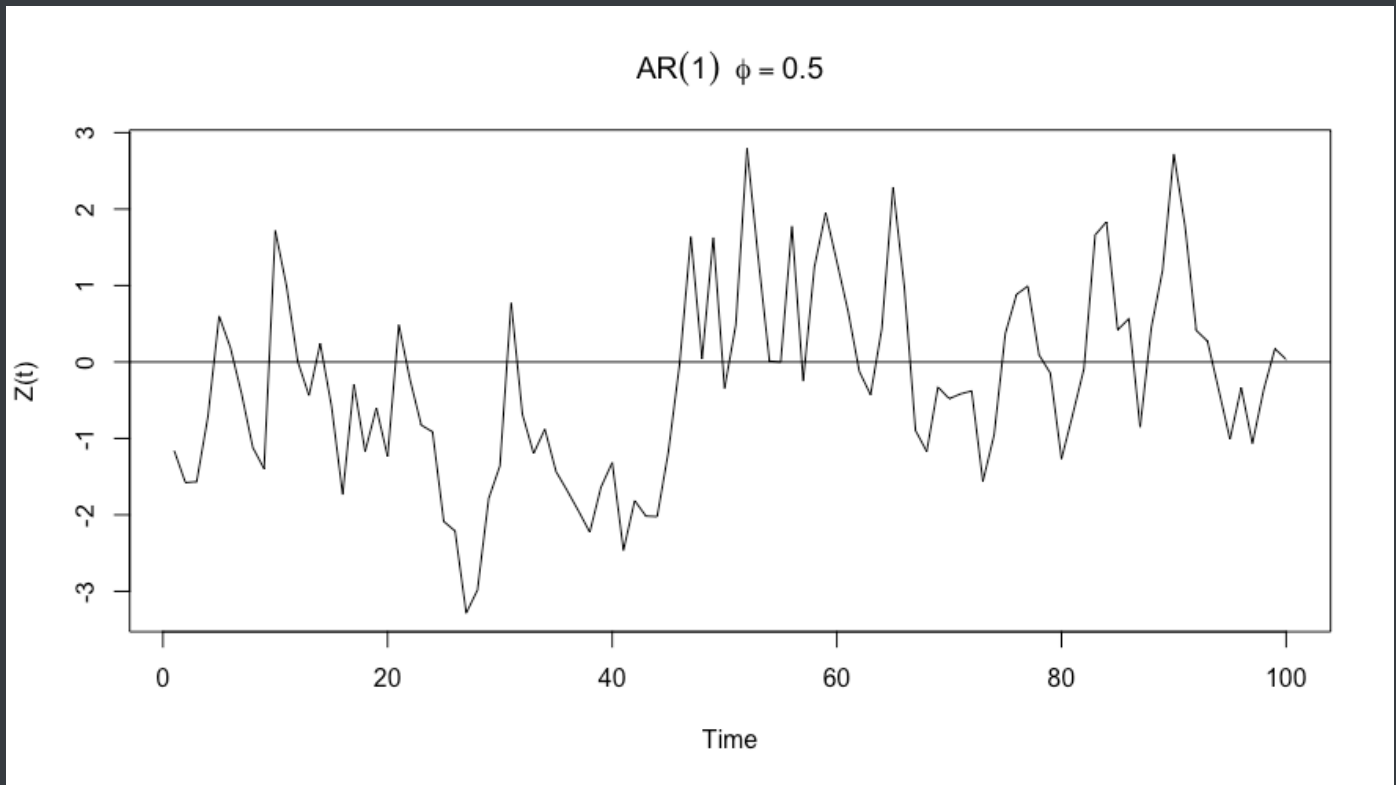


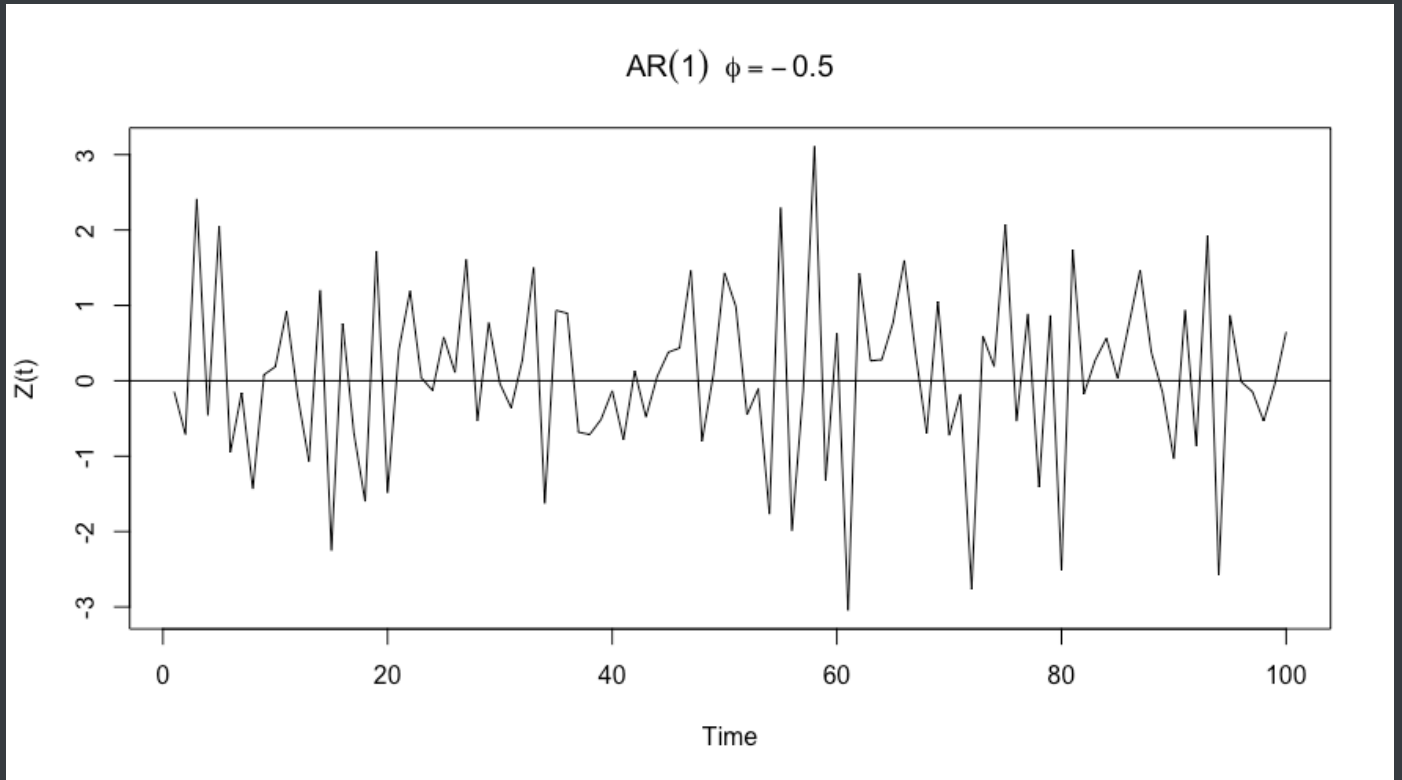
HW 06

2021234640 이종현

그림 6-1, 6-2

AR(1) 과정의 그림이다. 각각 ϕ 를 0.5, -0.5 로 설정하였다.



