자동제어(Automatic Control)
2장 선형제어시스템의 안정도

교재: Automatic Control Systems

경희대학교
Kyung Hee University

안정도 소개

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t) \qquad (5\text{-}1)$$

where $y_t(t)$ denotes the transient response and $y_{ss}(t)$ denotes the steady-state response.

In **stable** control systems, *transient response* corresponds to the homogeneous solution of the governing differential equations, and is defined as the part of the time response that goes to zero as time becomes very large. Thus, $y_t(t)$ has the property

$$\lim_{t \to \infty} y_t(t) = 0 \qquad (5\text{-}2)$$

The steady-state response is simply the part of the total response that remains after the transient has died out.

중요 정의

- 절대안정도(absolute stability): 안정 혹은 불안정인가
- 상대안정도(relative stability): 어느 정도 안정한가의 정도
- 영상태응답(zero-state response): 입력만에 의한 응답. 시스템의 초기조건은 0이다.
- 영입력응답(zero-input resonse): 초기조건만에 의한 응답. 모든 입력은 0이다.
- 중첩의 원리에 의해,

전체 응답 = 영상태응답 + 영입력응답

유한입력 유한출력(BIBO) 안정도-연속치 시스템

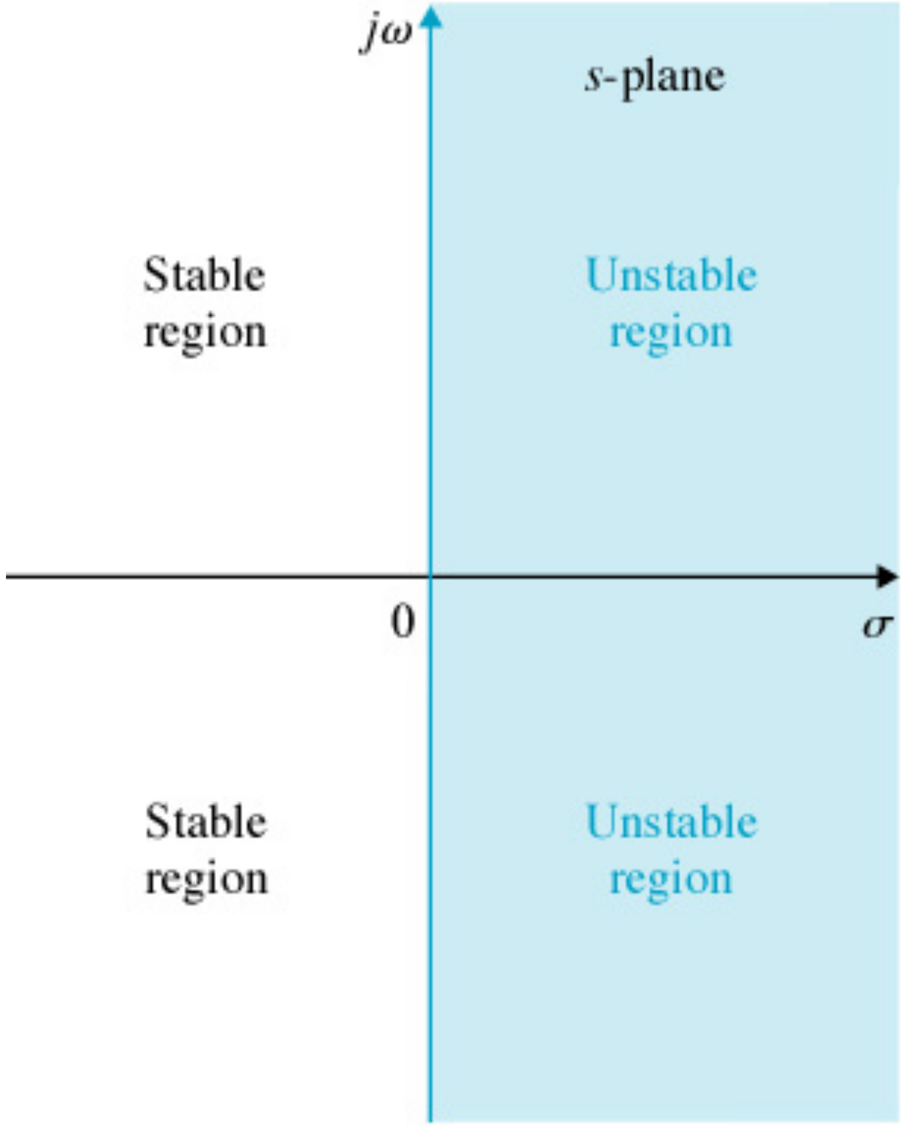
- $u(t), y(t), g(t)$: 선형시불변 시스템의 입력, 출력, 임펄스응답이라 하자.
- 초기조건이 영일 때, 만일 유한한 입력 $u(t)$에 대하여 그 출력 $y(t)$가 유한하다면 그 시스템은 유한입력 유한출력(BIBO) 안정 또는 단순히 안정하다고 말한다.

