

자동제어(Automatic Control)

3장 동적시스템의 미분방정식 해

교재: Automatic Control Systems

미분방정식

- 공학에서 다루게 되는 많은 시스템이 미분방정식에 의하여 수식적으로 모델링된다. 예를 들면 RLC (저항 – 인덕턴스 – 커패시턴스) 직렬회로는 미분방정식

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t)$$

- 으로 기술되며, 이때 R 은 저항, L 은 인덕턴스, C 는 커패시턴스, $i(t)$ 는 회로의 전류, $e(t)$ 는 인가전압이다. 이 경우 $e(t)$ 는 구동함수, t 는 독립변수이며, $i(t)$ 는 종속변수 또는 미분방정식의 해로 주어지는 미지수이다.

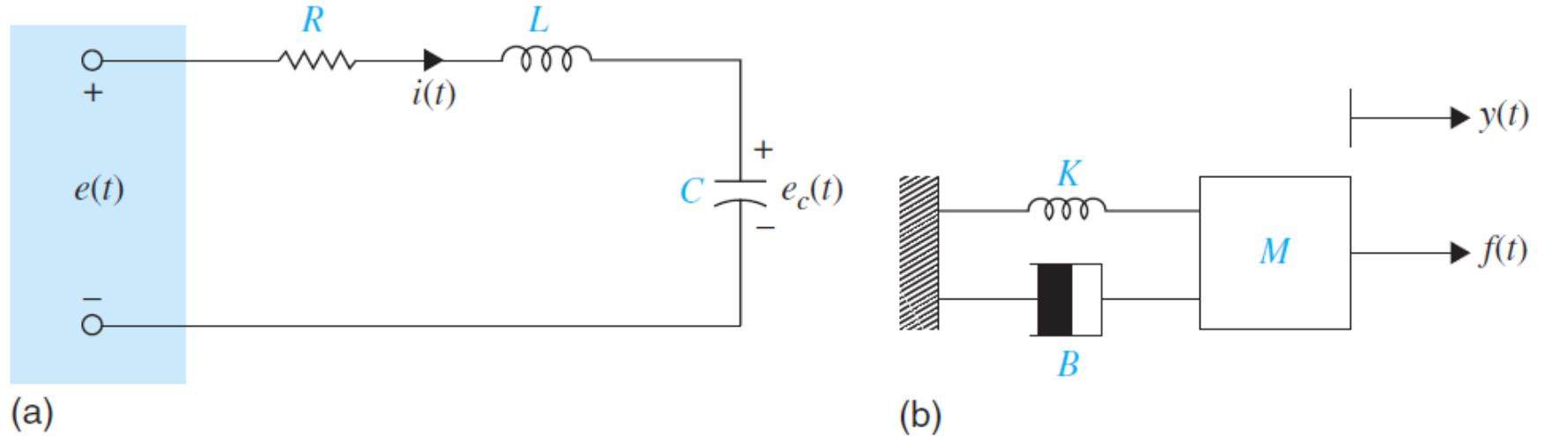


Figure 3-1 (a) A series RLC network. (b) A spring-mass-damper system.

$$LC \frac{d^2 e_c(t)}{dt^2} + RC \frac{de_c(t)}{dt} + e_c(t) = e(t) \quad (3-1)$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (3-3)$$



$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (3-4)$$

표준형 2차 시스템 모델

선형 상미분방정식

- 일반적으로 n 차 시스템의 미분방정식은

$$\begin{aligned}\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)\end{aligned}$$

인데, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 이 $y(t)$ 의 함수가 아니라면 선형 상미분방정식(**linear ordinary differential equation**)이라고도 부른다.

- 1차 선형 상미분방정식의 일반형은

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

- 2차 선형 상미분방정식의 일반형은

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

비선형 미분방정식

- 많은 물리시스템은 비선형이지만, 특정한 동작 점에서 선형화함. 예를 들어, 질량 m , 길이 l 을 갖는 단진자 운동을 미분방정식으로 나타내면,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

- 아주 작은 운동(미소운동)에 대해서 동작 점으로써 정적인 평형위치 $\theta=0$ 을 이용하여 선형화하면 다음과 같음

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

라플라스변환

WHY?

1. 복잡한 방정식이 한번의 연산으로 풀림
2. 미분방정식이 s 의 대수방정식으로 바뀌며, 이를 통해 얻어진 s 영역에서의 해를 역 라플라스변환에 의하여 최종해를 구함.

라플라스변환의 정의

- 어떤 유한한 실수 σ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 함수 $f(t)$ 가 주어졌다고 하자.

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

- $f(t)$ 의 라플라스변환은 다음과 같다.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- 변수 s 는 복소변수 $s = \sigma + j\omega$, 라플라스연산자

$$F(s) = f(t) \text{의 라플라스변환} = \mathcal{L}[f(t)]$$

라플라스변환의 예제

EXAMPLE 3-2-1 $f(t)$ 는 다음과 같이 정의되는 단위계단함수이다.

$$\begin{aligned}f(t) &= u_s(t) = 1 & t > 0 \\&= 0 & t < 0\end{aligned}$$

$f(t)$ 의 라플라스변환은

$$F(s) = \mathcal{L}[u_s(t)] = \int_0^\infty u_s(t)e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

EXAMPLE 3-2-2 다음과 같은 지수함수를 고찰하기로 한다.

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad t \geq 0$$

여기서 α 는 상수이다. $f(t)$ 의 라플라스변환은 다음과 같다.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s+\alpha}$$

라플라스변환의 중요한 정리

■ 정리 1. 상수와의 곱셈

k 는 상수이고 $F(s)$ 는 $f(t)$ 의 라플라스변환이다. 그러면

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$$

■ 정리 2. 합과 차

$F_1(s)$ 과 $F_2(s)$ 를 각각 $f_1(t)$ 과 $f_2(t)$ 의 라플라스변환이라고 하자. 그러면

$$\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$$

■ 정리 3. 미분

$F(s)$ 는 $f(t)$ 의 라플라스변환이고 $f(0)$ 는 $t \rightarrow 0$ 일 때의 $f(t)$ 의 극한치이다. $f(t)$ 의 시간도함수의 라플라스변환은

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0) \quad (2-13)$$

라플라스변환의 중요한 정리

일반적으로 $f(t)$ 의 고차미분에 대하여

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= s^n F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left[s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} + \cdots + \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] \quad (2-14) \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

여기서 $f^{(i)}(0)$ 은 $f(t)$ 의 i 계 도함수의 $t=0$ 에서의 값이다.

정리 4. 적분

$f(t)$ 의 1차적분의 라플라스변환은 $f(t)$ 의 라플라스변환을 s 로 나눈 것과 같다. 즉

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2-15)$$

일반적으로 n 차의 적분에 대하여

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f(t) d\tau dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n} \quad (2-16)$$

라플라스변환의 중요한 정리

■ 정리 5. 시간의 추이

시간 T 만큼 지연된 $f(t)$ 의 라플라스변환은 $f(t)$ 의 라플라스변환에 e^{-Ts} 를 곱한 것과 같다. 즉

$$\mathcal{L}[f(t - T)u_s(t - T)] = e^{-Ts} F(s) \quad (2-17)$$

여기서 $u_s(t-T)$ 는 T 만큼 오른쪽으로 이동된 단위계단함수를 나타낸다.

■ 정리 6. 초기치 정리

$f(t)$ 의 라플라스변환이 $F(s)$ 일 때, 다음의 시간극한이 존재하면

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2-18)$$

- 최종치 정리는 $sF(s)$ 의 극이 s 평면 상의 우반평면과 허수축 상에 존재하지 않을 경우에만 유효하다.

라플라스변환의 중요한 정리

정리 8. 복소추이

$f(t)$ 에 $e^{\mp\alpha t}$ 가 곱하여진 것의 라플라스변환은 라플라스변환 $F(s)$ 의 s 대신에 $s \pm \alpha$ 를 대입한 것과 같으며, α 는 상수이다. 즉

$$\mathcal{L}[e^{\mp\alpha t}f(t)] = F(s \pm \alpha) \quad (2-23)$$

정리 9. 실수 합성적분(복소 곱셈)

$F_1(s), F_2(s)$ 가 각각 $f_1(t), f_2(t)$ 의 라플라스변환이고, $t < 0$ 에서 $f_1(t)=0, f_2(t)=0$ 이다. 그러면

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t-\tau)d\tau\right] \end{aligned} \quad (2-24)$$

여기서 기호 $*$ 는 시간영역에서의 합성적분(convolution)을 나타낸다.

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] \neq f_1(t)f_2(t)$$

라플라스변환의 중요한 정리

표 2-1 라플라스변환에 관한 정리

Multiplication by a constant $\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s)$

Sum and difference $\mathcal{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s)$

Differentiation $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) \\ - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

where

$$f^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k f(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Integration $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f(t) d\tau dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1}\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

라플라스변환의 중요한 정리

Shift in time

$$\mathcal{L}[f(t - T)u_s(t - T)] = e^{-Ts}F(s)$$

Initial-value theorem

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Final-value theorem

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ if $sF(s)$ does not have poles on or to the right of the imaginary axis in the s -plane.

Complex shifting

$$\mathcal{L}[e^{\mp at}f(t)] = F(s \pm \alpha)$$

Real convolution

$$\begin{aligned} F_1(s)F_2(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau\right] \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t f_2(\tau)f_1(t - \tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] \end{aligned}$$

임펄스응답과 전달함수

- 임펄스응답(impulse response): 단위 임펄스 함수 $\delta(t)$ 일 때의 출력으로 정의.
- 전달함수(transfer function): 선형시불변시스템에서는 모든 초기조건이 0일때의 임펄스응답의 라플라스변환.
- $G(s)$ 는 입력 $u(t)$, 출력 $y(t)$ 및 임펄스응답 $g(t)$ 인 단일입력 단일출력시스템의 전달함수를 나타낸다.

