \mathsf{Ens})$.

On fera dans la suite implicitement l'amalgame, pour un ensemble simplicial X, entre l'ensemble X_n des n-simplexes de X et celui des morphismes $\Delta^n \to X$ pour tout n.

1.12. *Bord et cornets* — Étant donné un entier naturel n, le bord du n-simplexe est le sous-ensemble simplicial strict

$$\partial\Delta^n \subset \Delta^n$$

défini par

$$\left(\partial\Delta^n\right)_m := \left\{ \alpha\colon [m] \to [n] \;\middle|\; \alpha \text{ non surjective} \right\}$$

pour tout m.

Pour $0 \leq i \leq n$, on définit un sous-ensemble simplicial $\Lambda^n_i \subset \Delta^n$ par

$$\left(\Lambda^n_i\right)_m := \left\{ \alpha\colon [m] \to [n] \;\middle|\; [n] \subset \{i\} \cup \mathrm{Im}\,\alpha \right\}$$

L'ensemble simplicial Λ^n_i est appelé i-ième cornet de Δ^n.

Définition 1.13. Soit X un ensemble simplicial.

1) Un n-simplexe $\Delta^n \to X$ est dit dégénéré s'il factorise

$$\Delta^n \longrightarrow \Delta^m \longrightarrow X$$

avec $m < n$.

2) Un simplexe non-dégénéré de X est un simplexe qui n'est pas dégénéré.
   On note X_n^{nd} le sous-ensemble de X_n formé des n-simplexes non-dégénérés pour tout n.
3) Si X est non vide, la dimension de X est un entier potentiellement infini défini comme

$$\dim X := \sup\left\{ n \in \mathbf{N} \;\middle|\; X_n^{\mathrm{nd}} \neq \varnothing \right\}$$

   La sous-catégorie pleine de sEns formée des ensembles simpliciaux de dimension au plus n est notée $\mathsf{sEns}^{\leq n}$.

Remarque 1.14. Un morphisme $f\colon X \to Y$ entre ensembles simpliciaux induit pour tout n une application $X_n \to Y_n$ dont on vérifie qu'elle envoie pour nos identifications un n-simplexe $\sigma\colon \Delta^n \to X$ de X sur la composée

$$\Delta^n \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

En particulier, l'image d'un simplexe dégénéré est encore dégénérée.

Remarque 1.15. Le lemme de Yoneda met en bijection les rétractions de la forme

$$\Delta^n \longrightarrow \Delta^m \longrightarrow \Delta^n \qquad \text{et} \qquad [n] \longrightarrow [m] \longrightarrow [n]$$

Si n est fixé, on en déduit que le n-simplexe id_{Δ^n} de Δ^n est non-dégénéré, d'où

$$\dim \Delta^n = n$$

car tout simplexe de Δ^n factorise manifestement par Δ^n.

Proposition 1.16. *Tout simplexe $\sigma\colon \Delta^n \to X$ d'un ensemble simplicial X factorise uniquement*

$$\Delta^n \xrightarrow{\alpha_*} \Delta^m \xrightarrow{\tau} X$$

où α est un morphisme $[n] \to [m]$ surjectif et τ est un simplexe non-dégénéré. L'entier m est appelé dimension effective de σ.

Démonstration

Ayant fixé un n-simplexe de X, on peut se donner une factorisation

$$\Delta^n \xrightarrow{\alpha_*} \Delta^m \xrightarrow{\sigma} X$$

avec $\alpha\colon [n] \to [m]$ surjective qui minimise m. La non-dégénérescence de σ est alors évidente, d'où l'existence.

Pour l'unicité, considérons un carré commutatif d'ensembles simpliciaux

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\beta_*"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \Delta^m \arrow[d, "\tau"] \\ \Delta^\ell \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

avec $\alpha\colon [n] \to [\ell]$ et $\beta\colon [n] \to [m]$ surjectives et σ et τ non-dégénérés. On suppose de plus $\ell \leq m$ sans perdre en généralité. Il existe par surjectivité une section $\gamma\colon [m] \to [n]$ de β, et alors

$$\sigma(\alpha\gamma) = \tau(\beta\gamma)$$

$$= \tau(\mathsf{id}_{[m]})$$

Autrement dit τ factorise

$$\Delta^m \xrightarrow{\alpha_*\gamma_*} \Delta^\ell \xrightarrow{\sigma} X$$

ce qui impose $m = \ell$ par non-dégénérescence de τ et la surjectivité de la composée $\alpha\gamma$. L'unique automorphisme de l'ensemble ordonné fini $[m]$ étant l'identité, il vient que γ est également une section de α. En particulier la factorisation ci-dessus se réécrit simplement

$$\tau = \sigma$$

Remarquons que ce qui précède établit que toute section de β est une section de α. On vérifie alors que l'image réciproque de tout point $i \in [m]$ par β est contenue dans l'image réciproque de i par α, autrement dit $\alpha = \beta$.

Corollaire 1.17. *On a l'égalité*

$$\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$$

dès que X et Y sont deux ensembles simpliciaux non vides.

Démonstration

TODO

Lemme 1.18. *Si X est un ensemble simplicial, alors deux m-simplexes σ et τ de X de dimensions effectives inférieures à n sont égaux si et seulement si le diagramme*

$$\Delta^\ell \xrightarrow{\alpha_*} \Delta^m \underset{\tau}{\overset{\sigma}{\rightrightarrows}} X$$

commute pour tout morphisme $\alpha\colon [\ell] \to [m]$ avec $\ell \leq n$.

Démonstration

La proposition 1.16 permet d'écrire

$$\sigma = \alpha^*\lambda \quad \text{et} \quad \tau = \beta^*\mu$$

avec λ et μ des simplexes de X non-dégénérés, et $\alpha\colon [m] \to [k]$ et $\beta\colon [m] \to [\ell]$ surjectives. Les entiers k et ℓ sont inférieurs à n par hypothèse.

La commutativité du diagramme indexé par n'importe quelle section γ de α fournit

$$\begin{aligned} \lambda &= \gamma^*\tau \\ &= (\beta\gamma)^*\mu \end{aligned}$$

donc $k \leq \ell$ et $\beta\gamma\colon [k] \to [\ell]$ est injective. Il vient par symétrie du problème que $k = \ell$, et on en déduit les égalités $\beta\gamma = \mathsf{id}$ puis

$$\lambda = \mu$$

On a également montré que toute section de α était une section de β, d'où $\alpha = \beta$ par le même argument que celui utilisé pour établir l'unicité dans la preuve de la proposition 1.16. Finalement $\sigma = \tau$, d'où ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 1.19. *Si $\Delta^{\leq n}$ désigne la sous-catégorie pleine de Δ formée des objets de cardinal au plus $n+1$, alors le foncteur de restriction $\mathsf{sEns} \to \mathrm{Fon}\big((\Delta^{\leq n})^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens}\big)$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathsf{sEns}^{\leq n} \simeq \mathrm{Fon}\big((\Delta^{\leq n})^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens}\big)$$

En particulier $\mathsf{sEns}^{\leq n}$ est bicomplète.

Démonstration

Si S est un préfaisceau sur $\Delta^{\leq n}$, alors on définit pour tout entier naturel m un ensemble $\overline{S}_m$ par la formule

$$\overline{S}_m := \big\{ (\alpha, \sigma) \bigm| \alpha \colon [m] \to [k] \text{ avec } k \leq n \text{ et } \sigma \in S_k \big\}/{\sim}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par $(\alpha,\sigma) \sim (\beta,\tau)$ si et seulement si $(\alpha\omega)^*\sigma = (\beta\omega)^*\tau$ pour tout morphisme $\omega \colon [\ell] \to [m]$ avec $\ell \leq n$.

Une flèche $[\ell] \to [m]$ induit manifestement une fonction $\overline{S}_m \to \overline{S}_\ell$ par précomposition, ce qui munit la famille des ensembles $\overline{S}_m$ d'une structure d'ensemble simplicial $\overline{S}$. Remarquons de plus qu'un m-simplexe $[\alpha,\sigma]$ de $\overline{S}$ avec $\sigma \in S_k$ s'écrit

$$[\alpha, \sigma] = \alpha^*[\mathsf{id}_{[k]}, \sigma]$$

autrement dit factorise par $\alpha_* \colon \Delta^m \to \Delta^k$. Ainsi $\overline{S}$ est de dimension au plus n.

