제5장 확률과정

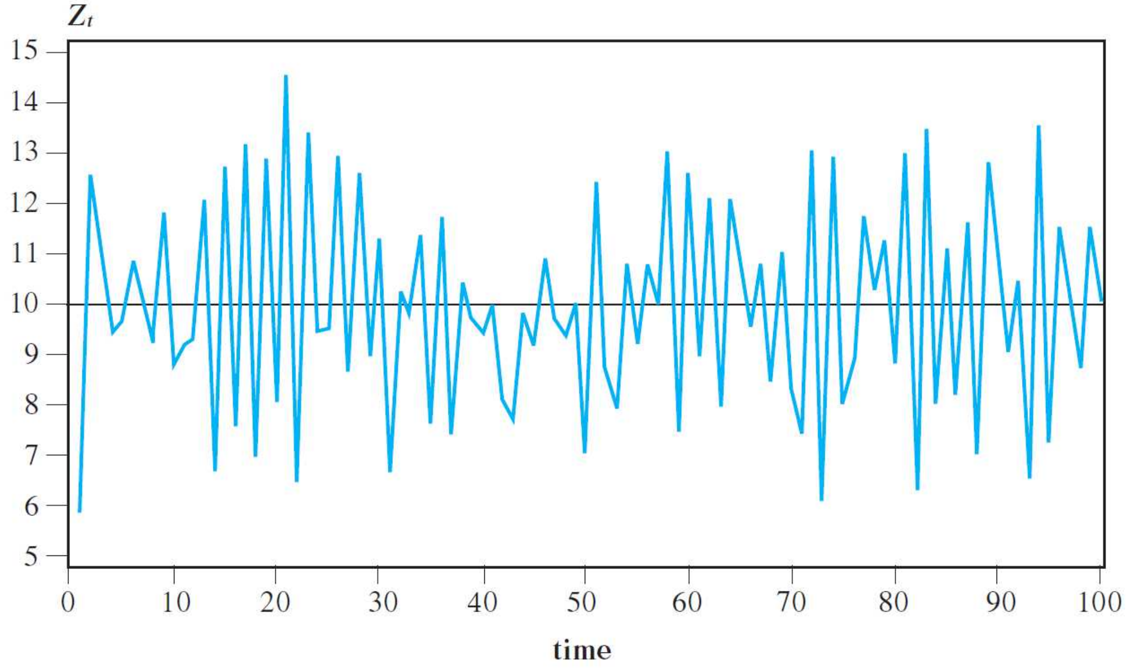
- **확률과정**(stochastic process)
  - 확률법칙(probability laws)에 의해 생성되는 일련의 통계적인 현상
  - 확률공간에서 정의되는 확률변수들의 모임 $Z_t, t \in T$
  - $T = (-\infty, \infty)$ 혹은 $T = [0, \infty)$: **연속형 확률과정**
  - $T = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ 혹은 $T = 0, 1, 2, \ldots$: **이산형 확률과정**

- **시계열** :
  - 주어진 $\omega \in S$(표본공간)에 대하여, 확률과정 $Z_t(\omega), t = 1, 2, \ldots$의 관측값
  - $Z_t, t = 1, 2, \ldots$으로 표현
  - 확률과정의 **실현값**(realization) 또는 **표본통로**(sample path)

5.1 정상확률과정

시계열 자료 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$: 어느 특정한 확률과정의 실현된 값

- 정상성(stationarity)
  시계열의 확률적인 성질들이 시간의 흐름에 따라 불변(time-invariant)



<그림 5.1>의 특징

① 뚜렷한 추세가 없다. 즉, 시계열의 <u>평균</u>이 시간축에 평행하다.

② 시계열의 진폭(<u>변동</u>)이 시간의 흐름에 따라 일정하다.

(1) 강한 의미의 정상성(strict stationarity; strong stationarity)

임의의 자연수 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 과 k에 대하여

$$f(Z_{t_1}, Z_{t_2}, \ldots, Z_{t_n}) = f(Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k}, \ldots, Z_{t_n+k})$$

(2) 약한 의미의 정상성(weak stationarity)

Suppose: $\mu_t = E(Z_t)$: **평균**, $\sigma_t^2 = Var(Z_t) = E[(Z_t - \mu_t)^2]$: **분산**

$\gamma_{s-t} = Cov(Z_t, Z_s) = E[(Z_t - \mu_t)(Z_s - \mu_s)]$: **자기공분산**(autocovariance)

(i) $E(Z_t) = \mu$, $Var(Z_t) = \sigma_z^2$: 상수로서 시간 t 에 관계없이 동일

(ii) $E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma_k$: 시차(lag) k 에만 의존하고 시점 t 와는 무관

(iii) (i)&(ii)가 모두 존재(finite)

- 2차 정상성(second-order stationarity) 또는 공분산정상성(covariance stationarity)
- 정상 확률과정
- 정규과정(Gaussian process)의 경우 정상성에 대한 두 정의가 동일
- 2차 적률까지 존재하는 강한 정상성은, 약한 정상성을 의미한다.