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\
 &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (2-86)
 \end{aligned}$$

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)U(s)$$

$u(t)$ 와 $y(t)$ 사이의 전달함수는

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

전달함수의 성질

1. 전달함수는 오직 선형시불변시스템에만 정의된다. 비선형시스템에는 정의되지 않는다.
2. 시스템의 입력변수와 출력변수 사이의 전달함수는 임펄스 응답의 라플라스변환으로 정의된다. 한편 입출력변수 사이의 전달함수는 출력의 라플라스변환과 입력의 라플라스변환과의 비이기도 하다.
3. 시스템의 모든 초기조건은 0으로 한다.
4. 전달함수는 시스템의 입력과는 무관하다.
5. 연속치 시스템의 전달함수는 복소변수 s 만의 함수로 표현된다. 그것은 실변수 시간 또는 독립변수로 쓰이는 어떠한 변수의 함수도 아니다. 차분방정식으로 모델링되는 이산치 시스템에서는 z 변환을 이용하며 전달함수는 z 의 함수이다(부록 I 참조).

특성방정식 (characteristic equation)

- 전달함수의 분모다항식을 0으로 놓아 얻어지는 방정식

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0$$

- 선형 단일입력 단일출력시스템의 안정도는 특성방정식의 근에 의하여 좌우됨

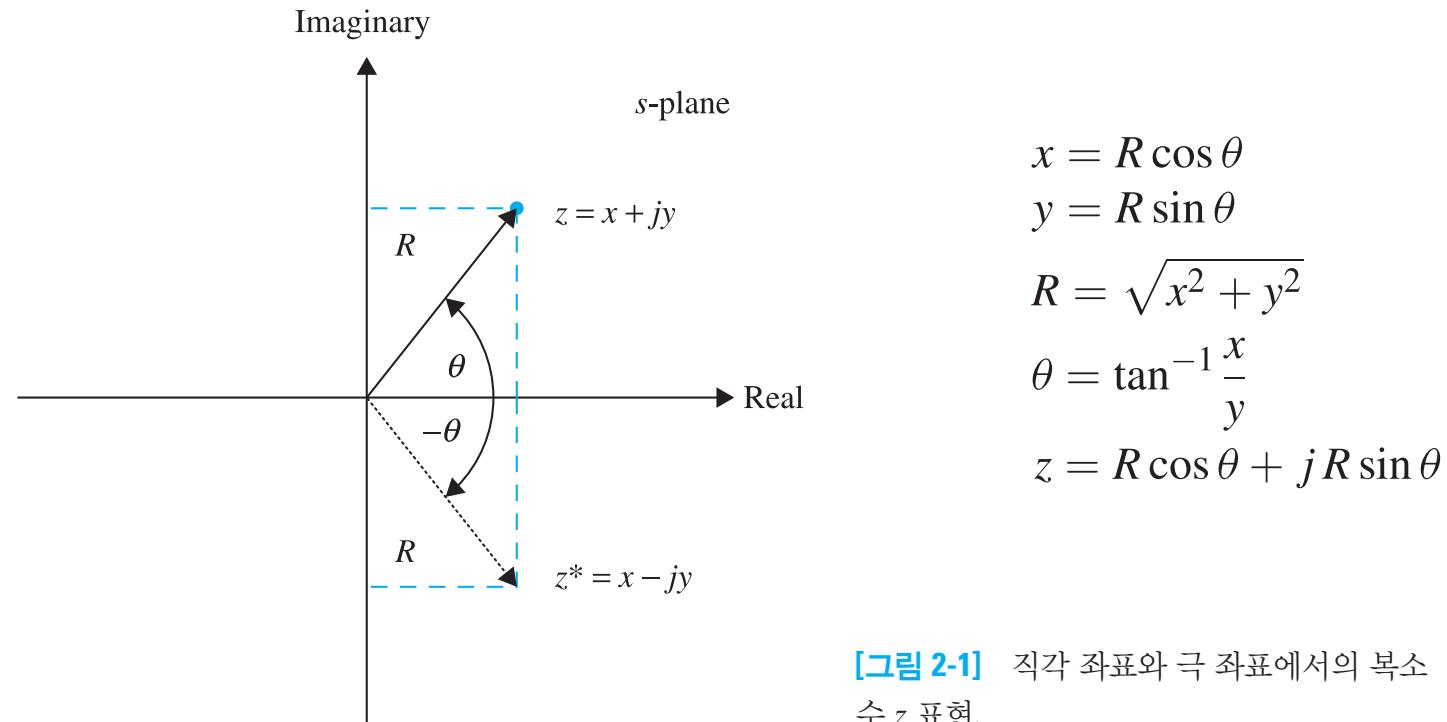
복소변수의 개념

- 복소수

복소수는 직각 좌표계에서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z = x + jy$$

여기서, $j = \sqrt{-1}$ 이고 (x, y) 는 각각 z 에 대한 실수부와 허수부이다. .



복소변수의 개념

- 오일러 공식(Euler formula) $e^{j\theta} = R \cos \theta + j R \sin \theta$
- 극형식(polar form) $z = R e^{j\theta} = R \angle \theta$

[표 2-1] 복소수의 기본 특성

Addition

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \\ \rightarrow z = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = R_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = R_2 e^{j\theta_2} \\ \rightarrow z = (R_1 + R_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \rightarrow z = (R_1 + R_2) \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Subtraction

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \\ \rightarrow z = (x_1 + x_2) - j(y_1 + y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = R_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = R_2 e^{j\theta_2} \\ \rightarrow z = (R_1 - R_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \\ \rightarrow z = (R_1 - R_2) \angle (\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

Multiplication

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \\ \rightarrow z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ j^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = R_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = R_2 e^{j\theta_2} \\ \rightarrow z = (R_1 R_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \\ \rightarrow z = (R_1 R_2) \angle (\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

Division

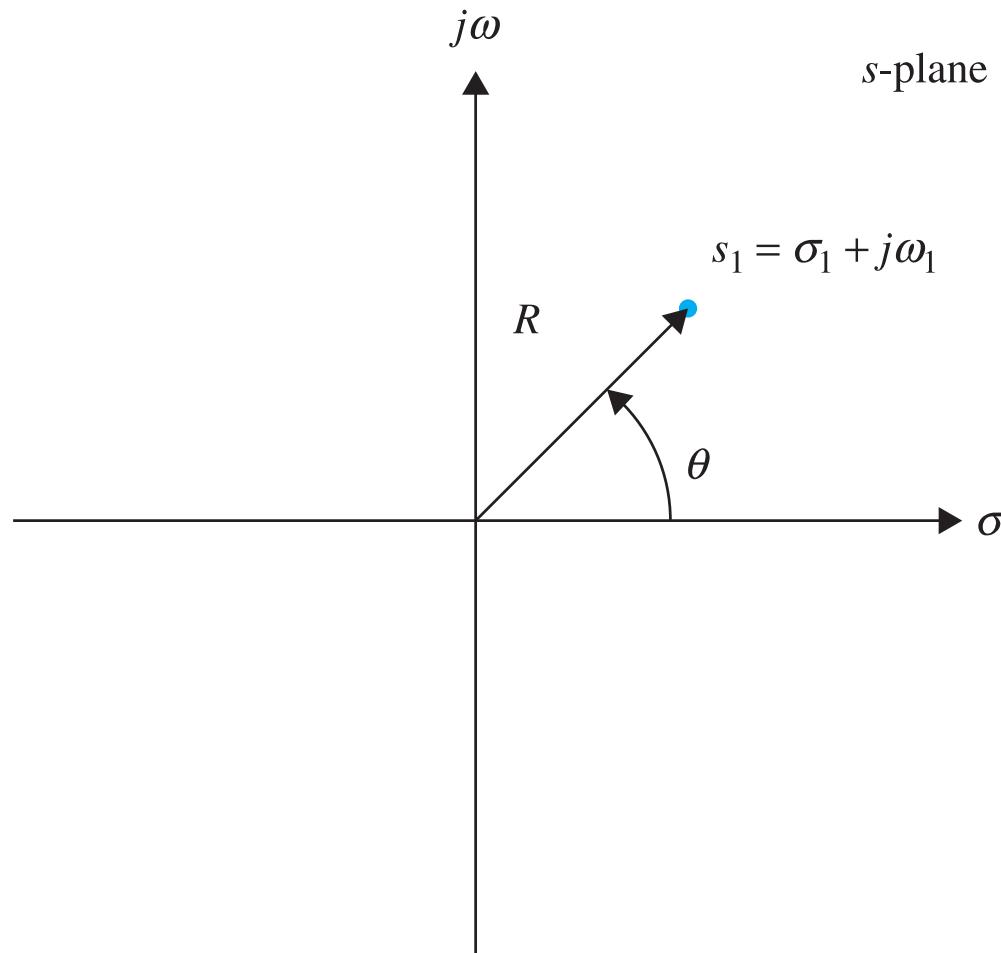
$$\begin{cases} z_1 = x_1 + jy_1 \\ z_2 = x_2 + jy_2 \\ z_1^* = x_1 - jy_1 \\ z_2^* = x_2 - jy_2 \end{cases} \text{ Complex Conjugate}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow z &= \frac{z_1}{z_2} \\ \rightarrow z &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} z_1 = R_1 e^{j\theta_1} \\ z_2 = R_2 e^{j\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^* = R_1 e^{-j\theta_1} \\ z_2^* = R_2 e^{-j\theta_2} \\ \rightarrow z = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \\ \rightarrow z = \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \angle (\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