La construction $S \mapsto \overline{S}$ est clairement fonctorielle en S, et définit par conséquent une flèche

$$\mathrm{Fon}\big((\Delta^{\leq n})^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens}\big) \to \mathsf{sEns}^{\leq n}$$

dont on va montrer qu'elle est quasi-inverse au foncteur

$$T \colon \mathsf{sEns}^{\leq n} \to \mathrm{Fon}\big((\Delta^{\leq n})^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens}\big)$$

de restriction.

Si X est un ensemble simplicial, on vérifie à l'aide du lemme 1.18 que la formule $[\alpha,\sigma] \mapsto \alpha^*\sigma$ définit naturellement un monomorphisme

$$\overline{T(X)} \hookrightarrow X$$

et c'est un isomorphisme si et seulement si $\dim X \leq n$.

Réciproquement si S est un préfaisceau sur $\Delta^{\leq n}$, alors on a manifestement pour tout $m \leq n$ une bijection naturelle $\overline{S}_m \simeq S_m$ donnée par $[\alpha,\sigma] \mapsto \alpha^*\sigma$. On en déduit une identification naturelle

$$T(\overline{S}) \simeq S$$

ce qui conclut la preuve.

1.3 Structure cartésienne fermée

1.20. *Densité des préfaisceaux représentables* — Soit C est une petite catégorie. Le plongement pleinement fidèle de Yoneda $\iota \colon \mathsf{C} \hookrightarrow \hat{\mathsf{C}} := \mathrm{Fon}(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens})$ permet d'identifier C à une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathsf{C}}$.

Si X est un préfaisceau sur C, on forme par ce qui précède la catégorie $\mathsf{C}_{/X}$ des représentables au-dessus de X. Plus concrètement, c'est la catégorie dont les objets sont les morphismes $A \to X$ où A est un préfaisceau représentable et dont les morphismes sont les morphismes au-dessus de X. On dispose d'un foncteur d'oubli

$$e \colon \mathsf{C}_{/X} \to \mathsf{C}$$

et d'une flèche canonique

$$\operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e \to X$$

Elle induit par précomposition une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(X,-) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}\big(\operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e, -\big) \xrightarrow{\simeq} \lim_{\mathsf{C}_{/X}} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(\iota e, -)$$

que l'on note Φ.

Si Y est un préfaisceau sur C, le lemme de Yoneda fournit réciproquement des identifications naturelles

$$\begin{aligned}\lim_{\mathsf{C}_{/X}} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(\iota e, Y) &\simeq \lim_{\mathsf{C}_{/X}} Ye \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(X,Y)\end{aligned}$$

dont la composée est manifestement un inverse à droite de $\Phi(Y)$, donc un inverse. Finalement Φ est un isomorphisme naturel, et une dernière application du lemme de Yoneda garantit que la flèche tautologique fournit en fait un isomorphisme de préfaisceaux

$$X \simeq \operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e$$

En particulier tout préfaisceau est colimite de préfaisceaux représentables.

Cette écriture est de plus naturelle en X, au sens où un morphisme $f\colon X \to Y$ de préfaisceaux induit par composition un foncteur $f_*\colon \mathsf{C}_{/X} \to \mathsf{C}_{/Y}$ au-dessus de C, puis un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/Y}} \iota e \arrow[d, "\simeq"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

dans $\hat{\mathsf{C}}$.

Proposition 1.21. *Si C est une petite catégorie, si D est une catégorie et si $F\colon \hat{\mathsf{C}} \to \mathsf{D}$ est un foncteur préservant les colimites, alors F est canoniquement adjoint à gauche au foncteur $G\colon \mathsf{D} \to \hat{\mathsf{C}}$, défini en $y \in \mathsf{D}$ par la formule*

$$G(y) := (x \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F\iota(x), y))$$

où $\iota\colon \mathsf{C} \hookrightarrow \hat{\mathsf{C}}$ désigne le plongement de Yoneda.

Démonstration

Le lemme de Yoneda fournit un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F\iota(-), -) \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(\iota(-), G(-))$$

entre foncteurs $\mathsf{C}^{\mathsf{op}} \times \mathsf{D} \to \mathsf{Ens}$.

Si X est un préfaisceau, on en déduit en reprenant les notations introduites en 1.20 des identifications

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F(X),-) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(F(\operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e),-\big)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}\big(\operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} F\iota e,-\big)\\
&\simeq \lim_{\mathsf{C}_{/X}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(F\iota e,-)\\
&\simeq \lim_{\mathsf{C}_{/X}} \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(\iota e,G(-))\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}\big(\operatorname*{colim}_{\mathsf{C}_{/X}} \iota e,G(-)\big)\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(X,G(-))
\end{aligned}$$

entre foncteurs $\mathsf{D} \to \mathsf{Ens}$, chacune étant manifestement naturelle en X. Finalement F et G forment un couple de foncteurs adjoints.

Corollaire 1.22. *Si C est une petite catégorie, alors la catégorie $\hat{\mathsf{C}}$ possède une structure cartésienne fermée canonique, l'exponentielle de deux préfaisceaux X et Y étant donnée par*

$$Y^X := \big(x \mapsto \mathrm{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(X \times \iota(x), Y)\big)$$

où $\iota\colon \mathsf{C} \hookrightarrow \hat{\mathsf{C}}$ est le plongement de Yoneda.

Démonstration

Si X est un préfaisceau fixé, le foncteur

$$X \times -\colon \hat{\mathsf{C}} \to \hat{\mathsf{C}}$$

préserve les colimites. La proposition 1.4 permet en effet de le vérifier terme à terme dans Ens, où c'est vrai car $S \times -\colon \mathsf{Ens} \to \mathsf{Ens}$ est un adjoint à gauche pour tout ensemble S.

La proposition 1.21 appliquée au fonteur $X \times -$ fournit alors une adjonction, où l'adjoint à droite $(-)^X$ est donné par la formule voulue.

1.23. *Restriction aux ensembles simpliciaux* — Le corollaire 1.22 munit la catégorie sEns des ensembles simpliciaux d'une structure cartésienne fermée canonique.

Plus concrètement, si X et Y sont deux ensembles simpliciaux, leur exponentielle est un nouvel ensemble simplicial Y^X défini par

$$\big(Y^X\big)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X \times \Delta^n, Y)$$

pour tout entier naturel n. Remarquons de plus que l'objet Δ^0 est initial dans sEns, si bien les 0-simplexes de Y^X ne sont autres que les flèches $X \to Y$. Plus précisément, on dispose d'une identification

$$\big(Y^X\big)_0 \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X, Y)$$

naturelle en X et Y.

Si maintenant X, Y et Z sont trois ensembles simpliciaux, alors l'adjonction entre les foncteurs endofoncteurs $- \times Y$ et $(-)^Y$ de sEns signifie que l'on dispose de bijections

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X, Y^Z)$$

naturelles en X et Z. La théorie générale des catégories cartésiennes fermées garantit en fait également la naturalité en Y.

Pour finir, on note bien sûr

$$\circ\colon Z^Y \times Y^X \to Z^X$$

la flèche naturelle de composition induite par la structure cartésienne fermée décrite ci-dessus.

TODO : catégorie $\hat{\mathsf{C}}$ possède une structure cartésienne fermée —> en particulier valable pour sEns.

1.4 Squelettes et cosquelettes

Définition 1.24. Soit X un ensemble simplicial. Si n est un entier naturel, le n-squelette de X est le sous-ensemble simplicial

$$\mathrm{sq}_n(X) \subseteq X$$

dont les simplexes sont les simplexes $\Delta^m \to X$ de X qui factorisent par Δ^n.

Justification

> Si $\sigma\colon \Delta^m \to X$ est un m-simplexe de X, alors le ℓ-simplexe $\alpha^*\sigma$ obtenu en tirant σ en arrière par une flèche $\alpha\colon [\ell] \to [m]$ n'est autre que la composée
>
> $$\Delta^\ell \xrightarrow{\alpha_*} \Delta^m \xrightarrow{\sigma} X$$
>
> Ainsi $\alpha^*\sigma$ factorise par Δ^n dès que c'est le cas de σ, et $\mathrm{sq}_n(X)$ définit bien un sous-ensemble simplicial de X.