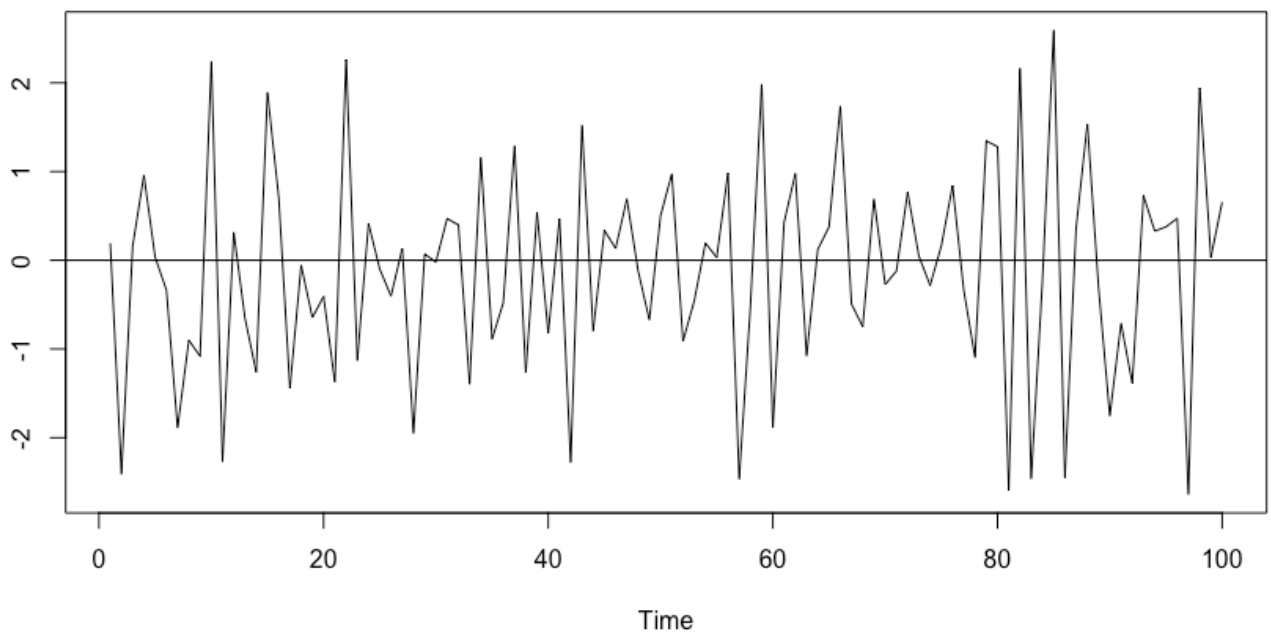


ϕ 가 -0.5 인 경우에는 up and down이 심하게 나타나는 것을 볼 수 있다. AR(1) 과정은 PACF 가 1 이후 절단되며 ACF 가 지수적으로 감소하거나, 사인 함수 모양으로 감소하는 형태를 갖는다.