표 6-1 선형 연속치 시불변 SISO 시스템의 안정도 조건

안정도 조건	근의 값
점근적인 안정 또는 안정	$i=1, 2, ..., n$인 모든 i에 대해 $\sigma_i < 0$이다.(모든 근은 s평면 좌반면에 있다.)
임계안정 또는 임계불안정	단순근에 대한 모든 i에 대해 $\sigma_i=0$인 모든 근이 단순근이고, $\sigma_i > 0$인 근은 없다. 이때 $i=1, 2, ..., n$이다.(허수축 상에 단순근을 가질 수 있으나 다중근을 가지거나 s평면 우반면에는 근이 없다. 예외를 주의하라.)
불안정	임의 i에 대해 $\sigma_i > 0$이거나 $\sigma_i=0$에서 다중근이 있다. 이때 $i=1, 2, ..., n$(s평면 우반면에 적어도 한 개의 단순근이 있거나 또는 $j\omega$축 상에 적어도 한 개의 다중근이 존재한다.)

안정도 판정법

- 특성방정식 근의 위치 조사로 결정



특성방정식 근과 안정도와의 관계

젤중요

BIBO 안정이 되려면 특성방정식의 근 또는 $G(s)$의 극이 s평면의 우반면이나 $j\omega$축 상에 놓일 수 없고 모두 s평면의 좌반면에 놓여야 한다. 만일 BIBO 안정이 안되면 시스템은 불안정이라고 말한다.

특성방정식이 s평면 우반면에는 근이 없고 $j\omega$축 상에만 단순근을 가질 때 **임계안정**(marginally stable) 또는 **임계불안정**(marginally unstable)이라고 한다. 이의 예외적인 경우로 시스템이 적분기 역할을 한다면(또는 제어시스템인 경우 속도제어시스템이라면) 이 시스템은 $s=0$에 근을 가지지만 안정으로 간주한다. 마찬가지로 발진기로 설계된 시스템이라면 특성방정식은 $j\omega$축 상에 단순근을 가지게 되는데 이런 시스템도 안정으로 간주한다.

EXAMPLE 5-1-2 The following closed-loop transfer functions and their associated stability conditions are given.

$M(s)=\dfrac{20}{(s+1)(s+2)(s+3)}$	BIBO stable (or, asymptotically stable)
$M(s)=\dfrac{20(s+1)}{(s-1)(s^2+2s+2)}$	Unstable due to the pole at $s=1$
$M(s)=\dfrac{20(s-1)}{(s+2)(s^2+4)}$	Marginally stable or marginally unstable due to $s=\pm j2$
$M(s)=\dfrac{10}{(s^2+4)^2(s+10)}$	Unstable due to the multiple-order pole at $s=\pm j2$

근을 구하지 않고 안정도 판정하는 방법

1. **Routh-Hurwitz 판별법.** 이 판별법은 특성방정식이 상수계수를 가지는 선형시불변 시스템의 절대 안정도에 대한 정보를 제공하는 대수적 방법이다. 이 판별법은 특성방정식의 근 중 s평면의 우반면에 놓인 근이 있는지를 검사한다. s평면의 $j\omega$축 상이나 s평면의 우반면에 놓여 있는 특성근의 수도 제시한다.
2. **Nyquist 판별법.** 이 방법은 루프 전달함수의 Nyquist 도표의 특성을 관찰함으로써 s평면 우반면에 있는 폐루프 전달함수의 극 수와 영점 수의 차이에 관한 정보를 주는 반도표적 방법이다.
3. **Bode 선도.** 이 선도는 루프 전달함수 $G(j\omega)H(j\omega)$의 크기를 dB로, $G(j\omega)H(j\omega)$의 위상을 각도로 모든 주파수 ω에 대하여 그린 도표이다. 이 폐루프시스템의 안정도는 이 도표의 특성을 조사해서 결정할 수 있다.

Routh-Hurwitz

- 선형시불변 SISO 시스템의 특성방정식

$$F(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

- 모든 계수는 실수. 양의 실수부를 가지는 근을 가지지 않기 위해서는 다음 조건이 필요조건이다. (충분조건은 아님)

1. 다항식의 모든 계수는 같은 부호를 가진다.
2. 계수의 어느 하나도 영이어서는 안 된다.