복소 s-평면

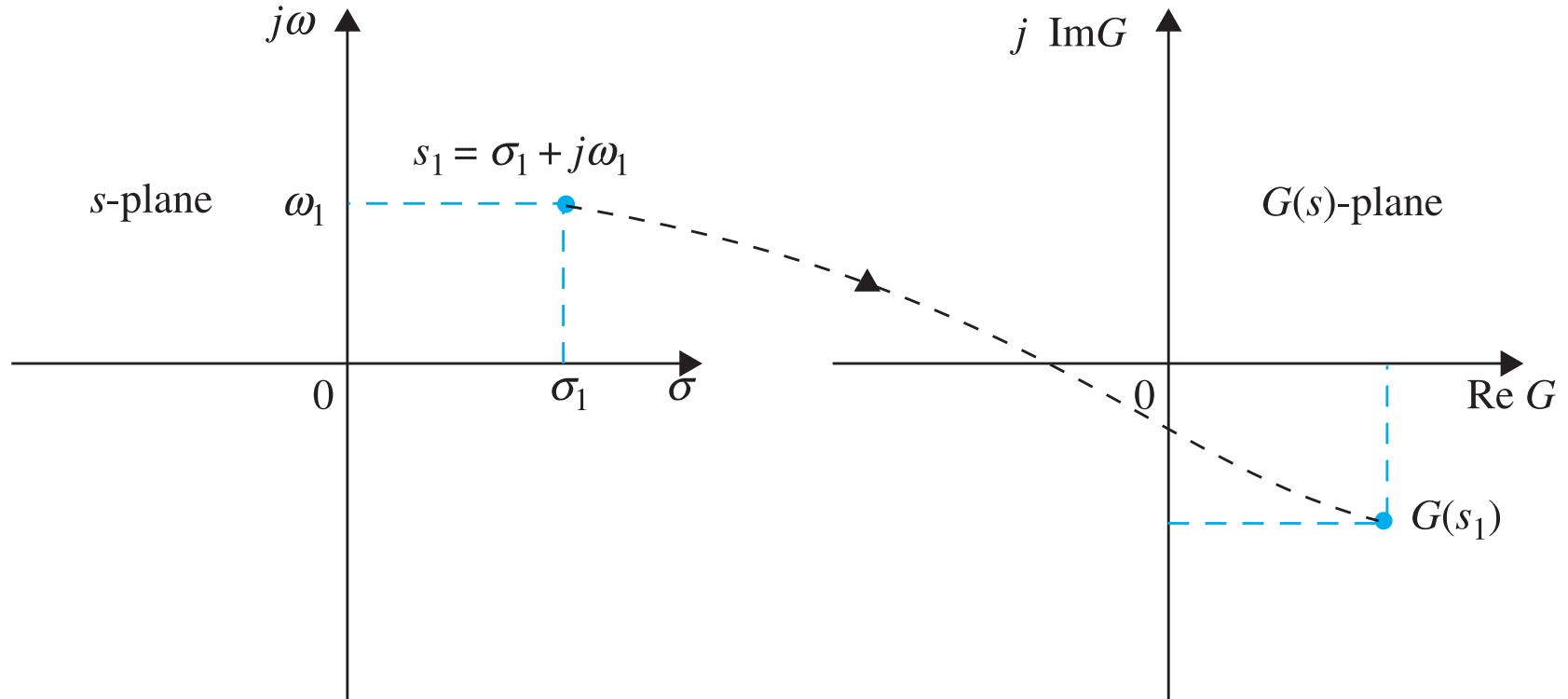


[그림 2-2] 복소 *s*-평면.

복소변수함수

- 모든 s 값에 대하여 하나 이상의 대응되는 $G(s)$ 가 존재하면 $G(s)$ 는 복소변수 s 의 함수라고 한다
$$G(s) = \operatorname{Re}[G(s)] + j \operatorname{Im}[G(s)]$$
- 만일 모든 s 에 대하여 단 하나의 $G(s)$ 값이 존재한다면, $G(s)$ 는 단가함수(single-value function)라 하며, 이때 s 평면의 점들이 $G(s)$ 평면의 점들에 사상(mapping)되는 것을 단가(single-value)라고 한다
- 어떤 함수와 그 함수의 모든 도함수가 s 평면의 어떤 영역에서 존재하면, 복소함수 s 의 함수 $G(s)$ 는 그 영역에서 해석적(analytic)이라고 한다.

$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)}$$

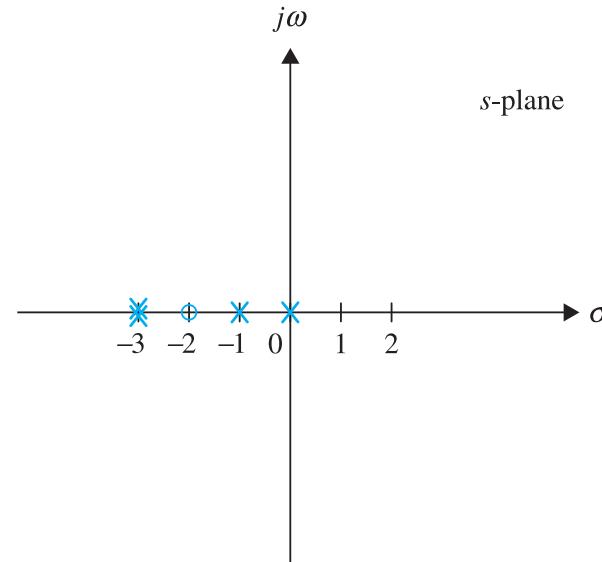


[그림 2-3] *s*평면과 $G(s)$ 평면에서의 단가사상.

함수의 특이점과 극

- 함수 혹은 그 함수의 도함수들이 정의되지 못하는 s 평면의 점들을 함수의 특이점 (singularity)이라 함
- 극(pole): 어떤 함수 $G(s)$ 가 s_i 근방에서 해석적이고 단가이며, 다음의 극한치 $\lim_{s \rightarrow p_i} [(s - p_i)^r G(s)]$ 가 0이 아닌 유한한 값을 가지면 이 함수 $G(s)$ 는 $s = p_i$ 에 r 차의 극을 갖는다고 한다.

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+3)^2}$$



- $s = -3$ 에서 2차 극을 갖고 $s = 0, s = -1$ 에서 단순극을 갖는다.

함수의 영점

- 영점(zero): $G(s)$ 가 $s = z_i$ 에서 해석적이고, 만일 $\lim_{s \rightarrow z_i} [(s - z_i)^{-r} G(s)]$ 가 0이 아닌 유한한 값을 가지면, $G(s)$ 는 $s = z_i$ 에서 r 차의 영점을 갖는다고 할 수 있다

$$G(s) = \frac{10(s + 2)}{s(s + 1)(s + 3)^2}$$

- 무한대에 있는 극, 영점 및 중복 극, 영점들을 고려하여 극의 총수는 영점의 총수와 같다. $s = 0, -1, -3, -3$ 에 모두 네 개의 유한한 극을 갖는다: $s = -2$ 에 하나의 유한한 영점을 갖는다. 그리고, 무한대에 세 개의 영점이 있다.

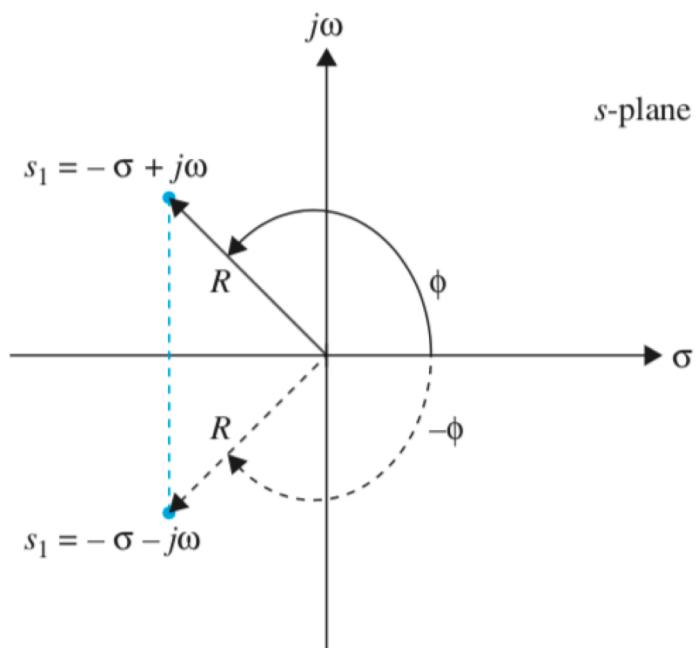
공액 복소 극과 영점

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$s = s_1 = -\sigma + j\omega \text{ and } s = s_2 = -\sigma - j\omega$$

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$



$$-\sigma = R \sin \phi$$

$$\omega = R \cos \phi$$

R = magnitude of s

ϕ = phase of s and is measured from the σ (real) axis.

$$s = s_1 = R(\cos \phi + j \sin \phi)$$

$$s = s_1 = Re^{j\phi} = R\angle\phi$$

역라플라스변환

주어진 라플라스변환 $F(s)$ 로부터 $f(t)$ 를 얻는 연산을 역라플라스변환(inverse Laplace transformation)이라고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$f(t) = \text{Inverse Laplace transform of } F(s) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \quad (2-9)$$

역라플라스변환 적분은

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (2-10)$$

으로 주어지며 c 는 $F(s)$ 의 모든 특이점들의 실수부보다 큰 실상수이다.

부분분수전개에 의한 역라플라스변환

미분방정식의 라플라스변환 해가 s 의 유리함수일 때 그것은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

여기서 $P(s)$, $Q(s)$ 는 s 의 다항식이다. $P(s)$ 의 s 의 차수가 $Q(s)$ 의 차수보다 크다고 가정한다. 다항식 $P(s)$ 는

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (2-28)$$

과 같이 쓸 수 있으며, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 은 실수 계수이다.

1. $G(s)$ 가 단순극을 갖는 경우
2. $G(s)$ 가 중복극을 갖는 경우
3. $G(s)$ 가 단순한 공액복소극을 갖는 경우

$G(s)$ 가 단순극을 갖는 경우

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \quad (2-29)$$

로 쓸 수 있으며, $s_1 \neq s_2 \neq \dots \neq s_n$ 이다. 부분분수전개법을 적용하면, 식 (2-29)는

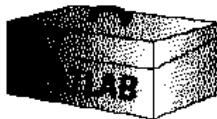
$$G(s) = \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \cdots + \frac{K_{sn}}{s + s_n} \quad (2-30)$$

이 되며, 계수 $K_{si}(i=1, 2, \dots, n)$ 은 식 (2-29) 양변에 인수 $(s+s_i)$ 를 곱하고 s 대신에 $-s_i$ 를 대입하면 된다. 예를 들어 계수 K_{s1} 을 구하기 위하여 식 (2-29) 양변에 인수 $(s+s_1)$ 를 곱하고 s 대신에 $-s_1$ 을 대입하면

$$K_{s1} = \left[(s + s_1) \frac{Q(s)}{P(s)} \right] \Big|_{s=-s_1} = \frac{Q(-s_1)}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1) \cdots (s_n - s_1)} \quad (2-31)$$

이 된다.