1.25. *Filtration squelettique* — Si n est un entier naturel, la formation du n-squelette donne manifestement naissance à un foncteur

$$\mathrm{sq}_n\colon \mathsf{sEns} \to \mathsf{sEns}^{\leq n}$$

On notera également sq_n l'endofoncteur de sEns induit. Ce dernier est muni d'une inclusion naturelle $\mathrm{sq}_n \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{sEns}}$ factorisant par sq_{n+1}.

Les squelettes donnent ainsi lieu à une chaîne d'inclusions naturelles

$$\mathrm{sq}_0 \subseteq \mathrm{sq}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{sq}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{sEns}}$$

Remarquons de plus que si $m \leq n$, alors on a l'égalité $\mathrm{ev}_m \circ \mathrm{sq}_n = \mathrm{ev}_m$. Une autre façon de le dire est que la formation du n-squelette ne touche pas aux m-simplexes. On en déduit que la famille de foncteurs $(\mathrm{sq}_n)_n$ fournit une *filtration* fonctorielle de chaque ensemble simplicial, appelée filtration squelettique.

Proposition 1.26. *Soit n un entier naturel. Si X et Y sont deux ensembles simpliciaux et si $\dim X \leq n$, alors l'inclusion $\mathrm{sq}_n(Y) \subseteq Y$ induit une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X, \mathrm{sq}_n(Y)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(X, Y)$$

naturelle en X et en Y.

La famille de ces bijections fournit une adjonction entre les foncteurs $\mathsf{sEns}^{\leq n} \subset \mathsf{sEns}$ et sq_n d'unité $\mathrm{sq}_n \subseteq \mathsf{id}_{\mathsf{sEns}}$.

Remarque 1.27. Bien que les deux catégories soient complètes, les limites dans sEns et $\mathsf{sEns}^{\leq n}$ ne coïncident pas en général. En effet le produit dans $\mathsf{sEns}^{\leq n}$ de X et Y est $\mathrm{sq}_n(X \times Y)$, qui n'est pas isomorphe à $X \times Y$ dès que $\dim X + \dim Y > n$ d'après le corollaire 1.17.

Proposition 1.28. *Soit $i \colon K \hookrightarrow L$ un monomorphisme entre ensemble simpliciaux. Si n est un entier naturel, alors on a un carré cocartésien*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{L_n^{\mathrm{nd}} \setminus K_n} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{L_n^{\mathrm{nd}} \setminus K_n} \Delta^n \arrow[d] \\ K \cup \mathrm{sq}_{n-1}(L) \arrow[r] & K \cup \mathrm{sq}_n(L) \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

en utilisant la notation introduite en C.13 et avec la convention $\mathrm{sq}_{-1}(L) := \varnothing$.

Démonstration

TODO : supposer que i est une inclusion pour pas avoir à gérer des pushouts de pullbacks TODO : je suis pas sûr du $L/i(K)$.

Corollaire 1.29. *APPLIQUER AVEC $K = \varnothing$.*

Corollaire 1.30. *La famille $(\partial\Delta^n \subset \Delta^n)_{n \in \mathbf{N}}$ fournit un modèle cellulaire pour sEns.*

Démonstration

UTILISER LA PROP D'AVANT et la factorisation de i par la chaîne

$$K \longrightarrow K \cup \mathrm{sq}_0(L) \longrightarrow K \cup \mathrm{sq}_1(L) \longrightarrow \cdots \longrightarrow K \cup \mathrm{sq}_n(L) \longrightarrow \cdots$$

Proposition 1.31. *Le foncteur $\mathrm{sq}_n \colon \mathsf{sEns} \to \mathsf{sEns}$ commute aux colimites pour tout n.*

Démonstration

Soit n un entier naturel. La composée suivante

$$\mathsf{sEns} \xrightarrow{\mathrm{sq}_n} \mathsf{sEns}^{\leq n} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Fon}\big((\mathsf{\Delta}^{\leq n})^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens}\big)$$

n'est autre que la restriction induite par l'inclusion $\mathsf{\Delta}^{\leq n} \subset \mathsf{\Delta}$, et commute par conséquent aux (co)limites. C'est donc aussi le cas du foncteur $\mathrm{sq}_n \colon \mathsf{sEns} \to \mathsf{sEns}^{\leq n}$, or l'inclusion $\mathsf{sEns}^{\leq n} \subset \mathsf{sEns}$ préserve les colimites d'après la proposition 1.26.

1.32. *Cosquelette d'un ensemble simplicial* — Si n est un entier naturel, le foncteur

$$\mathrm{cosq}_n \colon \mathsf{sEns} \to \mathsf{sEns}$$

défini pour tout préfaisceau X et tout m par

$$\mathrm{cosq}_n(X)_m := \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\mathrm{sq}_n(\Delta^m), X)$$

est canoniquement adjoint à droite à $\mathrm{sq}_n \colon \mathsf{sEns} \to \mathsf{sEns}$ en vertu des propositions 1.21 et 1.31.

Si X est un ensemble simplicial, le n-cosquelette de X est l'ensemble simplicial $\mathrm{cosq}_n(X)$. L'inclusion $\mathrm{sq}_n(X) \subseteq X$ transpose par adjonction en une flèche naturelle $X \to \mathrm{cosq}_n(X)$. On dit que X est n-tronqué si cette flèche est un isomorphisme.

Proposition 1.33. *Soit n un entier naturel. Un ensemble simplicial X est n-tronqué si et seulement si les inclusions $\partial\Delta^m \subset \Delta^m$ induisent par restriction des bijections*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\Delta^m, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{sEns}}(\partial\Delta^m, X)$$

pour tout $m \geq n$.

Démonstration

TODO : je ne sais pas si c'est vrai mais je pense –> lien avec les types d'homotopie tronqués –> que dire du cosquelette d'un complexe de Kan ?

1.5 Réalisation géométrique

Proposition 1.34. *TODO : un foncteur $\mathsf{sEns} \to D$ qui préserve les colimites, c'est essentiellement la même chose qu'un objet cosimplicial de D. (en fait, version générale avec catégorie de préfaisceaux)*

TODO : la proposition appliquée au simplexe géométrique

$$\Delta^\bullet_{\mathsf{Top}} \colon \Delta \to \mathsf{Top}$$

fournit le foncteur de réalisation géométrique, qui commute par construction aux colimites.

Il possède un adjoint à droite par la proposition 1.21, donné par la formule

$$\mathrm{Sing}(X)_n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(\Delta^n_{\mathsf{Top}}, X)$$

pour tout espace topologique X, en vertu de l'homéomorphisme naturel $|\Delta^\bullet| \simeq \Delta^\bullet_{\mathsf{Top}}$ (remplacer abs par une autre macro).

1.6 Catégorie d'homotopie

On peut sûrement faire pareil que la section sur la réalisation géométrique, en utilisant cette fois l'objet cosimplicial

$$[n] \in \Delta \mapsto [n] \in \mathsf{Cat}$$

pour obtenir l'adjonction entre h et N.

Le reste de la section consiste alors à décrire h plus simplement

CHAPITRE 2

CONSTRUCTIONS JOIN ET SLICE

2.1 Joins

OUI

Deuxième partie

∞-catégories stables

ANNEXE A

CATÉGORIES DE MODÈLES

1.1 Problèmes de relèvement

Définition A.1. Soit C une catégorie. Un problème de relèvement entre deux morphismes f et g de C est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

Une solution est un morphisme h faisant commuter

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "g"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, "h"] & \bullet \end{tikzcd}$$

S'il en existe, on dit que f possède la propriété de relèvement à gauche relativement à g ou encore que g possède la propriété de relèvement à droite relativement à f, et on note $f \boxslash g$.

Si I est une classe[1] de morphismes de C, alors on note $I^{\boxslash}$ et $I_{\boxslash}$ les classes de morphismes ayant la propriété de relèvement respectivement à droite ou à gauche relativement à toutes les flèches de I.

Remarque A.2. Si I est une classe de morphismes d'une certaine catégorie C, alors $I^{\boxslash}$ et $I_{\boxslash}$ contiennent les isomorphismes et sont stables par composition.

Remarque A.3. Si I est une classe de morphismes d'une catégorie, alors l'inclusion $I \subseteq (I^{\boxslash})_{\boxslash}$ montre que $((I^{\boxslash})_{\boxslash})^{\boxslash} \subseteq I^{\boxslash}$, d'où l'identité

$$((I^{\boxslash})_{\boxslash})^{\boxslash} = I^{\boxslash}$$

De même $((I_{\boxslash})^{\boxslash})_{\boxslash} = I_{\boxslash}$.

