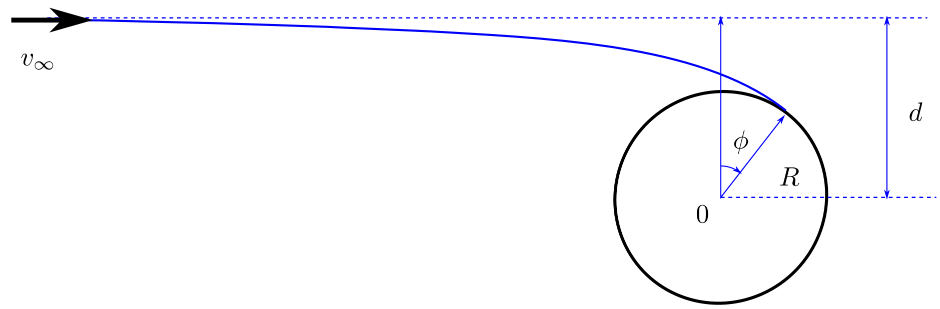
ASE2020 Dynamics: Midterm exam (2 problems)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하시오.
"나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다."
"By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period."

1) *Near-collision trajectory (15 points).* 지구 중심으로부터 거리 d만큼 떨어진 직선을 따라 우주 저 멀리로부터 혜성이 v_∞의 속도로 접근하고 있다.



지구와 혜성간의 중력이 존재하지 않았다면 혜성은 지표면으로부터 $d-R$의 거리를 두고 지구를 피해 지나갔겠지만 (지구의 반경은 R), 실제로는 지구와 혜성간의 중력으로 인해 혜성의 궤적은 지구쪽으로 휘어졌고, 혜성은 그림에서와 같이 ϕ로 표시된 위치의 지구 표면을 아슬아슬하게 스쳐 지나갔다고 한다.

혜성의 초기 속도 v_∞가 아래와 같을 때, 다음의 질문에 답하며 혜성의 궤적에 대해 설명하시오. G는 gravitational constant, M은 지구의 질량을 의미한다.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

a) 혜성의 궤적은 타원/포물선/쌍곡선 중 어떠한 형태인가 (3pts)?

Solution. 직선 방향의 점근선을 따라 비행하고 있었으므로 궤적은 쌍곡선일 것이며, 지구 표면을 스쳐 지나가는 순간이 혜성이 지구 중심에 가장 근접한 지점 (perigee)이 된다.

b) 접근거리 d는 R의 몇 배였을까 (3pts)?

Solution. 중력에 의한 central force만이 작용하므로, 혜성의 각운동량과 에너지가 보존된다. 혜성이 지구를 스쳐지나간 순간의 속도를 v_p라 하고, 혜성이 무한대의 거리에 있을 때와 지구에 가장 근접했을 두 순간의 각운동량과 에너지를 각각 비교해 보자.

지구 중심에 대한 혜성의 각운동량 보존 관계는 다음과 같다.

$$v_\infty d = v_p R \qquad \Longrightarrow \qquad d = \frac{v_p}{v_\infty} R$$

또한, 에너지 보존 관계는 아래와 같으며,

$$\frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{GMm}{R}$$

알고 있던 혜성의 초기 속도 $v_\infty^2 = GM/R$를 위에 대입하면,

$$\frac{GM}{2R} = \frac{1}{2} v_p^2 - \frac{GM}{R} \qquad \Longrightarrow \qquad v_p = \sqrt{\frac{3GM}{R}} = \sqrt{3} v_\infty$$

그러므로, 다음의 결론을 얻을 수 있다.

$$d = \sqrt{3} R$$

c) 지구 표면을 스쳐지나갈 때 혜성의 속도는 얼마인가 (3pts)?

Solution. 위에서 이미 계산했다.

$$v_p = \sqrt{\frac{3GM}{R}} = \sqrt{3} v_\infty$$

d) 혜성의 궤적을 표현하는 이심률(eccentricity), ϵ은 얼마인가 (3pts)?

Solution. 혜성의 궤적을 표현하는 지배방정식은 다음과 같다.

$$r = \frac{h^2}{GM(1 + \epsilon \cos\theta)}$$

단위 각운동량 $h = r v_\theta$는 일정하며, 지구에 근접한 지점에서의 $(\theta = 0)$ 거리(R)와 속도(v_p)를 위에 대입하면 다음을 얻는다.

$$R = \frac{R^2 v_p^2}{GM(1 + \epsilon)}$$

근지점에서의 속도는 $v_p^2 = 3GM/R$이므로, 이를 위에 대입하고 정리하면 $\epsilon = 2$를 얻는다.

e) 혜성은 어느 지역의 지표면을 스쳐 지나갔을까? 즉, ϕ는 몇 도인가 (3pts)?

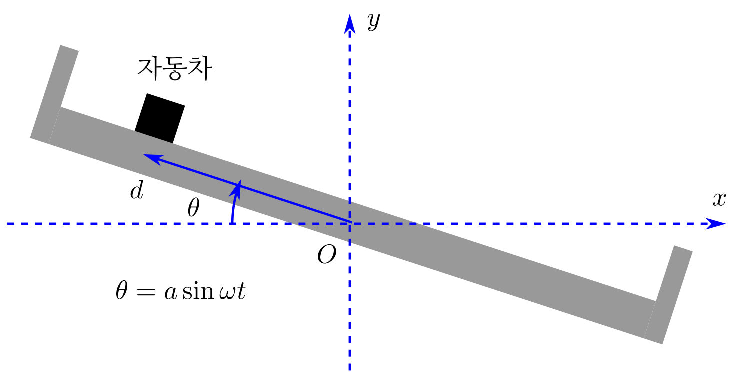
Solution. 혜성의 지배방정식을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{r} = \frac{GM(1 + \epsilon \cos\theta)}{h^2}$$

$r \to \infty$일 때 위를 만족하는 θ_∞는 $1 + \epsilon \cos\theta_\infty = 0$일 때이며, 이 θ_∞가 perigee로부터의 점근선 방향이다. d)에서 $\epsilon = 2$이므로, perigee로부터의 점근선 방향은 $\theta_\infty = \pm 60°$가 되며, 이는 $\phi = 30°$를 의미한다.