▶ 예제 2-5 함수



$$G(s) = \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

을 부분분수전개 형태로 쓰면

$$G(s) = \frac{K_{-1}}{s + 1} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{K_{-3}}{s + 3}$$

이 되고 계수 K_{-1}, K_{-2} 와 K_{-3} 은 다음과 같이 구해진다.

$$K_{-1} = [(s + 1)G(s)]|_{s=-1} = \frac{5(-1)+3}{(2-1)(3-1)} = -1$$

$$K_{-2} = [(s + 2)G(s)]|_{s=-2} = \frac{5(-2)+3}{(1-2)(3-2)} = 7$$

$$K_{-3} = [(s + 3)G(s)]|_{s=-3} = \frac{5(-3)+3}{(1-3)(2-3)} = -6$$

$$G(s) = \frac{-1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3}$$

$G(s)$ 가 중복극을 갖는 경우

$G(s)$ 가 중복극을 갖는 경우 만일 $G(s)$ 의 n 개의 극 중에서 r 개가 같다면, 즉 $s = -s_i$ 의 극이 r 차의 중근이라면, $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{Q(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_{n-r})(s + s_i)^r} \quad (2-38)$$

과 같이 되고($i \neq 1, 2, \dots, n-r$), $G(s)$ 는 다음과 같이 전개될 수 있다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_{s1}}{s + s_1} + \frac{K_{s2}}{s + s_2} + \cdots + \frac{K_{s(n-r)}}{s + s_{n-r}} \\ &\quad | \leftarrow n - r \text{ terms of simple poles } \rightarrow | \\ &+ \frac{A_1}{s + s_i} + \frac{A_2}{(s + s_i)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s + s_i)^r} \\ &\quad | \leftarrow r \text{ terms of repeated poles } \rightarrow | \end{aligned} \quad (2-39)$$

$G(s)$ 가 중복극을 갖는 경우

단순극에 대응되는 $(n-r)$ 개의 계수 $K_{s1}, K_{s2}, \dots, K_{s(n-r)}$ 는 식 (2-31)과 같은 방법으로 구해진 것이다. 중복극에 대응되는 계수의 결정은 다음과 같이 하면 된다.

$$A_r = \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \quad (2-40)$$

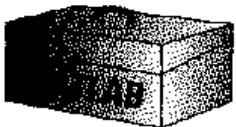
$$A_{r-1} = \frac{d}{ds} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \quad (2-41)$$

$$A_{r-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \quad (2-42)$$

\vdots

$$A_1 = \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} \left[(s + s_i)^r G(s) \right] \Big|_{s=-s_i} \quad (2-43)$$

▶ 예제 2-6 다음과 같은 함수



$$G(s) = \frac{1}{s(s + 1)^3(s + 2)}$$

을 고찰하기로 한다. 식 (2-39)의 꼴로 전개하면 $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-2}}{s + 2} + \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{(s + 1)^2} + \frac{A_3}{(s + 1)^3}$$

와 같다. 단순극에 대응되는 계수는

$$K_0 = [sG(s)]|_{s=0} = \frac{1}{2}$$

$$K_{-2} = [(s + 2)G(s)]|_{s=-2} = \frac{1}{2}$$

이고 3 차의 중복극에 대응되는 계수들은

$$A_3 = \left[(s + 1)^3 G(s) \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

$$A_2 = \frac{d}{ds} \left[(s + 1)^3 G(s) \right] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s(s + 2)} \right] \Big|_{s=-1} = 0$$

$$A_1 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s + 1)^3 G(s) \right] \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{1}{s(s + 2)} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

이 된다. 최종적인 부분분수전개는

$$G(s) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(s + 2)} - \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^3}$$

$G(s)$ 가 단순한 공액복소극을 갖는 경우

식 (2-27)의 $G(s)$ 가 공액복소극

$$s = -\sigma + j\omega \quad \text{and} \quad s = -\sigma - j\omega$$

를 갖는다고 가정한다. 이 극에 대응되는 계수들은 식 (2-31)을 사용해서

$$K_{-\sigma+j\omega} = (s + \sigma - j\omega)G(s)|_{s=-\sigma+j\omega} \quad (2-52)$$

$$K_{-\sigma-j\omega} = (s + \sigma + j\omega)G(s)|_{s=-\sigma-j\omega} \quad (2-53)$$

예제 2-7

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-54)$$

에 있어서 $G(s)$ 의 극이 복소수가 되도록 ζ 와 ω_n 의 값이 주어졌다고 가정한다.
그러면 $G(s)$ 는

$$G(s) = \frac{K_{-\sigma+j\omega}}{s + \sigma - j\omega} + \frac{K_{-\sigma-j\omega}}{s + \sigma + j\omega} \quad (2-55)$$

$$\sigma = \zeta \omega_n \quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$K_{-\sigma+j\omega} = (s + \sigma - j\omega)G(s)|_{s=-\sigma+j\omega} = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \quad (2-58)$$

$$K_{-\sigma-j\omega} = (s + \sigma + j\omega)G(s)|_{s=-\sigma-j\omega} = -\frac{\omega_n^2}{2j\omega} \quad (2-59)$$

으로 주어진다. 따라서 식 (2-54)에 대한 부분분수전개는

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} \left[\frac{1}{s + \sigma - j\omega} - \frac{1}{s + \sigma + j\omega} \right] \quad (2-60)$$

$$g(t) = \frac{\omega_n^2}{2j\omega} e^{-\sigma t} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad t \geq 0$$

선형상미분방정식의 라플라스변환 해법

1. 라플라스변환표를 이용하여 미분방정식을 라플라스변환에 의하여 s영역으로 변환시킨다.
2. 변환된 대수방정식으로부터 출력변수를 구한다.
3. 변환된 대수방정식에 대해 부분분수전개를 한다.
4. 라플라스변환표로부터 역라플라스변환을 행한다.

예제 2-8

다음의 미분방정식을 생각해 보기로 한다.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u_s(t) \quad (2-63)$$

단 $u_s(t)$ 는 단위계단함수이다. 초기조건은 $y(0) = -1$ 이고

$y^{(1)}(0) = dy(t)/dt|_{t=0} = 2$ 이다. 미분방정식을 풀기 위해 먼저 식 (2-63)의 양변에 라플라스변환을 취한다.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s \quad (2-64)$$

위 식에 초기조건은 대입하고 $Y(s)$ 에 관하여 풀면

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} \quad (2-65)$$

를 얻는다. 부분분수전개에 의하여 식 (2-65)는

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \quad (2-66)$$

으로 주어지고, 식 (2-66)에 역라플라스변환을 행하면

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0 \quad (2-67)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2 - s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2}$$

예제 2-9

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 34.5\frac{dy(t)}{dt} + 1000y(t) = 1000u_s(t) \quad (2-69)$$

$y(t)$ 와 $dy(t)/dt$ 의 초기치는 0이다. 식 (2-69)의 양변에 라플라스변환을 하고 $Y(s)$ 에 관하여 풀면

$$Y(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (2-70)$$

을 얻게 되고, $\zeta=0.5455$ 이고 $\omega_n=31.62$ 이다. 위 식의 역라플라스변환은 여러 가지 방법으로 할 수 있다. 부록 F의 라플라스변환표에 의하여 식 (2-70)의 표현에 대한 변환관계를 알 수 있다. 결과는

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \theta) \quad t \geq 0 \quad (2-71)$$

$$\theta = \cos^{-1}\zeta = 56.94^\circ$$

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t} \sin(26.5t + 56.94^\circ) \quad t \geq 0 \quad (2-73)$$