Remarque A.4. Les problèmes de relèvement entre deux morphismes f et g de C et leurs solutions sont tautologiquement en bijection avec les problèmes de relèvement entre g et f dans C^{op} et leurs solutions. En particulier $f \boxslash g$ dans C si et seulement si $g \boxslash f$ dans C^{op}.

C'est ce fait que l'on utilise implicitement pour dualiser les propriétés de stabilité des classes $I^{\boxslash}$ aux classes $I_{\boxslash}$.

Proposition A.5. *Soient C une catégorie et I une classe de morphismes de C. La classe $I^{\boxslash}$ est stable par produits et produits fibrés, tandis que $I_{\boxslash}$ est stable par sommes et sommes amalgamées.*

1. Si $\mathscr{U}$ désigne l'univers ambiant, alors on appelle *classe* (resp. *ensemble*) les parties (resp. éléments) de $\mathscr{U}$.

Démonstration

Fixons un produit fibré dans C, décrit par le diagramme

$$\begin{tikzcd} e \arrow[r, "q"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & y \arrow[d] \\ x \arrow[r, "f"] & z \end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que q appartient à $I^{\boxslash}$ si c'est le cas de f.

On se donne à cette fin un morphisme $u\colon a \to b$ de I tel que $u \boxslash f$, ainsi qu'un problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & e \arrow[d, "q"] \\ b \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & y \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, il existe un morphisme $b \to x$ faisant commuter le diagramme en trait plein

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & e \arrow[r] \arrow[d] & x \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r] \arrow[ur, dashed] \arrow[urr] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

et la propriété universelle de e fournit la flèche $b \to e$ pointillée. Pour montrer que le diagramme obtenu commute encore, il s'agit de vérifier que c'est le cas du triangle de sommets a, b et e. C'est bien le cas, car les deux chemins $a \to e$ en jeu proviennent du même cône au-dessus du diagramme $x \to z \leftarrow y$. Finalement $u \boxslash q$, et $I^{\boxslash}$ est stable par formation de produits fibrés. La stabilité par produits est évidente.

Par conséquent $I_{\boxslash}$ est stable par produits et produits fibrés lorsque vu comme ensemble de morphismes de C^{op}, donc par sommes et sommes amalgamées dans C.

Définition A.6. Si x est un objet dans une catégorie C, alors un objet $a \in \mathsf{C}$ est un rétract de x s'il existe des morphismes

$$i\colon a \to x \quad \text{et} \quad r\colon x \to a$$

tels que $ri = \mathsf{id}_a$.

Cette définition appliquée à la catégorie[2] $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ donne un sens à la relation « *être rétract de* » entre flèches de C.

Remarque A.7. Si a est un rétract de x dans C, alors c'est également le cas dans C^{op}.

Remarque A.8. Soit $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ un foncteur. Si a est un rétract de x dans C, alors $F(a)$ est un rétract de $F(x)$ dans D.

En appliquant ceci aux foncteurs $\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathsf{C}$ qui associent à un morphisme respectivement sa source et son but, on retrouve que si un morphisme $u\colon a \to b$ est rétract de $f\colon x \to y$, alors a et b sont en particulier rétracts de x et y.

L'introduction de cette notion est motivée par le résultat suivant :

2. Les objets de la catégorie $\mathrm{Mor}(\mathsf{C}) := \mathrm{Fon}([1], \mathsf{C})$ sont les morphismes de C, et les morphismes sont les carrés commutatifs.

Proposition A.9. *Si I est une classe de morphismes dans une catégorie C, alors $I^{\boxslash}$ et $I_{\boxslash}$ sont stables par rétract.*

Démonstration

Étant donné un rétract r d'une flèche f de C, donné par le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "r"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[d, "r"] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

où les composées horizontales sont des identités.

Si u est un morphisme ayant la propriété de relèvement à gauche relativement à f, alors tout problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \bullet \arrow[d, "r"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \bullet \end{tikzcd}$$

possède une solution, en vertu du diagramme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "r"] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[d, "r"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[urr] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

où la flèche oblique existe par hypothèse sur u. En particulier $I^{\boxslash}$ est stable par rétract.

Dualement $I_{\boxslash}$ est stable par rétract dans C^{op}, or l'identification tautologique

$$\mathrm{Mor}(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}) \simeq \mathrm{Mor}(\mathsf{C})^{\mathsf{op}}$$

montre que la relation « *être rétract de* » entre morphismes est identique dans C et C^{op}.

La dernière propriété de stabilité que l'on énoncera nécessite une notion de composition étendue aux chaînes et tours transfinies.

Définition A.10. Soient C une catégorie et α un ordinal.

1) Une chaîne transfinie indexée par α dans une catégorie C est la donnée d'un diagramme

$$X : \alpha \to \mathsf{C}$$

cocontinu, ce qui revient à demander

$$X(\beta) \simeq \operatorname{colim} X|_{\beta}$$

pour tout ordinal limite $\beta < \alpha$.

Si I désigne un ensemble de morphismes de C, alors on dit que X est une chaîne de morphismes de I si la flèche $X(\beta) \to X(\beta + 1)$ appartient à I pour tout ordinal β tel que $\beta + 1 < \alpha$.

2) Une tour transfinie de C indexée par α est une α-chaîne de C^{op}, autrement dit un diagramme $\alpha^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ continu.

A.11. *Composition transfinie* — Soit C une catégorie et α un ordinal non nul. Une chaîne transfinie $X\colon \alpha \to \mathsf{C}$ de C se *compose* si elle se prolonge en une chaîne transfinie

$$\overline{X}\colon \alpha + 1 \to \mathsf{C}$$

réalisant [3] un cocône colimite de X. On dit que le morphisme

$$X(0) \to \overline{X}(\alpha)$$

est une composée transfinie de X. Par unicité des colimites, deux éventuelles composées transfinies de X sont isomorphes dans la catégorie slice de C au-dessus de $X(0)$.

La composée d'une tour de C est, si elle existe, sa composée en tant que chaîne de C^{op}.

Proposition A.12. *Si α est un ordinal, alors une $(\alpha+1)$-chaîne*

$$X\colon \alpha + 1 \to \mathsf{C}$$

se compose toujours, et une composée est donnée par le morphisme $X(0) \to X(\alpha)$.

Démonstration

Les ordinaux $\alpha+1$ et $\alpha+2$ contiennent les mêmes ordinaux limites, donc X se prolonge en une $(\alpha+2)$-chaîne en posant simplement

$$X(\alpha+1) := X(\alpha)$$

et en envoyant l'unique flèche $\alpha \to \alpha+1$ sur $\mathsf{id}_{X(\alpha)}$. Le cocône obtenu est bien colimite, car α est maximal dans $\alpha+1$.

Remarque A.13. Un corollaire de la proposition A.12 est qu'une chaîne finie $X\colon n+1 \to \mathsf{C}$ se compose toujours et qu'une composée est donnée par la composée classique

$$X(0) \longrightarrow X(1) \longrightarrow \cdots \longrightarrow X(n)$$

dans C, ce qui justifie la terminologie. Dans le cas $n = 0$, notons que l'on obtient bien l'identité.

Dualement, la composée d'une tour finie $X\colon (n+1)^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$ existe nécessairement et est donnée par exemple par le morphisme

$$X(0) \longleftarrow X(1) \longleftarrow \cdots \longleftarrow X(n)$$

de C.

Proposition A.14. *Si I est une classe de morphismes d'une catégorie C, alors les classes $I^{\boxslash}$ et $I_{\boxslash}$ sont stables par composition transfinie de tours et de chaînes respectivement.*

Démonstration

Montrons que, lorsqu'elle existe, la composée transifinie d'une tour de C composée de morphismes de $I^{\boxslash}$ et indexée par α appartient encore à $I^{\boxslash}$ pour tout ordinal non nul α. On raisonne par récurrence sur α :

— la classe $I^{\boxslash}$ contient les isomorphismes, d'où le cas $\alpha = 1$

3. Cette condition est redondante lorsque l'ordinal α est limite.

— supposons la propriété vraie pour tout ordinal strictement inférieur à un ordinal α non nul, et fixons une α-tour composable
$$X : \alpha^{\mathsf{op}} \to \mathsf{C}$$
de morphismes de $I^{\boxslash}$, de composée $X(\alpha) \to X(0)$.
J'affirme que les morphismes $X(\beta) \to X(0)$ avec $\beta < \alpha$ sont tous dans $I^{\boxslash}$. En effet :
  — c'est vrai par hypothèse de récurrence lorsque β est limite
  — si β est successeur, on peut écrire $\beta = \gamma + n$ où γ est un ordinal limite et n un entier naturel, et alors la flèche $X(\beta) \to X(0)$ appartient à $I^{\boxslash}$ car obtenue par composition de flèches de $I^{\boxslash}$.