5.2 확률과정의 예

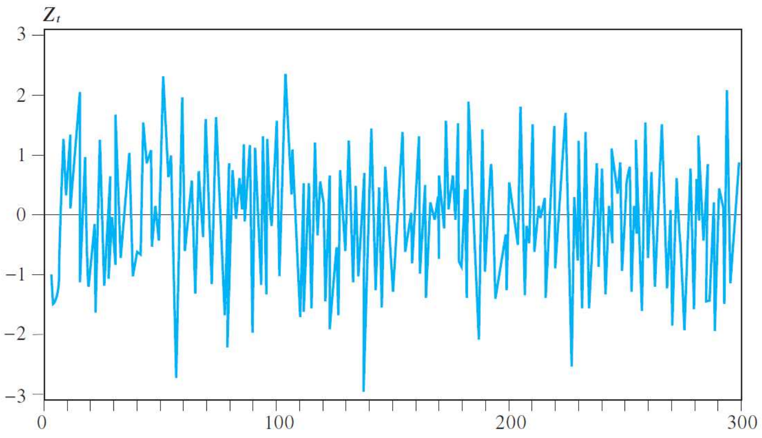
5.2.1 백색잡음과정(white noise process) : <그림 5.2>

서로 독립이고 동일한 분포를 따르는 IID 확률변수들로 구성된 확률과정

표시: $Z_t (= \epsilon_t) \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$

- $E(Z_t) = E(\epsilon_t) = 0$
- $\gamma_0 = Var(Z_t) = Var(\epsilon_t) = E(\epsilon_t^2) = \sigma_\epsilon^2$
- $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = Cov(\epsilon_t, \epsilon_{t+k}) = 0.$

따라서, 백색잡음과정은 정상확률과정



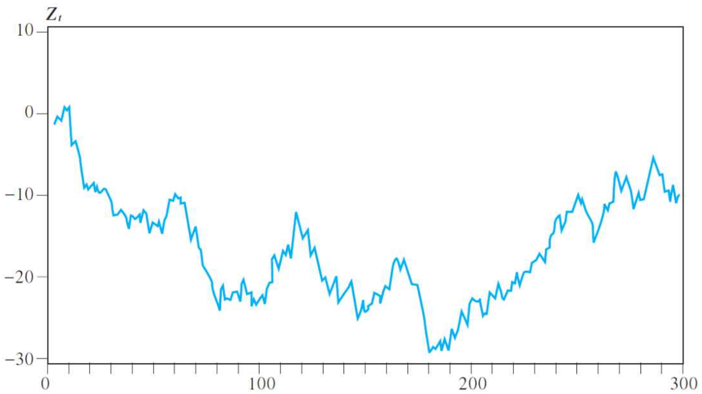
5.2.2 확률보행과정(random walk process)

절편(drift)이 없는 **확률보행과정** 또는 **임의보행과정** : <그림 5.3>

- $Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t$, $Z_0 = 0$, $t = 1, 2, \ldots$