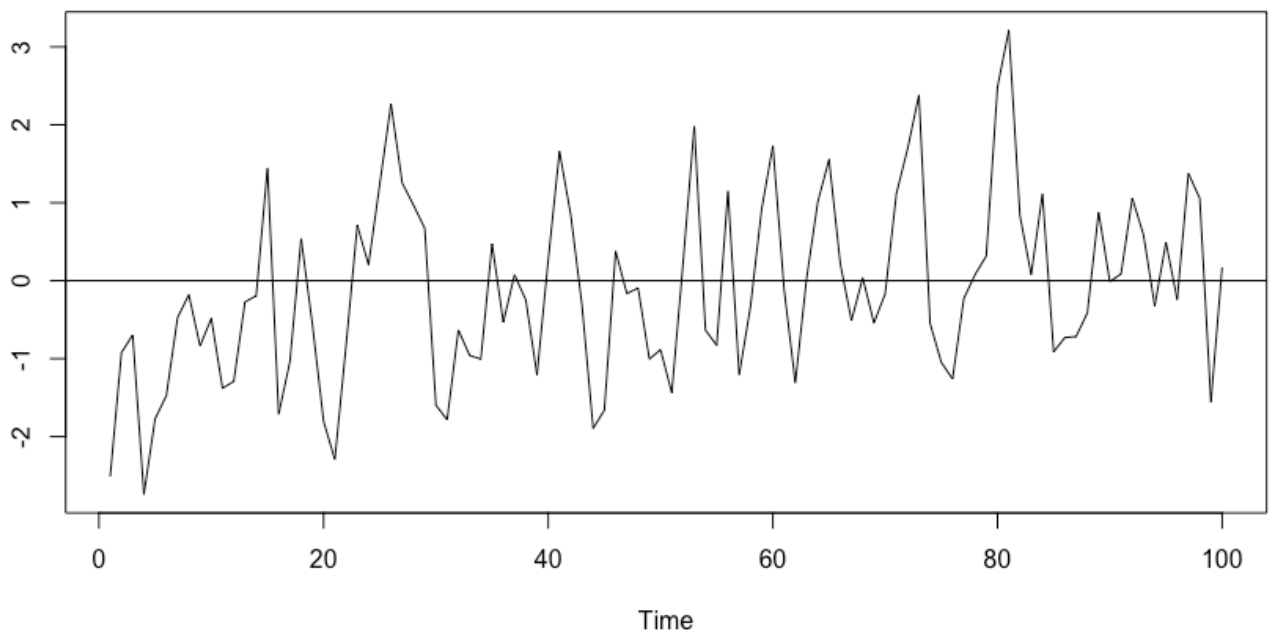
그림 6-6, 6-7

이번에는 MA(1) 과정에 대한 예시이다. 각각 θ 를 -0.6, 0.6으로 설정하였을 때의 그림이다.

MA(1) $\theta = 0.6$



MA(1) $\theta = -0.6$



MA(1) 과정은 ACF 가 1에서 절단되며 PACF가 지수적으로 감소하거나 사인 함수 형태로 감수하는 형태를 갖는다.

연습문제



20 학년도 제 학기 (중간/기말) 시험답안지

담당교수	감독자인	성 격

한양대학교 시험부정행위 방지 *학생 윤리강령

본인은 한양대학교 학생으로서 시험부정행위 방지를 위해 학습수행 과정에서 일체의 부정행위 방법을 사용하지 않으며, 양심과 도덕성을 행동의 기준으로 삼을 것을 서약합니다.

과 목 명

학 과

학 년

학 번

성 명

6-1)

$$2001) Z_t = 0.8Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$a) (1-0.8B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$11=0$$

$$b) AR(1)$$

$$c) \sigma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-0.8^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{0.36}$$

$$\sigma_k = \phi^k \sigma_0 = \phi^k \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

$$r_1 = (0.8) \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{0.36}$$

$$r_2 = (0.8)^2 \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{0.36}$$

...

$$r_5 = (0.8)^5 \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{0.36}$$

$$d) \rho_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} = \phi^k$$

$$\therefore \rho_0 = 1, \rho_1 = 0.8, \rho_2 = (0.8)^2, \dots$$

$$r_5 = (0.8)^5$$

$$e) \rho_{kk} \sim \phi_{11} = \rho_1 = 0.8$$

$$\phi_{22} = \dots = \phi_{55} = 0$$

$$2002) Z_t - 0.5Z_{t-1} = 100 + \varepsilon_t$$

a)

$$E[Z_t] = E[0.5Z_{t-1}] + 100$$

$$\mu = 0.5\mu + 100$$

$$\frac{1}{2}\mu = 100 \therefore \mu = 200$$

$$(1-0.5B)(Z_t - 200) = \varepsilon_t$$

$$b) AR(1)$$

$$c) \sigma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-0.5^2}, \sigma_k = \phi^k \cdot \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$$

$$\text{여기 } \phi = -0.5$$

$$d) \rho_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} = \phi^k, \text{여기 } \phi = -0.5$$

$$e) \phi_{11} = \rho_1 = -0.5$$

$$\phi_{22} = \dots = \phi_{55} = 0$$

$$2003) Z_t = \varepsilon_t + 0.7\varepsilon_{t-1}$$

$$11=0, Z_t = (1+0.7B)\varepsilon_t$$

a)

$$b) MA(1)$$

$$c) \sigma_k = \begin{cases} (1+0.7^2)\sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ -0.6\sigma_\varepsilon^2 & k=1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

$$d) \rho_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0}, \rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{-0.6\sigma_\varepsilon^2}{(1+0.7^2)\sigma_\varepsilon^2} = \frac{-0.6}{1.49}$$

$$\rho_2 = \dots = \rho_5 = 0$$

$$e) \rho_{11} = \rho_1 = \frac{-0.6}{1.49}$$

$$\rho_{22} = \frac{\sigma_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = 0$$