표준형 1차 시스템의 시간응답

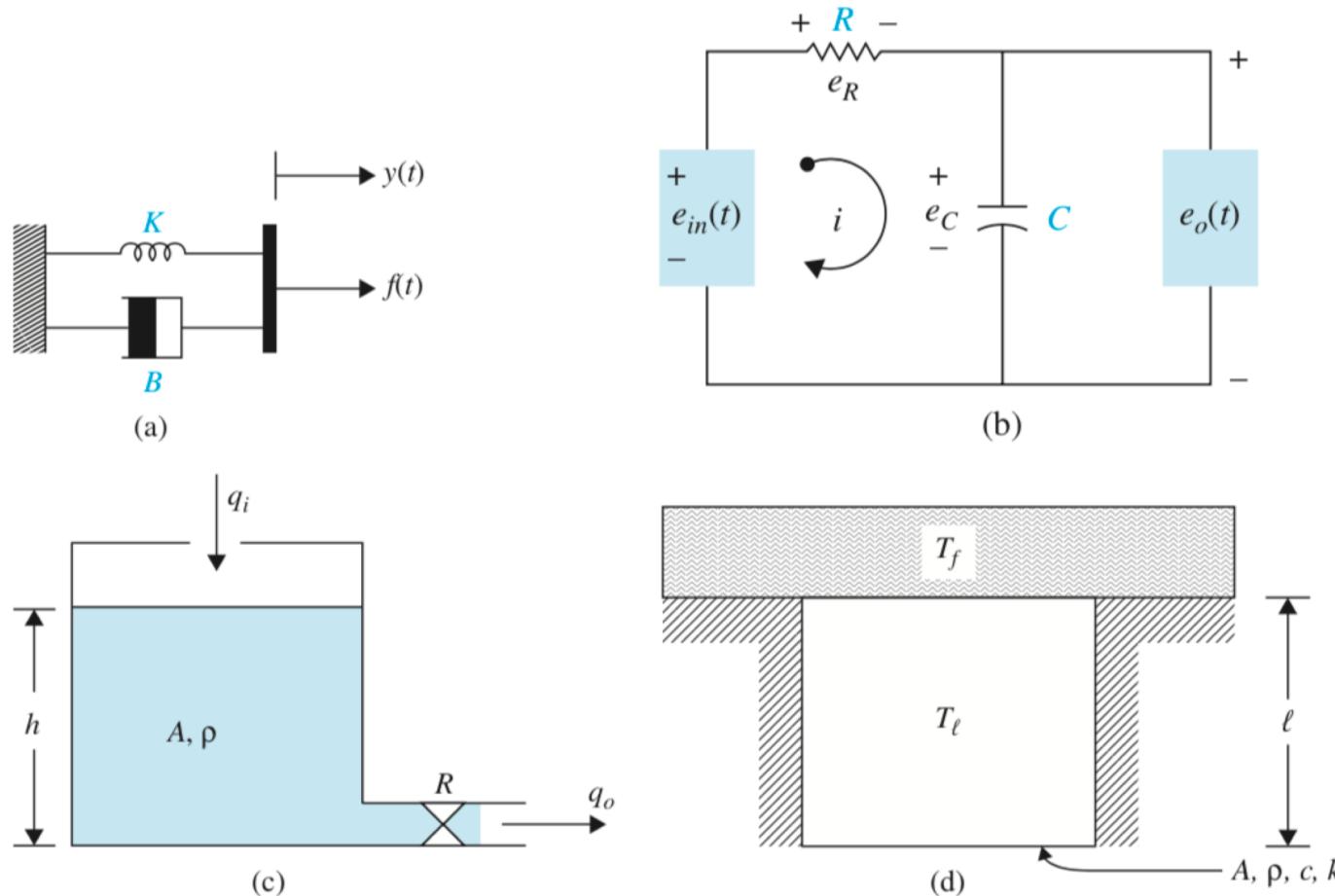


Figure 3-4 (a) A spring-dashpot mechanism. (b) A series RC network. (c) A one-tank liquid level system. (d) A heat transfer problem.

표준형 1차 시스템

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}f(t)$$

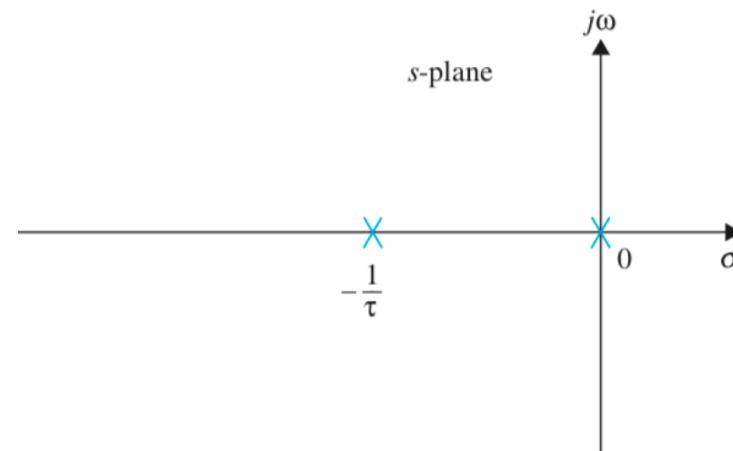
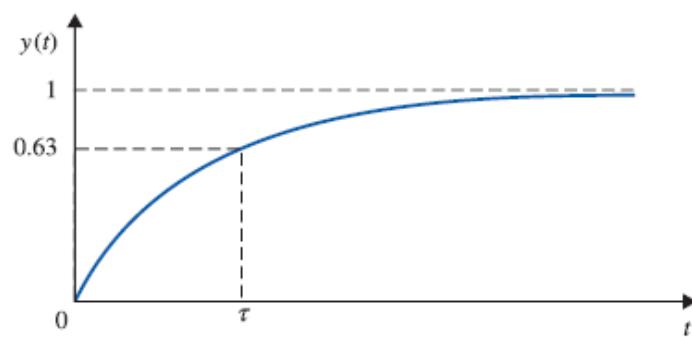
$$f(t) = u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

만일 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $\mathcal{L}(u_s(t)) = 1/s$ 이고 $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ 이다. 그러면

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

여기서 τ 는 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ 인 출력 $y(t)$ 의 최종치의 63%에 도달하는 시간이다.



3-4-2 Second-Order Prototype System

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 u(t) \quad (3-94)$$

$$u(t) = u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-95)$$

If $y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0$, $\mathcal{L}(u_s(t)) = U(s) = \frac{1}{s}$ and $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, the output relation in the s -domain is

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-96)$$

where the transfer function of the system is

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-97)$$

The characteristic equation of the prototype second-order system is obtained by setting the denominator of Eq. (3-97) to zero:

$$\Delta(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-98)$$

The two poles of the system are the roots of the characteristic equation, expressed as

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-99)$$

System Is Critically Damped $\zeta = 1$ (임계감쇠, 중근)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s(s + \omega_n)^2} \quad (3-100)$$

Further, the transfer function in Eq. (3-98) becomes

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \quad (3-101)$$

where $G(s)$ has two repeated poles at $s = -\omega_n$, as shown in Fig. 3-7. In order to find the solution of the differential equation, in this case, we obtain the partial fraction representation of Eq. (3-100) following the process defined in Example 3-3-2. Hence, by using the format of Eq. (3-57), $Y(s)$ is written as

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{A_1}{(s + \omega_n)} + \frac{A_2}{(s + \omega_n)^2} \quad (3-102)$$

where

$$K_0 = \left[(s) \frac{1}{s(s + \omega_n)^2} \right]_{s=0} = 1 \quad (3-103)$$

$$A_2 = \left[(s + \omega_n)^2 \frac{1}{s(s + \omega_n)^2} \right]_{s=-\omega_n} = -1 \quad (3-104)$$

$$A_1 = \left. \frac{d}{ds} \left[(s + \omega_n)^2 \frac{1}{s(s + \omega_n)^2} \right] \right|_{s=-\omega_n} = -1 \quad (3-105)$$

The completed partial-fraction expansion is

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + \omega_n)} - \frac{1}{(s + \omega_n)^2} \quad (3-106)$$

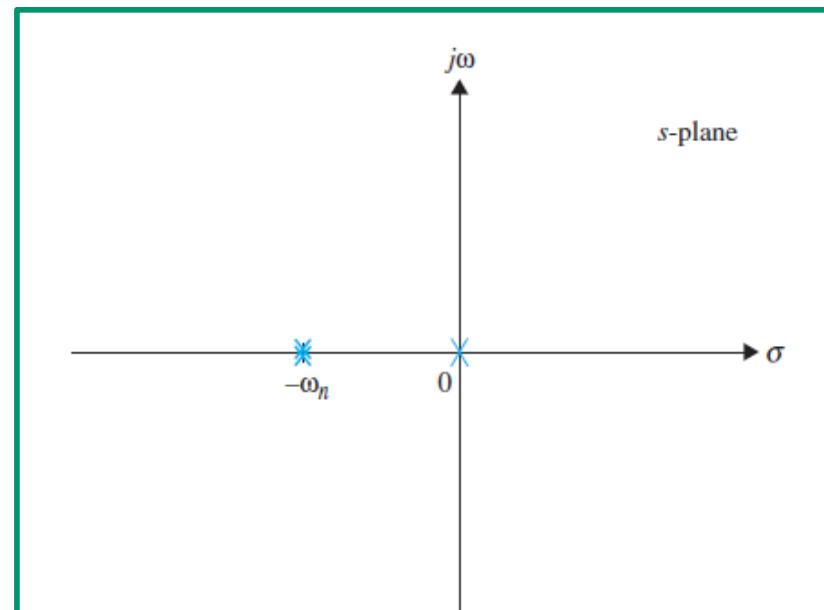


Figure 3-7 Poles of $Y(s)$ in a critically damped prototype first-order system with a unit step input.

System Is Overdamped $\zeta > 1$ (과감쇠, 두 개의 다른 실근)

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-108)$$

Further, the transfer function in Eq. (3-108) becomes

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-109)$$

where $G(s)$ has two poles at

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-110)$$

Let's define

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad (3-111)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-112)$$

is, for the purpose of reference, loosely called the conditional (or damped) frequency of the system—note the system will not exhibit oscillations in the overdamped case, so usage of the term frequency is not an accurate term. We use the following numerical example for easier understanding of the approach.

EXAMPLE 3-4-1 Consider Eq. (3-108) with $\zeta = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ and $\omega_n = \sqrt{2}$ rad/s:

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{2}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{s} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad (3-113)$$

The transfer function of the system $G(s)$ in Eq. (3-109) has two poles at $s_1 = 1$ and $s_2 = 2$, as shown in Fig. 3-8. In order to find the solution of the differential equation, in this case, we obtain the partial fraction representation of Eq. (3-113) following the process defined in Example 3-3-1. Hence, by using the format of Eq. (3-45), $Y(s)$ is written as

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-1}}{(s+1)} + \frac{K_{-2}}{(s+2)} \quad (3-114)$$

where

$$K_0 = \left[(s) \frac{1}{s} \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \right]_{s=0} = 1 \quad (3-115)$$

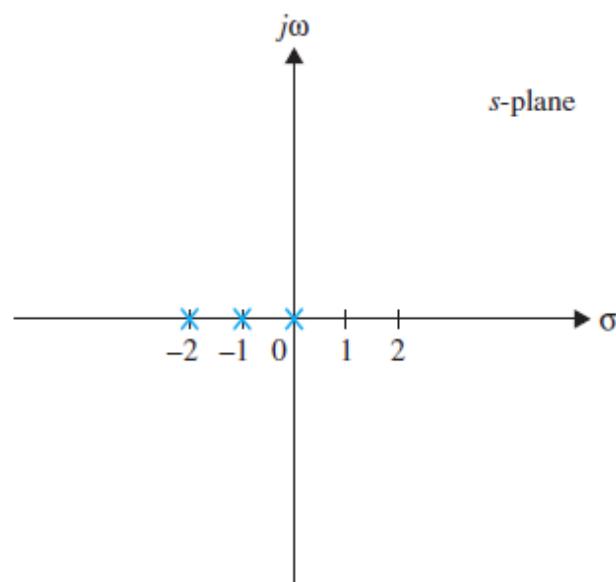


Figure 3-8 Poles of $Y(s)$ in an overdamped prototype first-order system with a unit-step input.



where A is a constant. The transfer function of this system is

$$G(s) = \frac{A\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-121)$$

Assigning the following values to the differential equation parameters, we get

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5u_s(t) \quad (3-122)$$

where $u_s(t)$ is the unit-step function. The initial conditions are $y(0) = -1$ and $\dot{y}(0) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 2$.