Routh 표 작성

1. 특성방정식의 계수를 두 행으로 배열

$$\begin{array}{ccccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \end{array}$$

$$a_6 s^6 + a_5 s^5 + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{6-26}$$

$$\begin{array}{lcccc}
s^6 & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \\
s^5 & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\
s^4 & \dfrac{a_5a_4 - a_6a_3}{a_5} = A & \dfrac{a_5a_2 - a_6a_1}{a_5} = B & \dfrac{a_5a_0 - a_6 \times 0}{a_5} = a_0 & 0 \\
s^3 & \dfrac{Aa_3 - a_5B}{A} = C & \dfrac{Aa_1 - a_5a_0}{A} = D & \dfrac{A \times 0 - a_5 \times 0}{A} = 0 & 0 \\
s^2 & \dfrac{BC - AD}{C} = E & \dfrac{Ca_0 - A \times 0}{C} = a_0 & \dfrac{C \times 0 - A \times 0}{C} = 0 & 0 \\
s^1 & \dfrac{ED - Ca_0}{E} = F & 0 & 0 & 0 \\
s^0 & \dfrac{Fa_0 - E \times 0}{F} = a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

젤중요

만일 Routh 표의 제 1 열의 모든 요소가 같은 부호이면, 방정식의 근은 모두 s평면 좌반면에 있다. 제 1 열 요소의 부호 변화 횟수는 s평면 우반면 내 또는 양(+)의 실수부를 가지는 근의 수와 같다.

예제 6-2

$$2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10 = 0$$

이 식은 빠진 항이 없고(모든 항이 있고) 그 계수가 같은 부호이니까 s 평면의 우반면이나 허수축 위에 근을 가지지 않아야 하는 필요조건을 만족시킨다. 그러나 그 충분조건은 아직 조사해야 한다. Routh 표는 다음과 같이 만들어진다.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 2 & 3 & 10 \\
s^3 & 1 & 5 & 0 \\
s^2 & \dfrac{(1)(3)-(2)(5)}{1} = -7 & 10 & 0 \\
s^1 & \dfrac{(-7)(5)-(1)(10)}{-7} = 6.43 & 0 & 0 \\
s^0 & 10 & 0 & 0
\end{array}$$

이 표의 제 1 열에서 값의 부호가 두 번의 변화가 있기 때문에 s 평면 우반면에 두 개의 근을 가진다. 식 (6-27)의 근을 구하면 $s=-1.005 \pm j\,0.933$과 $s=0.755 \pm j\,1.444$에 네 개의 근을 가진다. 확실히, s 평면 우반면에 있는 마지막 두 근이 이 시스템을 불안정하게 한다. ◀

Routh 표 작성이 완성되기 전에 끝나는 특별한 경우

- Routh 표 작성이 어려울때
  1. Routh 표의 어떤 한 행에서 첫 번째 요소가 영이 되나 다른 요소는 영이 아니다.
  2. Routh 표의 한 행에 있는 요소가 모두 영이다.
- 1번에 대한 해결방법
  - 임의의 매우 작은 양의 수인 e으로 첫 번째 열에 있는 영인 요소를 대치한 표 작성
- 예제 6-3

선형시스템의 특성방정식이 다음과 같은 경우를 생각하자.

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$$

s^4	1	2	3
s^3	1	2	0
s^2	0	3	

s^2행의 첫 번째 요소가 영이기 때문에 s^1 행의 요소들은 모두 무한대가 될 것이다. 이 어려움을 극복하기 위하여 우리는 s^2행의 영 대신 작은 양수 ϵ으로 대치한다. 그리고 표 작성을 계속한다. s^2행에서 시작하면 그 결과는 다음과 같다.

s^2	ε	3
s^1	$\dfrac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} \cong -\dfrac{3}{\varepsilon}$	0
s^0	3	0

Routh 표의 첫 번째 열에 두 번의 부호 변화가 있기 때문에 식 (6-28)의 방정식은 s평면의 우반면에 두 개의 근을 가진다. 식 (6-28)의 근에 대하여 풀면 $s=-0.091 \pm j\,0.902$ 그리고 $s=0.406 \pm j\,1.293$을 얻는다. 마지막 두 근은 명백히 s평면 우반면에 있다. ◀

- 2번에 대한 해결방법
  - 한 행에서의 모든 요소가 영일 때는
    1. 그 방정식은 최소한 크기가 같고 반대부호를 가지는 한 쌍의 실근을 가진다.
    2. 그 방정식은 한 쌍 이상의 허근을 가진다.
    3. 그 방정식은 s 평면의 원점에 대하여 대칭을 형성하는 공액 복소근을 가진다. 예를 들면 $s=-1\pm j1, s=1\pm j1.$
  - 보조방정식 A(s)=0을 사용한다.

1. 영의 해의 바로 앞선 행으로부터 그 계수를 사용하여 보조방정식 $A(s)=0$ 을 구성하라.

2. s 에 관하여 보조방정식의 미분을 취하라. 즉 $dA(s)/ds=0$ 을 행하라.