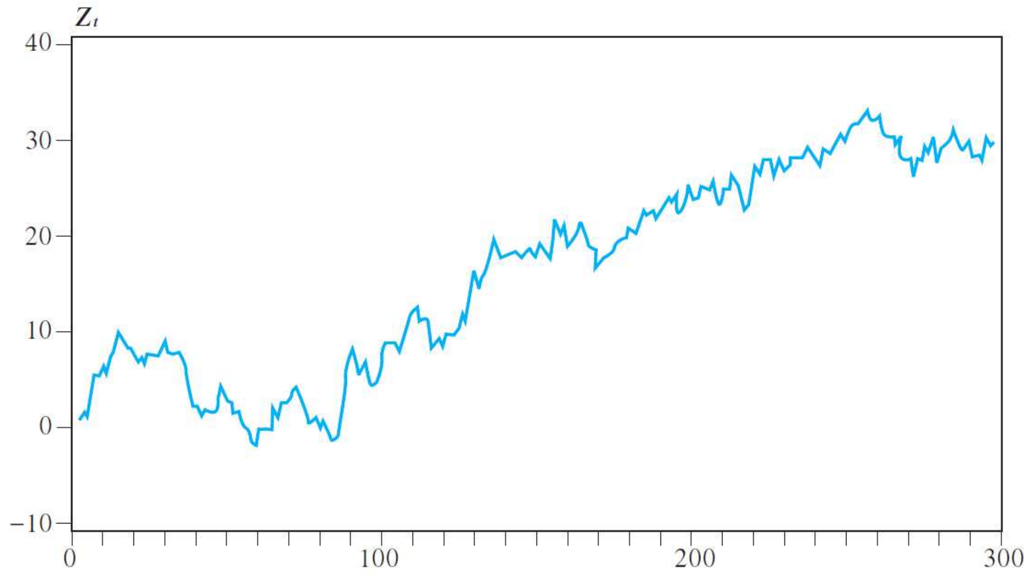
- ϵ_t : 시점 t 에서 어떤 사람이 임의의 방향(+ or −)으로 움직이는 보폭
- 원점($Z_0 = 0$)에서 출발, $Z_1 = \epsilon_1$이고 $Z_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i$는 t 시간 후의 위치
- $E(Z_t) = 0$, $Var(Z_t) = Var(\sum_{i=1}^{t} \epsilon_i) = t\sigma_\epsilon^2$
- $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E\left\{\left(\sum_{i=1}^{t} \epsilon_i\right)\left(\sum_{i=1}^{t+k} \epsilon_i\right)\right\} = E(\sum_{i=1}^{t} \epsilon_i^2) = t\sigma_\epsilon^2$

따라서, 확률보행과정은 **비정상(nonstationary) 확률과정**



$\underline{\text{절편이 있는 확률보행과정}(Z_0 = 0)}$: <그림 5.4>

- $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \epsilon_t$, $t = 1, 2,$ ...
- $Z_1 = \delta + \epsilon_1$, $\cdots$, $Z_t = t\delta + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i$
- $E(Z_t) = t\delta$: 시간 t 의 함수, 시간의 흐름에 따라 수준이 점차로 증가
- $Var(Z_t) = t\sigma_\epsilon^2$: 시간 t 의 함수, 시간의 흐름에 따라 분산이 점차로 증가



5.2.3 이동평균과정(moving average process)

1차-이동평균과정

- $Z_t = \mu + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, t = 1, 2, \ldots$
- $E(Z_t) = \mu$
- $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})(\epsilon_{t+k} - \theta\epsilon_{t+k-1})]$

$$= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2, & k=0 \\ -\theta\sigma_\epsilon^2, & k=1 \\ 0, & \text{다른경우} \end{cases}$$

- 평균과 분산 및 자기공분산은 시간 t 와는 무관, 시차 k 만의 함수
- 정상 확률과정

5.2.4 선형과정(linear process)

– For $\epsilon_t \sim WN(0,\sigma_\epsilon^2)$, $Z_t = \mu + \epsilon_t + \psi_1 \epsilon_{t-1} + \psi_2 \epsilon_{t-2} + \cdots = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}$, $\psi_0 = 1$

– Z_t : 서로 독립인 확률변수들의 선형결합

– $E(Z_t) = \mu$, $Var(Z_t) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2$

– $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_j \epsilon_{t-i} \epsilon_{t+k-j} \right) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}$

$\Rightarrow$ 시점 t 와는 무관, 시차 k 만의 함수

– **선형과정이 정상적이기 위한 조건(stationarity condition)**

- $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty$ $\because$ $|\gamma_k| \le \sqrt{Var(Z_t)\, Var(Z_{t+k})} = \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ (존재성 조건)

– 무한이동평균과정(infinite moving average process)

<u>Wold's Representation Theorem (1938)</u>
임의의 비결정적(nondeterministic) 약한 의미의 정상확률과정은 정상적 선형과정으로 나타낼 수 있다.
즉, <u>정상확률과정 $\Leftrightarrow$ 선형과정</u>

5.2.5 자기회귀과정(autoregressive process)

$$Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \epsilon_t, \quad E(Z_t) = \mu < \infty$$

: 1차-자기회귀과정(first order autoregressive process)

$$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\dot{Z}_t = \phi \dot{Z}_{t-1} + \epsilon_t \text{ where } \mu = \delta/(1-\phi) \text{ and } \dot{Z}_t = Z_t - \mu$$

$$\dot{Z}_t = \phi(\phi \dot{Z}_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t = \phi^2(\phi \dot{Z}_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1}$$

$$\vdots$$

$$= \epsilon_t + \phi \epsilon_{t-1} + \phi^2 \epsilon_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j}.$$