Étant maintenant donné un morphisme $u : a \to b$ de I et un problème de relèvement
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X(\alpha) \arrow[d] \\ b \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X(0) \end{tikzcd}$$
on construit un cône $b \to X$ faisant commuter
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X(\beta) \arrow[d] \\ b \arrow[r] \arrow[ur] & X(0) \end{tikzcd}$$
pour tout $\beta < \alpha$ par récurrence ordinale, et la propriété universelle de $X(\alpha)$ fournit alors une solution.

Les tours de C^{op} sont les chaînes de C, d'où l'énoncé dual pour $I_{\boxslash}$.

1.2 Systèmes de factorisation faibles

Définition A.15. Soit C une catégorie. Un couple (A, B) de classes de morphismes de C satisfaisant aux axiomes

(i) tout morphisme de f de C peut s'écrire $f = ba$ avec $a \in A$ et $b \in B$

(ii) les morphismes de A ont la propriété de relèvement à gauche relativement à ceux de B, autrement dit $A \boxslash B$

(iii) les ensembles A et B sont stables par rétracts

forme ce que l'on appelle un système de factorisation faible de C.

Remarque A.16. Un couple (A, B) de morphismes d'une catégorie C est un système de factorisation faible pour C si et seulement si (B, A) en est un pour C^{op}.

Proposition A.17. *Si (A, B) est un système de factorisation faible alors $A = B_{\boxslash}$ et $B = A^{\boxslash}$.*

Démonstration

Si f est une flèche de $B_{\boxslash}$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f = ba$ et s faisant commuter

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & \bullet \arrow[d, "b"] \\ \bullet \arrow[r, equal] \arrow[ur, "s"] & \bullet \end{tikzcd}$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"] & \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d, "a"] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "s"] & \bullet \arrow[r, "b"] & \bullet \end{tikzcd}$$

montre alors que f est un rétract de a, d'où $A \subseteq B_{\boxslash}$. L'inclusion réciproque étant évidente, cela conclut la preuve de l'affirmation $A = B_{\boxslash}$.

L'autre assertion est duale à la première.

Définition A.18. Une factorisation fonctorielle sur une catégorie C est une section

$$\Phi \colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Fon}([2], \mathsf{C})$$

du foncteur $d_1 \colon \mathrm{Fon}([2], \mathsf{C}) \to \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ de composition, autrement dit

$$f = B_\Phi(f) \circ A_\Phi(f)$$

pour tout morphisme f, où A_Φ et B_Φ sont les endofoncteurs de $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ définis respectivement comme $A_\Phi := d_2\Phi$ et $B_\Phi := d_0\Phi$.

On dit alors que Φ est *compatible* à un système de factorisation faible (A, B) lorsque A_Φ et B_Φ sont à valeurs dans A et dans B respectivement.

Exemple A.19. Les classes de fonctions I et S désignant respectivement les inclusions et les surjections de Ens sont manifestement stables par rétracts, et l'axiome du choix permet d'obtenir $I \boxslash S$. De plus, toute fonction ensembliste $X \to Y$ factorise fonctoriellement

$$X \hookrightarrow X \amalg Y \twoheadrightarrow Y$$

Finalement (I, S) est un système de factorisation faible sur Ens muni de factorisations fonctorielles.

Définition A.20. Soient C une catégorie et I une classe de morphismes de C.

1) On dit qu'un morphisme $f \colon x \to y$ de C est un recollement de I-cellules s'il existe une petite famille $(u_\omega \colon a_\omega \to b_\omega)_\omega$ de flèches de I telle que les coproduits

$$\coprod_\omega a_\omega \quad \text{et} \quad \coprod_\omega b_\omega$$

existent dans C, et un diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd} \coprod a_\omega \arrow[r, "\coprod u_\omega"] \arrow[d] & \coprod b_\omega \arrow[d] \\ x \arrow[r, "f"] & y \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \end{tikzcd}$$

2) Un complexe I-cellulaire relatif est une flèche $x \to y$ de C représentant la composée transfinie d'une chaîne de recollement de I-cellules.

   On note $\mathrm{cell}(I)$ l'ensemble des complexes I-cellulaires relatifs.

Exemple A.21. TODO : dans Top, les CW-complexes relatifs sont des complexes cellulaires relatifs pour les cellules $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$.

QUESTION : Est-ce que ce sont les seuls ? ? ?

Définition A.22. Soit κ un cardinal.

1) Un ensemble I est dit κ-dirigé si toute partie de I de cardinalité strictement inférieure à κ possède une borne supérieure.
2) Une catégorie C possède les colimites κ-dirigées si chaque diagramme $I \to \mathsf{C}$ issu d'un ensemble κ-dirigé admet une colimite dans C.

   Si tel est le cas, on dit qu'un objet x de C est κ-compact si la flèche canonique

$$\operatorname*{colim}_I \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(x, F(-)) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}\big(x, \operatorname*{colim}_I F\big)$$

   est bijective pour tout petit ensemble κ-dirigé I et tout diagramme $F\colon I \to \mathsf{C}$.
3) Si C est une catégorie cocomplète, un objet x de C est dit petit s'il est κ-compact pour un certain cardinal régulier κ.

Remarque A.23. Si $\operatorname{cof} \kappa < \kappa$ et si I est un ensemble ordonné κ-dirigé, alors I est également κ^+ dirigé, où κ^+ désigne le cardinal successeur de κ.

On peut donc se restreindre au cas $\operatorname{cof} \kappa = \kappa$ dans les définitions qui précèdent, autrement dit supposer le cardinal κ régulier. C'est ce que l'on fera dans la suite. L'avantage est alors que l'ensemble κ est lui-même κ-dirigé.

Remarque A.24. Si $\kappa \leq \lambda$ sont deux cardinaux réguliers et si C est une catégorie possédant les colimites κ-dirigées, alors tout objet κ-compact de C est en particulier λ-compact.

Le résultat suivant est appelé *argument du petit objet* dans la littérature.

Proposition A.25. *Si C est une catégorie cocomplète et I un* ensemble *de morphismes de C dont les sources sont petites, alors il existe une factorisation fonctorielle*

$$\Phi\colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Fon}([2], \mathsf{C})$$

sur C telle que les foncteurs A_Φ et B_Φ sont à valeurs respectivement dans $\mathrm{cell}(I)$ et $I^{\boxslash}$.

Démonstration

Il existe pour tout $u \in I$ un cardinal régulier κ_u pour lequel la source de u est κ_u-compacte. En particulier les sources de I sont toutes κ-compactes pour le cardinal

$$\kappa := \mathrm{card} \bigcup_{u \in I} \kappa_u$$

et on peut supposer κ régulier quitte à le prendre plus grand.

On construit alors par récurrence ordinale une chaîne

$$X_f\colon \kappa + 2 \to \mathsf{C}$$

pour tout morphisme $f\colon x \to y$.

— on pose $X_f(0) := x$ et $X_f(\kappa+1) := y$, la flèche $X_f(0) \to X_f(\kappa+1)$ étant f

— ayant construit la restriction de X_f à $\{\, \beta \mid \beta \leq \alpha \,\} \cup \{\kappa+1\}$, on définit un objet $X_f(\alpha+1)$ de C comme étant la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd} \coprod_{u\in I} \coprod_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mor}(\mathsf{C})}(u,f_\alpha)} a_u \arrow[r, "\coprod_u \coprod u"] \arrow[d] & \coprod_{u\in I} \coprod_{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mor}(\mathsf{C})}(u,f_\alpha)} b_u \arrow[d] \\ X_f(\alpha) \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner", very near end] & X_f(\alpha+1) \end{tikzcd}$$

en notant $u \colon a_u \to b_u$ pour tout $u \in I$ et f_α le morphisme $X_f(\alpha) \to X_f(\kappa+1) = y$. Le morphisme f_α factorise par construction

$$X_f(\alpha) \longrightarrow X_f(\alpha+1) \xrightarrow{f_{\alpha+1}} y$$

ce qui permet de prolonger X_f à $\alpha+1$.

