

EE363 Automatic Control: Homework #2

- 1) *State-space description.* 다음과 같은 미분방정식으로 표현되는 선형 시스템을 생각하자.

$$\begin{aligned}\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) &= \dot{x}(t) + x(t) \\ \dot{x}(t) + 2x(t) - 2y(t) &= u(t)\end{aligned}$$

- a) 시스템의 전달함수 $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ 를 구하시오.
- b) 상태변수를 $z = \begin{bmatrix} x & y & \dot{y} \end{bmatrix}^T$ 로 정하고 시스템 동역학을 상태공간 표현식(State-space description)으로 나타내시오.
- 2) *Transfer function.* 어떠한 선형 시스템 $G(s)$ 에 대해, 초기조건이 0인 상태에서 입력 $u(t) = e^{-t}(t \geq 0)$ 를 가했을 때 출력 응답이 다음과 같았다고 한다.

$$y(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \cos t, \quad t \geq 0$$

이 시스템의 전달함수 $G(s) = \frac{y(s)}{u(s)}$ 를 구하시오.

- 3) *System identification.* 다음과 같은 동역학으로 표시되는 1차 시스템이 있다.

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t)$$

시스템은 초기에 정지되어 있었으며, 단위스텝입력 $u_s(t)$ 를 가하고 0.5초 후에 측정된 출력 $y(0.5)$ 와 시간이 충분히 지난 후, 측정된 출력 $y(\infty)$ 는 각각 다음과 같았다.

$$y(0.5) = 1, \quad y(\infty) = 2$$

위의 측정값을 이용하여 시스템 파라미터 a 와 b 를 결정하시오.

- 4) *Drawing exercise.* 어떠한 선형시스템의 전달함수 $G(s)$ 가 다음과 같이 주어졌을 때, 아래 물음에 답하시오.

$$G(s) = \frac{s^2 - 26}{(s + 10)(s^2 + 3s + 4)}$$

- a) 위의 전달함수를 부분분수 전개하여, 두 개의 분수함수의 합 형태로 나타내시오.
- b) (컴퓨터를 사용하지 말고) 각 요소들에 대한 스텝응답을 그리고, $G(s)$ 의 스텝 응답을 그들의 선형조합으로 표현하여 그리시오.

- 5) *Final value theorem*? 다음 식으로 표현되는 시스템 $G(s)$ 에 대해 단위 스텝 입력에 대한 출력을 $y(t)$ 라고 하자.

$$G(s) = \frac{1}{s-2}$$

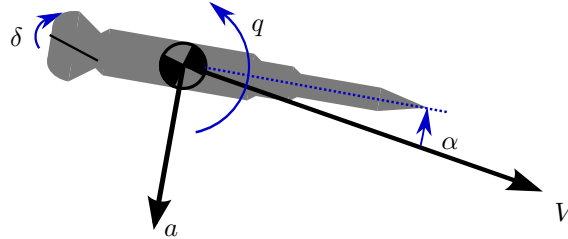
- 최종값 정리(Final value theorem)를 이용하여 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ 를 구하시오.
- Inverse Laplace transform을 이용하여 $y(t)$ 를 계산하여 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ 를 구하시오.
- 위에서 계산한 두 결과가 같은지 확인해보고, 그 이유를 설명하시오.

- 6) *Longitudinal dynamics of a rocket*. 짧은 시간 동안의 로켓의 피치방향 회전운동은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & 1 \\ M_{\alpha} & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta} \\ M_{\delta} \end{bmatrix} \delta$$

위의 미분방정식은 δ 를 입력으로 갖는 상태변수 $x = [\alpha \ q]^T$ 의 선형동역학을 기술하고 있음을 알 수 있으며, 각 변수의 설명은 다음과 같다.

- α (angle of attack): 받음각, 로켓의 동체축과 속도벡터 사이의 각
- q (pitch rate): 피치방향 각속도
- δ (fin deflection): 조종날개 구동각
- $Z_{\alpha}, Z_{\delta}, M_{\alpha}, M_q, M_{\delta}$: 로켓의 동역학을 기술하는 상수들.



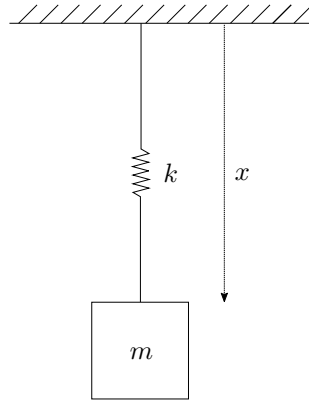
- 입력 δ 에 대한 q 의 동역학을 나타내는 전달 함수를 구하시오.
- 로켓의 속도를 V 라고 할 때, 로켓의 횡방향 기동 가속도 a 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a = V(\dot{\alpha} - q)$$

여기서 입력 δ 에 대한 a 의 동역학을 표현하는 상태공간 방정식과 출력방정식을 구하시오. (힌트: a 는 상태 변수 x 와, 제어 입력 u 의 선형 조합이다.)

- 로켓의 상태변수 α, q 가 모두 0인 어떠한 고요한 비행조건에 대해 $Z_{\alpha} = -1, M_{\alpha} = 12, M_q = -2$ 이라고 한다. 이 때 약한 바람이 불어 $\alpha \neq 0$ 이 순간적으로 발생했다고 하면, 이후에 이 로켓은 어떻게 될까? 여기서 δ 는 항상 0을 유지한다고 가정한다.

- 7) *Nonlinear spring*. 다음과 같이 질량 m 인 물체가 스프링에 의해 천정에 매달려있다. 질량을 매달지 않았을 때 스프링의 길이가 x_0 이고, 아래의 그림과 같이 스프링의 길이가 x 일 때, 스프링에 의해 발생하는 복원력은 $F_s = k(x - x_0)^3$ 이라고 한다 (단, $x > x_0$).



처음에 스프링에 질량을 매달고, 스프링이 천천히 늘어나도록 질량을 천천히 내려 질량이 암전히 매달려 있었다고 하자. 파리가 수직으로 날아가다 질량 m 을 툭 치고 ($-x$ 방향으로) 지나갔다고 하면 질량 m 은 몇 초 주기로 흔들릴까? 이 답은 m, g, k 만으로 표현되어야 함.