①

$$\text{ex 4)} z_t = 9.5 + \varepsilon_t - 1.3\varepsilon_{t-1} + 0.6\varepsilon_{t-2}$$

$$\text{a) } \mu = 9.5$$

$$(z_t - 9.5) = (1 - 1.3B + 0.6B^2)\varepsilon_t$$

$$\text{b) MA(2)}$$

$$\text{c) } \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{1 - \theta_1^2 - \theta_2^2} \sigma_\varepsilon^2 \quad k=0$$

$$- \theta_1(1 - \theta_2)\sigma_\varepsilon^2 \quad k=1$$

$$- \theta_2\sigma_\varepsilon^2 \quad k=2$$

$$0 \quad k \geq 3$$

$$\text{d) } \rho_k = \frac{\hat{\sigma}_k}{\hat{\sigma}_0} = \frac{1}{1 - \theta_1^2 - \theta_2^2} \quad k=0$$

$$- \theta_1 \quad k=1$$

$$- \theta_2 \quad k=2$$

$$0 \quad k \geq 3$$

$$\text{ex 5) } z_t - 0.6z_{t-1} = 3B + \varepsilon_t + 0.9\varepsilon_{t-1}$$

$$\text{a)}$$

$$E[z_t] = (1 - 0.6)E[z_{t-1}] + 3B$$

$$\mu = 0.6\mu + 3B$$

$$0.4\mu = 3B$$

$$\mu = \frac{3B}{0.4} = 7.5$$

$$(1 - 0.6B)(z_t - 7.5) = (1 + 0.9B)\varepsilon_t$$

$$\text{b) ARMA(1,1)}$$

$$\text{c) } \text{cov}(z_t, z_{t-k})$$

$$= \hat{\sigma}_k = \phi \hat{\sigma}_{k-1} + E[z_t \varepsilon_t] - \theta E[z_{t-k} \varepsilon_{t-1}]$$

$$\text{i) } k=0$$

$$\hat{\sigma}_0 = \phi \hat{\sigma}_0 + E[z_t \varepsilon_t] - \theta E[z_t \varepsilon_{t-1}]$$

$$= \phi \hat{\sigma}_0 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta(\phi - \theta)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\dots$$

$$\text{ii) } k=1$$

$$\hat{\sigma}_1 = \phi \hat{\sigma}_0 + E[z_t \varepsilon_t] - \theta E[z_{t-1} \varepsilon_{t-1}]$$

$$= \phi \hat{\sigma}_0 - \theta \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{iii) } k \geq 2$$

$$\phi^{k-1} \hat{\sigma}_1$$

$$\therefore \hat{\sigma}_k = \begin{cases} \frac{1 + 0.9\phi}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2 & k=0 \\ \frac{(\phi - \theta)(1 - \theta)}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2 & k=1 \end{cases}$$

$$\phi^{k-2} \hat{\sigma}_2$$

$$(\phi - \theta)(1 - \theta)$$

$$\text{d) } \rho_1 = \frac{\hat{\sigma}_1}{\hat{\sigma}_0} = \frac{(\phi - \theta)(1 - \theta)}{\frac{1 + 0.9\phi}{1 - \phi^2} \sigma_\varepsilon^2} = \frac{(\phi - \theta)(1 - \theta)}{1 + 0.9\phi}$$

$$\rho_k = \phi^{k-1} \rho_1$$

$$\text{ex 6) } z_t - 0.4z_{t-1} - 0.3z_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$\text{ii) } k=0$$

$$\text{a) } (1 - 0.4B - 0.3B^2)z_t = \varepsilon_t$$

$$\text{b) AR(2)}$$

$$\text{c) } \text{cov}(z_t, z_{t-k})$$

$$= E[z_t(\phi_1 z_{t-k-1} + \phi_2 z_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k})]$$

$$\text{i) } k=0$$

$$\hat{\sigma}_0 = E[z_t(\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t)]$$

$$= \phi_1 \hat{\sigma}_1 + \phi_2 \hat{\sigma}_2 + \sigma_\varepsilon^2$$



담당교수	감독자인	성 적

한양대학교 시험부정행위 방지 『학생 윤리강령』

본인은 한양대학교 학생으로서 시험부정행위 방지를 위해 학업수행 과정에서 일체의 부정행위 방법을 사용하지 않으며, 양심과 도덕성을 행동의 기준으로 삼을 것을 서약합니다.

과 목 명

학 과

학 년

학 번

성 명

2) $k=1$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= E[z_t(\phi_1 z_{t-2} + \phi_2 z_{t-3} + z_{t-1})] \\ &= \phi_1 \delta_2 + \phi_2 \delta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \quad \text{Yule-Walker eqs} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

