

자동제어(Automatic Control)

7장 제어시스템의 시간영역 해석

교재: Automatic Control Systems

서론

- 시간응답(Time response)
 - 시간에 대한 상태나 출력응답
 - 과도응답(transient response) & 정상상태응답 (steady-state response)

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

$y_t(t)$ 는 과도응답이고, $y_{ss}(t)$ 는 정상상태응답을 나타낸다.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t(t) = 0$$

정상상태응답은 과도응답이 영으로 수렴한 후 남게 되는 전체 응답의 한 부분이다.

- 정상상태오차: 출력의 정상상태응답이 입력의 정상상태와 일치하지 않아서 생기는 오차

시간응답에 대한 대표적인 검사신호

- 평가함수(performance criteria)
 - 검사신호에 대해 규격화시킴으로써 시스템이 기준에 부합되도록 설계
 - 계단함수입력
 - 램프함수입력
 - 포물선함수입력

검사신호

- 계단함수입력(Step): 기준입력의 순간적 변화
 - 크기 R 인 계단함수의 수학적 표현,

$$\begin{aligned} r(t) &= R & t \geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned}$$

$$r(t) = Ru_s(t)$$

- 초기 순간적 크기의 점프는 급격한 입력의 변화에 대한 시스템의 속응성을 다룬다.
- 광범위한 주파수에 걸친 여러 정현신호를 인가하는 것과 등가이다.

검사신호

- 램프함수입력(Ramp): 시간에 대하여 일정하게 증가하는 신호,

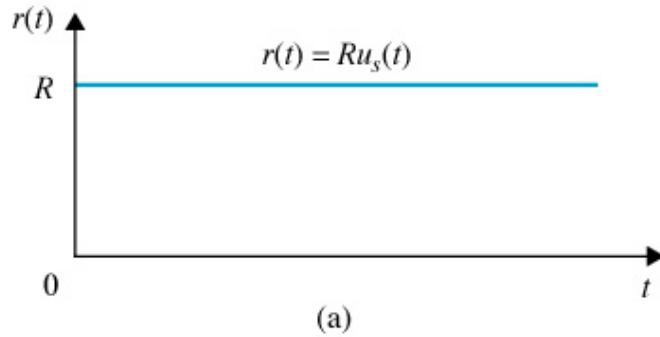
$$r(t) = Rt u_s(t)$$

– 시간에 대해 선형적으로 변하는 신호에 시스템이 어떻게 대응하는지를 검사

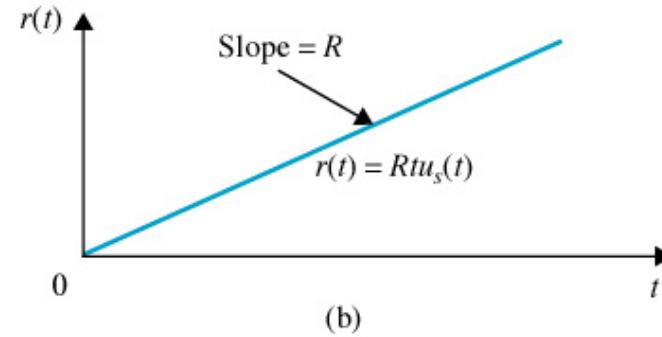
- 포물선함수입력(Parabolic):

$$r(t) = \frac{Rt^2}{2} u_s(t)$$

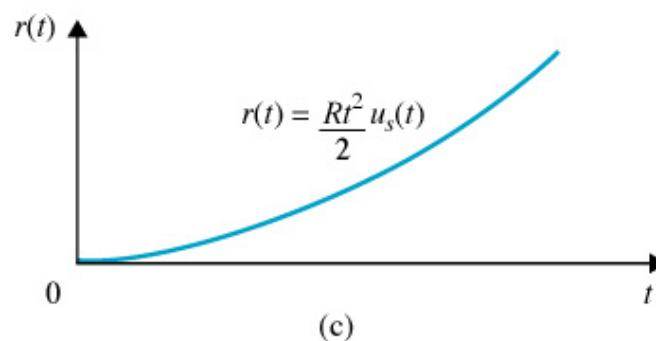
검사신호



(a)



(b)



(c)

Basic time-domain test signals for control systems. (a) Step function.
(b) Ramp-function. (c) Parabolic function.

단위계단응답과 시간영역 설계특성

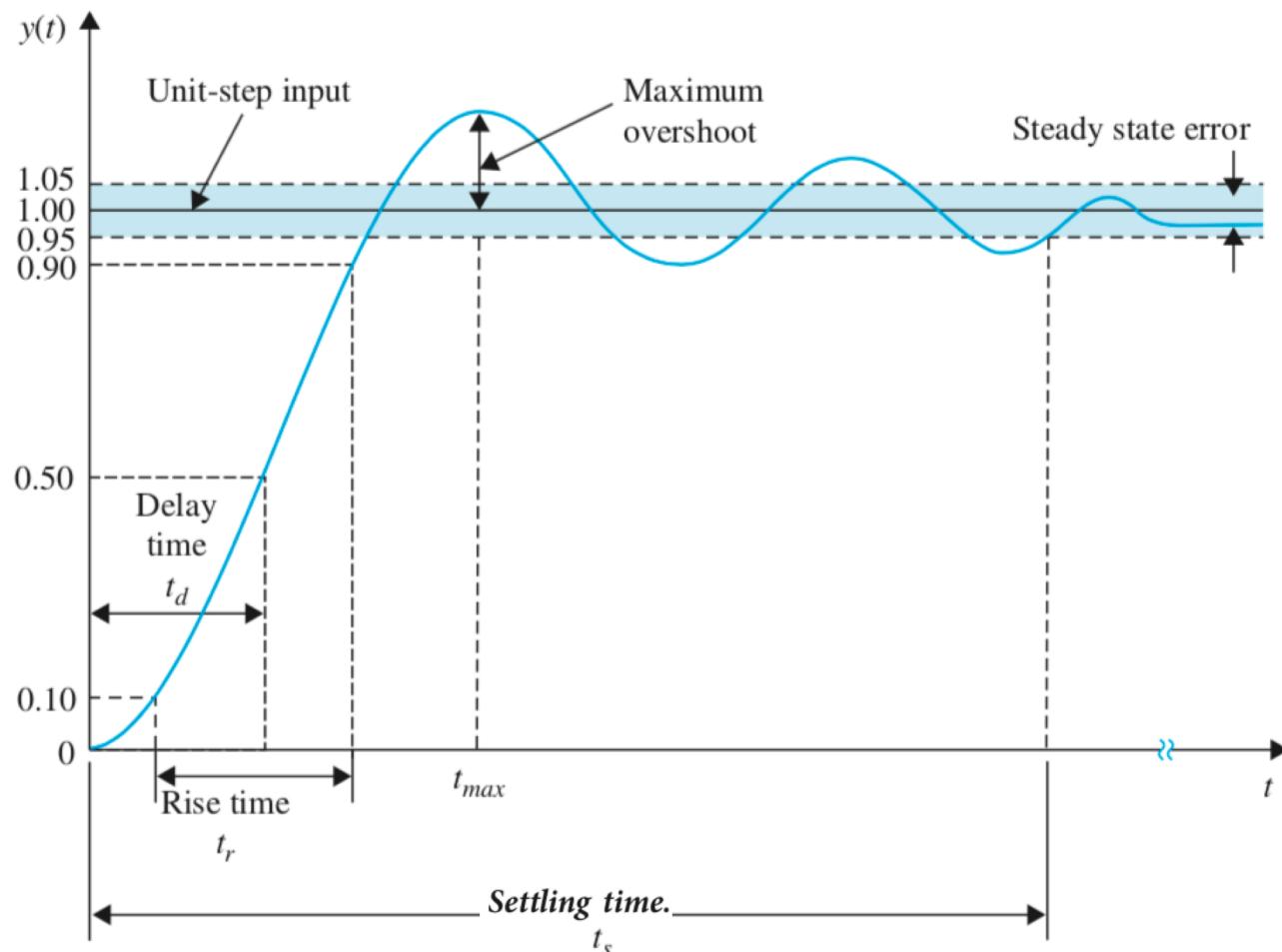


Figure 7-2 Typical unit-step response of a control system illustrating the time-domain specifications.

- 최대오버슈트 $y(t)$ 가 단위계단응답을 나타내고 y_{\max} 가 $y(t)$ 의 최대값, y_{ss} 가 $y(t)$ 의 정상상태 값이라면 $y_{\max} \geq y_{ss}$ 이고 $y(t)$ 의 최대오버슈트 (maximum overshoot)는 다음과 같이 정의한다.

$$\text{maximum overshoot} = y_{\max} - y_{ss} \quad (7-7)$$

최대오버슈트는 계단응답의 최종값 백분율로도 자주 표현한다. 즉

$$\text{percent maximum overshoot} = \frac{\text{maximum overshoot}}{y_{ss}} \times 100\% \quad (7-8)$$

- 지연시간(delay time): t_d 는 단위계단응답에서 최종값의 50%에 도달하는데 필요한 시간
- 상승시간(rise time): t_r 은 계단응답이 최종값의 10%에서 90%에 도달하는데 필요한 시간
- 정정시간(settling time): t_s 는 계단응답이 감소하여 이후 응답이 응답 최종값의 특정 백분율 이내에 들어가는 데 필요한 시간. 보통 5%
- 정상상태오차(steady-state error)

표준형 1차 시스템의 시간응답

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}y(t) = \frac{1}{\tau}f(t)$$

$$f(t) = u_s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

만일 $y(0) = \dot{y}(0) = 0$, $\mathcal{L}(u_s(t)) = 1/s$ 고 $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$ 다. 그러면

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{1/\tau}{s + 1/\tau}$$

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau}$$

여기서 τ 는 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$ 인 출력 $y(t)$ 의 최종치의 63%에 도달하는 시간이다.

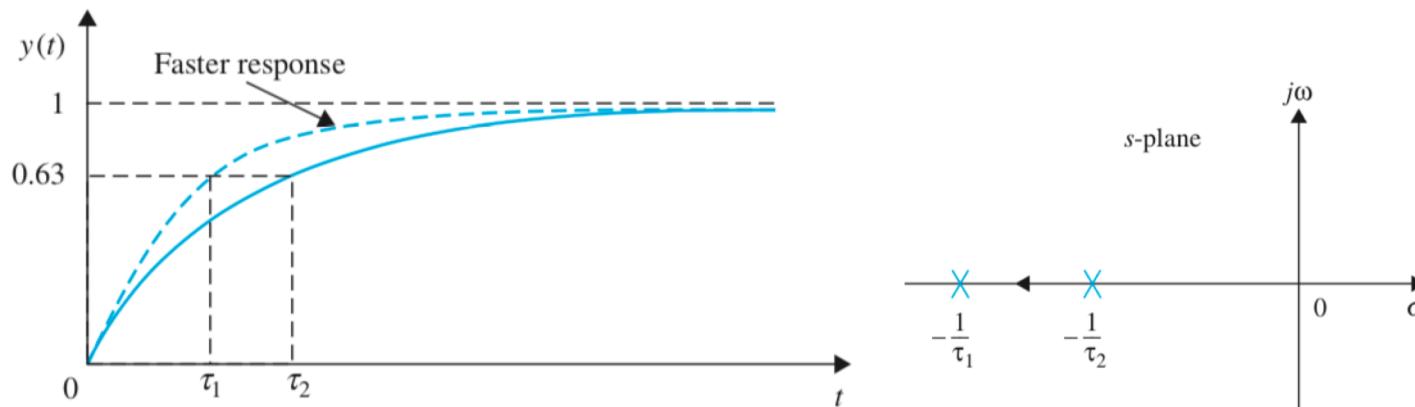


Figure 7-3 Unit-step response of a prototype first-order system.

Figure 7-4 Pole position of the transfer function, in Eq. (7-12), of a prototype first-order system as the system time constant decreases.

Example 7-4-1

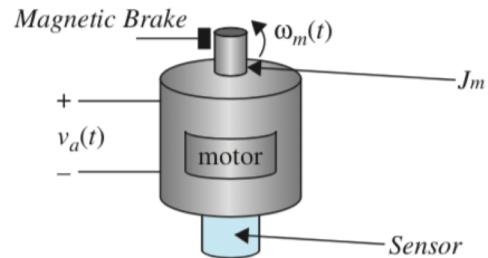
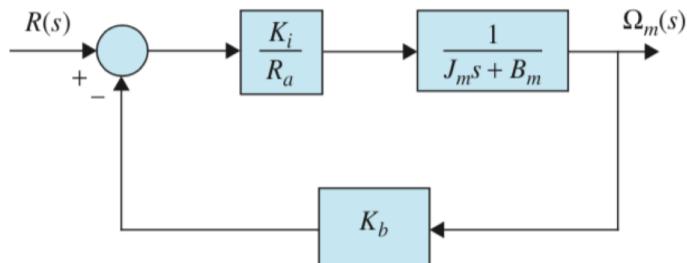


Figure 7-5 An armature-controlled dc motor.

- The ratio L_a/R_a , the *motor electric-time constant* denoted by τ_e , is very small



$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{K_i}{R_a J_m}}{s + \frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m}} R(s)$$

Figure 7-6 Simplified block diagram of a dc motor for speed response assuming a negligible electric time constant.

$$\Omega_m(s) = \frac{K_{\text{eff}}}{\tau_m s + 1} R(s) \quad (7-14)$$

where $K_{\text{eff}} = K_i / (R_a B_m + K_i K_b)$ is the motor gain constant, and $\tau_m = R_a J_m / (R_a B_m + K_i K_b)$ is the motor mechanical time constant.

To find the response $\omega_m(t)$, for a unit step input voltage such that $r(t) = u_s(t)$ or $R(s) = 1/s$,

$$\omega_m(t) = \frac{A K_i}{K_i K_b + R_a B_m} (1 - e^{-t/\tau_m}) \quad (7-15)$$

Example 7-4-1

TABLE 7-1 Motor Mechanical Time Constant and Final Speed for Three Different Damping Values

Viscous Damping B_m	Mechanical Time Constant τ_m	Speed Final Value ω_{fv}
No magnetic brake $B_m = 0.005 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$	$\tau_1 = 8.3696 \times 10^{-4} \text{ s}$	$\omega_{fv} = 15.0653 \text{ rad/s}$
$B_m = 0.05 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$	$\tau_2 = 6.0798 \times 10^{-4} \text{ s}$	$\omega_{fv} = 10.9436 \text{ rad/s}$
$B_m = 0.5 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$	$\tau_3 = 1.6274 \times 10^{-4} \text{ s}$	$\omega_{fv} = 2.9293 \text{ rad/s}$

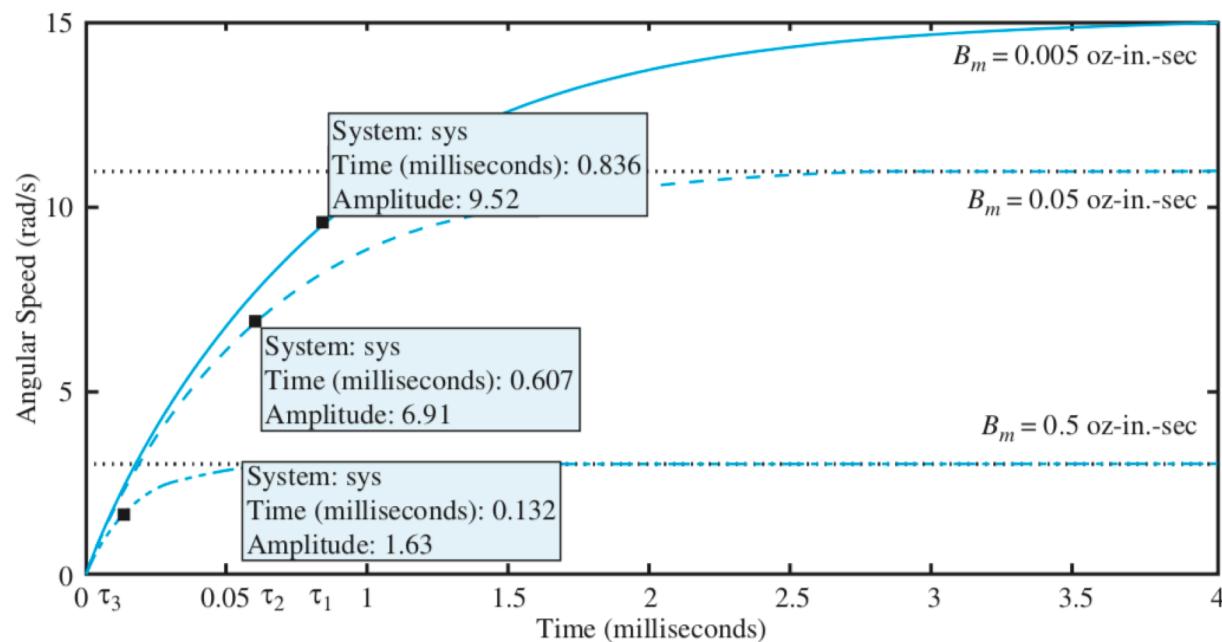
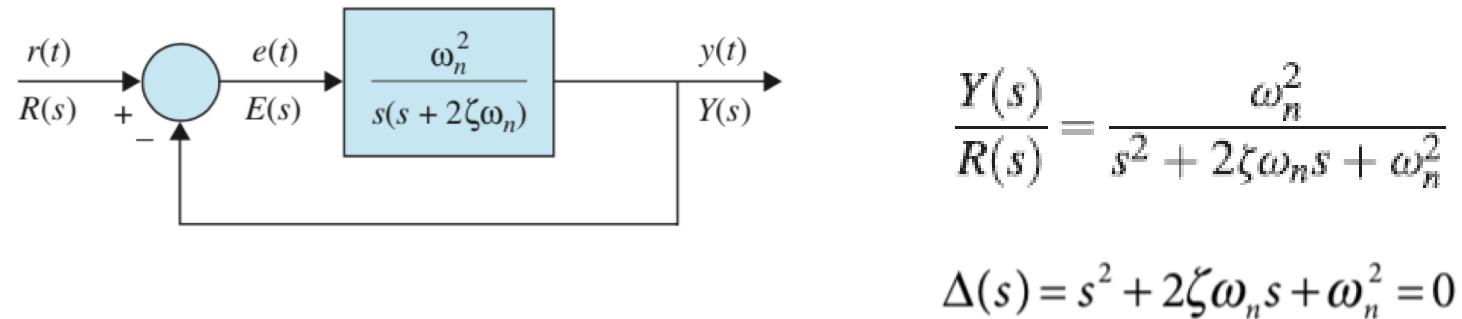


Figure 7-7 Speed response of dc motor in Example 7-4-1 to a unit step input. (a) Solid line represents no magnetic brake $B_m = 0.005 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$. (b) Dashed line represents the effect of a magnetic brake when $B_m = 0.05 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$. (c) Dot-dashed line represent the response to a more dominant damping $B_m = 0.5 \text{ oz} \cdot \text{in} \cdot \text{s}$.

표준형 2차 시스템의 과도응답



단위계단입력 $R(s) = 1/s$ 에 대하여 시스템의 출력응답은 변환된 출력함수의 역라플라스 변환으로 얻는다.