To solve the differential equation, we first take the Laplace transform on both sides of Eq. (3-122):

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s \quad (3-123)$$

Substituting the values of the initial conditions into the last equation and solving for $Y(s)$, we get

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} \quad (3-124)$$

Equation (3-124) is expanded by partial-fraction expansion to give

$$Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)} \quad (3-125)$$

Taking the inverse Laplace transform of Eq. (3-125), we get the complete solution as

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \quad t \geq 0 \quad (3-126)$$

The first term in Eq. (3-126) is the steady-state or the particular solution; the last two terms represent the transient or homogeneous solution. Unlike the classical method, which requires separate steps to give the transient and the steady-state responses or solutions, the Laplace transform method gives the entire solution in one operation.

If only the magnitude of the steady-state solution of $y(t)$ is of interest, the final-value theorem of Eq. (3-36) may be applied. Thus,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-s^2 - s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{5}{2} \quad (3-127)$$

The terms **transient** and **steady-state responses** are used to indicate the **homogeneous** and **particular solutions** of differential equations.

where, in order to ensure the validity of the final-value theorem, we have first checked and found that the poles of function $sY(s)$ are all in the left-half s -plane. ▲



System Is Underdamped $\zeta < 1$ (부족감쇠, 공액 복소근)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-129)$$

where $G(s)$ has two complex-conjugate poles at

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3-130)$$

where the j term was cosmetically introduced to reflect that the poles are complex-conjugate. Let's define

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad (3-131)$$

as the damping factor, and

$$\omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (3-132)$$

as the conditional (or damped) frequency of the system. Figure 3-9 illustrates the relationships among the location of the characteristic equation roots and σ , ζ , ω_n , and ω . For the complex-conjugate roots shown,

- ω_n is the radial distance from the roots to the origin of the s -plane, or $\omega_n = \sqrt{(\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$.
- σ is the real part of the roots.
- ω is the imaginary part of the roots.
- ζ is the cosine of the angle between the radial line to the roots and the negative axis when the roots are in the left-half s -plane, or $\zeta = \cos\theta$.

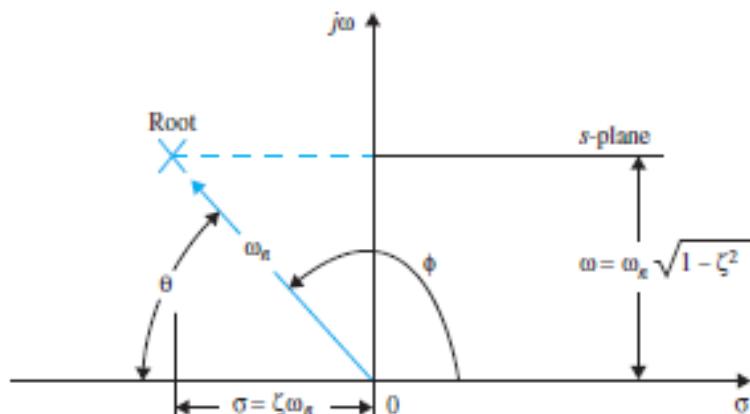


Figure 3-9 Relationships among the characteristic-equation roots of the prototype second-order system and σ , ζ , ω_n , and ω

The partial-fraction expansion of Eq. (3-128) is written

$$Y(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_{-\sigma+j\omega}}{s+\sigma-j\omega} + \frac{K_{-\sigma-j\omega}}{s+\sigma+j\omega} \quad (3-133)$$

where

$$K_0 = sY(s)|_{s=0} = 1 \quad (3-134)$$

$$K_{-\sigma+j\omega} = (s+\sigma-j\omega)Y(s)|_{s=-\sigma+j\omega} = \frac{e^{-\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-135)$$

$$K_{-\sigma-j\omega} = (s+\sigma+j\omega)Y(s)|_{s=-\sigma-j\omega} = \frac{-e^{-\phi}}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-136)$$

The angle ϕ is given by

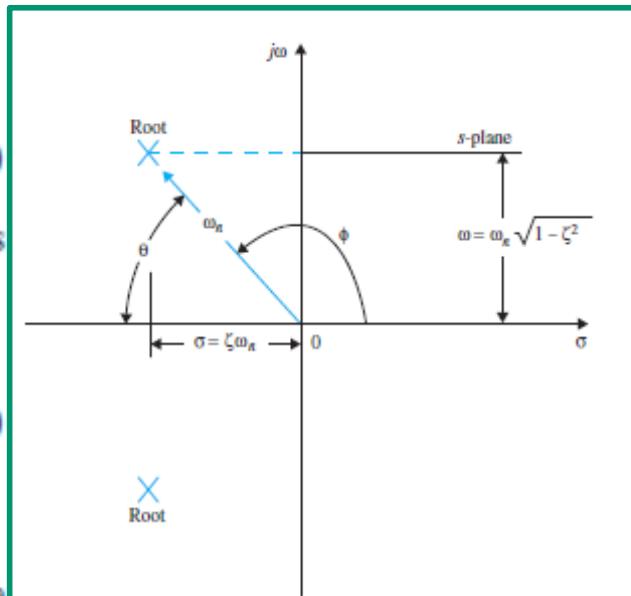
$$\phi = \pi - \cos^{-1} \zeta \quad (3-137)$$

and is illustrated in Fig. 3-9. The inverse Laplace transform of Eq. (3-128) is now written as

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \frac{1}{2j\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} [e^{j(\omega_n t - \phi)} - e^{-j(\omega_n t - \phi)}] \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin[\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \phi] \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3-138)$$

where Euler's formula from Eq. (3-33) has been used to convert exponential terms inside the brackets in Eq. (3-138) to a sine function. Substituting Eq. (3-137) into Eq. (3-138) for ϕ , we have

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin[(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t + \cos^{-1} \zeta] \quad t \geq 0 \quad (3-139)$$



EXAMPLE 3-4-3 Consider the linear differential equation

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 34.5\frac{dy(t)}{dt} + 1000y(t) = 1000u_1(t) \quad (3-140)$$

The initial values of $y(t)$ and $dy(t)/dt$ are zero. Taking the Laplace transform on both sides of Eq. (3-140), and solving for $Y(s)$, we have

$$Y(s) = \frac{1000}{s(s^2 + 34.5s + 1000)} = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \quad (3-141)$$

where, using the second-order prototype representation, $\zeta = 0.5455$ and $\omega_n = 31.6228$. The inverse Laplace transform of Eq. (3-141) can be executed substituting these values into Eq. (3-139). Or

$$y(t) = 1 - 1.193e^{-17.25t} \sin(26.5t + 0.9938) \quad t \geq 0 \quad (3-142)$$

where

$$\theta = \cos^{-1} \zeta = 0.9938 \text{ rad} \left(= 56.94^\circ \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) \quad (3-143)$$

$$\sigma = \zeta\omega_n = 17.25 \quad (3-144)$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 26.5 \quad (3-145)$$

Notice the final value of $y(t) = 1$ in this case, which implies the output perfectly follows the input at steady state. See Fig. 3-10 for the time response plot obtained from the following MATLAB toolbox.

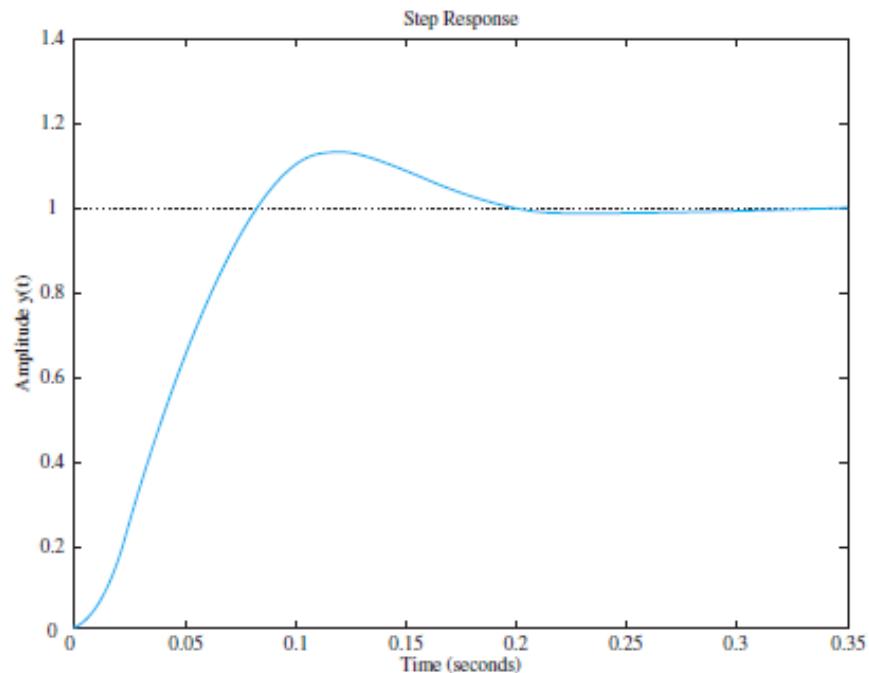


Figure 3-10 Time response $y(t)$ of the second-order system in Eq. (3-140) for a unit-step input.