$\therefore k \geq 1$

$$\delta_k = \phi_1 \delta_{k-1} + \phi_2 \delta_{k-2}$$

$$\phi_1 = \phi_2 \rho_1 - \rho_1 = (\phi_2 - 1) \rho_1$$

$$\rho_k = \frac{\phi_1 \delta_{k-1} + \phi_2 \delta_{k-2}}{\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_2 + \sigma_z^2}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \rho_2 - \phi_1 \rho_1 \\ &= \rho_2 - (\phi_2 - 1) \rho_1^2 \\ &= \rho_2 - \phi_2 \rho_1^2 + \rho_1^2 \\ (1 + \rho_1^2) \phi_2 &= \rho_2 + \rho_1^2 \\ \phi_2 &= \frac{\rho_2 + \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \rho_0 = 1, \rho_1 = \frac{\phi_1 \delta_0 + \phi_2 (\delta_1)}{\delta_0}$$

$$= \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1 \delta_1 + \phi_2 \delta_0}{\delta_0} = \phi_1 \rho_1 + \phi_2$$

$$\rho_3 = \frac{\phi_1 \delta_2 + \phi_2 \delta_1}{\delta_0} = \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1$$

$$\rho_4 = \frac{\phi_1 \delta_3 + \phi_2 \delta_2}{\delta_0} = \phi_1 \rho_3 + \phi_2 \rho_2$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

$$\text{2) } z_t - 0.5z_{t-1} = \varepsilon_t + 0.3\varepsilon_{t-1}$$

$N \rightarrow \infty$

$$(1 - 0.5B)z_t = (1 + 0.3B)\varepsilon_t$$

(b) ARMA(1,1)

$$\delta_k = \phi \delta_{k-1} + E[z_k \varepsilon_k] - \theta E[z_k \varepsilon_{k-1}]$$

$$\delta_k = \begin{cases} \phi \delta_1 + \sigma_z^2 + \theta(1-\phi)\sigma_z^2, & k \rightarrow \infty \\ \phi \delta_0 - \theta \sigma_z^2, & k=1 \\ \phi^{k-1} \delta_1, & k \geq 2 \end{cases}$$

(c) PACF

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \phi_2$$

$$\phi_{33} = 0$$

$$\phi_{kk} = \frac{\delta_k}{\delta_0} = \phi^{k+1} \rho_1$$

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

(3)

$$\text{Prob 8)} Z_t - 1.5Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2} = 100 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} \quad (a) \rho_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_0} \dots$$

$$Z_t = 1.5Z_{t-1} - 0.7Z_{t-2} + 100 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$$

$$E[Z_t] = 1.5 \cdot 11 - 0.7 \cdot 11 + 100 = 11$$

$$100 = \frac{1}{1} \cdot 11$$

$$100 = 11$$

$$Z_t - 110 = \tilde{Z}_t$$

$$\text{Prob 9)} Z_t = 26 + 0.6Z_{t-1} + \varepsilon_t - 0.2\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$$

$$11 = E[Z_t] = 26 + 0.6 \cdot 11 \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot 11 = 26$$

$$11 = 13.5 = 90$$

$$Z_t - 11 = \tilde{Z}_t \text{가 일반}$$

$$(a) (1 - 1.5B + 0.7B^2) \tilde{Z}_t = (1 - 0.5B) \varepsilon_t$$

$$(b) (1 - 0.6B) \tilde{Z}_t = (1 - 0.2B + 0.5B^2) \varepsilon_t$$

$$(b) \text{ARMA}(2,1)$$

$$(b) \text{ARMA}(1,2)$$

$$(a) \text{Cov}(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t+k}) = E[\tilde{Z}_t \cdot \tilde{Z}_{t+k}]$$

$$= E[\tilde{Z}_t (\phi_1 \tilde{Z}_{t-k-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-k-2} + \varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1})] \quad (a) \text{Cov}(\tilde{Z}_t, \tilde{Z}_{t+k}) = E[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_{t+k}]$$

$$= \phi_1 \delta_{k+1} + \phi_2 \delta_{k+2} + E[\tilde{Z}_t \varepsilon_{t+k}] - \theta_1 E[\tilde{Z}_t \varepsilon_{t+k-1}] =$$

i) $k=0$

$$1.5 \cdot 11 - 0.7 \cdot 11 = 11 - 0.5 \cdot 11$$

$$\gamma_0 = E[\tilde{Z}_t (\phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1})]$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\phi_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = E[\tilde{Z}_t (\phi_1 \tilde{Z}_{t-2} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-3} + \varepsilon_{t-1} - \theta_1 \varepsilon_{t-2})]$$

$$= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + (\phi_1 - \theta_1) \sigma_\varepsilon^2 - \theta_1 (\phi_2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = E[\tilde{Z}_t (\phi_1 \tilde{Z}_{t-3} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-4} + \varepsilon_{t-2} - \theta_1 \varepsilon_{t-3})]$$

$$= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 + \phi_2 \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_3 = \phi_1 \gamma_2 + \phi_2 \gamma_1$$

(4)



20 학년도 제 학기 (중간/기말) 시험답안지

담당교수	감독자인	성 적

한양대학교 시험부정행위 방지 『학생 윤리강령』

본인은 한양대학교 학생으로서 시험부정행위 방지를 위해 학업수행 과정에서 일체의 부정행위 방법을 사용하지 않으며, 공정성과 도덕성을 행동의 기준으로 삼을 것을 서약합니다.