– 정상성의 조건: $\sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} < \infty \Leftrightarrow |\phi| < 1$

– $\gamma_0 = Var(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} E(\epsilon_{t-j}^2) = \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}$

– $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu) = E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t+k})$

$$= E[(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \epsilon_{t-j})(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \epsilon_{t+k-i})]$$

$$= \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \phi^{j+k} = \phi^k \sigma_\epsilon^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j} \left(= \phi^k \gamma_0\right)$$

– $\gamma_0 = \sigma_\epsilon^2 (1 - \phi^2)$, $\gamma_k = \phi^k \gamma_0$, $k = 1, 2, ...$

5.3 자기상관함수(autocovariance function : ACF)

- 자기공분산함수 : 시간에 따른 상관정도의 척도

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$$

- 자기상관함수(autocorrelation function)

$$\rho_k = Corr(Z_t, Z_{t+k}) = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{Var(Z_t)\,Var(Z_{t+k})}}, \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- 자기공분산함수와 자기상관함수의 성질

(i) $\gamma_0 = Var(Z_t)$; $\rho_0 = 1$

(ii) $|\gamma_k| \le \gamma_0$; $|\rho_k| \le 1$, $k = 1, 2, \dots$

(iii) $\gamma_k = \gamma_{-k}$; $\rho_k = \rho_{-k}$, $k = 1, 2, \dots$

● 표본자기공분산함수(sample autocovariance function)

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}),\ k = 0, 1, 2,\ \ldots \text{ where } \bar{Z} = \sum_{t=1}^{n} Z_t / n$$

● 표본자기상관함수(sample autocorrelation function: $SACF$)

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0},\ k = 1, 2,\ \ldots$$

● Bartlett(1946)

− n이 충분히 클 때, $\hat{\rho}_k \approx N(\rho_k, Var(\hat{\rho}_k))$

− $\rho_i \neq 0\ (i = 1, \cdots, q)$ 이고 $\rho_k = 0 (k > q)$인 경우 : $Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}(1 + 2\sum_{i=1}^{q}\rho_i^2)$

− 예: $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \sim IID$ 이면 $\hat{\rho}_k \dot{\sim} N(0, \frac{1}{n})$

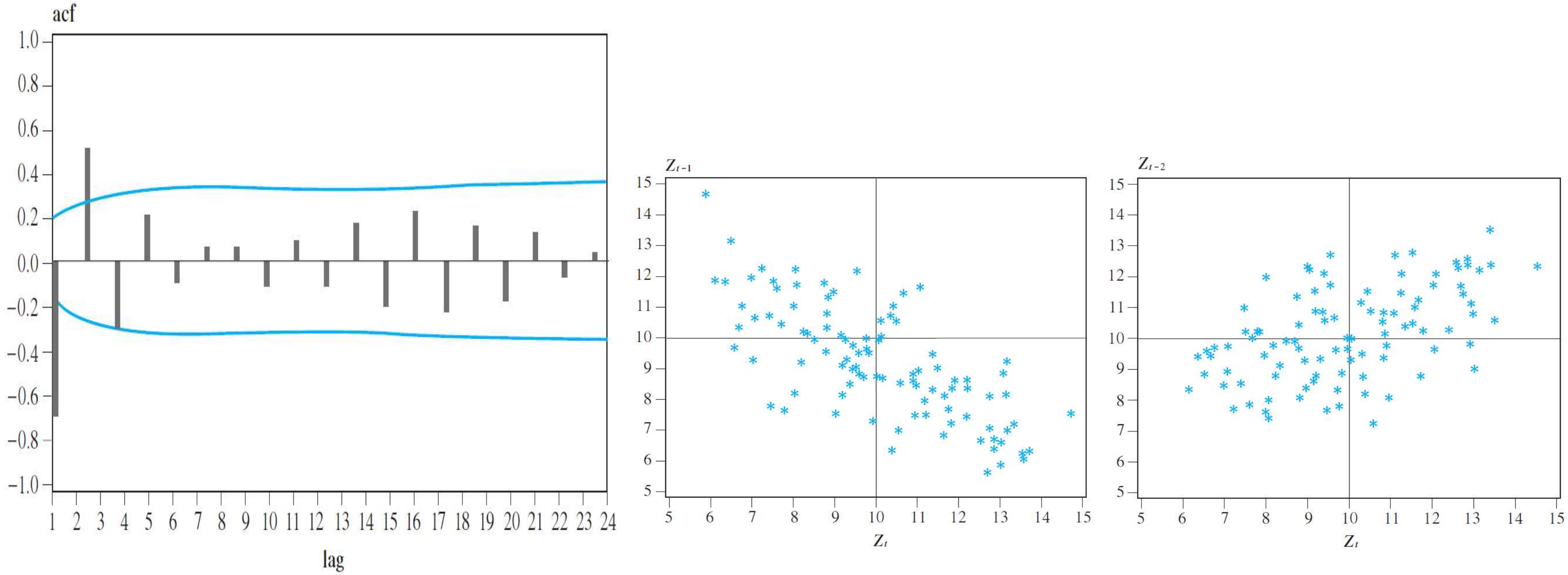
- 백색잡음의 검정 $H_0 : \rho_k = 0$에 이용
- 95% 근사신뢰구간 : $\pm 2/\sqrt{n}$