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \quad t \geq 0$$

감쇠비와 감쇠인자(Damping Ratio)

$$\alpha = \zeta \omega_n$$

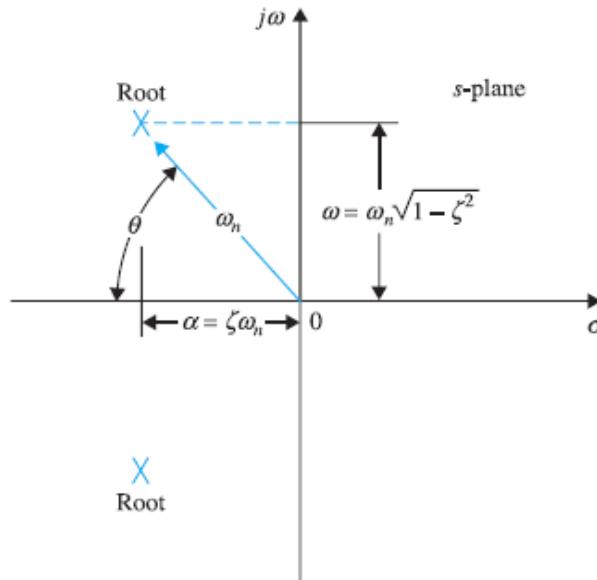
$$\begin{aligned}s_1, s_2 &= -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\&= -\alpha \pm j\omega \\&\quad \omega = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\end{aligned}$$

- α 는 $y(t)$ 의 지수항에 t 와 곱해지는 정수이다. 그러므로 α 는 단위계단응답 $y(t)$ 의 상승 또는 감쇠 비율을 제어한다. 다른 말로 표현한다면 α 는 시스템의 ‘감쇠’를 제어하므로 감쇠인자(damping factor) 또는 감쇠상수(damping constant)라 한다. α 의 역인 $1/\alpha$ 은 시스템의 시정수에 비례한다.

$$\zeta = \text{damping ratio} = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{\text{actual damping factor}}{\text{damping factor at critical damping}}$$

고유진동주파수(Natural Frequency)

- 파라미터 ω_n 을 고유진동주파수(natural undamped frequency)라고 정의



- ω_n 은 근으로부터 *s* 평면의 원점에 이르는 반경거리이다.
- α 는 근의 실수부
- ω 는 근의 허수부
- ζ 는 근들이 *s* 평면 좌반면에 존재할 때 근에 이르는 반경선과 음의 실수축 사이에 이르는 각의 여현(cosine)

TABLE 7-2 Classification of Prototype Second-Order System Based on Damping Ratio

$$0 < \zeta < 1 \quad s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

Underdamped

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2})t + \cos^{-1} \zeta \right] \quad (7-24)$$

$$\zeta = 1 \quad s_1, s_2 = -\omega_n$$

Critically damped

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - te^{-\omega_n t} \quad (7-25)$$

$$\zeta > 1 \quad s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Overdamped

$$1 - \frac{e^{-\omega_n \zeta t}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\cosh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t + \zeta \sinh(\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t \right) \quad (7-26)$$

$$\zeta = 0 \quad s_1, s_2 = \pm j\omega_n$$

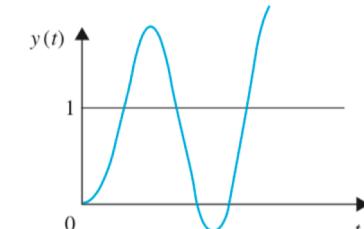
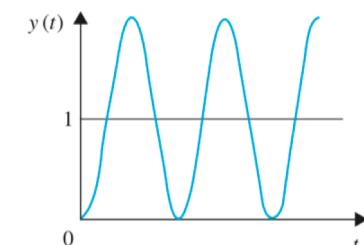
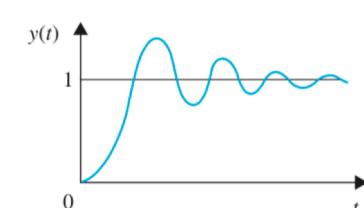
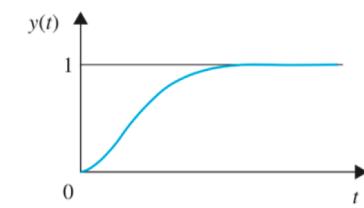
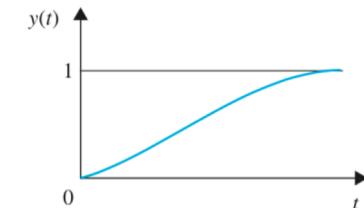
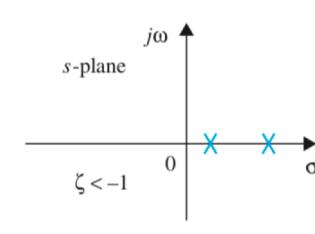
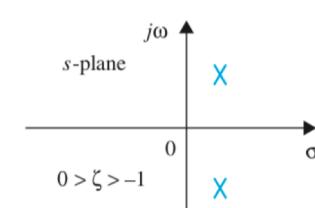
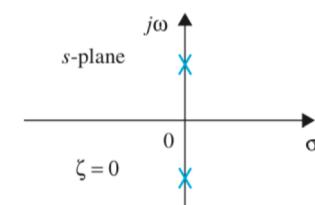
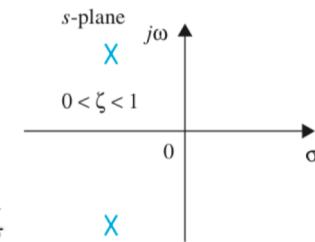
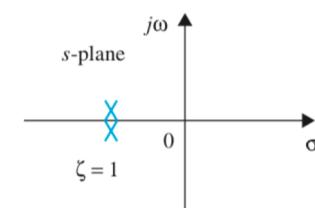
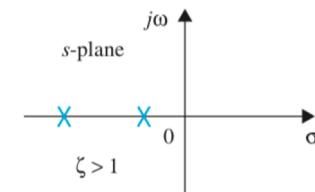
Undamped

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (7-27)$$

$$\zeta < 0 \quad s_1, s_2 = -\zeta \omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (7-28)$$

(unstable response)

Negatively damped



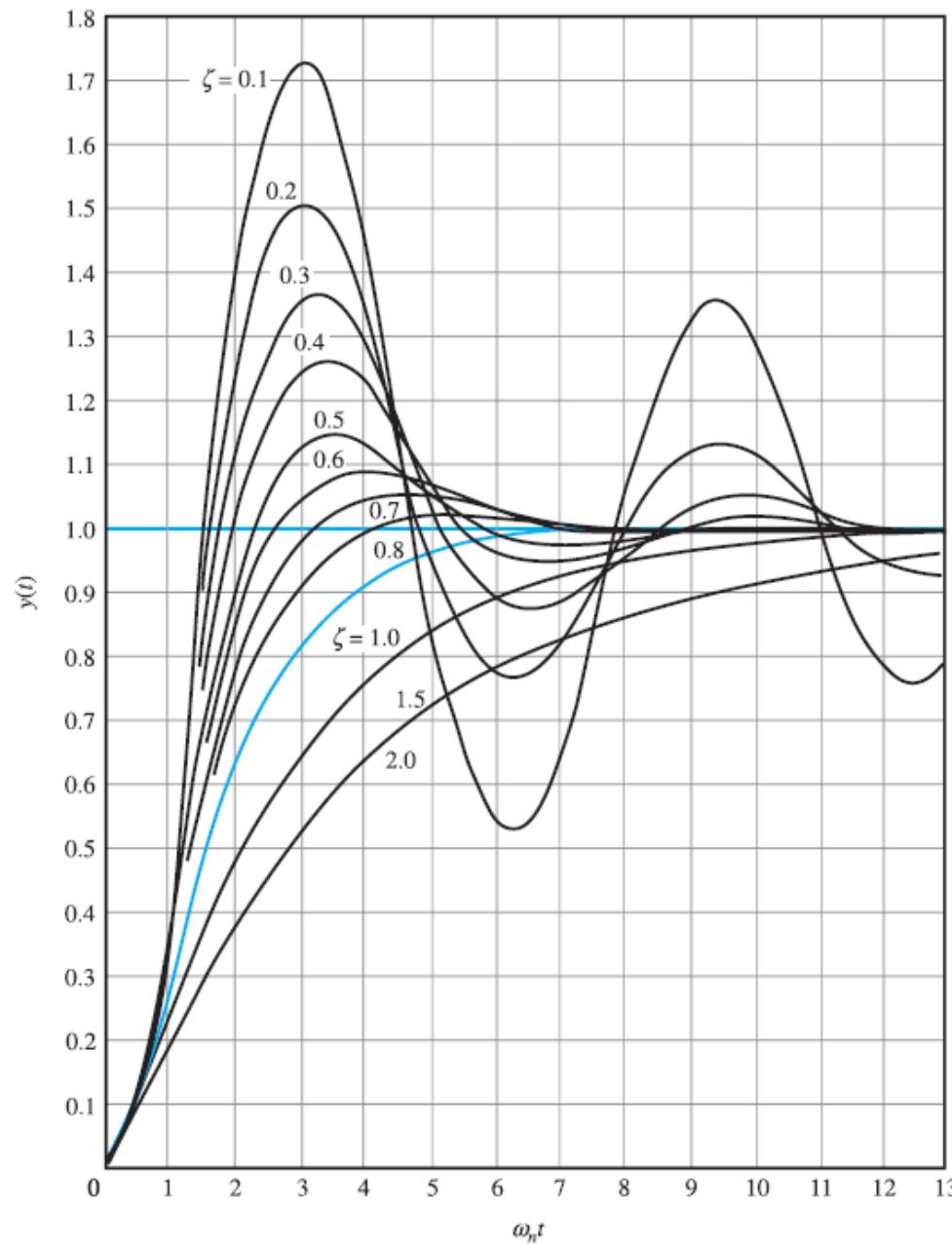


Figure 7-11 Unit-step responses of the prototype second-order system with various damping ratios.

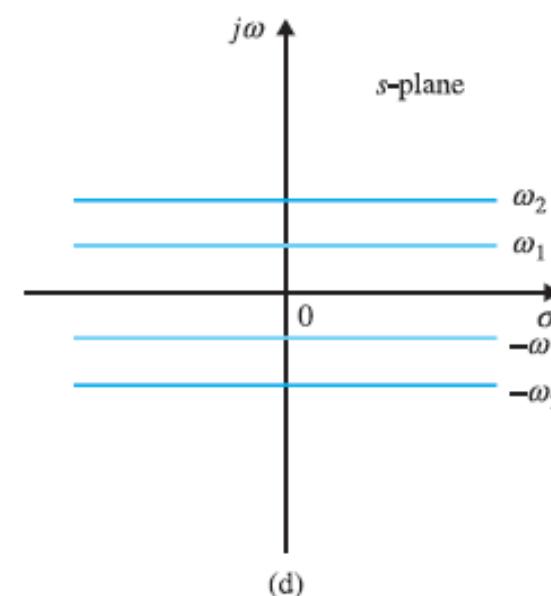
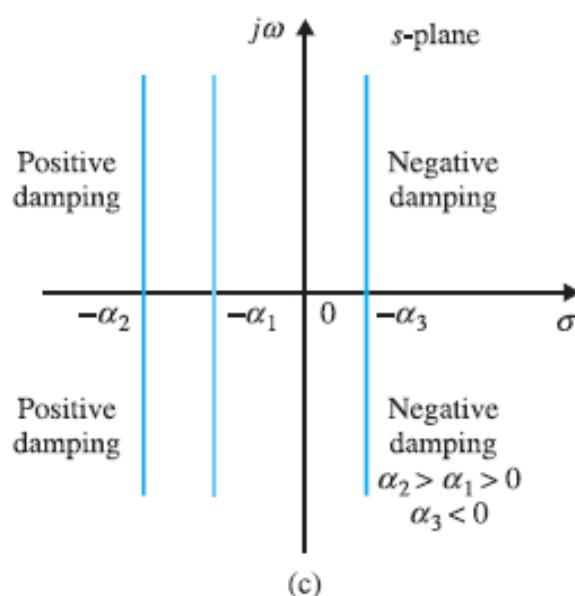
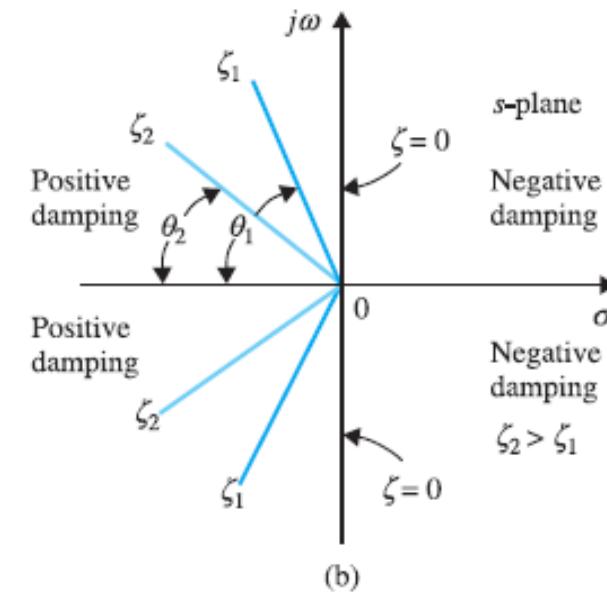
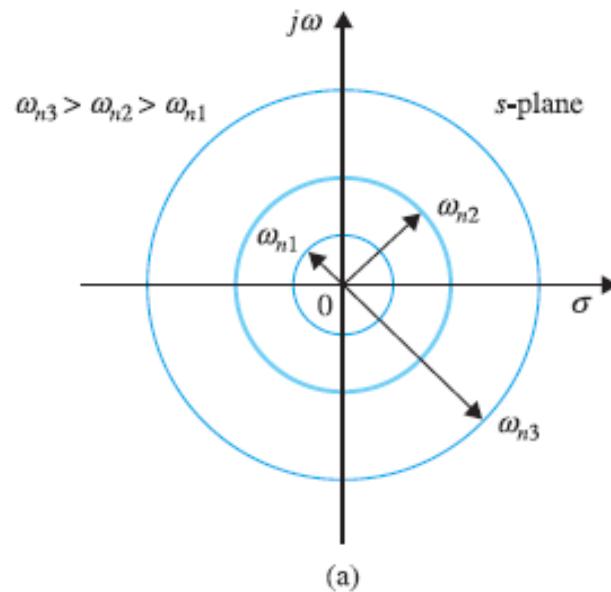
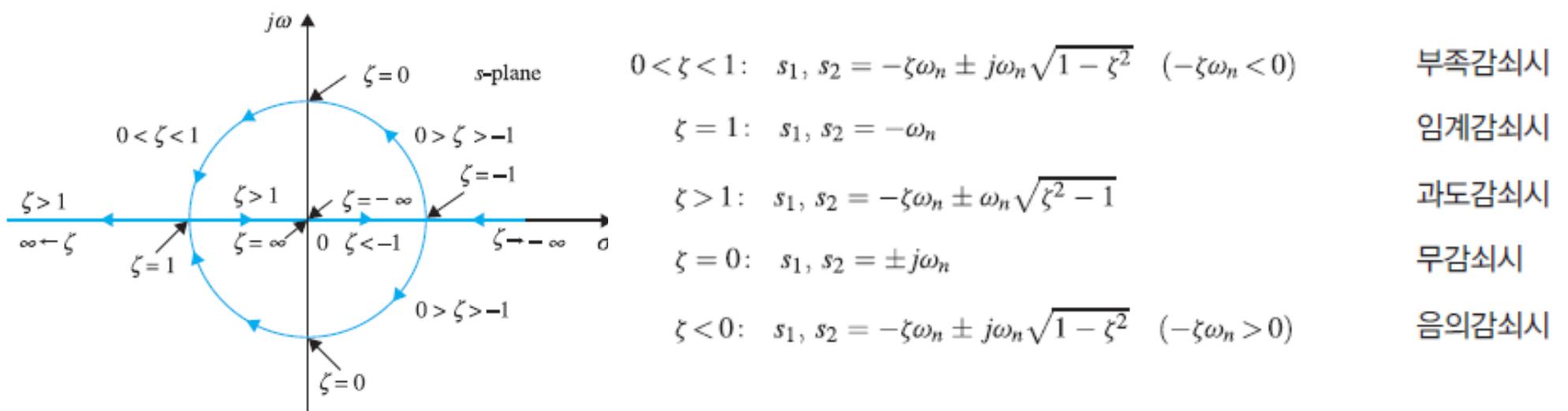


Figure 7-12 (a) Constant-natural frequency loci. (b) Constant-damping-ratio loci. (c) Constant-damping-factor loci. (d) Constant-conditional-frequency loci.

- s 평면의 좌반면은 양의 감쇠에 대응한다(즉 감쇠인자나 감쇠비가 양이다). 양의 감쇠는 $\exp(-\zeta\omega_n t)$ 에서 음의 지수 때문에 단위계단응답이 정상 상태에서 일정한 최종값으로 정착하게 만든다. 이 시스템은 안정이다.
- s 평면의 우반면은 음의 감쇠에 대응한다. 음의 감쇠는 시간이 지남에 따라 한계없이 크기가 커지는 응답을 낳는다. 이 시스템은 불안정이다.
- 허수축은 무감쇠에 대응한다($a = 0$ 또는 $\zeta = 0$). 감쇠가 없으면 지속적인 진동응답을 초래해서 이 시스템은 임계안정이거나 임계불안정이다.
- $\zeta > 0$ 에 대응하는 안정한 시스템만이 중요하다. 앞서 그림에서는 여러 값의 감쇠비 ζ 에 대한 정규화된 시간 $\omega_n t$ 의 함수로서 여러 단위계단응답을 그렸다. 그림에서 보는 바와 같이 ζ 가 감소하면 응답의 진동은 더 커지고 $\zeta \geq 1$ 이면 계단응답의 오버슈트는 나타나지 않는다. 즉 $y(t)$ 는 과도 기간내에 결코 최종값을 초과하지 않는다.



최대오버슈트 ($0 < \zeta < 1$)

- 시간에 대한 미분을 취하고 그 결과를 0으로 놓음으로써

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t - \cos^{-1} \zeta) \quad t \geq 0$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [\zeta \sin(\omega_n t + \theta) - \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_n t + \theta)] \quad t \geq 0$$

$\zeta = \cos \theta$
 $\sqrt{1-\zeta^2} = \sin \theta$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t \quad t \geq 0$$

$dy(t)/dt$ 를 0으로 놓고 해를 구한다. $t = \infty$ 와

$$\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

를 얻으며 이로부터 다음을 얻는다.

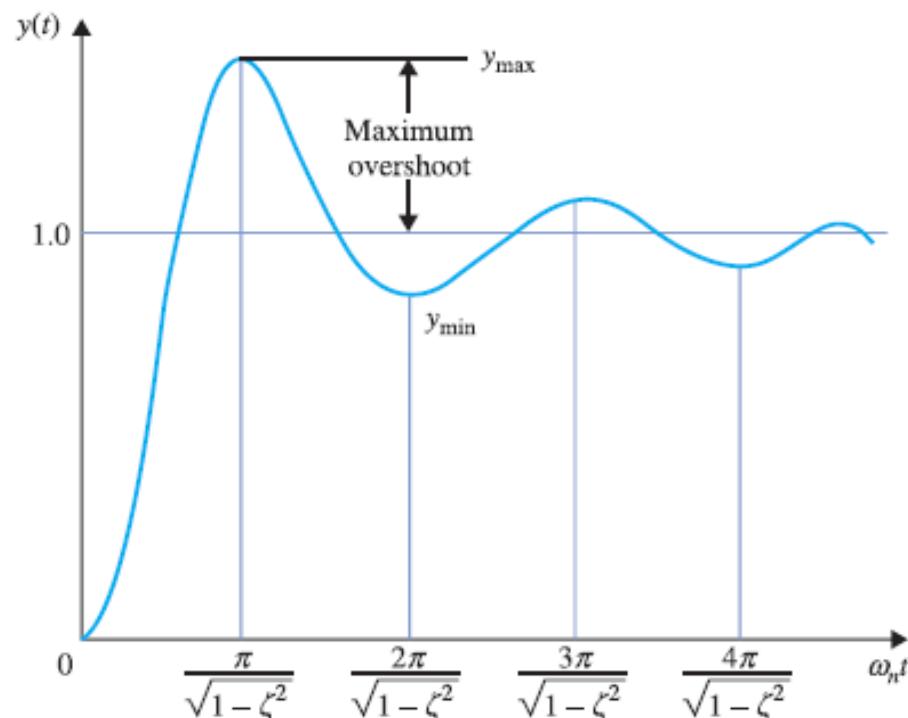
$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$t = \infty$ 에서의 해는 오직 $\zeta \geq 1$ 일 때의 $y(t)$ 의 최대값이다. 그림 5-13의 단위계단응답에 서 첫 번째 오버슈트가 최대오버슈트이다. 이 오버슈트는 식 (5-99)에서 $n = 1$ 에 대응한다. 그러므로 최대오버슈트는

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

에서 발생한다.

$$y(t)|_{\max \text{ or } \min} = 1 - \frac{e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(n\pi + \theta) \quad n = 1, 2, \dots$$



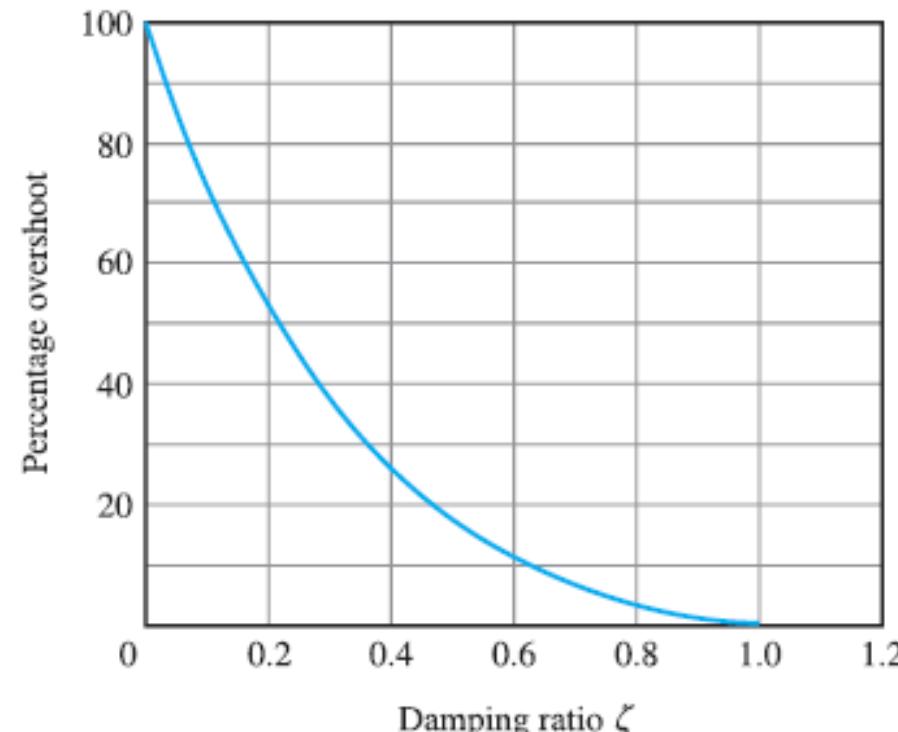
$$y(t)|_{\max \text{ or } \min} = 1 + (-1)^{n-1} e^{-n\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \quad n = 1, 2, \dots$$

최대오버슈트는 식 (5-102)에서 $n = 1$ 로 놓아서 얻는다. 그러므로

$$\text{maximum overshoot} = y_{\max} - 1 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

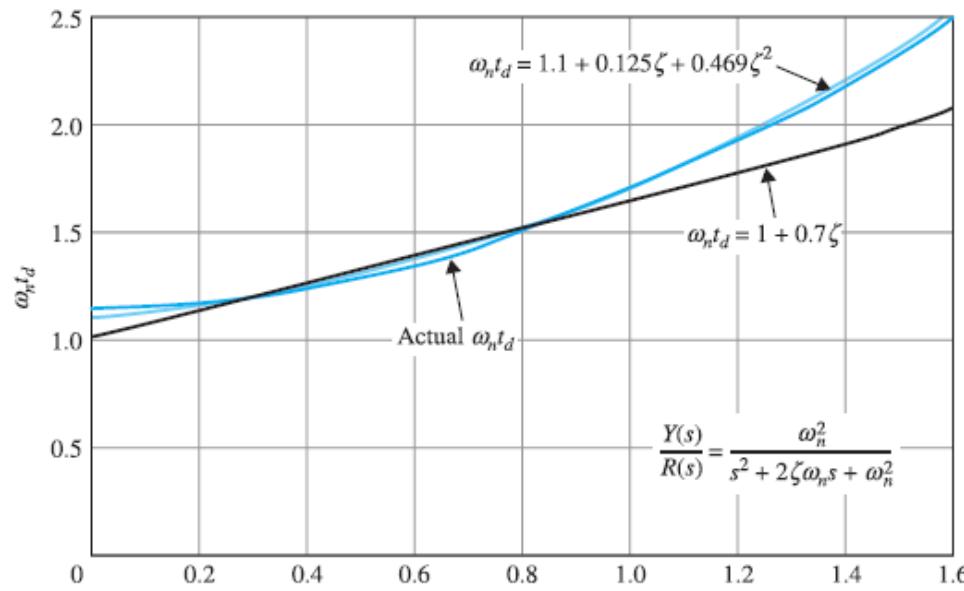
이고 백분율최대오버슈트는

$$\text{percent maximum overshoot} = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$



지연시간과 상승시간 ($0 < \zeta < 1$)

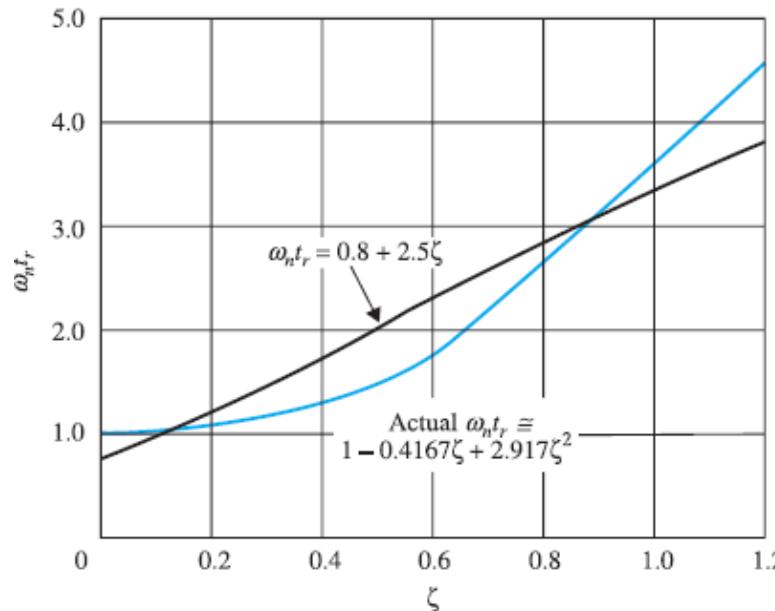
- 비록 간단한 표준형 2차 시스템이라도 지연시간 t_d , 상승시간 t_r , 그리고 정정시간 t_s 의 정확한 해석적 표현은 더욱 어렵다
- $\omega_n t_d$ 와 ζ 관계를 근사해서 그림을 그리고, 직선과 곡선으로 근사하는 방법이 가장 쉽다



$$t_d \equiv \frac{1+0.7\zeta}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

$$t_d \equiv \frac{1.1+0.125\zeta+0.469\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1.0$$

지연시간과 상승시간 ($0 < \zeta < 1$)



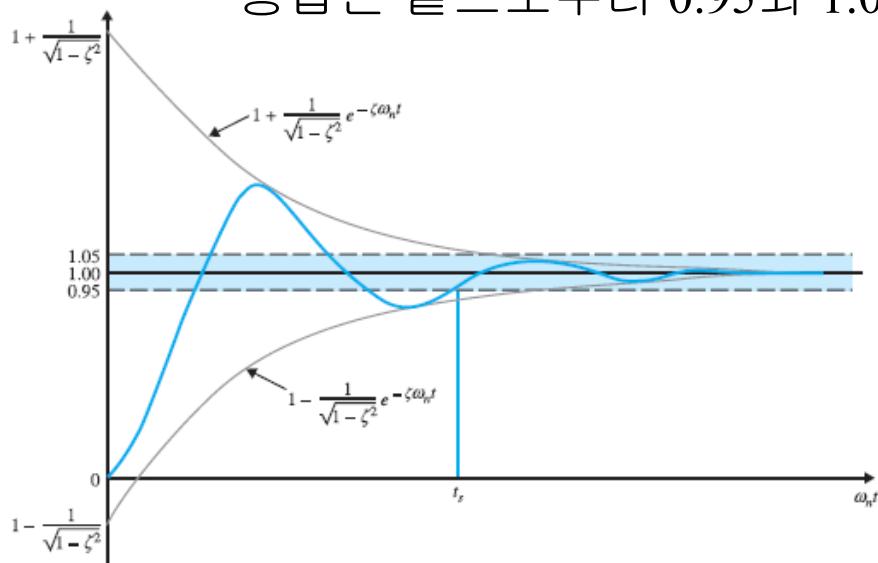
$$t_r = \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

$$t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$$

- t_r 과 t_d 는 ζ 에 비례하고 ω_n 에 반비례한다.
- 고유진동주파수 ω_n 을 증가(감소)시키면 t_r 과 t_d 가 감소(증가)한다.

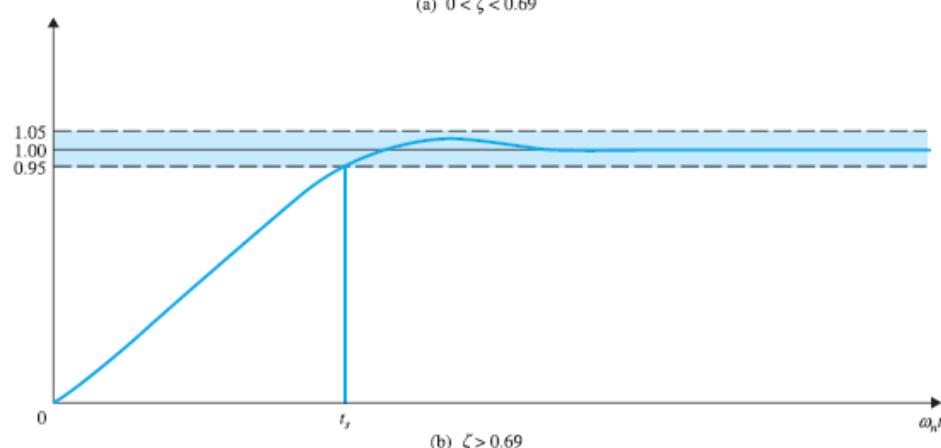
정정시간(5%, 2% Settling time)

- $0 < \zeta < 0.69$ 일 때 단위계단응답은 5%보다 큰 최대오버슈트를 가지게 되며 그 응답이 마지막으로 위아래에서 0.95와 1.05 사이의 밴드 내에 들어가는 시간이다. ζ 가 0.69보다 크면 오버슈트는 5%보다 작으며 그 응답은 밑으로부터 0.95와 1.05인 밴드 내에 들어갈 수 있다.



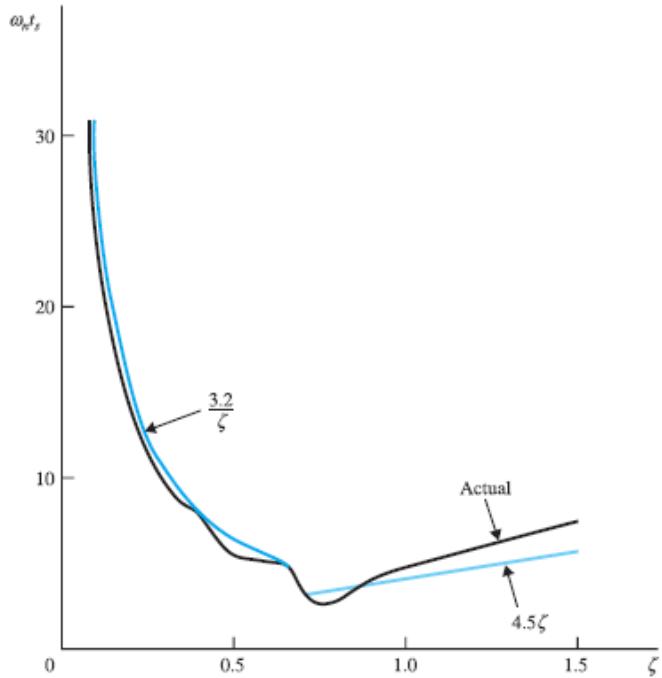
$$1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_s} = \text{Upper bound of unit-step response}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_s} = \text{Lower bound of unit-step response}$$



Solving Eq. (7-47) for $\omega_n t_s$, we have

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{\zeta} \ln(c_{ts} \sqrt{1-\zeta^2})$$



- where c_{ts} is the percentage set for the settling time. For example, if the threshold is 5 percent, the $c_{ts} = 0.05$. Thus, for a 5-percent settling time, the right-hand side of Eq. (7-49) varies between 3.0 and 3.32 as ζ varies from 0 to 0.69.

$$\text{5% settling time: } t_s \equiv \frac{3.2}{\zeta \omega_n} \quad 0 < \zeta < 0.69$$

$$\text{5% settling time: } t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n} \quad \zeta > 0.69$$

- 정정시간 t_s 와 시스템 파라미터 사이의 관계를 다음과 같이 요약할 수 있다.
 - $\zeta < 0.69$ 의 경우에는 정정시간이 ζ 와 ω_n 에 반비례한다. 정정시간을 감소시키는 실질적인 방법은 ζ 를 일정하게 유지하면서 ω_n 을 증가시키는 것이다. 비록 응답은 더 진동을 하게 되더라도 최대오버슈트는 오직 ζ 에만 관여되므로 독립적으로 제어될 수 있다.
 - $\zeta > 0.69$ 인 경우에는 정정시간은 ζ 에 비례하고 ω_n 에 반비례한다. 다시 t_s 는 ω_n 을 증가시키면 감소될 수 있다.

$$\text{2\% settling time: } t_s \cong \frac{4.0}{\zeta \omega_n} \quad 0 < \zeta < 0.9$$

Transient Response Performance Criteria

- As the poles move diagonally away from the origin, because θ remains constant, the damping ratio ζ remains constant while natural frequency ω_n increases. Considering the definitions of the performance criteria from previous sections, PO remains constant while t_{\max} , t_r , and t_s decrease.
- As the poles move away vertically, the natural frequency of the system increases while the damping ratio decreases. In this case PO increases, both t_{\max} and t_r decrease, while t_s remains constant.
- As the poles move horizontally to the left, because q remains constant, the natural frequency of the system increases. In this case, PO increases while both t_r and t_s decrease. Note t_{\max} in this case remains constant.

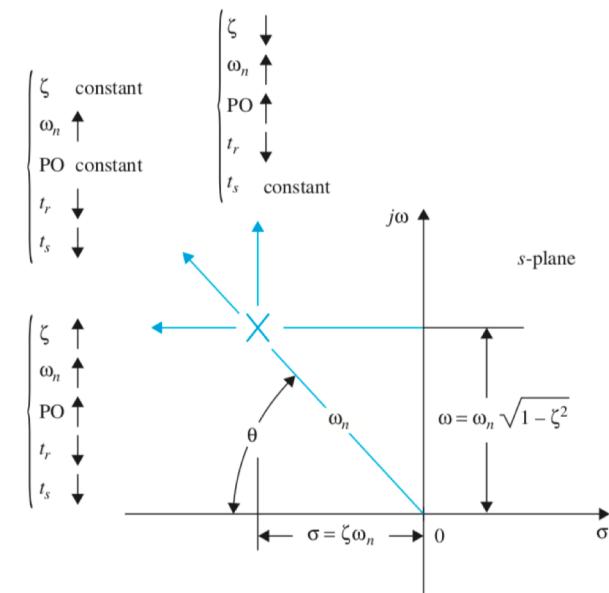
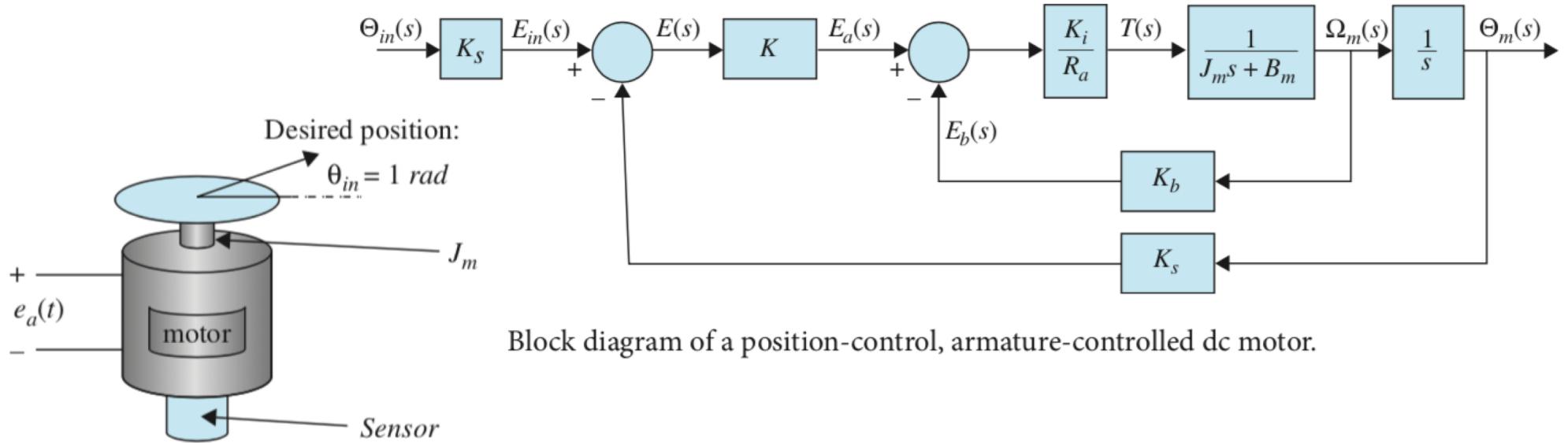


Figure 7-18 Relationship's among the pole location and ζ , ω_n , PO, t_r , and t_s .

Example 7-5-1



$$\frac{\Theta_m(s)}{\Theta_{in}(s)} = \frac{\frac{KK_iK_s}{R_aJ}}{s^2 + \left(\frac{R_aB_m + K_iK_b}{R_aJ}\right)s + \frac{KK_iK_s}{R_aJ}} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Example 7-5-1

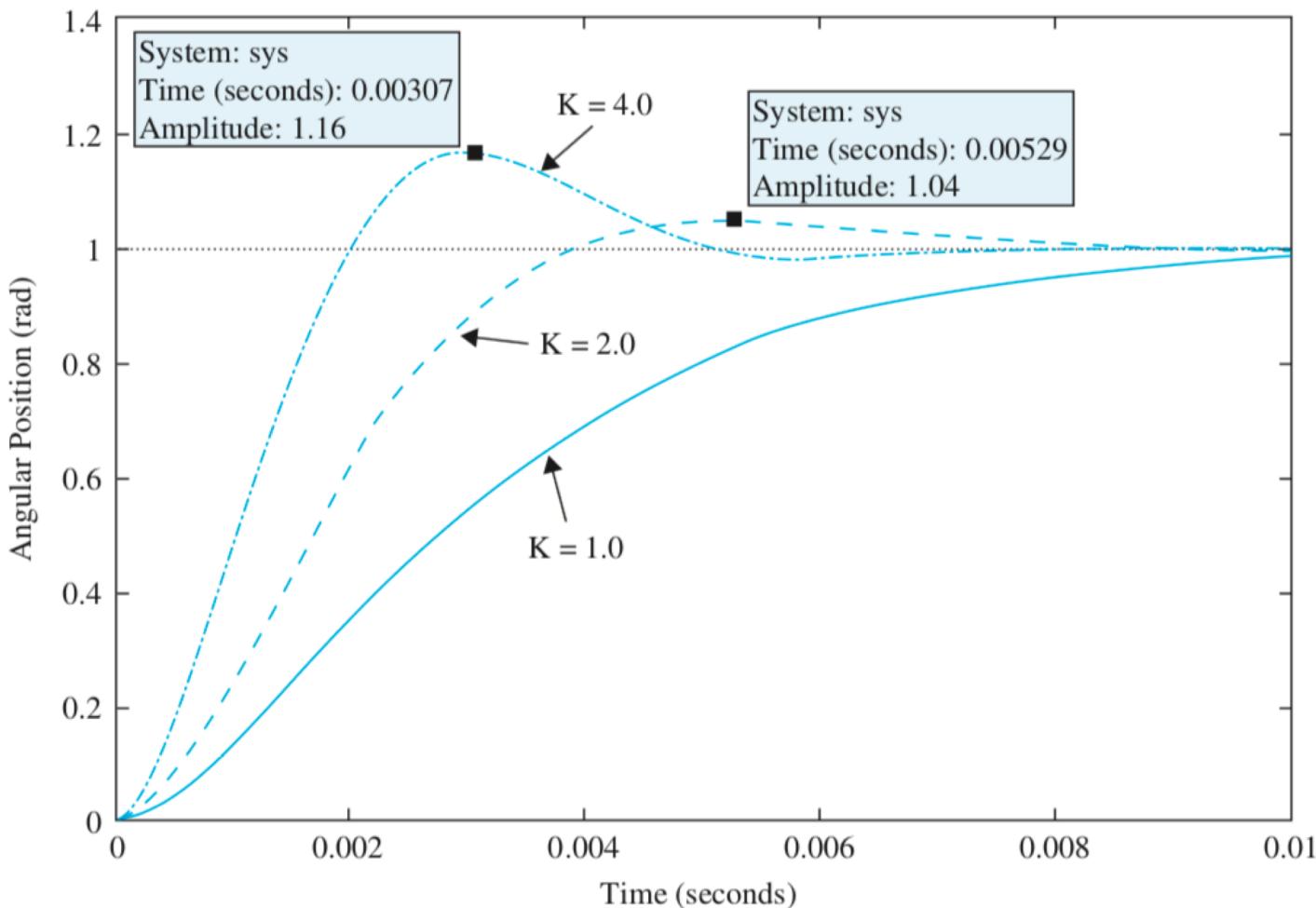


Figure 7-21 Position control response of dc motor in Example 7-5-1 to a unit-step input for three controller gain K values.

Example 7-5-1

TABLE 7-4 Motor Performance for Three Values of Controller Gain K

Controller Gain K	Damping Ratio ζ	Natural Frequency ω_n	Response
$K = 1.0$	$\zeta = 1.0$		Critically damped
$K = 2.0$	$\zeta = 0.707$	$\omega_n = 844.8 \text{ rad/s}$	Underdamped $5\% t_s = \frac{4.5\zeta}{\omega_n} = 0.0038 \text{ s} \quad \zeta > 0.69$ Note: Settling time occurs before overshoot ($PO < 5$) $2\% t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.0067 \text{ s} \quad 0 < \zeta < 0.9$ $t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} = 0.0026 \text{ s} \quad 0 < \zeta < 1$ $t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.0053 \text{ s}$ $PO = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 4.3$
$K = 4.0$	$\zeta = 0.5$	$\omega_n = 1,194.8 \text{ rad/s}$	Underdamped $5\% t_s = \frac{3.2}{\zeta\omega_n} = 0.0054 \text{ s} \quad 0 < \zeta < 0.69$ $2\% t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.0067 \text{ s} \quad 0 < \zeta < 0.9$ $t_r = \frac{1 - 0.4167\zeta + 2.917\zeta^2}{\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1$ $= 0.0013 \text{ sec}$ $t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = 0.003 \text{ s}$ $PO = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} = 16.3$

정상상태오차(steady-state error)

- 정의: 정상상태에 도달했을 때 기준입력과 출력 사이의 불일치 값
- 선형제어시스템에서는 입력신호의 형태와 시스템의 형태에 따라 달라진다.
- Unity-Feedback Systems**
 - $r(t)$: 입력, $y(t)$: 출력

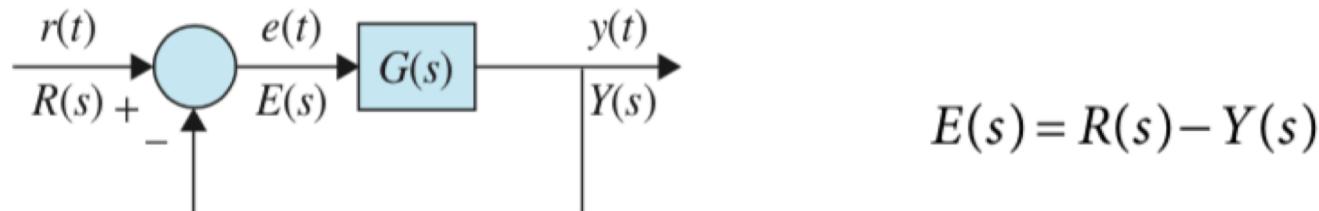


Figure 7-22 Error in a unity-feedback control system.

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$E(s) = \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right) R(s)$$

steady-state error

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1 + G(s)} \right) R(s)$$

정상상태오차(steady-state error)

- Nonunity-Feedback Systems

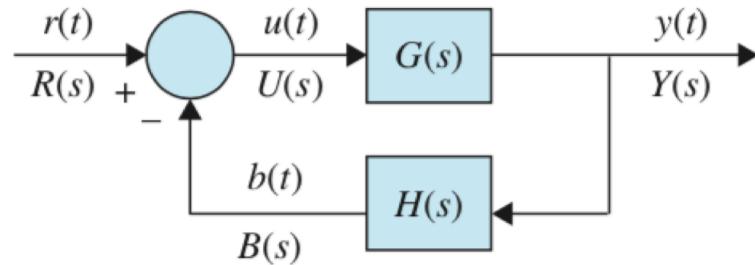


Figure 7-23 Nonunity-feedback control system.

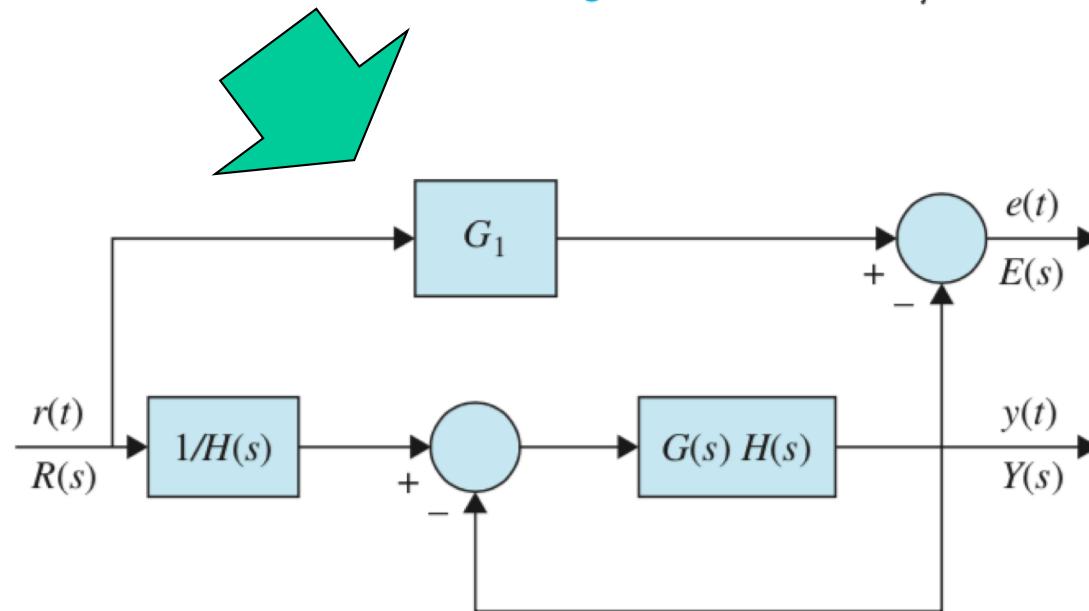


Figure 7-24 Error in a nonunity-feedback control system.

정상상태오차(steady-state error)

- **Nonunity-Feedback Systems**

Case 1: $G_1(s) = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} H(s)} = 1/H(0) = \text{Constant}$

- $H(s)$ 가 $s=0$ 에 극점이 없는 경우

$$\text{Reference signal} = R(s)[1/H(0)] = R(s)G_1(s)$$

Case 2: $H(s)$ has N th-order zero at $s = 0$

$$G_1(s) = \left(\frac{1}{s^N} \right) \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} H(s)} = \frac{1}{s^N H(0)}$$

$$\text{Reference signal} = \frac{R(s)}{s^N H(0)} = R(s)G_1(s)$$

정상상태오차(steady-state error)

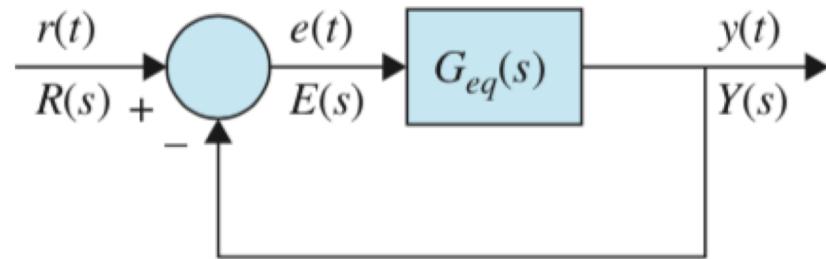
$$E(s) = \text{Reference signal} - Y(s) = R(s)G_1(s) - Y(s)$$

$$E(s) = \left(G_1(s) - \frac{Y(s)}{R(s)} \right) R(s) = \left(G_1(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right) R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(G_1(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right) R(s)$$

정상상태오차(steady-state error)

- 등가의 단위 피드백형태로 바꾸면,



$$E(s) = \left(\frac{1}{1 + G_{eq}(s)} \right) R(s) = \left(\frac{G_1(s) + G_1(s)G(s)H(s) - G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right) R(s)$$

$$G_{eq}(s) = \left(\frac{[1 + G(s)H(s)][1 - G_1(s)] + G(s)}{G_1(s)[1 + G(s)H(s)] - G(s)} \right)$$

Example 7-6-1

The forward-path and closed-loop transfer functions of the system shown in Fig. 7-22 are given next. The system is assumed to have unity feedback, so $H(s) = 1$, and thus we use Eq. (7-60) for error calculation.

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} \quad (7-70)$$

$$M(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{5(s+1)}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \quad (7-71)$$

The poles of $M(s)$ are all in the left-half s -plane. Thus, the system is stable. The steady-state errors due to the three basic types of inputs are evaluated as follows:

Unit-step input:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 60s^2}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = 0 \quad (7-72a)$$

Unit-ramp input:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 60s^2}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = 0 \quad (7-72b)$$

Unit-parabolic input:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 60s^2}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s^3} \right) = \frac{60}{5} = 12 \quad (7-72c)$$



Example 7-6-2

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \quad H(s) = \frac{5(s+1)}{s+5} \quad (7-73)$$

Because $H(s)$ has no zeros at $s = 0$, we use Case 1 scenario given by Eq. (7-61) in error calculations—that is, $G_1(s) = 1/H(0) = 1$. So $r(t)$ in Fig. 7-23 is the reference signal. The closed-loop transfer function is

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \quad (7-74)$$

Using Eq. (7-67) The steady-state errors of the system are calculated for the three basic types of inputs.

Unit-step input:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - M(s)]R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 4s}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = 0 \end{aligned} \quad (7-75)$$

Unit-ramp input:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s[1 - M(s)]R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 4s}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 5s + 5} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = 0.8 \end{aligned} \quad (7-76)$$



Example 7-6-3

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s+12)} \quad H(s) = \frac{10s}{s+5} \quad (7-87)$$

where $H(s)$ has one zero at $s = 0$. Thus,

$$G_1(s) = \left(\frac{1}{s}\right) \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = \frac{1}{2s} \quad (7-88)$$

Hence,

$$\text{Reference signal} = \frac{R(s)}{2s} \quad (7-89)$$

The closed-loop transfer function is

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 10s} \quad (7-90)$$

For a unit-step input, the steady-state error, from Eq. (7-67), is

Unit step input:

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{1}{2s} - M(s) \right] R(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{2s} - \frac{s+5}{s^4 + 17s^3 + 60s^2 + 10s} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s^4 + 17s^3 + 58s^2}{2s^5 + 34s^4 + 120s^3 + 20s^2} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{58}{20} = 2.9 \end{aligned} \quad (7-91)$$

Example 7-6-4

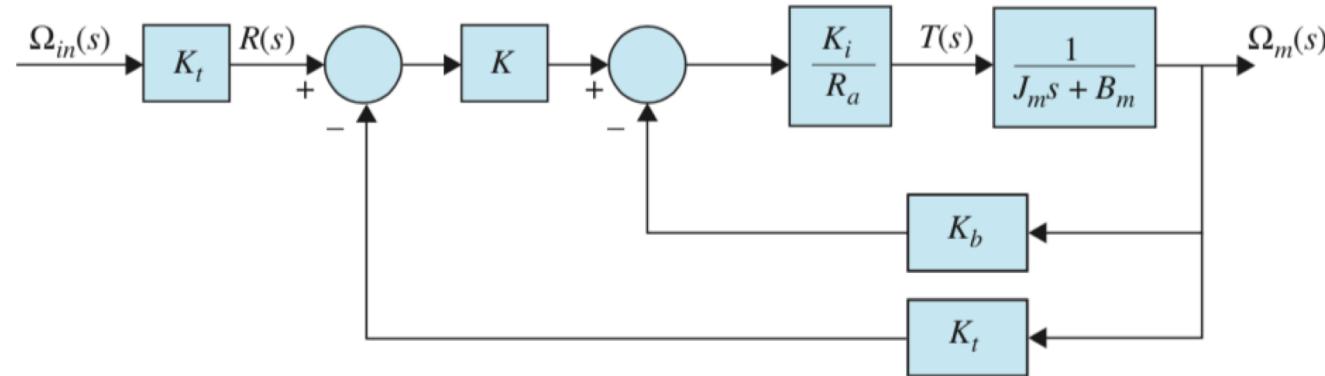


Figure 7-26 Speed control block diagram of a dc motor.

$$G(s) = \frac{\frac{K_t K_i K}{R_a J_m}}{s + \left(\frac{K_i K_b + R_a B_m}{R_a J_m} \right)}$$

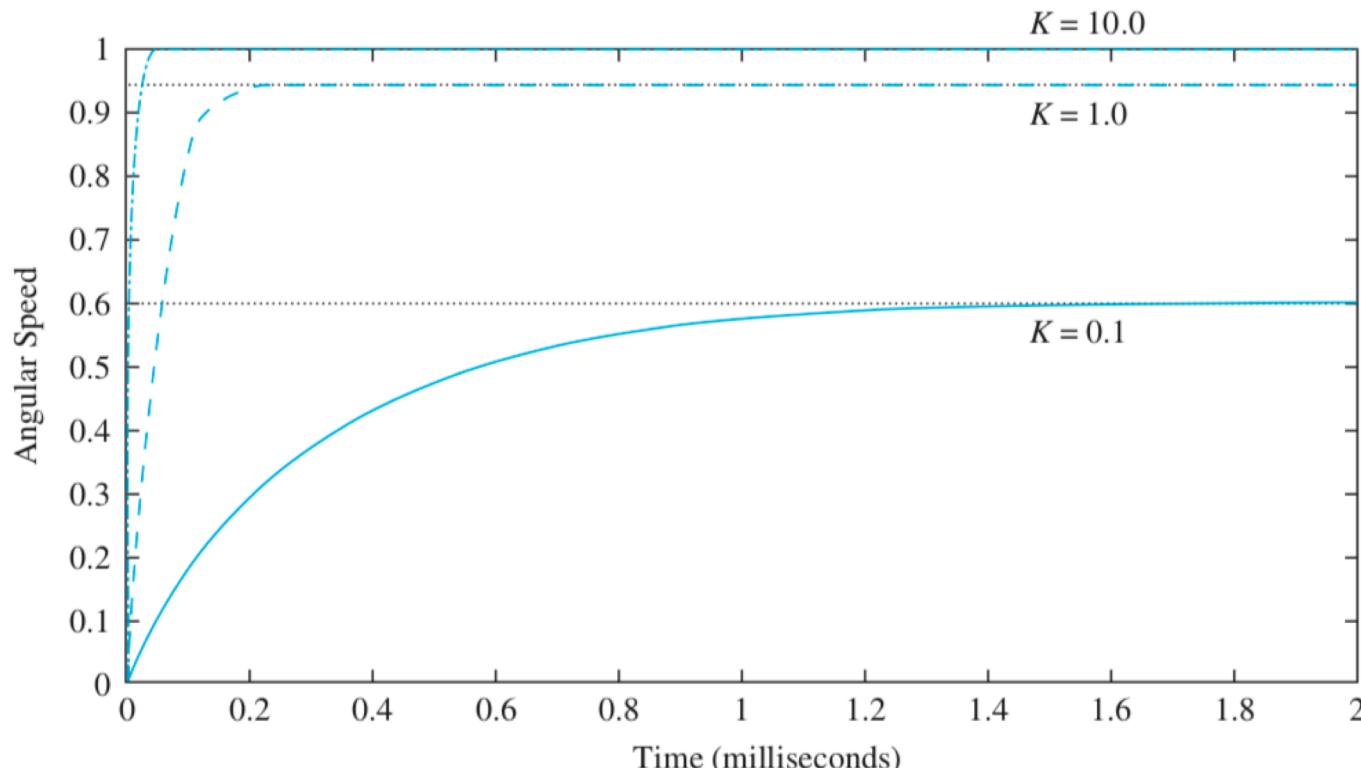
$$\Omega_m(s) = \frac{\frac{K_t K_i K}{R_a J_m}}{s + \left(\frac{K_i K_b + R_a B_m + K_t K_i K}{R_a J_m} \right)} \Omega_{in}(s)$$

for the reference signal $\Omega_{in}(s) = 1/s$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{1+G(s)} \right) \frac{1}{s} = \frac{K_i K_b + R_a B_m}{K_i K_b + R_a B_m + K_t K_i K}$$

Example 7-6-4

Controller Gain K	Steady-State Error e_{ss}	System Time Constant $\tau_c = \frac{R_a J_m}{K_i K_b + R_a B_m + K_t K_i K}$
0.1	0.3990 rad/s	$\tau_c = 3.3391 \times 10^{-4} \text{ s}$
1.0	0.0622 rad/s	$\tau_c = 5.2097 \times 10^{-5} \text{ s}$
10.0	0.0066 rad/s	$\tau_c = 5.5189 \times 10^{-6} \text{ s}$



Steady-State Error in Systems with a Disturbance

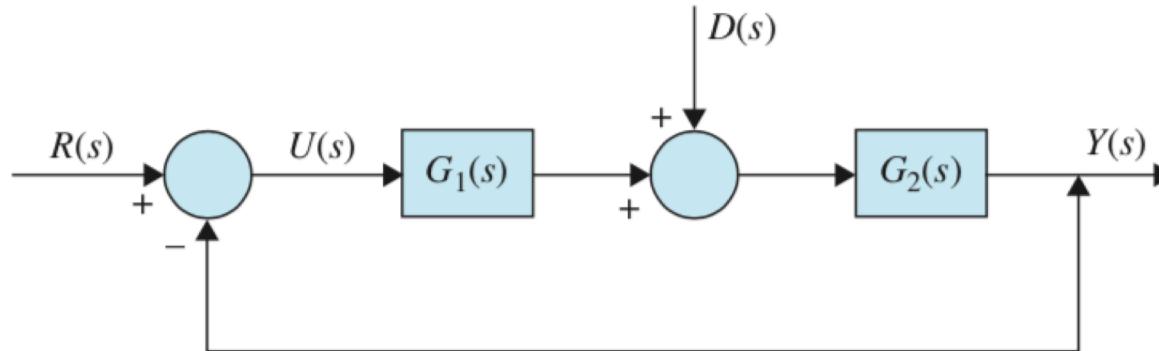


Figure 7-28 Block diagram of a system undergoing disturbance.

$$Y_{\text{total}} = \frac{Y(s)}{R(s)} \Big|_{D=0} R(s) + \frac{Y(s)}{D(s)} \Big|_{R=0} D(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} R(s) + \frac{-G_2}{1 + G_1 G_2} D(s)$$

and the error is

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1 G_2} R(s) + \frac{-G_2}{1 + G_1 G_2} D(s)$$

Steady-State Error in Systems with a Disturbance

The **steady-state error** of the system is defined as

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_1 G_2} R(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2}{1 + G_1 G_2} D(s)$$

결론:

$e_{ss}(R)$ and $e_{ss}(D)$ have the same denominators if the disturbance signal is in the forward path. The negative sign in the numerator of $e_{ss}(D)$ shows that, at steady state, the disturbance signal adversely affects the performance of the system. Naturally, to compensate for this burden, the control system has to alter the system performance at steady state.

Types of Control Systems: Unity-Feedback Systems

with $H(s) = 1$

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

- e_{ss} 는 $G(s)$ 의 극점 중에 원점에 위치한 극점의 갯수에 달려있다. 이것을 제어시스템의 system type이라고 한다.

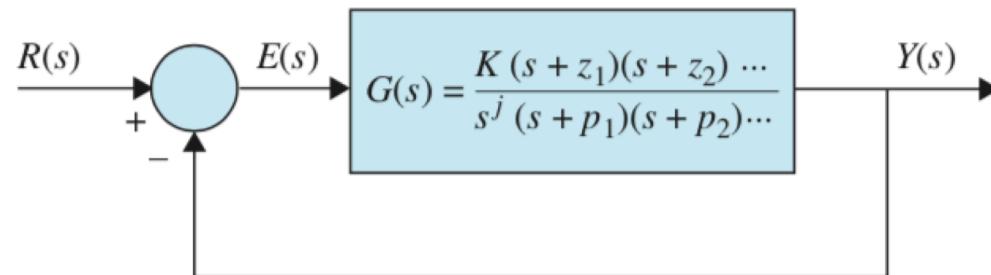


Figure 7-30 A unity-feedback control system used to define system type.

- 위의 그림에서는 $G(s)$ 의 type은 j 이다.

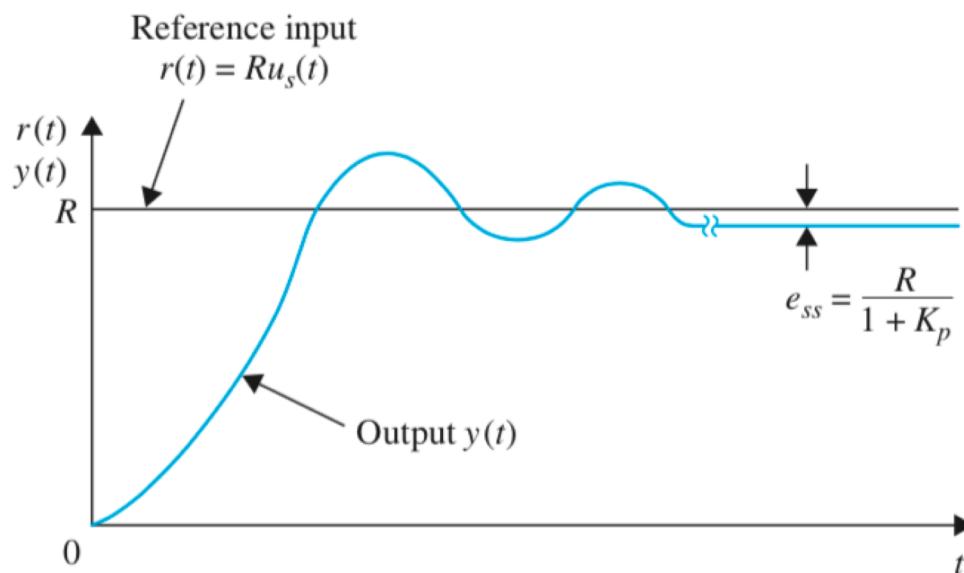
계단오차상수(Step-Error Constants)

- 크기 R 인 계단 입력($R(s) = R/s$)에 대한 정상상태 오차상수

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1+G(s)} = \frac{R}{1+\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

- 계단오차상수를 다음과 같이 정의하면, $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

$$e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$$



Type 0 system: $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p} = \text{constant}$

Type 1 or higher system: $e_{ss} = 0$

Figure 7-31 Typical steady-state error due to a step input.

램프오차상수(Ramp-Error Constants)

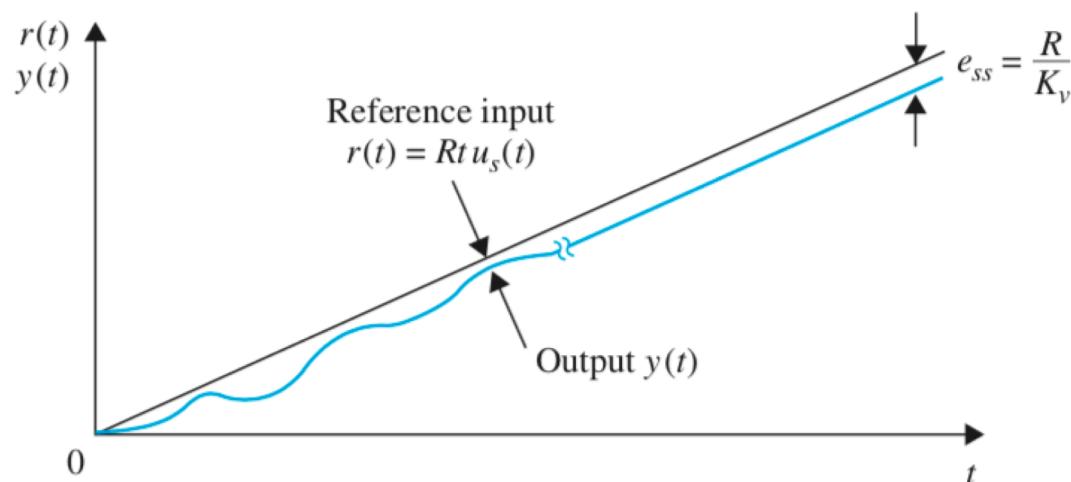
- 기울기 R 인 램프입력($R(s)=\frac{R}{s^2}$)에 대한 정상상태 오차상수

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sG(s)} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)}$$

- 램프오차상수를 다음과 같이 정의하면,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

$$e_{ss} = \frac{R}{K_v}$$



Type 0 system: $e_{ss} = \infty$

Type 1 system: $e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \text{constant}$

Type 2 system: $e_{ss} = 0$

Figure 7-32 Typical steady-state error due to a ramp-function input.

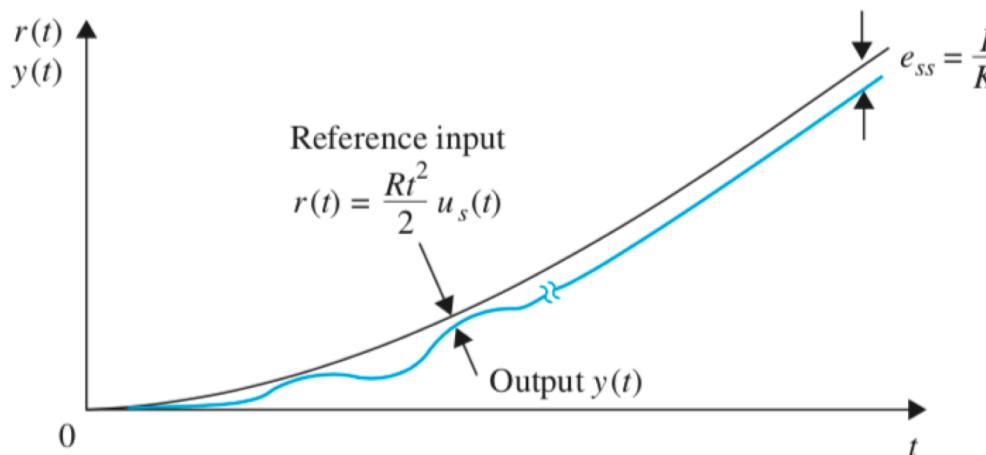
포물선오차상수(Parabolic-Error Constants)

- 포물선입력($R(s) = \frac{R}{s^3}$)에 대한 정상상태 오차상수

$$e_{ss} = \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)}$$

- 포물선오차상수를 다음과 같이 정의하면, $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)$

$$e_{ss} = \frac{R}{K_a}$$



Type 0 system:	$e_{ss} = \infty$
Type 1 system:	$e_{ss} = \infty$
Type 2 system:	$e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \text{constant}$
Type 3 or higher system:	$e_{ss} = 0$

Figure 7-33 Typical steady-state error due to a parabolic-function input.

TABLE 7-6 Summary of the Steady-State Errors Due to Step-, Ramp-, and Parabolic-Function Inputs for Unity-Feedback Systems

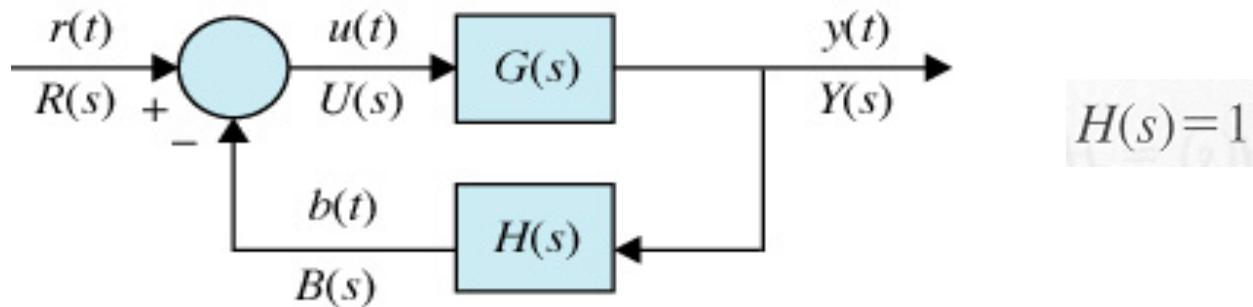
Type of System	Error Constants			Steady-State Error e_{ss}		
	K_p	K_v	K_a	Step Input	Ramp Input	Parabolic
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

1. 계단, 램프 및 포물선오차상수는 입력신호가 계단함수, 램프함수 및 포물선함수일 경우의 오차해석에서만 각각 의미가 있다.
2. 오차상수는 전방경로 전달함수 $G(s)$ 에 대하여 정의되었기 때문에 이 방법은 바로 Fig. 7-22 과 같은 시스템에 $H(s)=1$ 인 경우에만 적용될 수 있다. 오차해석은 라플라스변환의 최종치 정리를 이용하므로 먼저 $sE(s)$ 가 s 평면 우반면이나 $j\omega$ 축 상에 극을 가지고 있는지를 먼저 확인하는 것이 중요하다.
3. Table 7-6 요약된 정상상태오차 성질은 단위피드백을 가지는 시스템에만 적용되는 것이다.
4. 이 세 가지 기본 입력형태의 선형조합인 입력을 가지는 시스템의 정상상태오차는 각 입력 성분에 기인하는 오차를 중첩시켜 간단히 결정할 수 있다.
5. 시스템 형태가 Fig. 7-22에 나타낸 $H(s)=1$ 인 경우와 다를 때에는 시스템을 Fig. 7-22 형태로 간략화하든지 오차신호를 구하여 최종치 정리를 적용할 수 있다. 여기에서의 오차상수는 각각의 경우에 따라 적용할 수도 있고 적용할 수 없을 때도 있다.

오차상수 방법은 어떻게 오차가 시간에 따라 변화하는지를 나타내지 못한다.

입력이 정현파인 시스템에는 최종치 정리가 적용되지 못하므로 오차상수 방법 역시 적용하지 못한다.

Example 7-6-7



(a) $G(s) = \frac{K(s + 3.15)}{s(s + 1.5)(s + 0.5)}$ $H(s) = 1$ 1형 시스템

계단입력: 계단오차상수 $K_p = \infty$ $e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = 0$

램프입력: 램프오차상수 $K_v = 4.2K$ $e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \frac{R}{4.2K}$

포물선입력: 포물선오차상수 $K_a = 0$ $e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \infty$

이 결과들은 안정된 폐루프 시스템인 K 의 범위, 즉 $0 < K < 1.304$ 에 있을 때만 성립된다.

(b) $G(s) = \frac{K}{s^2(s + 12)}$ $H(s) = 1$ 2형 시스템

폐루프 시스템은 모든 K 의 값에 대하여 불안정이다. 오차해석은 의미가 없다.

(c) $G(s) = \frac{5(s + 1)}{s^2(s + 12)(s + 5)}$ $H(s) = 1$ 2형 시스템

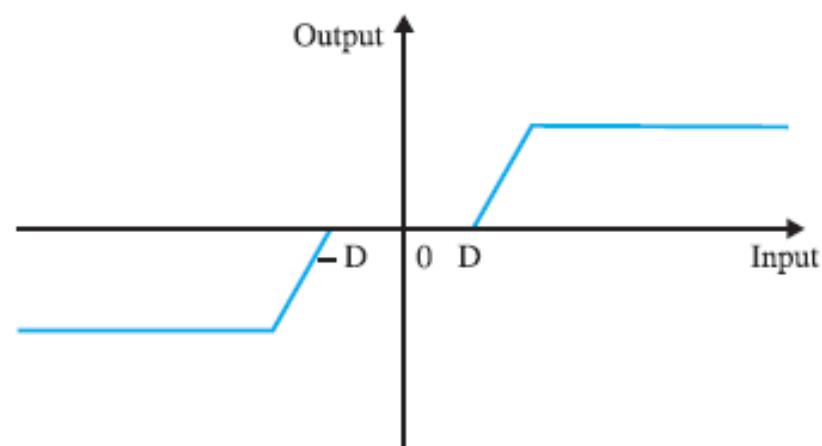
이 폐루프 시스템은 안정임을 보일 수 있다. 정상상태오차는 세 가지 기본 입력형태에 대해 계산된다.

계단입력: 계단오차상수: $K_p = \infty$ $e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = 0$

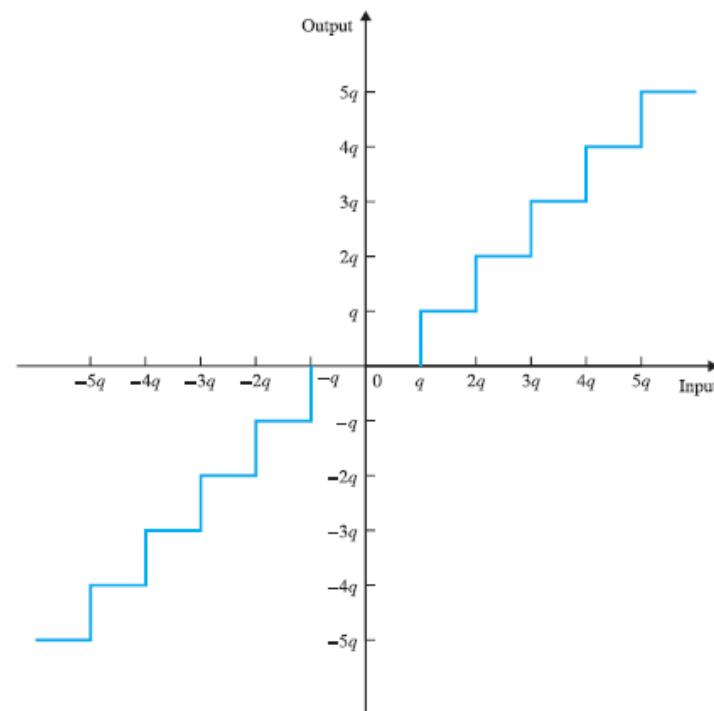
램프입력: 램프오차상수: $K_v = \infty$ $e_{ss} = \frac{R}{K_v} = 0$

포물선입력: 포물선오차상수: $K_a = 1/2$ $e_{ss} = \frac{R}{K_a} = 12R$

비선형시스템 요소로 인한 정상상태오차



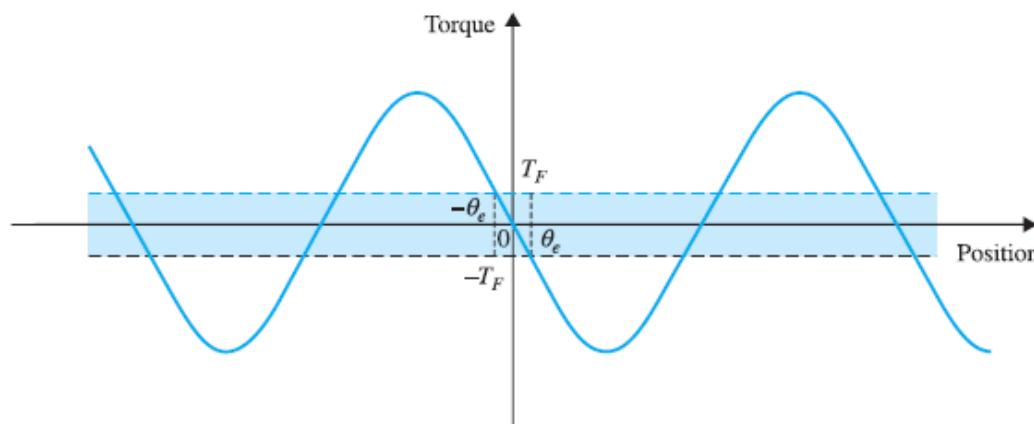
Dead Zone



Quantization

비선형시스템 요소로 인한 정상상태오차

- 오차에 관한 비선형적인 영향을 이해하고 오차크기의 최대상한을 선정하는 것들은 비교적 간단하지만 비선형시스템의 일반적인 완전해를 얻는다는 것은 어려운 일이다.
- 비선형제어시스템 오차의 정확하고 자세한 해석은 컴퓨터 시뮬레이션으로만 수행할 수 있다. 그러므로 실제로는 오차 없는 제어시스템을 실현하여야 하고 모든 시스템은 여러 형태의 비선형특성을 가지기 때문에 정상상태오차는 완전히 없앨 수는 없어도 줄일 수는 있다.



[그림 5-10] 쿨롬 마찰을 가지는 모터나 페루프시스템의 토크-각도 곡선.

기본 제어시스템과 전달함수에 극과 영점을 추가한 효과

- 앞에서 설명한 제어시스템의 모든 예제에서 제어기는 일정이득 K 를 갖는 일반적이고 단순한 경우에 논의하였다. 이러한 제어동작을 제어기의 출력인 제어신호가 제어기의 입력신호에 단순히 비례상수에 따라 비례하게 정해지게 되어서 비례제어(**proportional control**)라 한다.
- 실제 쓰이는 가장 잘 알려진 제어기인 PID 제어기로 이는 비례(**proportional**), 적분(**integral**) 그리고 미분(**derivative**)을 의미한다. PID 제어기의 미분과 적분요소들은 이들 요소들의 기본적인 이해를 통해서 각각의 성능과의 연관 및 응용을 파악한다. 대체로 이러한 제어기가 하는 것은 전체 시스템의 개루프 전달함수나 폐루프 전달함수에 추가 극과 영점을 더하는 것이다.

전방경로 전달함수에 극 추가: 단위피드백시스템

극의 추가와 단위피드백시스템의 전방경로 전달함수의 상대적인 위치에 대한 일반적인 효과를 알아보기 위하여 다음의 전달함수를 생각하자.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)(1 + T_p s)} \quad (5-159)$$

$s = -1/T_p$ 의 극이 표준형 2차 시스템 전달함수에 추가되었다고 생각한다고 페루프 전달함수는 다음과 같다.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{T_p s^3 + (1 + 2\zeta\omega_n T_p)s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-160)$$

그림 5-34는 $\omega_n = 1$, $\zeta = 1$ 이고 $T_p = 0, 1, 2, 5$ 일 때 페루프시스템의 단위계단응답을 보여 준다. 이들 응답은 전방경로 전달함수에 극을 추가하는 것이 일반적으로 단위페루프 시스템응답의 최대오버슈트를 증가시키는 효과가 있음을 보여준다.

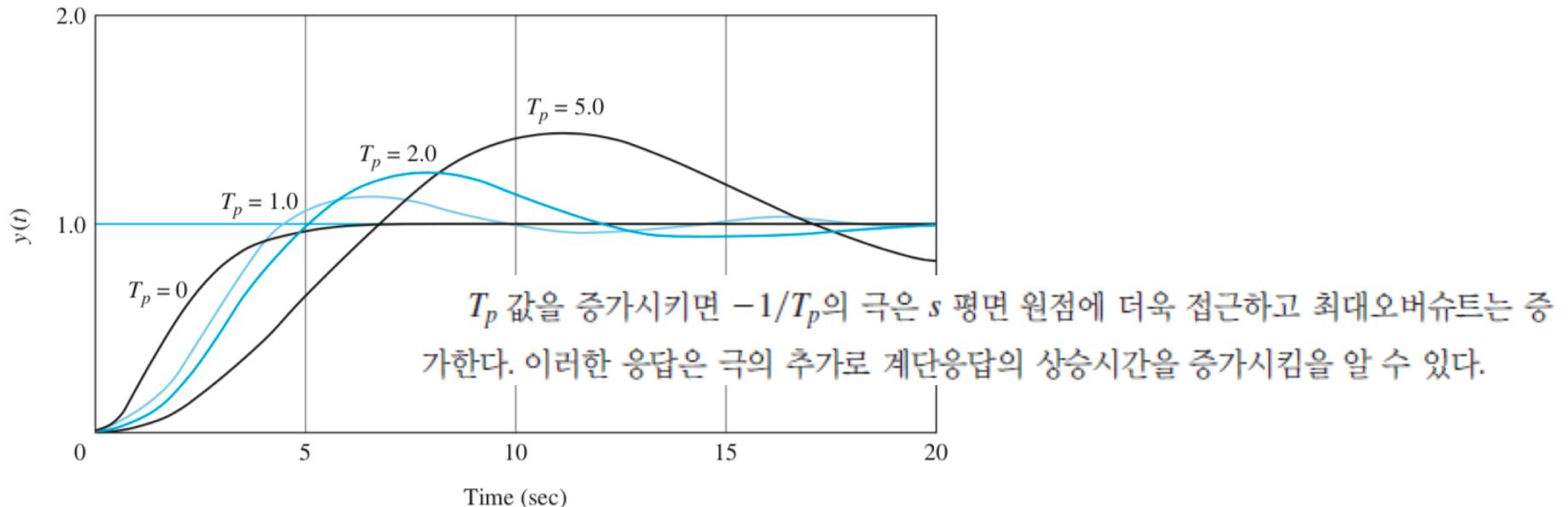


Figure 7-37 Unit-step responses of the system with the closed-loop transfer function in Eq. (7-129):

$\zeta = 1$, $\omega_n = 1$ and $T_p = 0, 1, 2$, and 5 .

In general, addition of a pole to the forward-path transfer function generally has the effect of increasing the maximum overshoot of the closed-loop system.

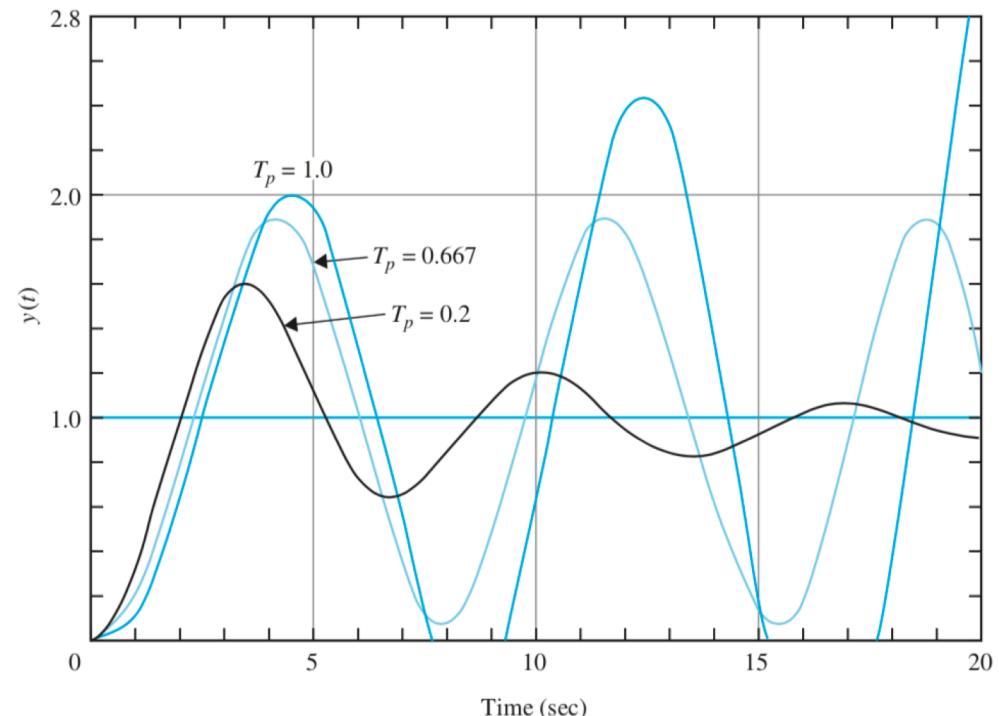


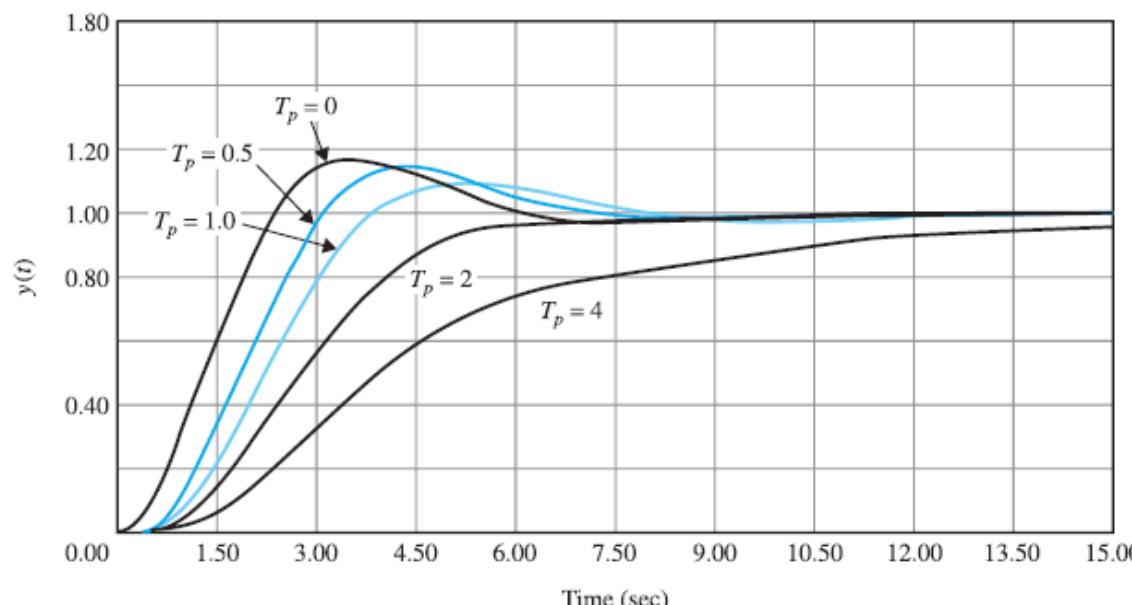
Figure 7-38 Unit-step responses of the system with the closed-loop transfer function in Eq. (7-129): $\zeta = 0.25$, $\omega_n = 1$ and $T_p = 0, 0.2, 0.667$, and 1.0 .

페루프 전달함수에 극 추가

페루프 전달함수의 극은 특성방정식의 근이기 때문에 이들 극은 이 시스템의 과도응답을 직접 제어한다. 다음과 같은 페루프 전달함수를 생각하자.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + T_p s)}$$

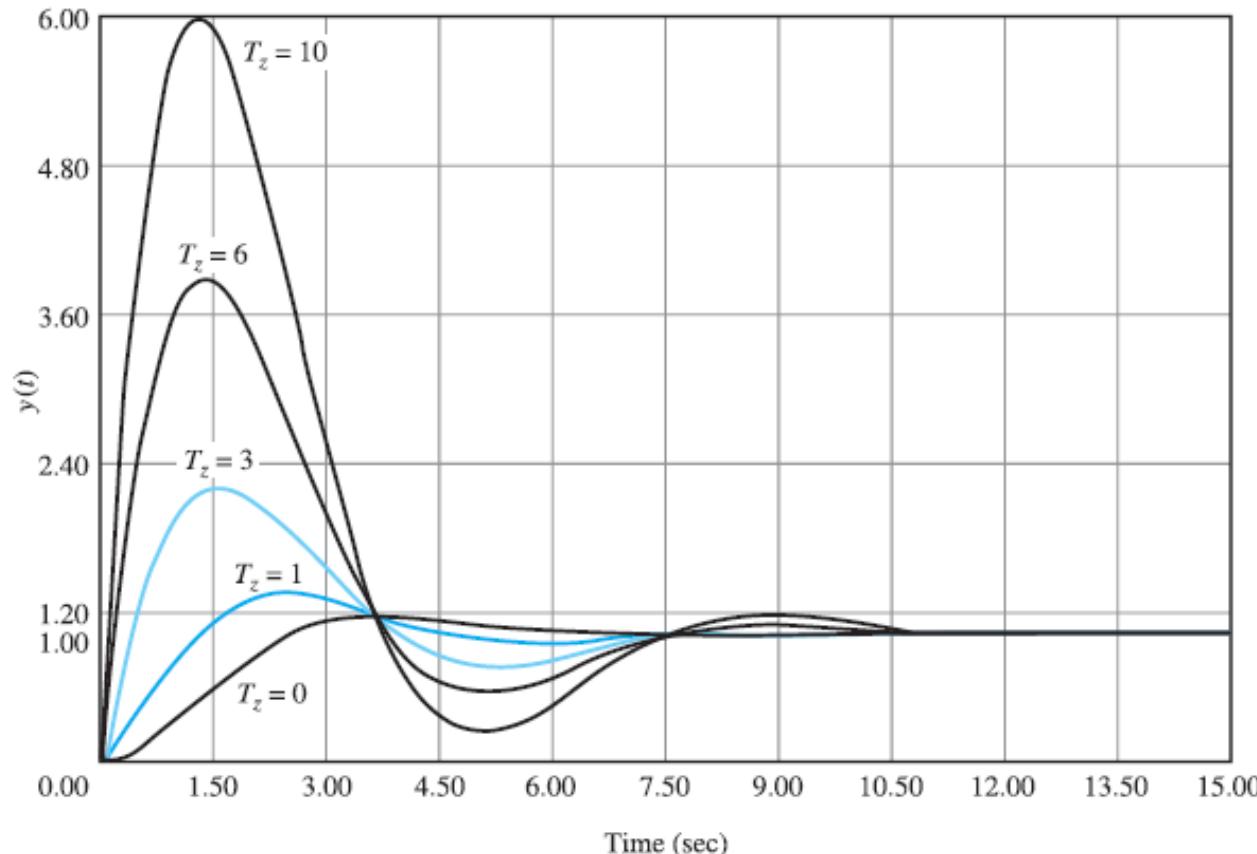
여기서 $(1 + T_p s)$ 항이 표준형 2차 전달함수에 추가된 것이다. 그림 7-39은 $\omega_n = 1.0$, $\zeta = 0.5$ 이고 $T_p = 0, 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$ 인 시스템의 단위계단응답을 보여 준다. $s = -1/T_p$ 에 있는 극이 s 평면의 원점을 향하여 이동하면 상승시간은 증가하고 최대오버슈트는 감소한다. 그러므로 오버슈트에 관한 한 페루프 전달함수에 극을 추가하는 것은 전방경로 전달함수에 극을 추가하는 효과와는 반대효과가 있다.



페루프 전달함수에 영점 추가

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2(1 + T_z s)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

여기서 $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$ 이고 $T_z = 0, 1, 3, 6$ 및 10 이다. 이 경우 페루프 전달함수에 영점을 추가하면 상승시간을 감소시키고 계단응답의 최대오버슈트를 증가시킨다는 것을 알 수 있다.



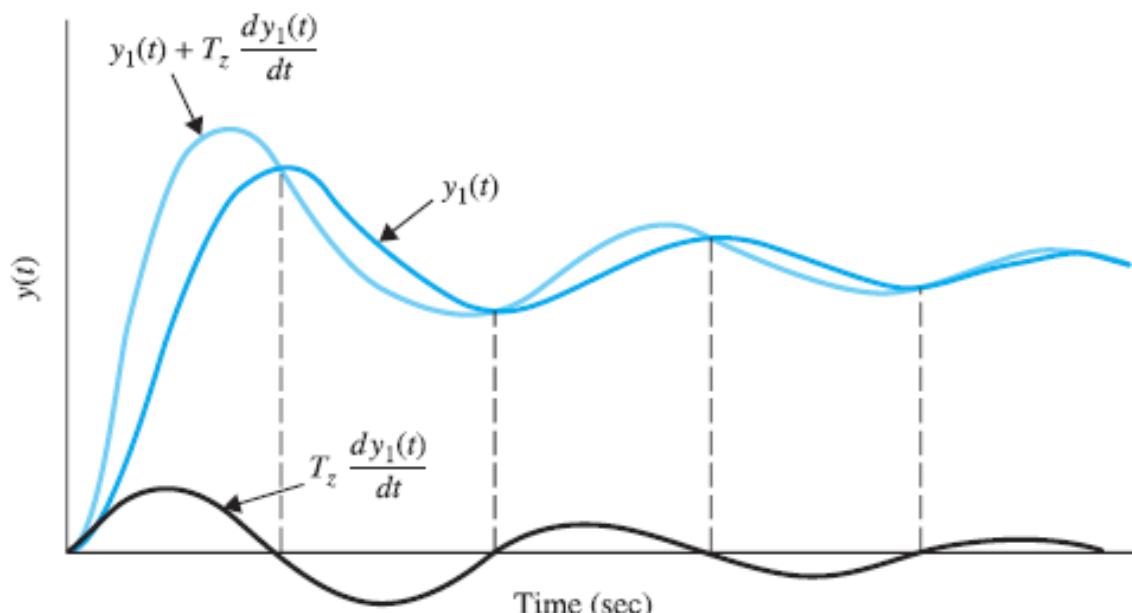
식 (5-162)를 다음과 같이 표기함으로써 일반적인 경우를 해석할 수 있다.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{T_z \omega_n^2 s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5-163)$$

단위계단입력에 대하여 식 (5-163) 우변의 제일 첫 번째 항에 대응하는 출력응답을 $y_1(t)$ 로 놓자. 그러면 전체응답은 다음과 같다.

$$y(t) = y_1(t) + T_z \frac{dy_1(t)}{dt} \quad (5-164)$$

그림 5-38은 식 (5-164)에 의하여 $s = -1/T_z$ 인 영점 추가가 왜 상승시간을 줄이고 최대오버슈트를 증가시키는지를 보여 준다. 사실 T_z 가 무한대에 접근할 때 최대오버슈트도 역시 무한대에 접근하지만 오버슈트가 유한이고 ζ 가 양인 한 이 시스템은 안정이다.



[그림 5-38] 폐루프 전달함수에 영점 추가로 인한 효과를 설명하는 단위계단응답.

전방경로 전달함수에 영점을 추가: 단위피드백시스템

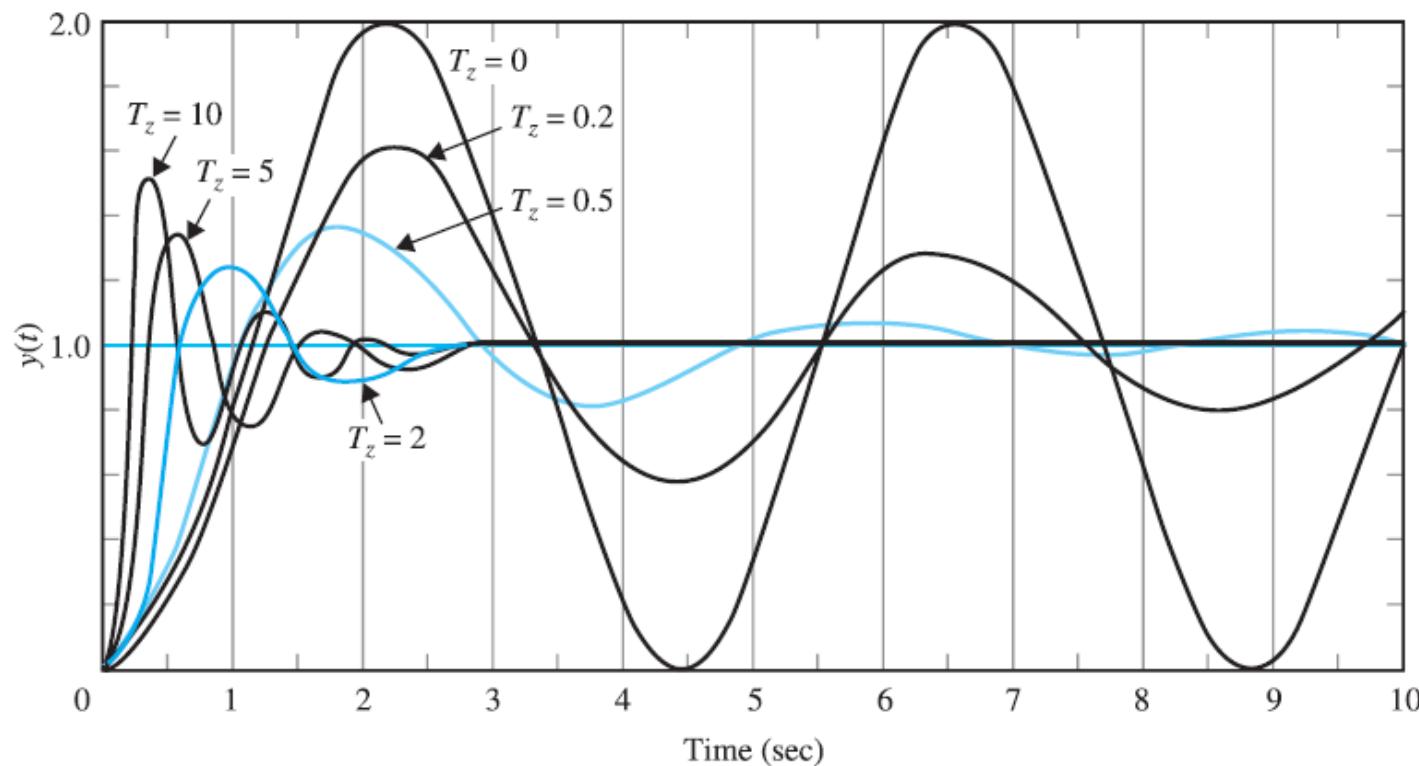
$-1/T_z$ 의 영점을 3차 시스템의 전방경로 전달함수에 추가한 다음의 경우를 생각하자.

$$G(s) = \frac{6(1 + T_z s)}{s(s+1)(s+2)} \quad (5-165)$$

폐루프 전달함수는 다음과 같다.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{6(1 + T_z s)}{s^3 + 3s^2 + (2 + 6T_z)s + 6} \quad (5-166)$$

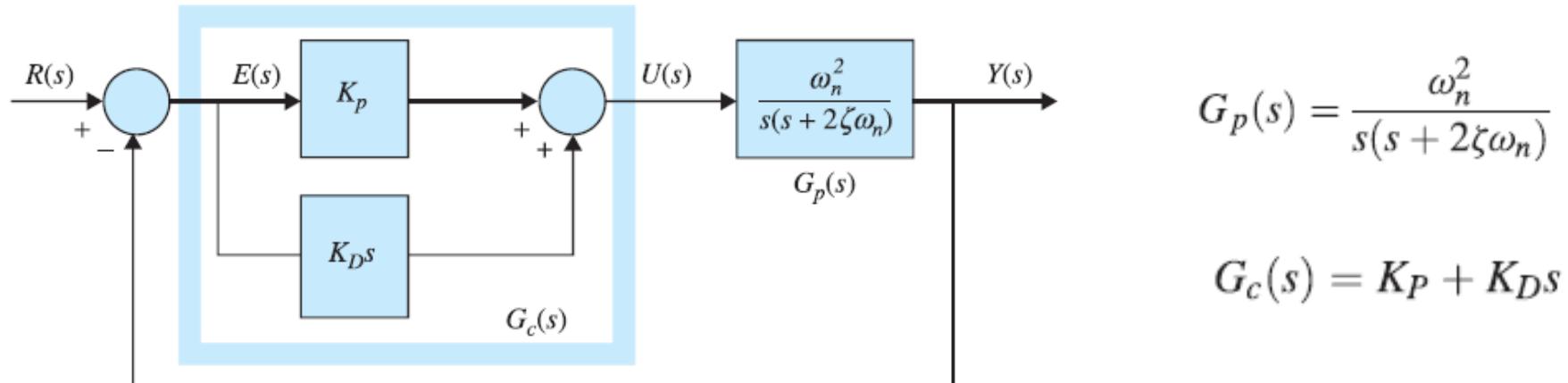
이 경우와 폐루프 전달함수에 영점을 추가한 경우와의 차이는 이 경우 $(1 + T_z s)$ 항이 $M(s)$ 의 분자에만 있을 뿐만 아니라 $M(s)$ 의 분모에도 T_z 가 포함된다는 것이다. $M(s)$ 분자의 $(1 + T_z s)$ 항은 최대오버슈트를 감소시키는 효과가 있다.
일반적으로 특성방정식 근이 선형제어시스템에서 상대안정도와 상대감쇠를 고찰하는데 사용되지만 전달함수의 영점이 시스템의 과도성능에 영향을 미친다는 점을 간과해서는 안 된다.



[그림 5-39] 식 (5-166)의 폐루프 전달함수를 갖는 시스템에서 $T_z = 0, 0.2, 0.5, 2, 5$ 및 10 일 때 단위계단응답.

극과 영점을 추가한 기본 제어시스템

Example 7-7-2



시스템의 전방경로 전달함수는

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_p(s) = \frac{\omega_n^2(K_p + K_D s)}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

PD 제어는 전방경로 전달함수에 $s = -K_p/K_D$ 의 단순영점을 추가하는 것과 같다.

다음의 2차 모델을 생각해 보자.

$$G(s) = \frac{2}{s(s+2)}$$

PD 제어기의 전달함수를 다시 쓰면,

$$G_c(s) = (K_P + K_D s)$$

전방경로 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{2(K_P + K_D s)}{s(s+2)}$$

폐루프 전달함수는

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2(K_P + K_D s)}{s^2 + (2 + 2K_D)s + 2K_P}$$

식 (5-176)에서 PD 제어기의 영향은 다음과 같다.

1. 폐루프 전달함수에 $s = -K_P/K_D$ 에 영점을 추가한다.
2. 분모에서 s 항의 계수를 2에서 $2 + 2K_D$ 로 증가시켜서 감쇠항을 증가시킨다.

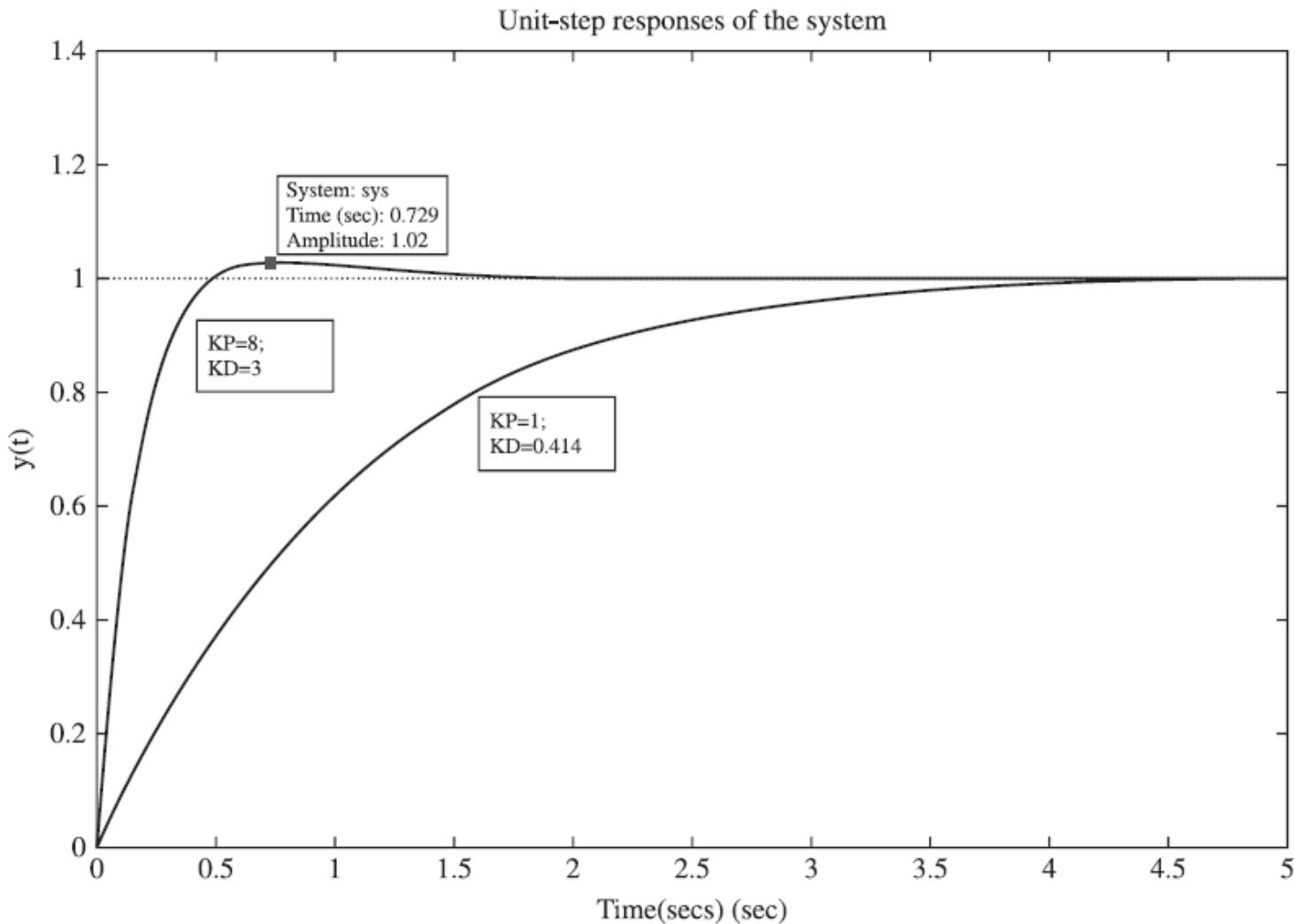
특성방정식은 다음과 같다.

$$s^2 + (2 + 2K_D)s + 2K_P = 0$$

식 (5-176)의 전달함수에서 영점을 무시하고 식 (5-177)을 표준형 2차 시스템 특성방정식과 비교하면

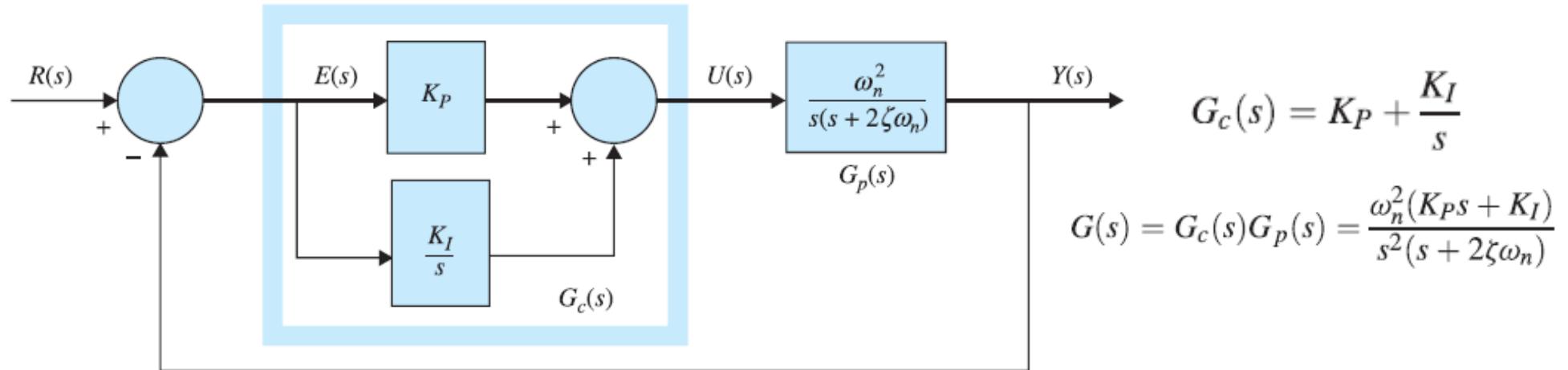
$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\zeta = \frac{1 + K_D}{\sqrt{2K_P}} \quad \omega_n = \sqrt{2K_P}$$



K_D 가 증가하면 PD 제어기가 최대오버슈트, 상승시간, 그리고 정정시간을 줄여준다.

Example 7-7-2



1. 전방경로 전달함수에 $s = -K_I/K_P$ 에 영점을 추가한다.
2. 전방경로 전달함수에 $s = 0$ 에 극을 추가한다. 이는 시스템의 형수를 하나 증가하는 것이다. 그러므로 원 시스템의 정상상태오차는 1차만큼 개선된다. 이는 주어진 입력에 대한 정상상태오차가 일정 값이었다면 PI 제어는 이를 영으로 만든다(보상된 시스템이 여전히 안정되었다고 전제하면).

예를 들어,

$$G_p(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$G(s) = G_c(s)G_p(s) = \frac{2K_P(s + K_I/K_P)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{2K_P(s + K_I/K_P)}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

- 만약에 정상상태오차를 0으로 하고, PO를 4.33으로 만들고자 하면,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2K_p(s + K_I/K_p)}{s^3 + 3s^2 + 2(1 + K_p)s + 2K_I}$$

- From Routh-Hurwitz stability test, the system is stable for $0 < K_I/K_p < 13.5$. This means that the zero of $G(s)$ at $s = -K_I/K_p$ cannot be placed too far to the left in the left-half s -plane, or the system will be unstable
- Type 1 시스템이 됐기 때문에 계단입력에 대해서는 정상상태오차가 0이 됨. 하지만, 3차 시스템이 되었기 때문에 안정도가 나쁜 영향을 받을 수도 있음. 따라서 K_I, K_p 의 값을 적절히 정하는 것이 중요함.
- 위의 예제에서 -1 이 원점에 가장 가까운 극점이므로, $-K_I/K_p$ 의 영점을 상대적으로 원점에 가까운 값으로 가정하면,

$$\frac{K_I}{K_p} < 1$$

$$G(s) \equiv \frac{2K_p}{s^2 + 3s + 2 + 2K_p}$$

- PO를 4.3으로 잡기 위해서 $\omega_n = 2.1213 \text{ rad/s}$ 와 $K_p = 1.25$ 로 설정해야 함.

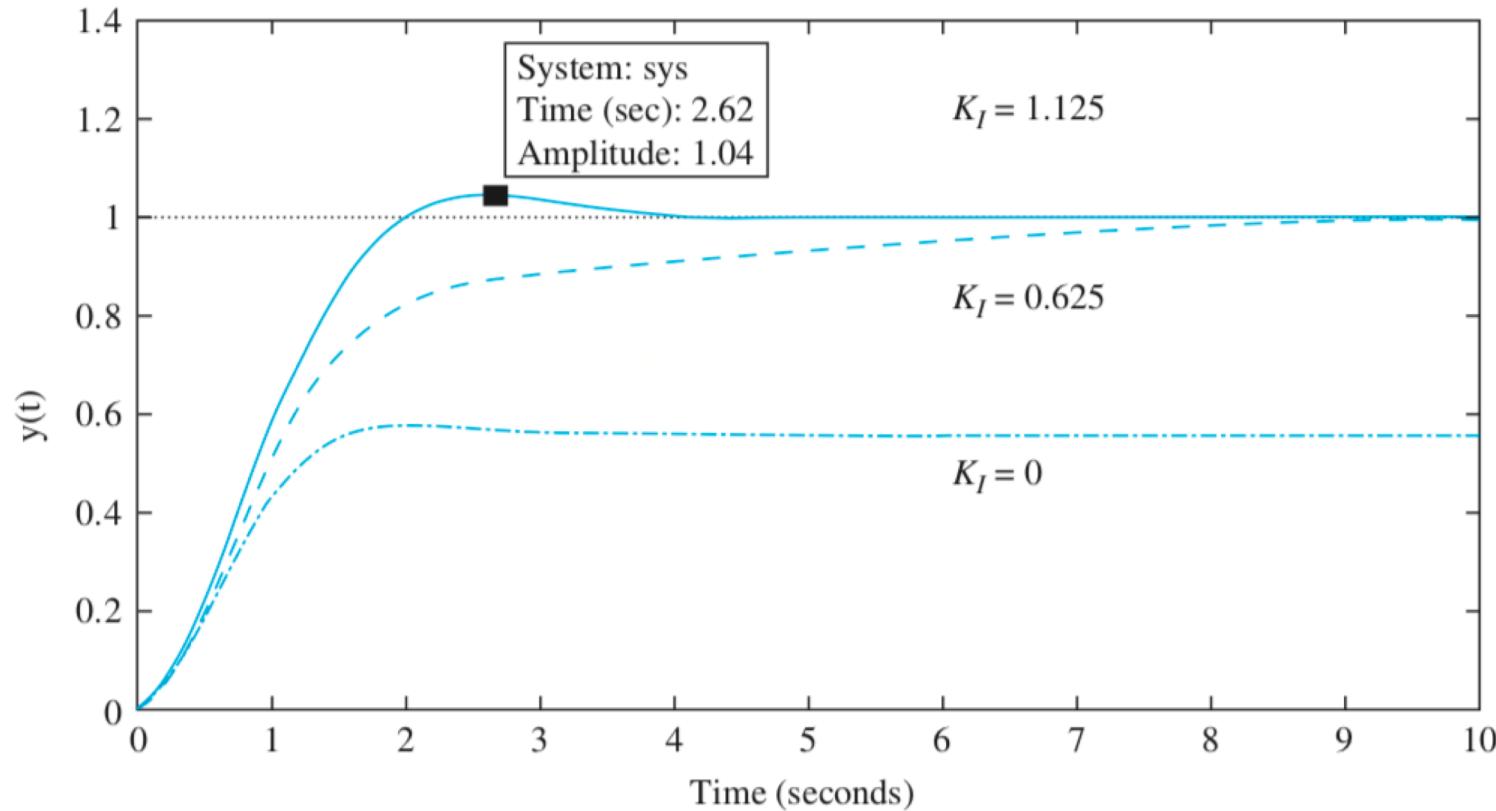


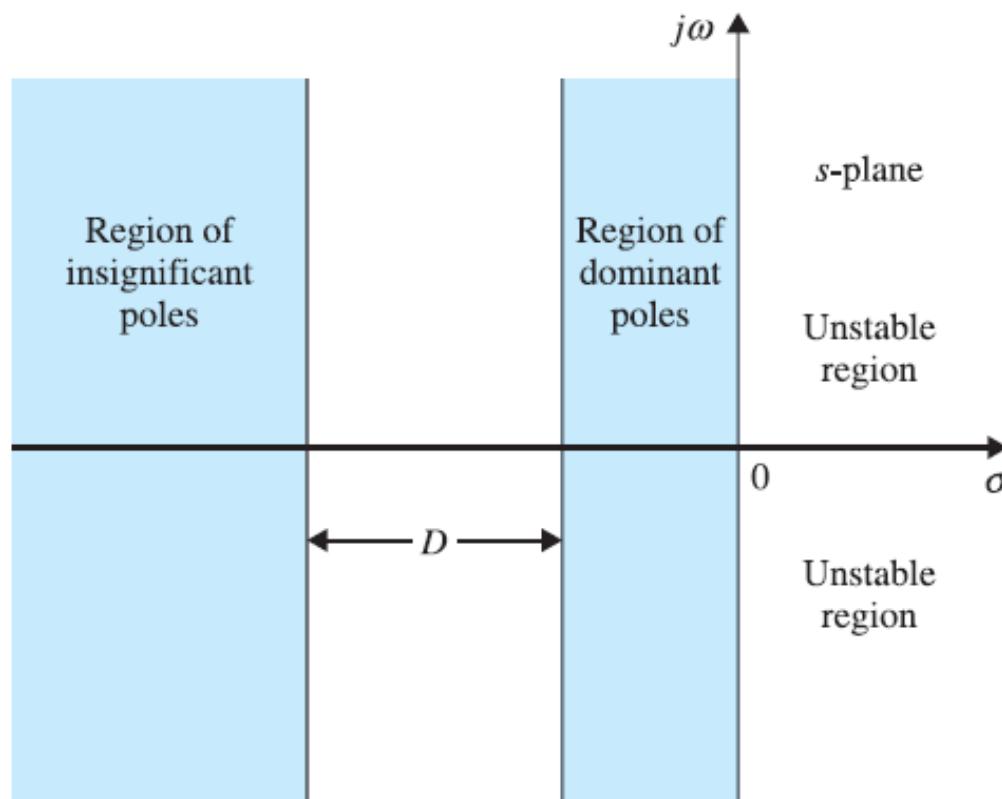
Figure 7-48 Unit-step response of Eq. (7-149) for three K_I values, when $K_p = 1.25$.

- Using $K_p = 1.25$, let us now examine the time response of the third-order system in Eq. (7-149). As shown in Fig. 7-48, if K_I is too small, 0.625 in this case, the system time response is slow and the desired zero steady-state error requirement is not met fast enough. Upon increasing K_I to 1.125, the desired response is met, as shown in Fig. 7-48. In this case, the controller zero still meets the condition in Eq. (7-151).

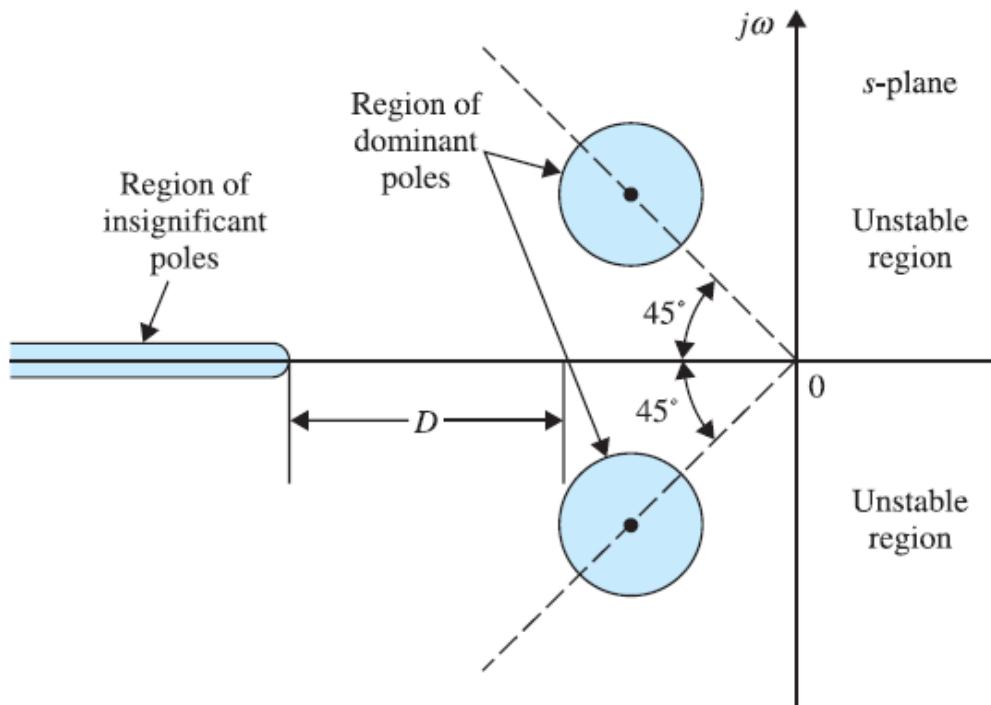
전달함수의 지배극과 영점

- s 평면 내 전달함수 극과 영점의 위치는 시스템의 과도응답에 커다란 영향을 미친다는 사실은 명백하다. 해석과 설계 시 과도응답에 주도적인 역할을 하는 극을 가려내는 것은 중요하며 이들을 지배극(dominant pole)이라 한다. 실제에 있어서 대부분의 제어시스템은 2차보다 고차 시스템이므로 과도응답에 관한 한 고차 시스템을 보다 낮은 차수의 저차 시스템으로 근사화하는 지침을 마련하는 것은 유용한 일이다. 설계에 있어서 시스템의 동적 성능을 제어하기 위하여 지배극을 사용하지만, 하찮은 극(insignificant pole)들은 실제의 구성요소들로 제어기가 실현될 수 있음을 보증할 목적으로 사용된다.

- s 평면 좌반면에서 허수축에 가까이 있는 극(지배극)과 관련된 과도응답은 비교적 천천히 감쇠된다. 한편, 허수축에서 멀리 떨어져 있는(지배극에 대하여 상대적으로) 극과 관련된 과도응답은 빠른 감쇠가 이루어진다. 다음 그림에 나타난 지배영역과 하찮은 영역 사이의 거리 D 를 논하여야 한다. “어느정도 큰 극을 실제로 크다고 할 수 있는가?”라는 질문이 생긴다. 실제에 있어서나 문헌에서는 극의 실수부 크기가 지배극이나 복소지배극 쌍의 크기에 적어도 5~10배에 이를 때 이런 극을 과도응답에 관한 한 하찮은 극으로 간주한다. s 평면 좌반면에 허수축 가까이 있는 영점은 과도응답에 보다 크게 영향을 미친다. 반면 허수축에서 멀리 떨어진 것은(지배근에 비해서) 시간응답에서 작은 영향을 미친다.



- 극배치 설계와 같은 설계 목적에서는 설계자에 의해서 선택되겠지만 지배극과 하찮은 극은 다음 그림의 색칠한 영역에 대부분 위치하게 된다. 다시 말하면 $\zeta = 0.707$ 과 관련된 선 주위에 중심이 맞추어진 지배극의 원하는 영역을 제외하고는 어떠한 절대적인 좌표를 나타내지 않았다.



극과 영점의 영향에 관한 요약

1. 페루프 전달함수의 공액복소수 극은 계단응답에서 부족제동을 일으킨다. 만일 모든 극이 음의 실수이면 계단응답은 초과제동이 된다. 그러나 페루프 전달함수의 영점은 초과제동의 경우에도 오버슈트를 유발하기도 한다.
2. 시스템의 응답은 s 평면상의 원점에 가장 가까운 극에 의하여 지배된다. 이들 극이 왼쪽으로 멀어질수록 과도응답은 감쇠가 빨라진다.
3. s 평면상에서 시스템의 지배근이 왼편으로 멀어질수록 시스템의 응답은 빨라지고 대역폭은 더 넓어진다.
4. 시스템의 지배근이 s 평면의 왼편으로 멀어질수록 보다 비싸지고 내부신호가 더 커진다. 해머로 못을 강하게 때려 박을수록 때릴 때 더 많은 에너지가 필요하다는 것은 명백하며 이는 해석적으로 입증될 수 있다.
5. 시스템 전달함수가 극과 영점이 서로 거의 상쇄되도록 위치해 있을 때 시스템이 극과 관련된 응답은 작은 크기만을 가질 것이다.

상대감쇠비

엄밀히 말하여 시스템이 2차 이상이면 표준형 2차 시스템에서 정의하였던 감쇠비 ζ 와 고유진동주파수 ω_n 을 더 이상 사용할 수 없다. 그러나 시스템의 동적 특성을 공액복소수 쌍의 지배극으로 정확히 나타낼 수 있다면 과도응답의 동적 특성을 나타내는 데 ζ 와 ω_n 을 그대로 사용할 수 있고 이 경우 감쇠비를 이 시스템의 상대감쇠비(relative damping ratio)라고 한다. 예로서 다음과 같은 폐루프 전달함수를 생각하자.

$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{(s + 10)(s^2 + 2s + 2)} \quad (5-167)$$

$s = -10$ 에서의 극은 $-1 \pm j1$ 에 있는 공액복소극 실수부의 10배이다. 이 시스템의 상대감쇠비를 0.707로 택할 수 있다.

정상상태응답을 고려해서 하찮은 극을 무시하는 방법

지금까지 과도응답의 관점으로부터 전달함수의 하찮은 극을 무시하는 근거를 제시하였다. 그러나 더욱 체계적인 것이 되려면 정상상태 성능이 고려되어야 한다. 식 (5-167)의 전달함수를 생각하자. -10 에 있는 극은 과도관점(transient standpoint)으로부터 무시할 수 있다. 이렇게 하기 위해서 먼저 식 (5-167)을 다음과 같이 표현하여야 한다.

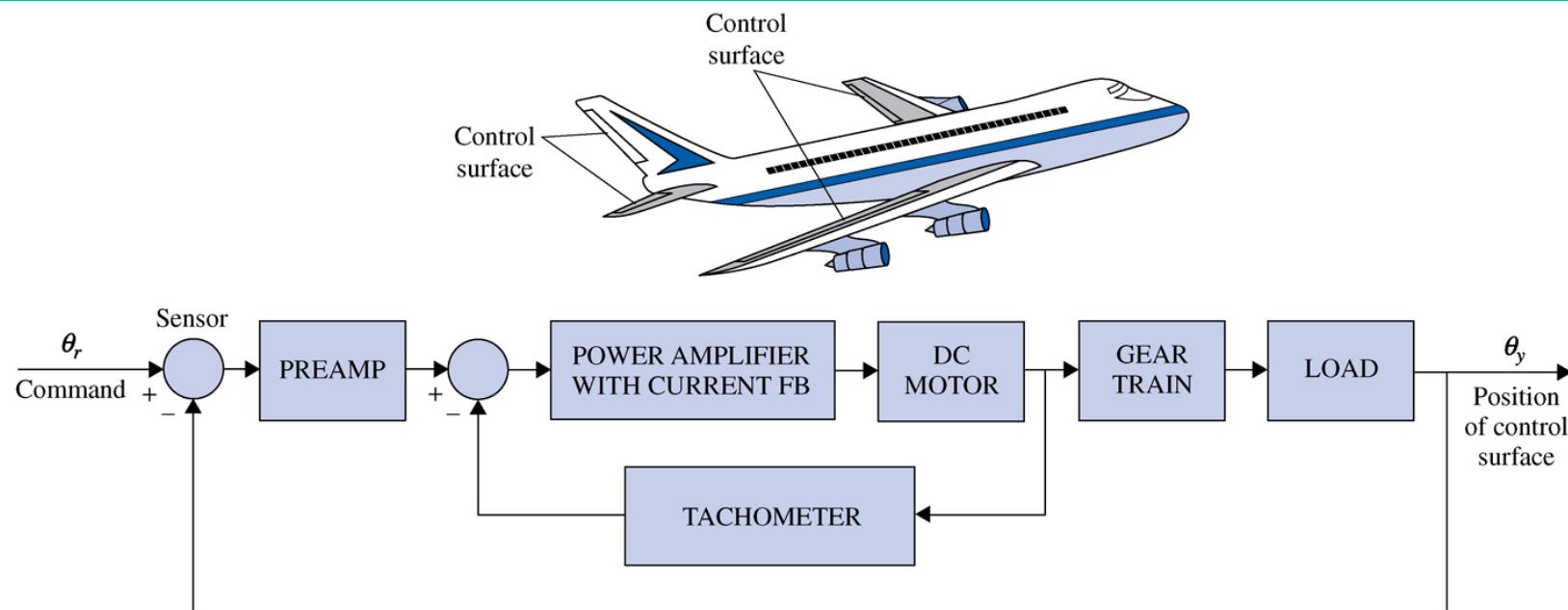
$$M(s) = \frac{20}{10(s/10 + 1)(s^2 + 2s + 2)} \quad (5-168)$$

복소극의 지배성 때문에 s 의 절대값이 10보다 훨씬 작으므로 $|s/10| \ll 1$ 이 됨을 알 수 있다. 1과 비교해서 $s/10$ 항은 무시할 수 있다. 그러면 식 (5-168)은 다음 식으로 근사화된다.

$$M(s) \cong \frac{20}{10(s^2 + 2s + 2)} \quad (5-169)$$

이 방법은 근사화로 3차 시스템의 정상상태 성능이 영향을 받지 않는다. 바꾸어 말하면 식 (5-167)로 표현된 3차 시스템과 식 (5-169)로 근사화된 2차 시스템이 단위계단입력이 인가될 때 모두 1인 최종치를 가진다. 반면에 식 (5-167)에 있는 $(s + 10)$ 항을 간단히 없애 버린다면 근사화된 2차 시스템은 단위계단입력이 인가될 때 5인 정상상태 값을 가진다.

위치제어시스템의 시간영역 해석



Gain of encoder

$$K_s = 1 \text{ V/rad}$$

Gain of preamplifier

K = adjustable

Gain of power amplifier

$$K_1 = 10 \text{ V/V}$$

Gain of current feedback

$$K_2 = 0.5 \text{ V/A}$$

Gain of tachometer feedback

$$K_t = 0 \text{ V/rad/sec}$$

Armature resistance of motor

$$R_a = 5.0 \Omega \quad J_t = J_m + N^2 J_L = 0.0001 + 0.01/100 = 0.0002 \text{ oz-in.-sec}^2 \quad (4-305)$$

Armature inductance of motor

$$L_a = 0.003 \text{ H} \quad B_t = B_m + N^2 B_L = 0.005 + 1/100 = 0.015 \text{ oz-in.-sec}$$

Torque constant of motor

$$K_i = 9.0 \text{ oz-in./A}$$

Back-emf constant of motor

$$K_b = 0.0636 \text{ V/rad/sec}$$

Inertia of motor rotor

$$J_m = 0.0001 \text{ oz-in.-sec}^2$$

Inertia of load

$$J_L = 0.01 \text{ oz-in.-sec}^2$$

Viscous-friction coefficient of motor

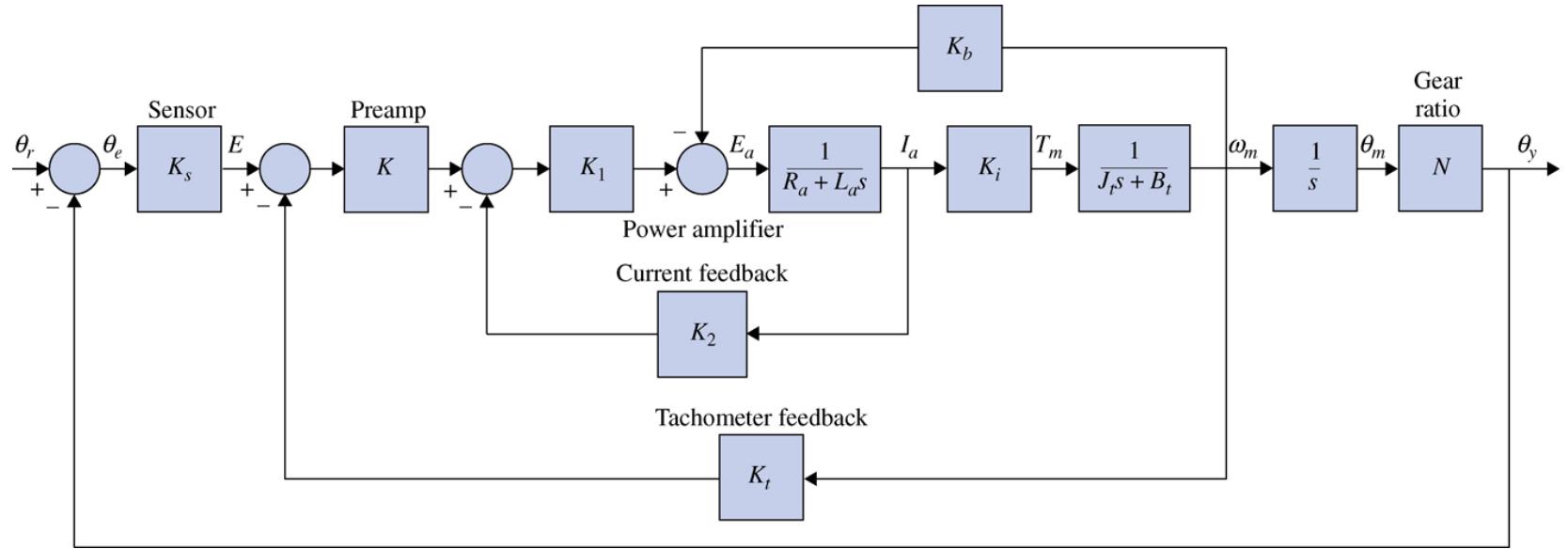
$$B_m = 0.005 \text{ oz-in.-sec}$$

Viscous-friction coefficient of load

$$B_L = 1.0 \text{ oz-in.-sec}$$

Gear-train ratio between motor and load

$$N = \theta_y / \theta_m = 1/10$$



fig_04_79

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)} \\
 &= \frac{K_s K_1 K_i K N}{s[L_a J_t s^2 + (R_a J_t + L_a B_t + K_1 K_2 J_t)s + R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_t K_i]} \quad (4-306)
 \end{aligned}$$

The system is of the third order, since the highest-order term in $G(s)$ is s^3 . The electrical time constant of the amplifier-motor system is

$$\tau_a = \frac{L_a}{R_a + K_1 K_2} = \frac{0.003}{5 + 5} = 0.0003 \text{ sec} \quad (4-307)$$

The mechanical time constant of the motor-load system is

$$\tau_t = \frac{J_t}{B_t} = \frac{0.0002}{0.015} = 0.01333 \text{ sec} \quad (4-308)$$

모터권선의 낮은 인덕턴스 때문에 전기적인 시정수는 기계적인 시정수보다 훨씬 작으므로 전기자인덕턴스 L_a 를 무시함으로써 초기 균사화를 행할 수 있다. 그 결과는 3차 시스템의 2차 균사화이다. 높은 차원을 낮은 차원으로 균사화하는 것이 가장 좋은 방법은 아님을 나중에 보이겠다. 전방경로 전달함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{K_s K_1 K_i K N}{s[(R_a J_t + K_1 K_2 J_t)s + R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t]} \\ &= \frac{\frac{K_s K_1 K_i K N}{R_a J_t + K_1 K_2 J_t}}{s\left(s + \frac{R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t}{R_a J_t + K_1 K_2 J_t}\right)} \end{aligned} \quad (5-130)$$

앞의 식에서 시스템 파라미터들을 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$G(s) = \frac{4500K}{s(s + 361.2)} \quad (5-131)$$

식 (5-130)과 (5-131)을 표준형 2차 전달함수인 식 (5-86)과 비교하면 다음 결과를 얻는다.

$$\text{고유진동주파수 } \omega_n = \pm \sqrt{\frac{K_s K_1 K_i K N}{R_a J_t + K_1 K_2 J_t}} = \pm \sqrt{4500K} \text{ rad/sec} \quad (5-132)$$

$$\text{감쇠비 } \zeta = \frac{R_a B_t + K_1 K_2 B_t + K_i K_b + K K_1 K_i K_t}{2\sqrt{K_s K_1 K_i K N (R_a J_t + K_1 K_2 J_t)}} = \frac{2.692}{\sqrt{K}} \quad (5-133)$$

그러므로 고유진동주파수 ω_n 은 증폭기이득 K 의 자승근에 비례하는 반면에 감쇠비 ζ 는 \sqrt{K} 에 반비례함을 알 수 있다.

단위피드백 제어시스템에서 폐루프 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_e(s)} = \frac{4500K}{s^2 + 361.2s + 4500K} \quad (5-134)$$

단위계단 과도응답

For the characteristic equation of Eq. (7-162), the roots are

$$s_1 = -180.6 + \sqrt{32616 - 4500K} \quad (7-163)$$

$$s_2 = -180.6 - \sqrt{32616 - 4500K} \quad (7-164)$$

For $K = 7.24808$, 14.5, and 181.2, the roots of the characteristic equation are tabulated as follows:

$$K = 7.24808: \quad s_1 = s_2 = -180.6$$

$$K = 14.5: \quad s_1 = -180.6 + j180.6 \quad s_2 = -180.6 - j180.6$$

$$K = 181.2: \quad s_1 = -180.6 + j884.7 \quad s_2 = -180.6 - j884.7$$

Amplifier Gain Dynamics	Characteristic Equation Roots	System
$0 < K < 7.24808$	Two negative distinct real roots	Overdamped ($\zeta > 1$)
$K = 7.24808$	Two negative equal real roots	Critically damped ($\zeta = 1$)
$7.24808 < K < \infty$	Two complex-conjugate roots with negative real parts	Underdamped ($\zeta < 1$)
$-\infty < K < 0$	Two distinct real roots, one positive and one negative	Unstable system ($\zeta < 0$)

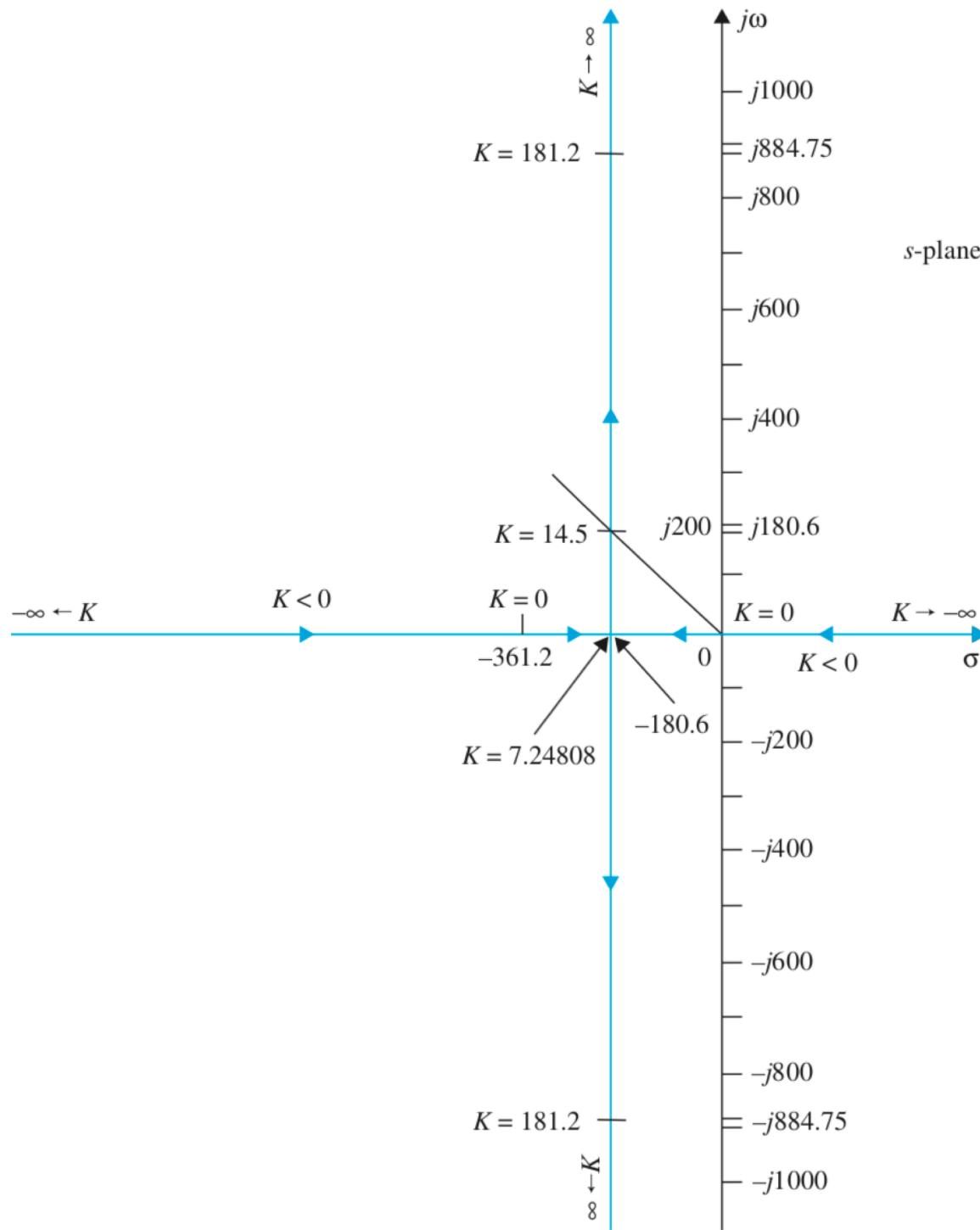


Figure 7-53 Root loci of the characteristic equation in Eq. (7-162) as K varies.

- 단위계단입력에 대해서

$K = 7.248 (\zeta \approx 1.0)$:

$$\theta_y(t) = (1 - 151e^{-180t} + 150e^{-181.2t})u_s(t)$$

$K = 14.5 (\zeta = 0.707)$:

$$\theta_y(t) = (1 - e^{-180.6t} \cos 180.6t - 0.9997e^{-180.6t} \sin 180.6t)u_s(t)$$

$K = 181.17 (\zeta = 0.2)$:

$$\theta_y(t) = (1 - e^{-180.6t} \cos 884.7t - 0.2041e^{-180.6t} \sin 884.7t)u_s(t)$$

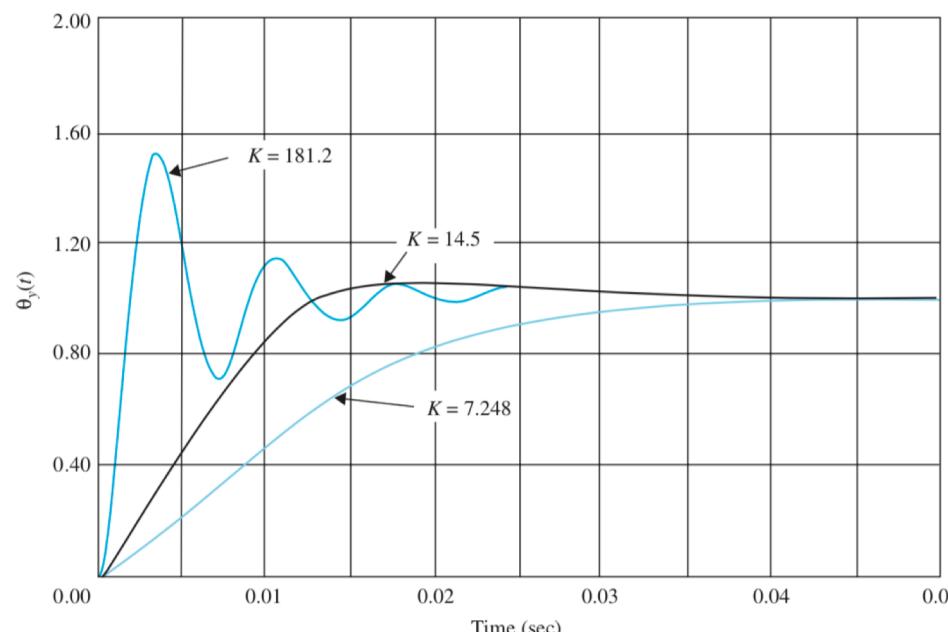


Figure 7-54 Unit-step responses of the attitude-control system in Fig. 7-52; $L_a = 0$.

TABLE 7-11 Comparison of the Performance of the Second-Order Position-Control System with the Gain K Values

Gain K	ζ	ω_n (rad/s)	PO Overshoot	t_d (s)	t_r (s)	t_s (s)	t_{\max} (s)
7.24808	1.000	180.62	0	0.00929	0.0186	0.0259	—
14.50	0.707	255.44	4.3	0.00560	0.0084	0.0114	0.01735
181.17	0.200	903.00	52.2	0.00125	0.00136	0.0150	0.00369

정상상태응답

식 (5-132)의 전방경로 전달함수는 $s = 0$ 에 한 개의 극을 가지므로 이 시스템은 1형이다. 이는 입력이 계단함수일 때 이 시스템의 정상상태오차는 K 의 모든 양의 값에 대하여 영이 됨을 의미한다. 식 (5-132)를 식 (5-24)에 대입하면 계단오차상수를 다음과 같이 얻는다.

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4500K}{s(s + 361.2)} = \infty \quad (5-141)$$

그러므로 계단입력에 대한 이 시스템의 정상상태오차는 식 (5-25)에 주어진 바와 같이 영이다. 그림 5-29의 단위계단응답은 이 결과를 증명하는 것이다. 간략화된 시스템 모델에서 오직 점성마찰력만이 고려되었을 때 정상상태 오차가 영인 조건을 얻을 수 있다. 실제로 쿨롬 마찰은 거의 항상 존재하므로 시스템의 정상상태 위치정확성은 결코 완벽할 수 없다.

3차 시스템의 시간응답

앞에서 전기자 인덕턴스를 무시하고 얻은 표준형 2차 시스템은 모든 양의 K 값에 대하여 항상 안정함을 보였다. 일반적으로 특성방정식이 양인 계수를 가지는 모든 2차 시스템이 안정임을 보이는 것은 어렵지 않다.

전기자 인덕턴스 $L_a = 0.003 \text{ H}$ 를 가지는 위치제어시스템의 성능을 조사하자. 식 (5-127)의 전방경로 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$G(s) = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s^2 + 3408.3s + 1,204,000)} = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s(s + 400.26)(s + 3008)} \quad (5-152)$$

페루프 전달함수는

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{1.5 \times 10^7 K}{s^3 + 3408.3s^2 + 1,204,000s + 1.5 \times 10^7 K} \quad (5-153)$$

이 시스템은 이제 3차이고 특성방정식은 다음과 같다.

$$s^3 + 3408.3s^2 + 1,204,000s + 1.5 \times 10^7 K = 0 \quad (5-154)$$

과도응답

앞에서 2차 시스템에 사용한 세 가지 K 값에 대하여 이 방정식의 근을 표로 실었다.

$$K = 7.248: \quad s_1 = -156.21 \quad s_2 = -230.33 \quad s_3 = -3021.8$$

$$K = 14.5: \quad s_1 = -186.53 + j192 \quad s_2 = -186.53 - j192 \quad s_3 = -3035.2$$

$$K = 181.2: \quad s_1 = -57.49 + j906.6 \quad s_2 = -57.49 - j906.6 \quad s_3 = -3293.3$$

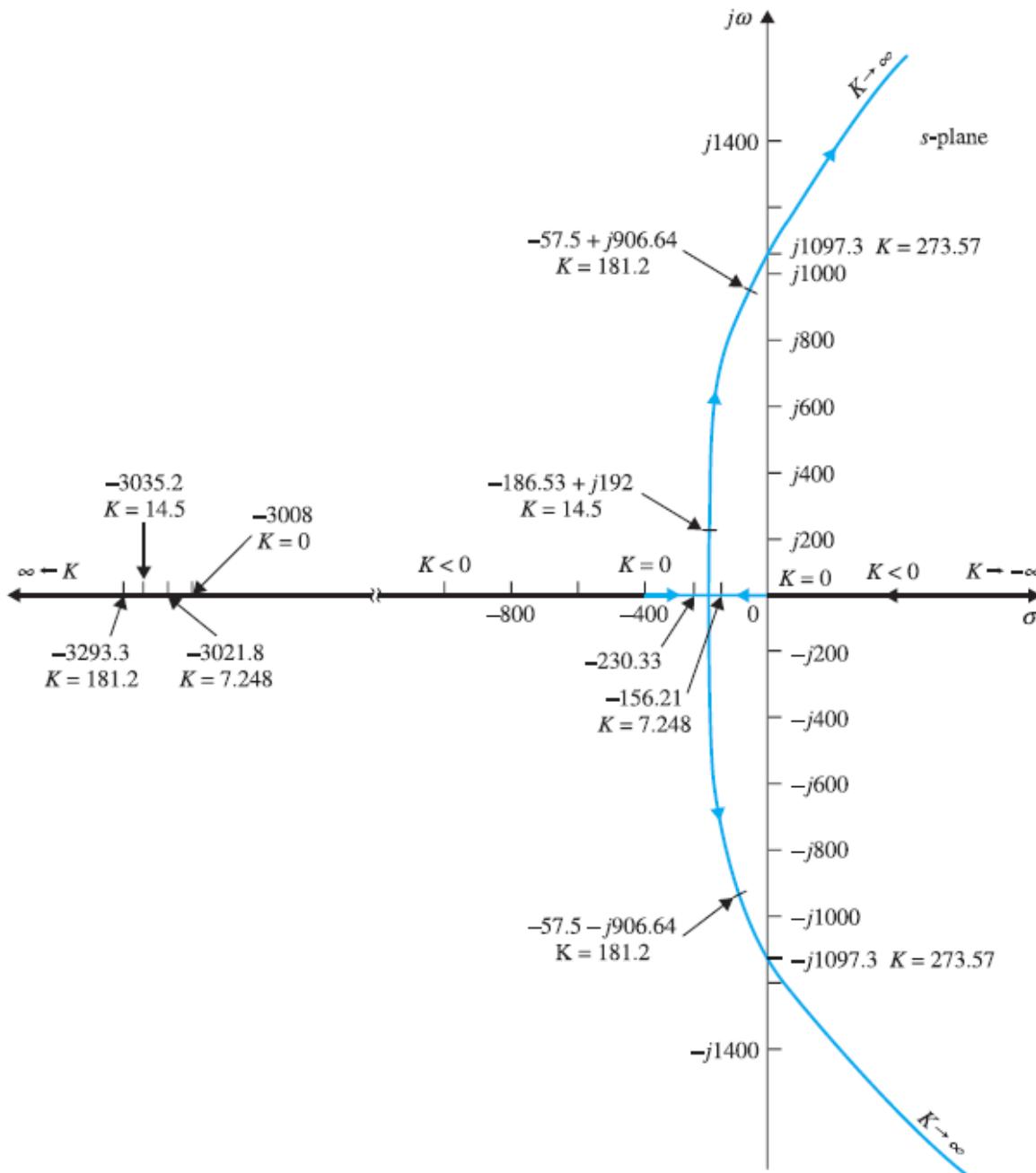
이 결과를 간략화된 2차 시스템의 결과와 비교하면 $K = 7.248$ 일 때 2차 시스템은 임계 감쇠인 데 반하여 3차 시스템은 세 개의 서로 다른 실근을 가지고 있어서 약간 과도감쇠임을 알 수 있다. -3021.8 의 근은 시정수 0.33 msec에 해당하며 이는 다음으로 빠른 230.33에 있는 극에 대한 시정수보다 13배나 빠르다. 그러므로 -3021.8 의 극에 기인하는 과도응답은 급속히 감쇠되어 이 극을 과도적인 관점에서 무시할 수 있다. 출력과도응답은 -156.21 과 -230.33 의 두 근에 따른다. 이런 해석은 변환된 출력응답을 다음과 같이 표기함으로써 입증된다.

$$\Theta_y(s) = \frac{10.87 \times 10^7}{s(s + 156.21)(s + 230.33)(s + 3021.8)} \quad (5-155)$$

앞의 방정식의 역라플라스변환을 취하면 다음 식을 얻는다.

$$\theta_y(t) = (1 - 3.28e^{-156.21t} + 2.28e^{-230.33t} - 0.0045e^{-3021.8t}) u_s(t) \quad (5-156)$$

식 (5-156)의 마지막 항과 관련된 -3021.8 에서의 근은 0으로 빨리 감쇠한다. 더구나 $t = 0$ 에서의 크기도 다른 두 과도항의 크기에 비하여 매우 작다. 이러한 사실은 일반적으로 s 평면 왼쪽에 상대적으로 멀리 있는 근은 시간응답에 기여함이 적다는 결론을 보여 준다. 허수축에 가까이 있는 근이 과도응답을 주도하게 되며 이들 근을 특성방정식 또는 시스템의 지배근(dominant roots)이라 정의한다.



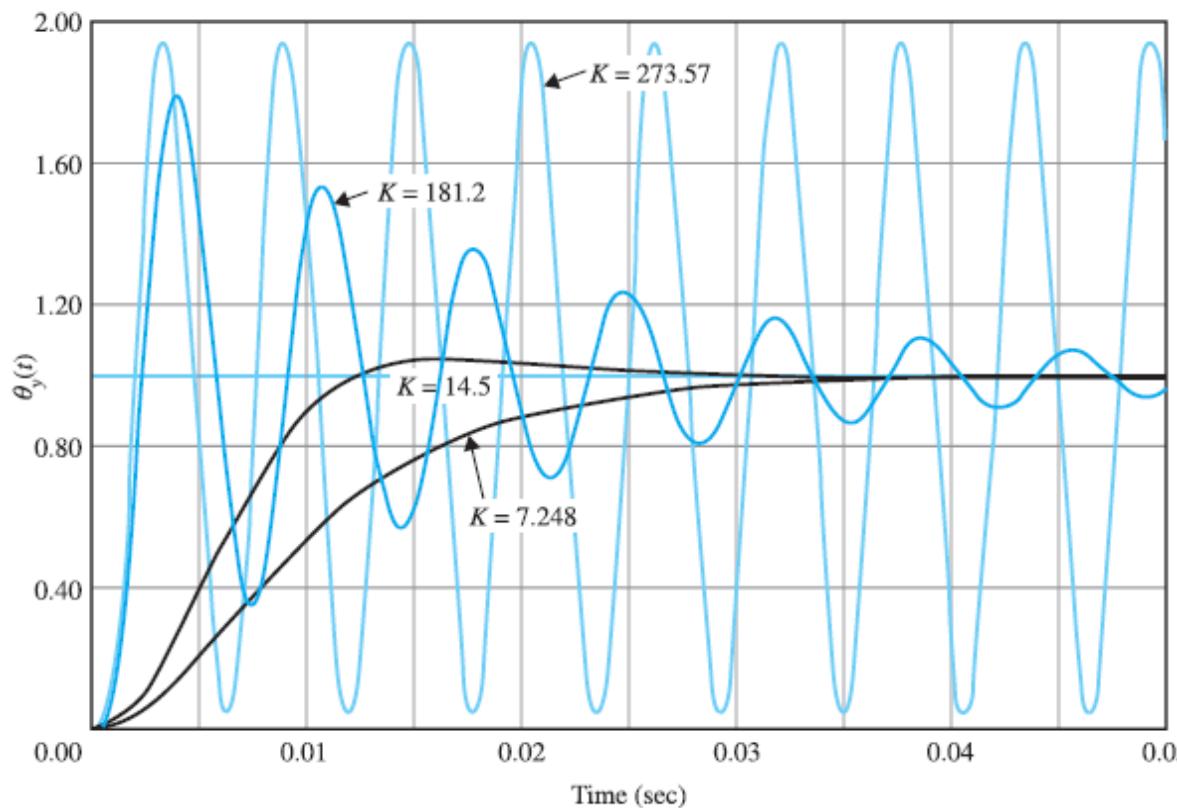
Routh-Hurwitz 판별식을 이용하여 안정하기 위한 K 의 임계값을 구하면 273.57이다.
 K 의 이 임계값에서의 폐루프 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$\frac{\Theta_y(s)}{\Theta_r(s)} = \frac{1.0872 \times 10^8}{(s + 3408.3)(s^2 + 1.204 \times 10^6)} \quad (5-157)$$

특성방정식의 근은 $s = -3408.3, -j1097.3$ 과 $j1097.3$ 에 있다. 이 점들은 그림 5-32의 근궤적 상에 나타내었다.

$K = 273.57$ 일 때 이 시스템의 단위계단응답은

$$\theta_y(t) = [1 - 0.094e^{-3408.3t} - 0.952 \sin(1097.3t + 72.16^\circ)] u_s(t) \quad (5-158)$$



[그림 5-33] 3차 자세제어시스템의 단위계단응답.