— ayant défini X_f sur $\{\, \beta \mid \beta < \alpha \,\} \cup \{\kappa+1\}$ où α est un ordinal limite, on pose

$$X_f(\alpha) := \operatorname*{colim}_{\beta<\alpha} X_f(\beta)$$

et $f_\alpha \colon X(\alpha) \to y$ est la flèche obtenue par propriété universelle à partir des f_β.

Une nouvelle récurrence ordinale permet de montrer que cette construction est *naturelle* en f, autrement dit que la formule $f \mapsto X_f$ définit un foncteur $X \colon \mathrm{Mor}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Fon}(\kappa+2, \mathsf{C})$.

La chaîne $[2] \simeq 3 \to \kappa+2$ représentée par

$$0 \longrightarrow \kappa \longrightarrow \kappa+1$$

fournit par précomposition de X une factorisation naturelle de tout morphisme $f \colon x \to y$ comme

$$x \longrightarrow X_f(\kappa) \xrightarrow{f_\kappa} y$$

et la première flèche est un I-complexe relatif, en tant que composée de la chaîne restreinte $(X_f)|_\kappa$.

Il s'agit pour conclure de montrer que f_κ possède la propriété de relèvement à droite relativement aux flèches de I. Étant donnée une flèche u de I et un problème de relèvement

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_f(\kappa) \arrow[d, "f_\kappa"] \\ b \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & y \end{tikzcd}$$

il existe un ordinal $\alpha < \kappa$ tel que le morphisme $a \to X_f(\kappa)$ factorise

$$a \longrightarrow X_f(\alpha) \longrightarrow X_f(\kappa)$$

par κ-compacité de a, d'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_f(\alpha) \arrow[r] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & X_f(\kappa) \arrow[d, "f_\kappa"] \\ b \arrow[rr] & & y \end{tikzcd}$$

Mais alors le morphisme $b \to y$ factorise par la flèche structurale $b \to X_f(\alpha+1)$ indexée par le morphisme $u \to f_\alpha$ de $\mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ représenté par le cycle trapézoïdal, et le diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & X_f(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & X_f(\kappa) \arrow[d, "f_\kappa"] \\ b \arrow[r] & X_f(\alpha+1) \arrow[r, "f_{\alpha+1}"] & y \end{tikzcd}$$

commute. Le rectangle extérieur est le problème initial, et la composée

$$b \longrightarrow X_f(\alpha+1) \longrightarrow X_f(\kappa)$$

fournit un relèvement.

Pour conclure, on déduit de l'inclusion $I \subseteq \left(I^{\boxslash}\right)_{\boxslash}$ que $\mathrm{cell}(I) \subseteq \left(I^{\boxslash}\right)_{\boxslash}$ en vertu des propositions A.5 et A.14. Les ensembles $\left(I^{\boxslash}\right)_{\boxslash}$ et $I^{\boxslash}$ sont stables par rétracts d'après la proposition A.9.

A.26. *Engendrement cofibrant* — Si C est une catégorie cocomplète et I un ensemble de morphismes de C vérifiant les hypothèses de la proposition A.25, alors $\left((I^{\boxslash})_{\boxslash}, I^{\boxslash}\right)$ est un système de factorisation faible admettant des factorisations fonctiorelles. C'est une conséquence de l'inclusion

$$\mathrm{cell}(I) \subseteq (I^{\boxslash})_{\boxslash}$$

obtenue à partir de $I \subseteq (I^{\boxslash})_{\boxslash}$ en appliquant les propositions A.5 et A.14.

Un système de factorisation faible pouvant être construit de cette façon (resp. de façon duale) est dit à engendrement cofibrant (resp. à engendrement fibrant).

1.3 Catégories de modèles

Définition A.27. TODO

ANNEXE B

THÉORIE DE L'HOMOTOPIE ABSTRAITE

2.1 Catégories homotopiques

Définition B.1.

1) Une catégorie homotopique est la donnée d'une catégorie C et d'un ensemble $\mathscr{W}$ de morphismes de C contenant les identités et satisfaisant la propriété du *deux sur six* : étant donnés trois morphismes de C composables :

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \xrightarrow{h} \bullet$$

alors f, g, h et hgf appartiennent à $\mathscr{W}$ dès que c'est le cas de gf et hg.
Les morphismes de $\mathscr{W}$ sont appelés équivalences faibles.

2) Un foncteur $\mathsf{C} \to \mathsf{D}$ entre deux catégories homotopiques est dit homotopique s'il envoie les équivalences faibles de C sur des équivalences faibles de D.

TODO : localisation –> catégorie d'homotopie d'une catégorie homotopique
TODO : montrer qu'un

2.2 Catégorie des objets fibrants

2.3 Homotopie dans une catégorie de modèles

TODO : cylindres, objet de chemins TODO :
-> donner déf plus concrète de la catégorie d'homotopie

ANNEXE C

STRUCTURES DE CISINSKI

3.1 Petitesse dans les catégories de préfaisceaux

Lemme C.1. *Soit* C *une petite catégorie. La flèche canonique*

oui

induite par un diagramme commutatif de préfaisceaux sur C *de la forme*

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[d] & Z_0 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & Y_0 \arrow[d] \\ X & Z \arrow[l] \arrow[r] & Y \\ X_1 \arrow[u] & Z_1 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] & Y_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

Proposition C.2. *Soient* C *et* D *deux petites catégories, et*

$$F \colon \hat{\mathsf{C}} \to \hat{\mathsf{D}}$$

un foncteur commutant aux colimites κ*-dirigées pour un cardinal régulier* κ*. Alors il existe des cardinaux réguliers* λ *arbitrairement grands tels que* F *préserve les objets* λ*-compacts.*

Démonstration

> On peut supposer $\kappa \geq \operatorname{card} \operatorname{Mor}(\mathsf{C})$ quitte à changer κ en un cardinal régulier plus grand.

Lemme C.3 (Cisinski)**.** *Soient* C *une petite catégorie,* Ω *un* ensemble *de préfaisceaux sur* C *et* A *une classe de monomorphismes de préfaisceaux tels que*

(a) la classe A *est stable par sommes amalgamées et compositions transfinies*

(b) si u *et* vu *sont dans* A *pour deux monomorphismes composables de préfaisceaux* u *et* v*, alors* v *appartient également à* A

(c) pour tout préfaisceau X *sur* C*, la flèche canonique*

$$\operatorname*{colim}_{\substack{U \hookrightarrow X \\ U \in \Omega}} U \to X$$

est un isomorphisme

(d) pour tout monomorphisme $K \hookrightarrow L$ de A et tout sous-objet $U \hookrightarrow L$ appartenant à Ω, il existe dans Ω un préfaisceau V intermédiaire entre U et L tel que le tiré en arrière[1]

$$K \times_L V \hookrightarrow V$$

appartienne encore à A.

Si I désigne la sous-classe de A formée des flèches de but appartenant à Ω, alors $A = \mathrm{cell}(I)$.

Démonstration

Fixons $i\colon K \hookrightarrow L$ un élément de A. L'axiome du choix garantit l'existence d'un ordinal α et d'une bijection

$$\chi\colon \alpha \simeq \{\, U \hookrightarrow L \mid U \in \Omega \,\}$$

Pour $\beta < \alpha$, on note $U(\beta) \hookrightarrow L$ le sous-objet $\chi(\beta)$ de L. Quitte à choisir α plus grand, on peut supposer que l'ordinal α est limite, en étendant χ en envoyant le surplus sur le sous-objet $\varnothing \hookrightarrow L$. On perd le caractère bijectif de χ mais on n'utilisera dans la suite que sa surjectivité.

On construit alors par récurrence une chaîne

$$K\colon \alpha + 2 \to \hat{\mathsf{C}}$$

de morphismes de A.

— on pose $K(0) := K$ et $K(\alpha+1) := L$, le morphisme $K(0) \to K(\alpha+1)$ étant i

— supposons avoir construit K jusqu'à l'ordinal $\beta < \alpha$ inclus, de sorte à ce que la flèche

$$j\colon K(\beta) \to K(\alpha+1) = L$$

soit dans A. Il existe alors par hypothèse un préfaisceau $V(\beta)$ de Ω et une factorisation

$$U(\beta) \hookrightarrow V(\beta) \hookrightarrow L$$

de $\chi(\beta)$, tels que le monomorphisme $K(\beta) \times_L V(\beta) \hookrightarrow V(\beta)$ obtenu en tirant j en arrière appartienne à A.