3-4-3 Second-Order Prototype System—Final Observations

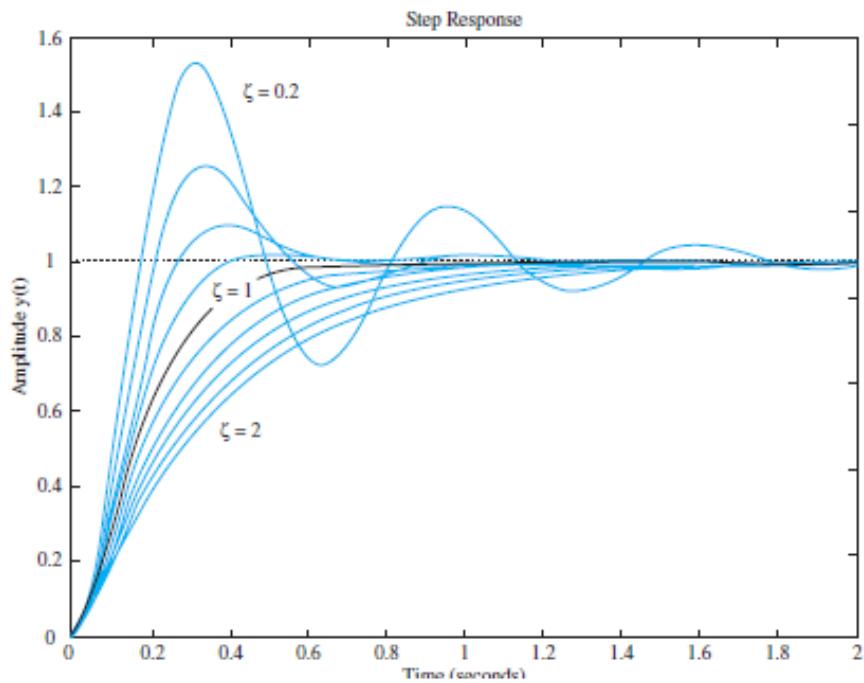


Figure 3-11 Unit-step responses of the prototype second-order system with various damping ratios.

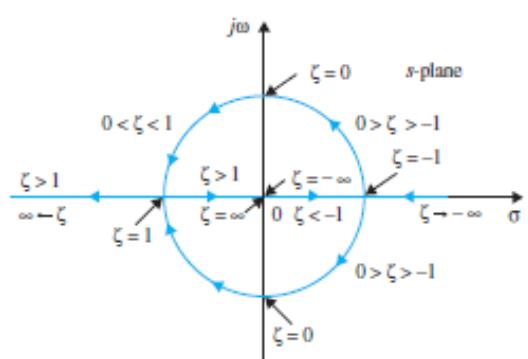


Figure 3-12 Locus of roots of the characteristic equation of the prototype second-order system.

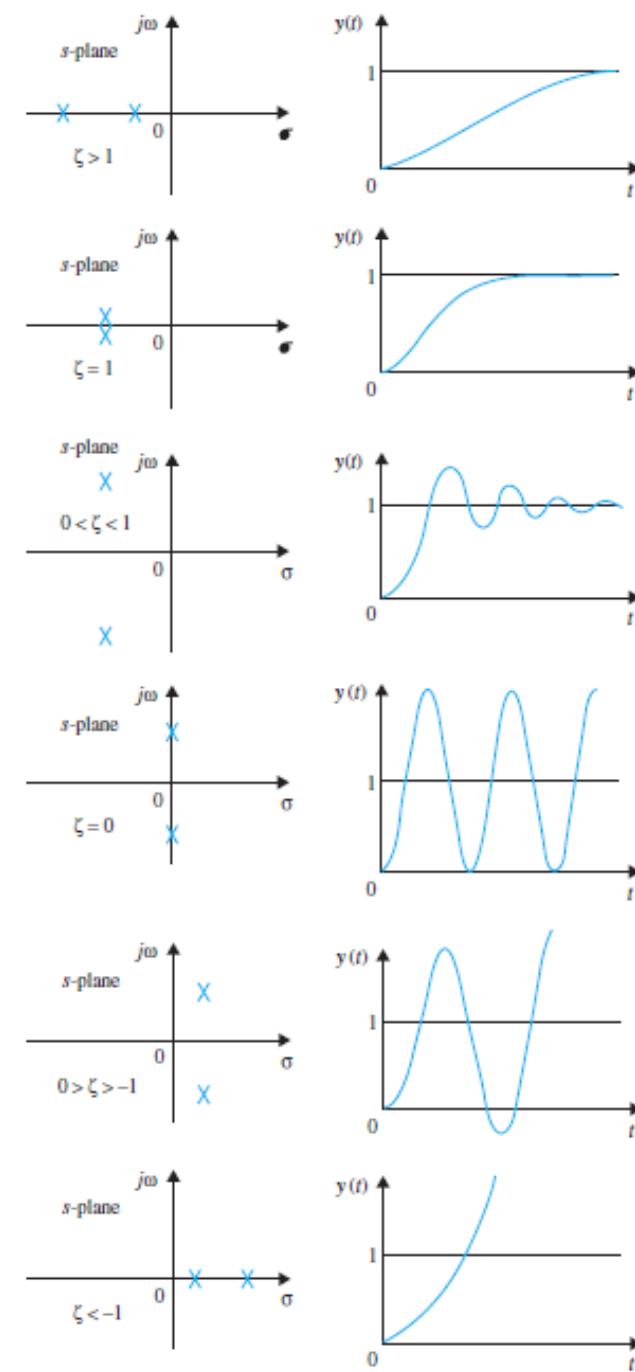
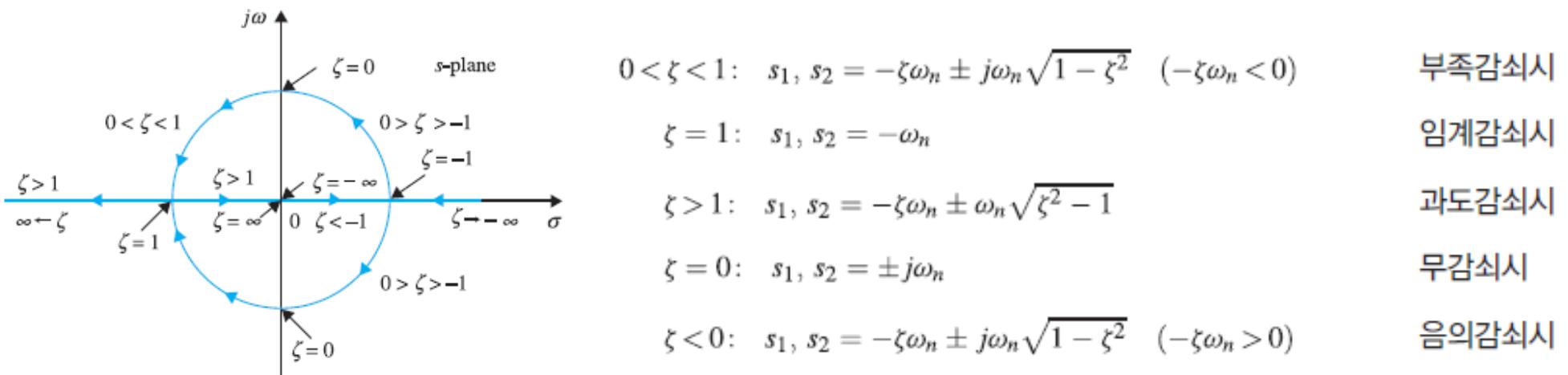


Figure 3-13 Step-response comparison for various characteristic-equation-root locations in the s -plane.



3-4-3 Second-Order Prototype System—Final Observations

- s 평면의 좌반면은 양의 감쇠에 대응한다(즉 감쇠인자나 감쇠비가 양이다). 양의 감쇠는 $\exp(-\zeta\omega_n t)$ 에서 음의 지수 때문에 단위계단응답이 정상 상태에서 일정한 최종값으로 정착하게 만든다. 이 시스템은 안정이다.
- s 평면의 우반면은 음의 감쇠에 대응한다. 음의 감쇠는 시간이 지남에 따라 한계없이 크기가 커지는 응답을 낳는다. 이 시스템은 불안정이다.
- 허수축은 무감쇠에 대응한다($a = 0$ 또는 $\zeta = 0$). 감쇠가 없으면 지속적인 진동응답을 초래해서 이 시스템은 임계안정이거나 임계불안정이다.
- $\zeta > 1$ 이면 계단응답의 오버슈트는 나타나지 않는다. 즉 $y(t)$ 는 과도 기간내에 결코 침족값을 초과하지 않는다.



1차 미분방정식: 상태방정식

- 전달함수(라플라스) 방법의 대안으로, 고차 미분방정식 분석 수단. 현대 제어이론에서 많이 사용
- n 차 미분방정식을 n 개의 1차 미분방정식으로 나눔

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \int \frac{i(t)}{C} dt = e(t)$$

- $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 를 다음과 같이 두면,

$$x_1(t) = \int i(t) dt \quad x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = i(t)$$

- 결과적으로

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

1차 미분방정식: 상태방정식

- 또 다른 미분방정식을 상태방정식으로 표현해보면,

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}(t) + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

- $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 를 다음과 같이 두면,

$$x_1(t) = y(t) \quad x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt}$$

- 결과적으로

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{B}{M}x_2(t) - \frac{K}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}f(t)$$

1차 미분방정식: 상태방정식

- 일반적인 n 차 미분방정식을 보면,

$$\begin{aligned}\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)\end{aligned}$$

- 앞서 설명한 방법으로 정리하면,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\end{aligned}$$

1차 미분방정식: 상태방정식

- 일반적인 n 차 미분방정식은 n 개의 1차 미분방정식으로 나눌 수 있음

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

•

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \cdots - a_{n-2} x_{n-1}(t) - a_{n-1} x_n(t) + f(t)$$