과 목 명

학 과

학 년

학 번

성 명

6-3)

$$\text{Prob 1) } Z_t = 15B + 0.8Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$E[Z_t] = \mu = 15B + 0.8\mu$$

$$\frac{1}{5}\mu = 15B$$

$$\mu = 190$$

$$(1 - 0.8B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$1 - 0.8B = 0$$

$$B = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} > 1$$

∴ 정상성 만족하지 않음.

$$Z_t = (1 - 0.8B)^{-1} \varepsilon_t$$

$$= (1 + 0.8B + 0.8^2B^2 + 0.8^3B^3 + \dots) \varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1} + 0.8^2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{Prob 2) } (1 - 1.3B + 0.5B^2)(Z_t - 3.5) = \varepsilon_t$$

$$B_{1,2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.3^2 - 4 \cdot 0.5}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69 - 2}}{2} = \frac{1.3 \pm \sqrt{1.69}}{2}$$

$$\sqrt{1.69} \approx 1.292$$

$$B_1 = \frac{1.3 + 1.292}{2} > 1$$

$$B_2 = \frac{1.3 - 1.292}{2} < 1$$

∴ 정상성 만족함.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)^{-1} \varepsilon_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) \varepsilon_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$$

$$B: (\psi_1 - \phi_1) = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1$$

$$B^2: (\psi_2 - \phi_1\phi_1 - \phi_2) = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1^2 + \phi_2$$

$$B^3: (\psi_3 - \phi_1\phi_2 - \phi_2\phi_1) = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\phi_2 + \phi_1\phi_2$$

$$\therefore \psi_k = \psi_{k-1}\phi_1 + \phi_{k-2}\phi_2$$

$$Z_t = (1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2)^{-1} \varepsilon_t$$

$$= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots$$

$$\text{where } \psi_k = \begin{cases} \phi_1 & \text{if } k=0 \\ \phi_1^2 + \phi_2 & \text{if } k=1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

$$\psi_{k-1}\phi_1 + \phi_{k-2}\phi_2$$

$$\text{Prob 3) } Z_t = 0.5Z_{t-1} + 0.6Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$Z_t - 0.5Z_{t-1} - 0.6Z_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$(1 - 0.5B - 0.6B^2)Z_t = \varepsilon_t$$

$$B_1 = \frac{0.5 + \sqrt{0.5^2 + 4 \cdot 0.6}}{2} > 1$$

$$B_2 = \frac{0.5 - \sqrt{0.5^2 + 4 \cdot 0.6}}{2} < 1$$

정상성 만족 X.

(5)

6-4)

$$\text{Ex 1)} Z_t = 1500 + \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1}$$

$$Z_t - 1500 = \varepsilon_t - 0.8\varepsilon_{t-1} \\ = (1 - 0.8B)\varepsilon_t$$

 $\theta = 0.8 < 1 \therefore$ 가역성 없음

a) MA는 항상 stationary 이다.

b) \rightarrow 가역성 X

$$\text{Ex 2)} Z_{t+1.89} = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2} \\ = (1 - 0.6B + 0.5B^2)\varepsilon_t$$

$$B = \frac{0.6 + \sqrt{0.6^2 - 2}}{2} = \frac{0.6 + \sqrt{1.16}}{2} \approx 1.28 \\ = \frac{0.98}{2} \approx 0.9$$

a) Stationary 이다.

b) B 의 크기 < 1 이면 가역성 X

$$\text{MA(1)} \begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = -0.1 < 1 \text{ 만족} \\ \theta_2 - \theta_1 = 1.1 > 1 \text{ 불만족} \\ -1 < \theta_2 < 1 \text{ 만족} \end{cases}$$

~~가역성~~ 만족 X
~~가역성~~

$$\text{Ex 3)} Z_{t-15} = (1 - 0.9B - 0.2B^2)\varepsilon_t$$

a) Stationary 이다.

b) 가역성 만족

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_1 = -1.1 < 1 \text{ 만족} \\ \theta_2 - \theta_1 = 0.9 < 1 \text{ 만족} \\ -1 < \theta_2 < 1 \text{ 만족} \end{cases}$$

$$Z_t = (Z_{t-15})$$

$$\text{c) } (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)^{-1} Z_t = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) Z_t = \varepsilon_t$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = 1 \text{ 이다}$$

$$B^0: -\theta_1 - \pi_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = -\theta_1$$

$$B^1: -\theta_2 + \theta_1 \pi_1 - \pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \theta_1 \pi_1 - \theta_2$$

$$B^2: +\theta_2 \pi_1 + \theta_1 \pi_2 - \pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \theta_1 \pi_2 + \theta_2 \pi_1$$

$$B^3: \rightarrow \pi_4 = \theta_1 \pi_3 + \theta_2 \pi_2$$

$$B^k: \rightarrow \pi_k = \theta_1 \pi_{k-1} + \theta_2 \pi_{k-2}$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) Z_t = \varepsilon_t$$

$$\text{이때 } \pi_k = \theta_1 \pi_{k-1} + \theta_2 \pi_{k-2}$$

$$\text{즉, } \theta_1 = -0.9, \theta_2 = -0.2$$

(6)



20 학년도 제 학기 (중간/기말) 시험답안지

담당교수	감독자인	성 적

한양대학교 시험부정행위 방지 '학생 윤리강령'

본인은 한양대학교 학생으로서 시험부정행위 방지를 위해 학업수행 과정에서 일체의 부정행위 방법을 사용하지 않으며, 양심과 도덕성을 행동의 기준으로 삼을 것을 서약합니다.