On construit $K(\beta+1)$ comme étant la somme amalgamée

$$\begin{tikzcd}
K(\beta) \times_L V(\beta) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & V(\beta) \arrow[d, hook] \\
K(\beta) \arrow[r, hook] & K(\beta+1) \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start]
\end{tikzcd}$$

où les flèches de but $K(\beta+1)$ sont des monomorphismes car obtenues par somme amalgamées de monomorphismes de préfaisceaux. La flèche $K(\beta) \hookrightarrow K(\beta+1)$ de A est obtenue par recollement d'une I-cellule, et permet de factoriser j comme

$$K(\beta) \hookrightarrow K(\beta+1) \xrightarrow{k} L$$

et k est un monomorphisme car $K(\beta)$ et $V(\beta)$ sont des sous-objets de L. Nos hypothèses garantissent par conséquent que k est une flèche de A.

Remarquons aussi que $K(\beta+1)$ est un sous-objet de L qui contient $K(\beta)$ et $U(\beta)$.

— si $\beta \leq \alpha$ est un ordinal limite tel que $K(\gamma)$ a été construit pour $\gamma < \beta$, alors on définit $K(\beta)$ comme étant la composée de la restriction de K à β. La propriété universelle montre que i factorise

1. Cette flèche est bien un monomorphisme car le produit fibré est pris au-dessus de deux monomorphismes dans $\hat{\mathsf{C}}$, où les limites se calculent terme à terme dans Ens.

$$K \hookrightarrow K(\beta) \xrightarrow{k} L$$

où le premier morphisme est dans A par hypothèse de stabilité. Remarquons que k est construit comme colimite filtrante de monomorphismes de préfaisceaux, donc est lui-même un monomorphisme. Il doit donc également appartenir à A.

On en tire en particulier une factorisation de i

$$K \overset{j}{\hookrightarrow} K(\alpha) \overset{f}{\hookrightarrow} L$$

où j est dans A, et même dans cell(I) par construction.

Montrons que f est un isomorphisme. Tout sous-objet $U \hookrightarrow L$ contenu dans Ω factorise canoniquement

$$U \hookrightarrow K(\alpha) \hookrightarrow L$$

par surjectivité de χ. En particulier si $U \to V$ est un morphisme entre deux tels sous-objets, alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr, hook] & K(\alpha) \arrow[d, hook, "f"] & V \arrow[l, hook'] \arrow[dl, hook] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

commute. En effet c'est le cas des deux triangles inférieur et du cycle extérieur, et la commutativité du cycle supérieur découle alors de l'injectivité terme à terme de f. On en déduit une factorisation

$$\operatorname*{colim}_{\substack{U \hookrightarrow L \\ U \in \Omega}} U \longrightarrow K(\alpha) \xrightarrow{f} L$$

de la flèche canonique, qui est par hypothèse un isomorphisme. En particulier f est surjective terme à terme, donc est un isomorphisme de préfaisceaux.

Finalement i, tout comme j, est un représentant de la composée transfinie de la restriction de la chaîne K à α et donc appartient à cell(I). L'inclusion réciproque cell$(I) \subseteq A$ est évidente.

Corollaire C.4. *Soit C une petite catégorie. Si A est une classe de monomorphismes de préfaisceaux sur C telle que*

(a) la classe A est stable par sommes amalgamées et compositions transfinies

(b) si u et v sont des monomorphismes tels que u et vu sont dans A, alors v appartient également à A

(c) il existe des cardinaux réguliers κ arbitrairement grands tels que, pour tout monomorphisme $K \hookrightarrow L$ de A et tout sous-objet κ-compact $U \hookrightarrow L$, il existe un préfaisceau κ-compact intermédiaire V entre U et L tel que l'inclusion

$$K \times_L V \hookrightarrow V$$

soit dans A

alors $A =$ cell(I) pour un certain ensemble *I de monomorphismes.*

Démonstration

TODO : Si κ est un cardinal régulier suffisamment grand, alors il existe d'après TODO et l'axiome du choix un ensemble Ω de préfaisceaux κ-compacts tel que tout préfaisceau κ-compact sur C est isomorphe à un élément de Ω.

Le TODO permet alors d'appliquer le lemme C.3 à Ω et A, qui fournit l'égalité

$$A = \operatorname{cell}(J)$$

où J est la classe des flèches de A de but appartenant à Ω. L'axiome du choix permet de construire une partie I de J en choisissant, s'il en existe, un représentant appartenant à A de chaque *classe* (qui sont en fait des ensembles dans un univers plus grand) d'isomorphisme de sous-objets de Ω.

La classe des sous-objets d'un préfaisceau étant essentiellement petite, I est en fait un ensemble par remplacement, et $A = \operatorname{cell}(I)$.

3.2 Cylindres

C.5. *Segment universel* — Le segment universel est la petite catégorie Seg obtenue comme quotient de la catégorie libre sur deux objets engendrée par les morphismes

$$\begin{tikzcd} \Delta^0 \arrow[r, bend left, "i_1"] \arrow[r, bend right, "i_0"'] & \Delta^1 \arrow[l, "p" description] \end{tikzcd}$$

par les relations $pi_0 = \mathsf{id}$ et $pi_1 = \mathsf{id}$. Autrement dit, on impose $\operatorname{End}(\Delta^0) = \{\mathsf{id}\}$.

Définition C.6. Si X est un préfaisceau sur une petite catégorie C, un cylindre sur X est un foncteur $F\colon \mathsf{Seg} \to \hat{\mathsf{C}}$ envoyant Δ^0 sur X tel que la flèche

$$((i_0)_*, (i_1)_*)\colon X \amalg X \to F(\Delta^1)$$

est un monomorphisme, en notant $\hat{\mathsf{C}} := \operatorname{Fon}(\mathsf{C}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Ens})$ la catégorie des préfaisceaux sur C.

La sous-catégorie pleine de $\operatorname{Fon}(\mathsf{Seg}, \hat{C})$ formée des cylindres est notée $\operatorname{Cyl}(\mathsf{C})$. Un cylindre fonctoriel de $\hat{\mathsf{C}}$ est alors une section

$$\hat{C} \to \operatorname{Cyl}(\mathsf{C})$$

du foncteur $\operatorname{Cyl}(\mathsf{C}) \to \hat{\mathsf{C}}$ défini par la formule $F \mapsto F(\Delta^0)$.

C.7. *Notation* — Si $\mathscr{I}$ est un cylindre fonctoriel sur $\hat{\mathsf{C}}$, on peut noter $- \otimes \Delta^1$ pour désigner le foncteur $\mathscr{I}(-)(\Delta^1)$ lorsque le contexte le permet.

On fixe dans la suite une petite catégorie C.

Définition C.8. Soient $\mathscr{I}$ un cylindre fonctoriel sur $\hat{\mathsf{C}}$, et X et Y deux préfaisceaux sur C.

1) Étant données deux flèches $f, g\colon X \to Y$ de $\hat{\mathsf{C}}$, une $\mathscr{I}$-homotopie élémentaire de f vers g est une flèche
$$h\colon X \otimes \Delta^1 \to Y$$
vérifiant $h(i_0)_* = f$ et $h(i_1)_* = g$.

2) La relation d'équivalence sur $\operatorname{Hom}_{\hat{\mathsf{C}}}(X, Y)$ engendrée par la relation de $\mathscr{I}$-homotopie élémentaire est appelée $\mathscr{I}$-homotopie.

Proposition C.9. *La relation d'homotopie sur les morphismes de $\hat{\mathsf{C}}$ induite par un cylindre fonctoriel est compatible à la composition.*

Démonstration

> Il suffit de montrer que c'est le cas pour la relation d'homotopie élémentaire. Celle-ci est manifestement stable par composition à gauche, et la fonctorialité de $X \mapsto X \otimes \Delta^1$ montre la stabilité par composition à droite.

C.10. *Structure homotopique induite par un cylindre* — Si $\mathscr{I}$ est un cylindre fonctoriel sur $\hat{\mathsf{C}}$, la proposition C.9 montre que l'on obtient bien une catégorie $\mathsf{Ho}_{\mathscr{I}}(\hat{\mathsf{C}})$ à partir de $\hat{\mathsf{C}}$ en quotientant tous les morphismes par la relation de $\mathscr{I}$-homotopie, dite catégorie de $\mathscr{I}$-homotopie de $\hat{\mathsf{C}}$.