상태변수

상태방정식



예제 3-6-1

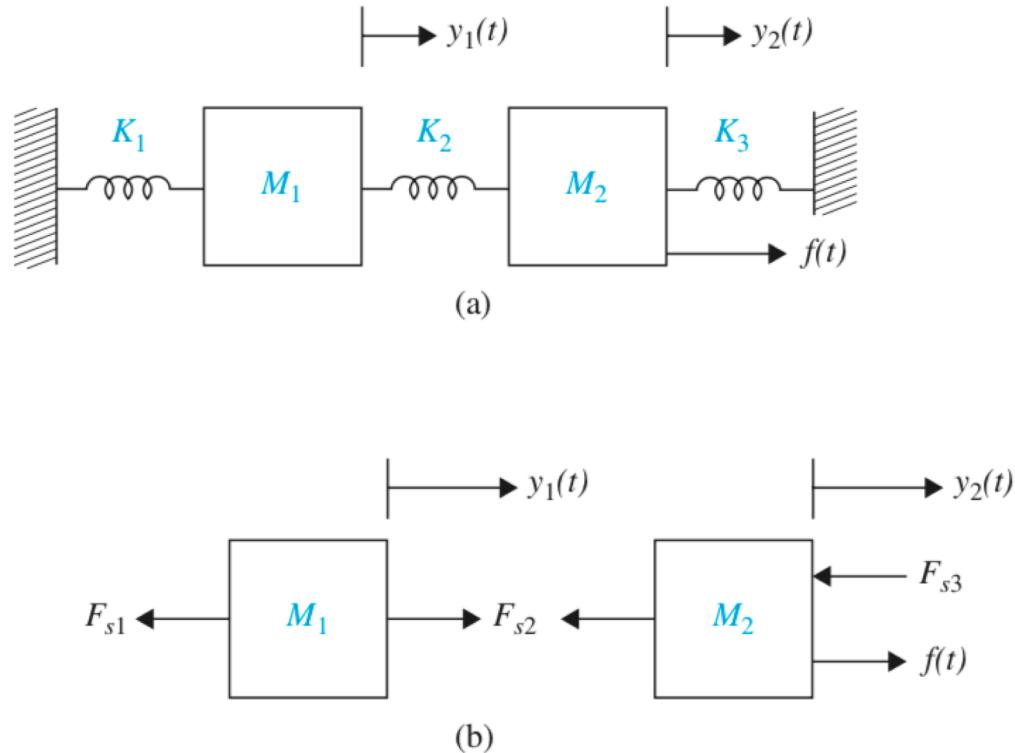


Figure 3-16 A two degree of freedom mechanical system with three springs.

$$M_1 \ddot{y}_1(t) + (K_1 + K_2)y_1(t) - K_2 y_2(t) = 0$$

$$M_2 \ddot{y}_2(t) - K_2 y_1(t) + (K_2 + K_3)y_2(t) = f(t)$$

예제 3-6-1

- $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 를 다음과 같이 두면,

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_3(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

$$x_4(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dy_2(t)}{dt}$$

- 결과적으로

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_3(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_4(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{(K_1 + K_2)}{M_1}x_1(t) + \frac{K_2}{M_1}x_2(t)$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = \frac{K_2}{M_2}x_1(t) - \frac{(K_2 + K_3)}{M_2}x_2(t) + \frac{f(t)}{M_2}$$

예제 3-6-1

- 상태변수를 선택하는 방법은 여러 가지임. 만약 $x_1(t)$ 과 $x_2(t)$ 를 다음과 같이 두면,

$$x_1(t) = y_1(t)$$

$$x_3(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy_1(t)}{dt}$$

$$x_2(t) = y_2(t)$$

$$x_4(t) = \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dy_2(t)}{dt}$$

- 결과적으로

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_3(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_4(t)$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -\frac{(K_1 + K_2)}{M_1}x_1(t) + \frac{K_2}{M_1}x_2(t)$$

$$\frac{dx_4(t)}{dt} = \frac{K_2}{M_2}x_1(t) - \frac{(K_2 + K_3)}{M_2}x_2(t) + \frac{f(t)}{M_2}$$

선형 상미분방정식

- 일반적으로 n 차 시스템의 미분방정식은

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = f(t)$$

인데, a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 이 $y(t)$ 의 함수가 아니라면 선형 상미분방정식(**linear ordinary differential equation**)이라고도 부른다.

1계 미분방정식: 상태방정식

- 일반적으로 n 계 미분방정식은 n 개의 1계 미분방정식들로 나누어질 수 있다. 대체로 1계 미분방정식이 고계 미분방정식보다 풀이가 간단하므로, 제어시스템의 해석적 연구에는 1계 미분방정식이 널리 사용된다. 식 (2-96)에 대해서

$$x_1(t) = \int i(t)dt \quad x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = i(t) \quad \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{LC}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}e(t)$$

- 같은 방법으로 식(2-97)에 대하여 다음과 같이 정의하면

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t) \\x_2(t) &= \frac{dy(t)}{dt} \\&\vdots \\x_n(t) &= \frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}\end{aligned}$$

- n 계 미분방정식은 n 개의 1계 미분방정식으로 나눠질 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + f(t)\end{aligned}$$

- 1계 미분방정식의 집합을 상태방정식 (**state equation**), x_1 , x_2 , \dots , x_n 을 상태변수(**state variable**)라 한다.

상태변수

- 어떤 시스템의 상태는 그 시스템의 과거, 현재, 미래의 조건을 나타낸다. 수학적 관점에서, 동적 시스템을 모델링하려면 상태방정식과 상태변수의 집합을 정의하는 것이 편리하다. 결과적으로 정의된 변수 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 는 n 차계의 상태변수이고, n 개의 1계 미분방정식은 상태방정식이다. 일반적으로 상태변수의 정의와 무엇이 상태방정식을 이루는가에 관하여 몇 가지 기본법칙이 있다. 상태변수는 다음의 조건을 만족시켜야 한다.
 - 임의의 초기시각 $t = t_0$ 에서 상태변수 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 는 그 시스템의 초기 상태(**initial state**)들을 정의한다.
 - $t \geq t_0$ 에 대한 그 계의 입력과 위에서 정의된 초기상태가 주어지면, 상태변수는 그 시스템의 미래의 동작을 완전하게 정의하여야 한다.
 - 어떤 시스템의 상태변수는 임의의 시각 t_0 에서의 그 변수들의 값을 알고 그 이후에 가해지는 입력에 대한 정보가 임의의 시각 $t > t_0$ 에서의 시스템의 상태를 결정하기에 충분한 변수 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 의 최소집합(**minimal set**)으로 정의된다.

- n 상태 변수의 상태 공간식 (**space state form**)은 다음과 같다.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

n 행의 상태 벡터를 가지고 있는 $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ 는,

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (n \times n)$$

이고 p 행의 입력 벡터를 가진 $\mathbf{u}(\mathbf{t})$ 는,

$$\mathbf{u}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad (n \times p)$$

출력방정식

- 상태변수들을 그 시스템의 출력과 혼동해서는 안 된다. 어떤 시스템의 출력은 측정될 수 있는 변수이지만, 상태변수는 항상 이 조건을 만족시키지는 못한다. 예를 들면, 전기모터에서 코일전류, 회전자속도, 변위와 같은 상태변수는 물리적으로 측정될 수 있고, 이들 변수 모두는 출력변수로서 쓰일 수 있다. 반면, 자기장은 모터의 과거, 현재, 미래의 상태를 나타내므로, 상태변수로 여겨질 수 있지만 그것은 운전 중에 직접 측정될 수 없기 때문에, 보통 출력변수로서 쓰이지 않는다.
일반적으로 출력변수는 상태변수들의 대수결합으로 나타낼 수 있다. 식 (3-5)에 있는 시스템에 대해 $y(t)$ 를 출력으로 하면, 출력방정식은 간단히 $y(t) = x_1(t)$ 이다. 출력방정식은 일반적으로,

$$\bullet \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Cx(t)} + \mathbf{Du} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix}$$

전달함수와의 관계

- 선형시불변시스템이 다음의 동적방정식으로 표현되면,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- 양변을 라플라스변환하면,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{U}(s)]$$

- 다시 양변을 역라플라스변환하면,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}(0) + \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{U}(s)]\}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템의 전달함수

- 미분방정식으로부터 특성방정식 구하기

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t)$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad n > m$$

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)y(t)$$

$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)u(t)$$

특성방정식(characteristic equation)은

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0$$

MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템의 전달함수

- 상태공간 표현으로 바꾸면,

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

- 두식을 라플라스변환하면,

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

- 첫식을 $\mathbf{Y}(s)$ 에 대입하면,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s)$$

- 전달함수의 유도 조건인 초기값을 0으로 놓으면,

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템의 전달함수

- 전달함수 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

- 일반적으로 입력이 p개 있고, 출력이 q개 있다면, j번째 입력과 i번째 출력사이의 전달함수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{U_j(s)}$$

- Superposition 원리(선형성)에 의해 출력은 모든 입력의 영향을 따로 구해서 선형조합(더하기)으로 구할 수 있다.

$$Y_i(s) = G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + \cdots + G_{ip}(s)U_p(s)$$
$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qp}(s) \end{bmatrix}$$

특성방정식과 고유치(eigenvalue)

- 전달함수로부터 특성방정식 구하기

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

특성방정식은 전달함수의 분모다항식을 0으로 놓아 얻는다.

- 상태방정식으로부터 특성방정식 구하기

$$\mathbf{G}_u(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

- An important property of the characteristic equation is that, if the coefficients of \mathbf{A} are real, then the coefficients of $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ are also real. The roots of the characteristic equation are also referred to as the eigenvalues of the matrix \mathbf{A} .

전달함수로부터 바로 상태방정식 유도하기

- Direct decomposition, cascade decomposition, parallel decomposition 중 direct decomposition은

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}; \quad m \leq n-1$$

$$(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) U(s)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned}$$



$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (n \times 1)$$

전달함수로부터 바로 상태방정식 유도하기

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t)$$

⋮

$$\frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x_n(t)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = -a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - \cdots - a_{n-2}x_{n-1}(t) - a_{n-1}x_n(t) + u(t)$$

$$y(t) = b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \cdots + b_{n-1}x_n(t) \quad \mathbf{C} = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \quad (1 \times n)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

자세한 설명은 8장