3. 영의 행을 $dA(s)/ds=0$ 의 계수로 대치하라.

4. 영의 행과 대치된 새로이 구성된 계수 행으로 통상적인 방법으로 Routh 표 작성을 계속하라.

5. 통상적인 방법으로, Routh 표의 제 1 열에서의 계수의 부호 변화를 해석하라.

예제 6-4

$$s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	
s^1	0	0	

영의 행이 표가 완성되기 전에 나타나기 때문에, 우리는 s^2 행의 계수를 써서 보조방정식을 다음과 같이 구성한다.

$$A(s) = 4s^2 + 4 = 0 \qquad \frac{dA(s)}{ds} = 8s = 0$$

위로부터 계수 8과 0은 원표의 s^1 행의 영과 대치된다. Routh 표의 나머지 부분은 다음과 같다.

s^1	8	0	coefficients of $dA(s)/ds$
s^0	4		

전체 Routh 표의 첫 번째 열에 부호의 변화가 없기 때문에 식 (6-31)에서의 방정식은 s평면 우반면에 어떤 근도 가지지 않는다. 식 (6-30)의 보조방정식을 풀면 $s=j$ 그리고 $s=-j$에서 두 근을 얻는다. 이것은 식 (6-29)의 근이기도 하다. 그러므로 이 방정식은 $j\omega$축 위에 두 근을 가진다. 그리고 이 시스템은 임계안정으로 볼 수 있다. 이들 허근이 초기 Routh 표에서 s^1 행의 전체 요소가 영이 되게 하였다. ◀

- 예제 6-5

$$s^3 + 3408.3s^2 + 1{,}204{,}000s + 1.5 \times 10^7 K = 0$$

안정하기 위한 K의 임계값을 결정

s^3	1	$1{,}204{,}000$
s^2	3408.3	$1.5 \times 10^7 K$
s^1	$\dfrac{410.36 \times 10^7 - 1.5 \times 10^7 K}{3408.3}$	0
s^0	$1.5 \times 10^7 K$	

이 시스템이 안정되기 위하여 식 (6-32)의 모든 근이 s평면의 좌반면에 있어야 한다. 즉 Routh 표의 제 1 열의 모든 계수가 같은 부호를 가져야 한다. 이것은 다음 조건을 유도한다.

$$\frac{410.36 \times 10^7 - 1.5 \times 10^7 K}{3408.3} > 0 \qquad 1.5 \times 10^7 K > 0$$

$$0 < K < 273.57$$

만일 $K=273.57$로 놓으면, 식 (6-32)에서의 그 특성방정식은 $j\omega$축 위에 두 근을 가질 것이다. 이들 근을 구하기 위하여 $K=273.57$를 보조방정식에 대입한다. 이것은 Routh 표에서 s^2행의 계수를 사용함으로써 얻어진다. 즉

$$A(s) = 3408.3s^2 + 4.1036 \times 10^9 = 0 \tag{6-36}$$

위 식은 $s=j1097$ 그리고 $s=-j1097$의 근을 가진다. 이들 근에서 대응하는 K의 값은 273.57이다. 또 만일 $K=273.57$로 시스템이 동작되면 이 시스템의 영입력 응답은 1097.27 rad/sec 주파수를 가진 비감쇠 정현파가 될 것이다. ◀

예제 6-6

$$s^3 + 3Ks^2 + (K+2)s + 4 = 0$$

이 시스템을 안정하게 하는 K의 범위를 구하는 것이 필요하다.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K+2 \\ s^2 & 3K & 4 \\ s^1 & \dfrac{3K(K+2)-4}{3K} & 0 \\ s^0 & 4 & \end{array}$$

$K > 0$

$K < -2.528 \quad \text{or} \quad K > 0.528$

$K > 0$와 $K > 0.528$가 비교되었을 때 후자의 요구조건이 더 엄격하다는 것

$$K > 0.528$$

Routh-Hurwitz의 한계

Routh-Hurwitz 판별법은 그 특성방정식이 실수계수를 가지는 대수식인 경우에 한하여 타당하다는 사실이 강조되어야 한다. 만일 그 방정식의 계수의 어느 하나가 복소수이거나 그 방정식이 지수함수나 s의 정현함수를 포함하는 것과 같은 대수식이면 Routh-Hurwitz 판별법을 간단히 적용할 수가 없다.

Routh-Hurwitz 판별법의 다른 한계는 다음과 같다. 즉 특성방정식 근이 s평면의 좌반면 혹은 우반면에 있는지 여부만을 결정할 때에만 유효하다. 그 안정도 경계는 s평면의 $j\omega$축이다. 이 판별법은 이산치 시스템의 안정도 한계인 z평면에서의 단위원과 같은 복소수평면에서의 어떤 다른 경계에도 적용할 수가 없다(부록 I).