La catégorie $\hat{\mathsf{C}}$ hérite alors d'une structure homotopique, induite en tirant en arrière les isomorphismes par la flèche canonique

$$\hat{\mathsf{C}} \to \mathsf{Ho}_{\mathscr{I}}(\hat{\mathsf{C}})$$

Les équivalences ainsi obtenues sont appelées équivalences de $\mathscr{I}$-homotopie.

Définition C.11. Un cylindre de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$ est un cylindre fonctoriel sur $\hat{\mathsf{C}}$ tel que

(i) le foncteur $- \otimes \Delta^1$ est cocontinu et préserve les monomorphismes

(ii) pour tout monomorphisme $i\colon K \hookrightarrow L$ de $\hat{\mathsf{C}}$, on a des carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, hook, "(i_\varepsilon)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & L \arrow[d, hook, "(i_\varepsilon)_*"] \\ K \otimes \Delta^1 \arrow[r, hook, "i_*"] & L \otimes \Delta^1 \end{tikzcd}$$

pour tout $\varepsilon = 0, 1$.

Proposition C.12. *Étant donné un cylindre de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$, le carré*

$$\begin{tikzcd} K \otimes \partial\Delta^1 \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[d, hook] & L \otimes \partial\Delta^1 \arrow[d, hook] \\ K \otimes \Delta^1 \arrow[r, hook, "i_*"] & L \otimes \Delta^1 \end{tikzcd}$$

induit par un monomorphisme $i\colon K \hookrightarrow L$ est cartésien.

Démonstration

> Si $X \to A$ est un morphisme de $\hat{\mathsf{C}}$, alors le foncteur
>
> $$- \times_A X \colon \hat{\mathsf{C}}_{/A} \to \hat{\mathsf{C}}$$
>
> commute aux coproduits. Il suffit en effet d'après la proposition 1.4 de le vérifier terme à terme dans Ens, où c'est évident.
>
> L'évaluation du carré cartésien naturel

$$\begin{tikzcd} - \times_A X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ - \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

pour $X \to A$ le morphisme

$$i_*\colon K \otimes \Delta^1 \hookrightarrow L \otimes \Delta^1$$

en les objets $L \otimes \{0\}$ et $L \otimes \{1\}$ puis

$$L \otimes \partial\Delta^1 := L \otimes \{0\} \amalg L \otimes \{1\}$$

permet de conclure.

Remarque C.13. Étant donné un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & Y \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r, hook] & T \end{tikzcd}$$

au-dessus de deux monomorphismes de $\hat{\mathsf{C}}$, on vérifie en utilisant la proposition 1.4 que la flèche induite $X \amalg_Z Y \to T$ est encore un monomorphisme. On le notera $X \cup Y \hookrightarrow T$.

En particulier, un cylindre de Cisinski donne lieu, pour tout monomorphisme $i\colon K \hookrightarrow L$, à des inclusions

$$K \otimes \Delta^1 \cup L \otimes \{\varepsilon\} \hookrightarrow L \otimes \Delta^1$$

pour $\varepsilon = 0, 1$. Elles factorisent en fait par

$$K \otimes \Delta^1 \cup L \otimes \partial\Delta^1 \hookrightarrow L \otimes \Delta^1$$

et les inclusions $L \otimes \{\varepsilon\} \subseteq L \otimes \partial\Delta^1$.

3.3 Structures de Cisinski

Dans la suite C désigne une petite catégorie. L'objectif de cette section consiste à munir la catégorie $\hat{\mathsf{C}}$ des préfaisceaux sur C d'une structure de catégorie de modèles dont les cofibrations sont les monomorphismes. On appliquera dans le corps du texte cette construction à la catégorie sEns des ensembles simpliciaux par deux fois, pour obtenir les structures de Kan et de Joyal respectivement.

Définition C.14. Si $\mathscr{I}$ est un cylindre de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$, une classe d'extensions $\mathscr{I}$-anodines est une classe A de morphismes de $\hat{\mathsf{C}}$ vérifiant

(i) il existe un *ensemble* Λ de monomorphismes de préfaisceaux tel que $A = (\Lambda^{\boxslash})_{\boxslash}$

(ii) si $i\colon K \hookrightarrow L$ est un monomorphisme alors la flèche

$$K \otimes \Delta^1 \cup L \otimes \{\varepsilon\} \hookrightarrow L \otimes \Delta^1$$

est dans A pour $\varepsilon = 0, 1$

(iii) si $i\colon K \hookrightarrow L$ est dans A, alors la flèche

$$K \otimes \Delta^1 \cup L \otimes \partial\Delta^1 \hookrightarrow L \otimes \Delta^1$$

également.

On dit que Λ *engendre* la classe A d'extensions anodines.

Justification

L'énoncé de (iii) utilise implicitement que toutes les flèches de A sont des monomorphismes. On va montrer que c'est une conséquence de l'axiome (i).

La catégorie C est petite, donc la catégorie $\hat{\mathsf{C}}$ des préfaisceaux sur C est ω-présentable (TODO : ajouter référence). En particulier l'argument du petit objet A.25 s'applique à tout ensemble de morphismes de $\hat{\mathsf{C}}$. Dans notre cas, la proposition A.25 s'applique en particulier à Λ, et le lemme du rétract montre que les éléments de A sont exactement les rétracts des flèches de $\mathrm{cell}(\Lambda)$.

L'exemple A.19 montre que la classe des monomorphismes de Ens est stable par somme, composée transfinie et passage au rétract (et même somme amalgamée mais on n'en a pas besoin). Or « *être un monomorphisme de* $\hat{\mathsf{C}}$ » est une propriété qui se vérifie terme à terme, donc la classe des monomorphismes de $\hat{\mathsf{C}}$ est stable par les mêmes opérations. Il vient finalement que chaque flèche de A est en particulier un monomorphisme.

Définition C.15. Une structure de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$ est un couple $(\mathscr{I}, A)$ où $\mathscr{I}$ est un cylindre de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$ et A une classe d'extensions $\mathscr{I}$-anodines.

Étant donnée une structure $(\mathscr{I}, A)$ de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$, on dit qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ de préfaisceaux est

— une cofibration si c'est un monomorphisme

— une fibration triviale (resp. fibration naïve) s'il possède la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations (resp. extensions anodines)

— une équivalence faible s'il induit des bijections

$$f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}_{\mathscr{I}}(\hat{\mathsf{C}})}(Y, T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}_{\mathscr{I}}(\hat{\mathsf{C}})}(X, T)$$

pour tout préfaisceau T fibrant, c'est-à-dire tel que $T \to \{*\}$ est une fibration naïve

— une cofibration triviale si c'est une cofibration ainsi qu'une équivalence faible

— une fibration s'il possède la propriété de relèvement à droite relativement aux cofibrations triviales.

C.16. *Équivalences d'homotopie et équivalences faibles* — Si $\mathscr{I}$ est un cylindre de Cisinski sur $\hat{\mathsf{C}}$, alors une équivalence de $\mathscr{I}$-homotopie est manifestement une équivalence faible relativement à n'importe quelle structure de Cisinski $(\mathscr{I}, A)$.

De plus les équivalences faibles ont également la propriété du deux sur six, car c'est le cas des isomorphismes de Ens. La structure $(\mathscr{I}, A)$ induit par conséquent une structure homotopique sur $\hat{\mathsf{C}}$ avec plus d'équivalences que celle discutée en C.10 induite par le seul cylindre $\mathscr{I}$.

Remarquons cependant qu'une équivalence faible entre préfaisceaux *fibrants* est une équivalence d'homotopie d'après le lemme de Yoneda.

Théorème C.17. *TODO : une structure de Cisinski donne lieu à une structure de catégorie de modèles sur* $\hat{\mathsf{C}}$ *à engendrement cofibrant. (et les (co)fibrations triviales + objets fibrants sont bien ce que l'on a défini)*

TODO : c'est quoi les cylindres sur cette cat de modèles ? + rapport avec notre cylindre de Cisinski $\mathscr{I}$ + quand est-ce que notre structure est propre (comme la structure de Quillen sur sEns par exemple) ?

TODO : A-localiseurs ?

TODO : permet de construire les structures de modèles classique + Joyal sur sEns