과 목 명

학 과

학 년

학 번

성 명

2016-5

$$\text{문제 1) } (1-B)Z_t = (1-0.4B)\varepsilon_t$$

① ARMA 1차의 AR operator는 0.4

$$\text{AR operator} \Rightarrow (1-B) \Rightarrow$$

$$B=1.$$

MA operator

② ARMA의 MA operator는 0.4

$$(1-0.4B) \Rightarrow B=0.4 \therefore \text{가정하는 것}$$

③ X

$$\text{④ } (1-\theta_1 B)^{-1}(1-B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$(1-\theta_1 B)Z_t = (1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)Z_t \quad \text{이므로}$$

$$(1-\theta_1 B)(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)$$

$$\begin{cases} B: -\theta_1 - \pi_1 \cdot \infty \rightarrow \pi_1 = -\theta_1 \\ B^2: +\theta_1 \pi_1 - \pi_2 \cdot \infty \rightarrow \pi_2 = \theta_1 \pi_1 \\ B^3: -\pi_2 + \theta_1 \pi_2 \cdot \infty \rightarrow \pi_3 = \theta_1 \pi_2 \end{cases}$$

$$B^k: \pi_k = \theta_1 \pi_{k-1}$$

$$(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)(1-B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$\text{문제 2) } (1-0.3B)(Z_t - 100) = (1-0.5B)\varepsilon_t$$

$$\text{① AR operator } 1-0.3B \Rightarrow$$

$$B = 1 \times \frac{10}{5} = \frac{10}{5} \approx 2.3334$$

$$|B| > 1 \text{ 이므로 MA operator}$$

$$\text{② MA operator } (1-0.5B) \Rightarrow$$

$$B=2$$

$$|B| > 1 \text{ 이므로 AR operator}$$

$$\text{③ } Z_t = (1-0.3B)^{-1}(1-0.5B)\varepsilon_t$$

$$(1-0.3B)Z_t = (1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)\varepsilon_t$$

$$(1-\phi B)(1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots) = 1$$

$$\begin{cases} B: \psi_1 - \phi = 0 \rightarrow \psi_1 = \phi \\ B^2: \psi_2 - \phi\psi_1 = 0 \rightarrow \psi_2 = \phi^2 \end{cases}$$

$$B^k: \psi_k - \phi\psi_{k-1} = 0 \rightarrow \psi_k = \phi\psi_{k-1}$$

$$B^k: \psi_k = \phi\psi_{k-1} \rightarrow \psi_k = \phi^k$$

$$Z_t = (1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1-0.5B)\varepsilon_t$$

$$\text{④ } (1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots)(1-B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$\text{where, } \pi_k = \theta_1 \pi_{k-1}$$

②

$$2.23) \quad Z_t = 0.3Z_{t-1} + \varepsilon_t + (1.3\varepsilon_t + 0.8\varepsilon_{t-1})$$

$$\downarrow$$

$$(1 - 0.3B)Z_t = (1 + 1.3B - 0.8B^2)\varepsilon_t$$

ARMA(1,2) process

$$\rightarrow (1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots)(1 - 0.3B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$\text{where, } \pi_k = \pi_{k-1}\theta_1 + \pi_{k-2}\theta_2$$

$$\theta_1 = 1.3, \theta_2 = -0.6$$

① AR operator $(1 - 0.3B) \neq 0$
 $\beta = \frac{1.3}{3} > 1$
 $|\beta| > 1$ 인 경우, 정상성 보장

② MA operator $(1 + 1.3B - 0.8B^2) \neq 0$

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 < 1 & 0.5 \text{ OK} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_2 - \theta_1 < 1 & -2.1 \text{ OK} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < \theta_2 < 1 & \text{OK} \end{cases}$$

정상성 보장

③ $Z_t = (1 - 0.3B)^{-1} (1 + 1.3B - 0.8B^2)\varepsilon_t$

$$Z_t = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots)(1 + 1.3B - 0.8B^2)\varepsilon_t$$

$$\psi_k = \psi_{k-1}\phi$$

④ $(1 + 1.3B - 0.8B^2)^{-1} (1 - 0.3B)Z_t = \varepsilon_t$

$$(1 + \pi_1 B + \pi_2 B^2 + \dots)(1 - 0.3B)Z_t = \varepsilon_t$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \dots) = 1$$

$$\begin{cases} B^0: -\pi_1 - \theta_1 = 0 \rightarrow \pi_1 = -\theta_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^1: -\theta_2 + \theta_1 \pi_1 - \pi_2 = 0 \rightarrow \pi_2 = \theta_1 \pi_1 - \theta_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^2: \theta_2 \pi_1 + \theta_1 \pi_2 - \pi_3 = 0 \rightarrow \pi_3 = \theta_1 \pi_2 + \theta_2 \pi_1 \end{cases}$$

$$B^k \Rightarrow \pi_k = \pi_{k-1}\theta_1 + \pi_{k-2}\theta_2$$

⑤

Appendix: R code

```
rm(list=ls())

library(astsa)
set.seed(1234)

z = arima.sim(n=100, model=list(order=c(1, 0, 0), ar=0.5),
rand.gen=rnorm)
y = arima.sim(n=100, model=list(order=c(1, 0, 0), ar=-0.5),
rand.gen=rnorm)

# 그림 6-1
ts.plot(z, ylab="Z(t)", main=(expression(AR(1)~~phi==0.5)))
abline(h=0)

# 그림 6-2
ts.plot(y, ylab="Z(t)", main=(expression(AR(1)~~phi== -0.5)))
abline(h=0)

# 그림 6-6
set.seed(12347)
z = arima.sim(n=100, list(order=c(0, 0, 1), ma=-0.6), rand.gen=rnorm)
y = arima.sim(n=100, list(order=c(0, 0, 1), ma=0.6), rand.gen=rnorm)

ts.plot(z, yalb="z", main=(expression(MA(1)~~theta==0.6)))
abline(h=0)

# 그림 6-7
ts.plot(y, yalb="z", main=(expression(MA(1)~~theta== -0.6)))
abline(h=0)
```