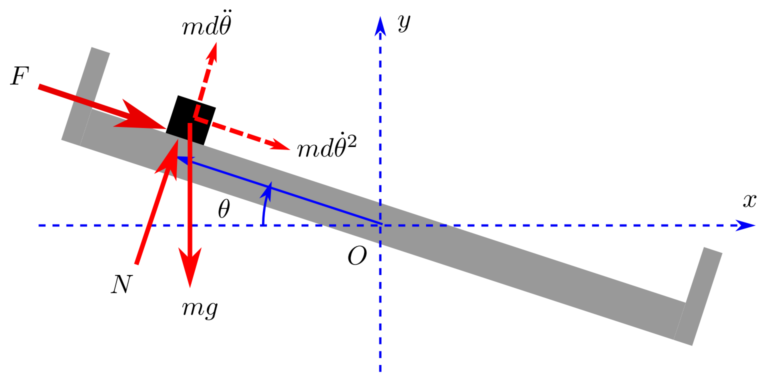
2) *Galloping Gertie (15 points).* 미국 워싱턴 주의 Tacoma Narrows bridge는 1938년 9월 공사가 시작되었으며, 상판이 올라간 후 강풍에 의한 공력탄성학적 진동과 휘청거림이 관찰되며 *Galloping Gertie*라는 별명을 얻었다. 1940년 7월 1일, 공사가 완료되고 자동차와 보행자의 통행이 시작되었으나, 여러 가지 보완 조치에도 불구하고 다리의 휘청거림은 지속되었고 결국 4개월 만인 1940년 11월 7일 무너져 내렸다. (참고영상: https://youtu.be/j-zczJXSxnw?t=150).

위의 참고영상을 보면 휘청이는 다리 위에 정차해 있는 자동차가 하나 놓여 있는데, 이 문제에서는 이 자동차의 운동을 분석하고자 한다. 자동차를 포함하고 다리 통행방향에 수직한 면을 잘라 다음과 같이 단순화하자.



다리의 휘청거림은 원점 O를 중심으로 한 회전각 θ로 표현하며, 다리는 $\theta = a \sin \omega t$로 ($|a| < \pi/2$) 휘청이고 있다고 가정하자. 자동차는 원점으로부터 d의 거리에 주차브레이크가 걸린 채 정차해 있으며, 자동차와 다리 사이의 마찰력은 운동마찰계수 μ_k로 표현된다. 중력가속도 g는 수직 하방인 $-y$ 방향으로 작용한다.

a) 자동차가 다리에서 미끄러지지 않고 있다고 가정하고, 자동차에 작용하는 모든 힘과 가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (4pts).



b) 자동차가 다리에서 미끄러지지 않고 있다고 가정하고, 자동차에 대한 운동방정식을 표현하시오 (3pts).

Solution. 운동방정식은 다음과 같다.

$$md\dot{\theta}^2 = F + mg\sin\theta \qquad (-d \text{ 방향})$$
$$md\ddot{\theta} = N - mg\cos\theta \qquad (+\theta \text{ 방향})$$

c) 자동차가 다리에서 미끄러지기 위한 조건을 표현하시오 (3pts).

Solution. 자동차와 다리 사이의 마찰력 F가 운동마찰력($= \mu_k N$)보다 커지게 되면 자동차는 미끄러지기 시작한다. 즉, 다음 조건을 만족하면 자동차는 미끄러진다.

$$|F| \geq \mu N$$

d) 문제의 파라미터들이 $a = 0.4\,\mathrm{rad}$, $\omega = \pi\,\mathrm{rad/s}(= 0.5\,\mathrm{Hz})$, $d = 5\,\mathrm{m}$, $\mu_k = 0.2$로 주어져 있을 때, 이 자동차는 다리 위에 계속 정차해 있을 수 있을까, 아니면 미끄러질까? 이유와 함께 설명하시오 (5pts).

Solution. 다리의 휘청거림은 다음으로 표현되고,

$$\theta = a\sin\omega t$$
$$\dot{\theta} = a\omega\cos\omega t$$
$$\ddot{\theta} = -a\omega^2\sin\omega t$$

이를 활용하면 F와 N는 다음과 같이 표현된다.

$$F/m = d\dot{\theta}^2 - g\sin\theta = 5(0.4\pi\cos\pi t)^2 - g\sin(0.4\sin\pi t)$$
$$N/m = d\ddot{\theta} + g\cos\theta = 5(-0.4\pi^2\sin\pi t) + g\cos(0.4\sin\pi t)$$

$t = 0$일 때 F와 N을 직접 계산해 보면,

$$F/m = 5 \times 0.4^2\pi^2 = 0.8\pi^2 \approx 8$$
$$N/m = g \approx 10$$

즉, $t = 0$에서부터 $|F| \geq 0.2N$이므로, 주어진 조건대로라면 휘청거리기 시작하자마자 자동차는 미끄러질 것이다.