

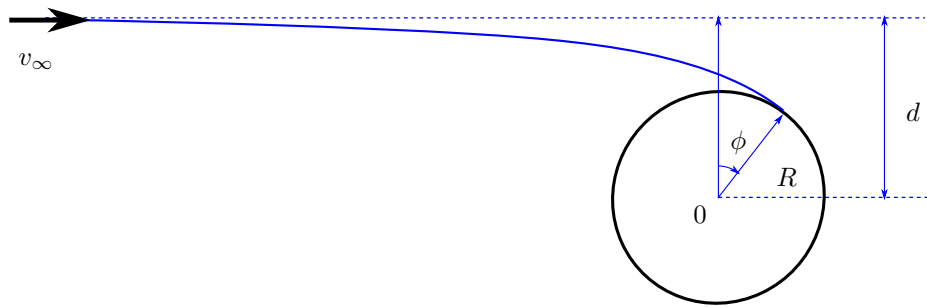
ASE2020 Dynamics: Midterm exam (2 problems)

시험 시작 전, 다음의 '학생 명예선서(Honor Code)'를 답지 맨 위에 적고 서명하십시오.

“나는 정직하게 시험에 응할 것을 서약합니다.”

“By signing this pledge, I promise to adhere to exam requirements and maintain the highest level of ethical principles during the exam period.”

- 1) *Near-collision trajectory (15 points)*. 지구 중심으로부터 거리 d 만큼 떨어진 직선을 따라 우주 저 멀리로부터 혜성이 v_∞ 의 속도로 접근하고 있다.



지구와 혜성간의 중력이 존재하지 않았다면 혜성은 지표면으로부터 $d - R$ 의 거리를 두고 지구를 피해 지나갔겠지만 (지구의 반경은 R), 실제로는 지구와 혜성간의 중력으로 인해 혜성의 궤적은 지구쪽으로 휘어졌고, 혜성은 그림에서와 같이 ϕ 로 표시된 위치의 지구 표면을 아슬아슬하게 스쳐 지나갔다고 한다.

혜성의 초기 속도 v_∞ 가 아래와 같을 때, 다음의 질문에 답하며 혜성의 궤적에 대해 설명하십시오. G 는 gravitational constant, M 은 지구의 질량을 의미한다.

$$v_\infty = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

- a) 혜성의 궤적은 타원/포물선/쌍곡선 중 어떠한 형태인가 (3pts)?

Solution. 직선 방향의 접근선을 따라 비행하고 있었으므로 궤적은 쌍곡선일 것이며, 지구 표면을 스쳐 지나가는 순간이 혜성이 지구 중심에 가장 근접한 지점 (perigee)이 된다.

- b) 접근거리 d 는 R 의 몇 배였을까 (3pts)?

Solution. 중력에 의한 central force만이 작용하므로, 혜성의 각운동량과 에너지가 보존된다. 혜성이 지구를 스쳐지나간 순간의 속도를 v_p 라 하고, 혜성이 무한대의 거리에 있을 때와 지구에 가장 근접했을 두 순간의 각운동량과 에너지를 각각 비교해 보자.

지구 중심에 대한 혜성의 각운동량 보존 관계는 다음과 같다.

$$v_{\infty}d = v_p R \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_p}{v_{\infty}} R$$

또한, 에너지 보존 관계는 아래와 같으며,

$$\frac{1}{2}mv_{\infty}^2 = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GMm}{R}$$

알고 있던 혜성의 초기 속도 $v_{\infty}^2 = GM/R$ 를 위에 대입하면,

$$\frac{GM}{2R} = \frac{1}{2}v_p^2 - \frac{GM}{R} \quad \Rightarrow \quad v_p = \sqrt{\frac{3GM}{R}} = \sqrt{3}v_{\infty}$$

그러므로, 다음의 결론을 얻을 수 있다.

$$d = \sqrt{3}R$$

c) 지구 표면을 스쳐지나갈 때 혜성의 속도는 얼마인가 (3pts)?

Solution. 위에서 이미 계산했다.

$$v_p = \sqrt{\frac{3GM}{R}} = \sqrt{3}v_{\infty}$$

d) 혜성의 궤적을 표현하는 이심률(eccentricity), ϵ 은 얼마인가 (3pts)?

Solution. 혜성의 궤적을 표현하는 지배방정식은 다음과 같다.

$$r = \frac{h^2}{GM(1 + \epsilon \cos \theta)}$$

단위 각운동량 $h = rv_{\theta}$ 는 일정하며, 지구에 근접한 지점에서의 ($\theta = 0$) 거리(R)와 속도(v_p)를 위에 대입하면 다음을 얻는다.

$$R = \frac{R^2 v_p^2}{GM(1 + \epsilon)}$$

근지점에서의 속도는 $v_p^2 = 3GM/R$ 이므로, 이를 위에 대입하고 정리하면 $\epsilon = 2$ 를 얻는다.

e) 혜성은 어느 지역의 지표면을 스쳐 지나갔을까? 즉, ϕ 는 몇 도인가 (3pts)?

Solution. 혜성의 지배방정식을 다시 표현하면 다음과 같다.