Appendix: Python code

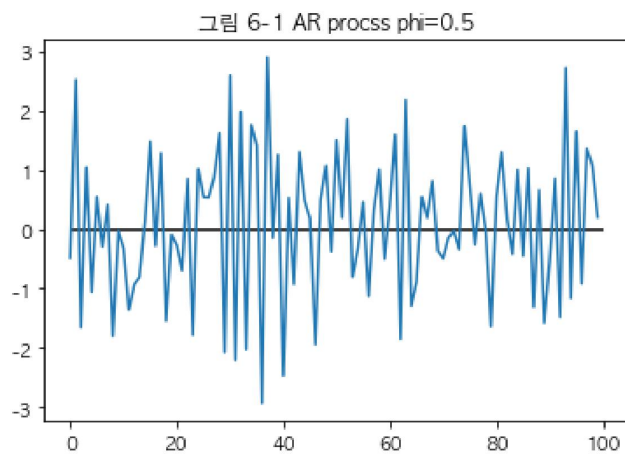
In [15]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc
from statsmodels.tsa.arima_process import arma_generate_sample

rc('font', family='AppleGothic')
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

ar_coefs = [1, 0.5]
ma_coefs = [1]

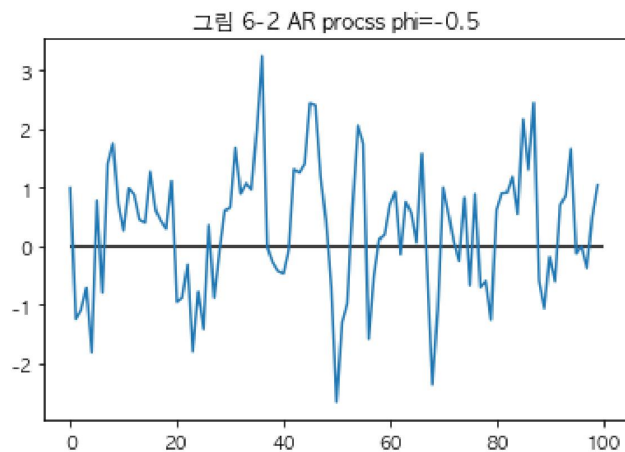
Z = arma_generate_sample(ar_coefs, ma_coefs, nsample=100)
plt.title("그림 6-1 AR procss phi=0.5")
plt.plot(Z)
plt.hlines(0, 0, 100, "k")
plt.show()
```



In [16]:

```
ar_coefs = [1, -0.5]
ma_coefs = [1]

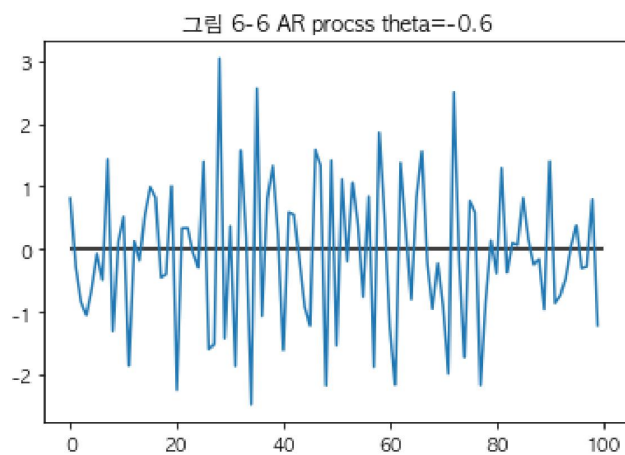
Z = arma_generate_sample(ar_coefs, ma_coefs, nsample=100)
plt.title("그림 6-2 AR procss phi=-0.5")
plt.plot(Z)
plt.hlines(0, 0, 100, "k")
plt.show()
```



In [17]:

```
ar_coefs = [1]
ma_coefs = [1, -0.6]

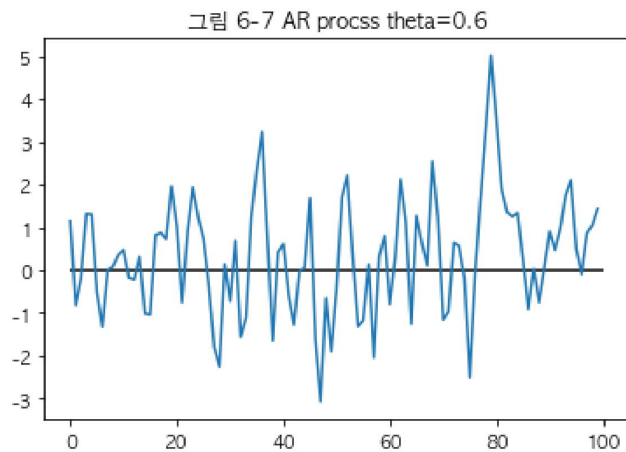
Z = arma_generate_sample(ar_coefs, ma_coefs, nsample=100)
plt.title("그림 6-6 AR procss theta=-0.6")
plt.plot(Z)
plt.hlines(0, 0, 100, "k")
plt.show()
```



In [18]:

```
ar_coefs = [1]
ma_coefs = [1, 0.6]

Z = arma_generate_sample(ar_coefs, ma_coefs, nsample=100)
plt.title("그림 6-7 AR procss theta=0.6")
plt.plot(Z)
plt.hlines(0, 0, 100, "k")
plt.show()
```



In []:

