

## ASE2020 Dynamics: Final exam (2 problems)

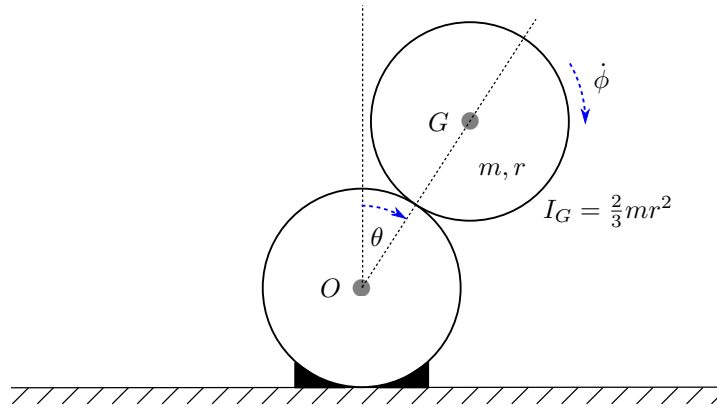
시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하십시오.

“나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.”

“By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period.”

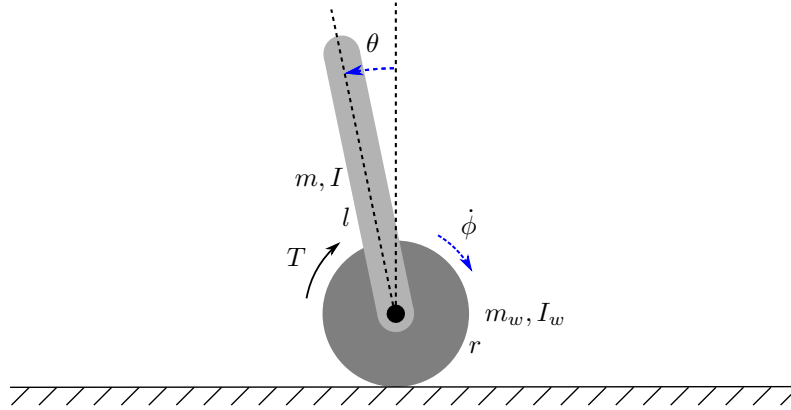
- 1) *A ball rolling on a ball (20 points)*. 동일한 공 두 개가 아래 그림과 같이 수직면 상에 놓여있다. 공 하나는 바닥에 접촉제로 단단히 고정되어 있으며, 또 하나는 꼭대기에 가만히 올려져 있다가 중력가속도  $g$ 에 의해 천천히 오른쪽으로 굴러내려가기 시작했다. 두 공의 접촉점 위치를 수직으로부터의 각도  $\theta$ 로 표현하고, 구르는 공의 각속도를  $\dot{\phi}$ 이라 하자. 공의 질량과 반경은 각각  $m, r$ 이며, 공의 관성모멘트는  $I_G = \frac{2}{3}mr^2$ 이다.

두 공 사이의 정지마찰계수를  $\mu$ 라 하면 ( $\mu > 0$ ), 공은 처음에 미끄러지지 않고 굴러내려가다가 어느 순간 미끄러지면서 구를 것이다. 우선은, 미끄러지지 않고 굴러내려가는 초반의 상황을 생각하자.



- 접촉점 방향의 변화율  $\dot{\theta}$ 과 구르는 공의 회전각속도  $\dot{\phi}$ 의 관계를 구하십시오. 힌트: 구르는 공의 속도  $v_G$ 를  $\theta$ 과  $\phi$ 를 각각 사용하여 표현해보면 알 수 있음 (5pts.).
- 구르는 공에 작용하는 힘과 가속도, 각가속도가 모두 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).
- 접촉점의 위치 변화를 설명할 수 있는  $\theta$ 의 운동방정식을 구하십시오. 즉,  $\ddot{\theta}$ 과  $\dot{\theta}$ 을  $\theta$ 의 함수로 각각 표현하십시오 (5pts.).
- 공은 언제부터 미끄러지기 시작할까? 미끄러지기 시작하는 위치  $\theta_{\text{slip}}$ 을 직접 계산할 필요는 없으며,  $\theta_{\text{slip}}$ 을 계산할 수 있는 관계식을 제시하거나 그래프를 통해 설명하면 됨 (5pts.).

- 2) *Segway (20 points)*. 막대와 휠로 이루어진 세그웨이의 동역학을 분석하고자 한다. 막대는 세그웨이 플랫폼과 탑승자를 모델링하며, 막대와 휠 사이는 제어토크  $T$ 를 발생시킬 수 있는 모터로 연결되어 있는데, 모터는 적절한  $T$ 를 통해 휠을 회전시키며 막대의 균형을 유지시키는 역할을 한다. 제어 모터에 적절한 신호가 공급되면, 그림에 표현된 것과 같이 휠에는 시계방향의 토크( $+T$ )가 작용하고, 동시에 막대에는 반력에 의한 반시계방향 토크( $-T$ )가 작용한다. 휠과 바닥 사이의 정지마찰계수는 충분히 커서, 휠은 미끄러지지 않고 구르기만 하는 운동을 한다고 가정한다.



- 막대의 질량:  $m$
  - 막대의 길이:  $2l$  (무게중심은 한 가운데에 위치)
  - 막대의 무게중심에 대한 관성모멘트:  $I$
  - 막대의 수직으로부터의 회전각:  $\theta$
  - 휠의 질량과 반경:  $m_w, r$
  - 휠의 무게중심에 대한 관성모멘트:  $I_w$
  - 휠의 회전각속도:  $\dot{\phi}$
  - 중력가속도:  $g$
- a) 막대에 작용하는 모든 힘/토크와 가속도/각가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).
- b) 휠에 작용하는 모든 힘/토크와 가속도/각가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (5pts.).
- c) 막대의 회전각  $\theta$ 와 휠의 회전각  $\phi$ 에 관한 운동방정식을 다음의 형태로 표현하시오. 즉,  $\bar{M}$ 을 문제에 주어진 변수와 상수들을 사용하여 표현하시오 (5pts.).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T + mgl \sin \theta \\ T - mrl\dot{\theta}^2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

- d) 막대의 회전각  $\theta$ 와 각속도  $\dot{\theta}$ 이 매우 작다고 가정하고, 위에서 얻은 운동방정식을 아래의 형태로 선형화(linearize)하시오. 즉,  $M$ 과  $K$ 를 문제에 주어진 상수들만을 사용하여 표현하시오 (5pts.).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_K \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} T$$