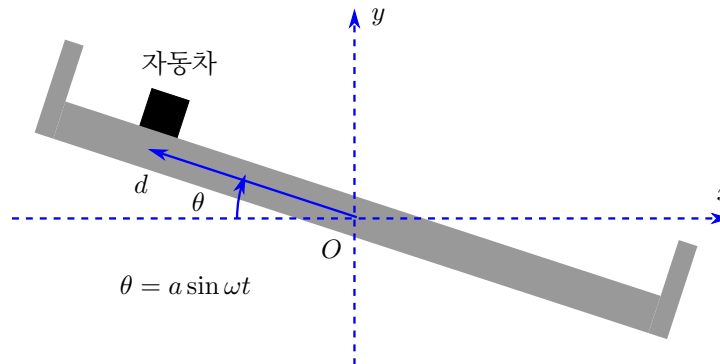
$$\frac{1}{r} = \frac{GM(1 + \epsilon \cos \theta)}{h^2}$$

$r \rightarrow \infty$ 일 때 위를 만족하는 θ_{∞} 는 $1 + \epsilon \cos \theta_{\infty} = 0$ 일 때이며, 이 θ_{∞} 가 perigee로부터의 접근선 방향이다. d)에서 $\epsilon = 2$ 이므로, perigee로부터의 접근선 방향은 $\theta_{\infty} = \pm 60^\circ$ 가 되며, 이는 $\phi = 30^\circ$ 를 의미한다.

- 2) *Gallopig Gertie* (15 points). 미국 워싱턴 주의 Tacoma Narrows bridge는 1938년 9월 공사가 시작되었으며, 상판이 올라간 후 강풍에 의한 공력탄성학적 진동과 휘청거림이 관찰되며 *Gallopig Gertie*라는 별명을 얻었다. 1940년 7월 1일, 공사가 완료되고 자동차와 보행자의 통행이 시작되었으나, 여러 가지 보완 조치에도 불구하고 다리의 휘청거림은 지속되었고 결국 4개월 만인 1940년 11월 7일 무너져 내렸다. (참고영상: <https://youtu.be/j-zczJXSxw?t=150>).

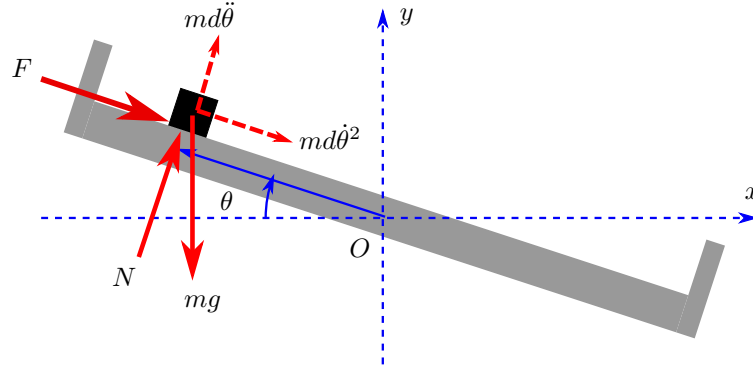


위의 참고영상을 보면 휘청이는 다리 위에 정차해 있는 자동차가 하나 놓여 있는데, 이 문제에서는 이 자동차의 운동을 분석하고자 한다. 자동차를 포함하고 다리 통행방향에 수직한 면을 잘라 다음과 같이 단순화하자.



다리의 휘청거림은 원점 O 를 중심으로 한 회전각 θ 로 표현하며, 다리는 $\theta = a \sin \omega t$ 로 ($|a| < \pi/2$) 휘청이고 있다고 가정하자. 자동차는 원점으로부터 d 의 거리에 주차브레이크가 걸린 채 정차해 있으며, 자동차와 다리 사이의 마찰력은 운동마찰계수 μ_k 로 표현된다. 중력가속도 g 는 수직 하방인 $-y$ 방향으로 작용한다.

- a) 자동차가 다리에서 미끄러지지 않고 있다고 가정하고, 자동차에 작용하는 모든 힘과 가속도가 표현되도록 free-body diagram과 kinetic diagram을 그리시오 (4pts).



- b) 자동차가 다리에서 미끄러지지 않고 있다고 가정하고, 자동차에 대한 운동방정식을 표현하시오 (3pts).

Solution. 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} md\dot{\theta}^2 &= F + mg \sin \theta & (-d \text{ 방향}) \\ md\ddot{\theta} &= N - mg \cos \theta & (+\theta \text{ 방향}) \end{aligned}$$

- c) 자동차가 다리에서 미끄러지기 위한 조건을 표현하시오 (3pts).

Solution. 자동차와 다리 사이의 마찰력 F 가 운동마찰력($= \mu_k N$)보다 커지게 되면 자동차는 미끄러지기 시작한다. 즉,

$$|F| \geq \mu N$$

- d) 문제의 파라미터들이 $a = 0.4 \text{ rad}$, $\omega = \pi \text{ rad/s}$ ($= 0.5 \text{ Hz}$), $d = 5 \text{ m}$, $\mu_k = 0.2$ 로 주어져 있을 때, 이 자동차는 다리 위에 계속 정차해 있을 수 있을까, 아니면 미끄러질까? 이유와 함께 설명하시오 (5pts).

Solution. 다리의 휘청거림은 다음으로 표현되고,

$$\begin{aligned} \theta &= a \sin \omega t \\ \dot{\theta} &= a\omega \cos \omega t \\ \ddot{\theta} &= -a\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

이를 활용하면 F 와 N 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} F/m &= d\dot{\theta}^2 - g \sin \theta = 5(0.4\pi \cos \pi t)^2 - g \sin(0.4 \sin \pi t) \\ N/m &= d\ddot{\theta} + g \cos \theta = 5(-0.4\pi^2 \sin \pi t) + g \cos(0.4 \sin \pi t) \end{aligned}$$

$t = 0$ 일 때 F 와 N 을 직접 계산해 보면,

$$\begin{aligned} F/m &= 5 \times 0.4^2 \pi^2 = 0.8\pi^2 \approx 8 \\ N/m &= g \cos(0.4 \sin \pi t) \approx 10 \end{aligned}$$

즉, $t = 0$ 에서부터 $|F| \geq 0.2N$ 이므로, 주어진 조건대로라면 휘청거리기 시작하자마자 자동차는 미끄러질 것이다.