● 표본상관도표(sample correlogram)

− $SACF$ $\hat{\rho}_k$, $k=0,1,2,\ldots$ 와 표본부분자기상관계수($SPACF$)의 그림

− 주어진 시계열자료가 어느 확률과정의 모형으로부터 생성된 것인지를 판단하는데 이용; 즉, $ARMA(p,q)$ 모형의 적합시 모형의 차수 p 와 q 의 값을 결정하는 데 주로 이용됨

예제 5.1 표본자기상관함수($SACF$) : $Z_t = 19 - 0.9Z_{t-1} + \epsilon_t$, $\epsilon_t \sim WNN(0,1)$



− $\hat{\rho}_1$ 이 −1에 가까운 경우 : Z_t가 평균 $E(Z_t)$를 중심으로 위아래로 움직이는 모양

− $\hat{\rho}_1$이 1에 가까운 경우 : Z_t가 평균 $E(Z_t)$의 한쪽 방향에 한동안 머무르는 모양

5.4 부분자기상관함수(partial autocorrelation function : $PACF$)

- 부분상관계수(partial correlation) :

$$\rho_{XY|Z} = \frac{E\{[X-E(X|Z)][Y-E(Y|Z)]\}}{\sqrt{E[X-E(X|Z)]^2 E[Y-E(Y|Z)]^2}}$$

- $E(X|Z)$: X를 Z에 회귀시킨 최적선형(best linear) 예측값
- $E(Y|Z)$: Y를 Z에 회귀시킨 최적선형 예측값

- 즉, 변수 Z에 관하여 수정(adjust)한 후의 X 와 Y의 부분상관계수 $\rho_{X^*Y^*}$
  - $X^* = X - E(X|Z)$는 X를 Z에 회귀시킨 후의 잔차
  - $Y^* = Y - E(Y|Z)$ 는 Y를 Z에 회귀시킨 후의 잔차

- 부분자기상관함수 $PACF$ ϕ_{kk}

  Z_t 와 Z_{t+k} 에서 $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}$ 의 효과를 제거한 후의 상관계수

PACF 계산 방법 1 (정의 사용)

정상확률과정 Z_t , $E(Z_t) = 0$ 을 고려하자.

- Step 1: Z_t 를 Z_{t+1}, Z_{t+2} , ..., Z_{t+k-1} 에 회귀시킨 최적선형예측

  $$E(Z_t \mid Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots Z_{t+k-1}) = \alpha_1 Z_{t+1} + \alpha_2 Z_{t+2} + \cdots + \alpha_{k-1} Z_{t+k-1}$$

- Step 2: Z_{t+k} 를 Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, ..., Z_{t+1} 에 회귀시킨 최적선형예측

  $$E(Z_{t+k} | Z_{t+k-1}, \ldots, Z_{t+1}) = \beta_1 Z_{t+k-1} + \beta_2 Z_{t+k-2} + \cdots + \beta_{k-1} Z_{t+1}$$

- Step 3: $PACF\ \phi_{kk} = Corr\left\{ Z_t^*, Z_{t+k}^* \right\}$의 계산

  $$Z_t^* = Z_t - (\alpha_1 Z_{t+1} + \alpha_2 Z_{t+2} + \cdots + \alpha_{k-1} Z_{t+k-1})$$

  $$Z_{t+k}^* = Z_{t+k} - (\beta_1 Z_{t+k-1} + \beta_2 Z_{t+k-2} + \cdots + \beta_{k-1} Z_{t+1})$$

  단, α_i와 β_i $(1 \le i \le k-1)$는 $\alpha_i = \beta_i$임을 보일 수 있다;

  $\because$ $E(Z_t - \alpha_1 Z_{t+1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k-1})^2$와

  $E(Z_{t+k} - \beta_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \beta_{k-1} Z_{t+1})^2$을 최소화하는 최소제곱추정량

계산 예:

(i) $\phi_{11} = \rho_1$

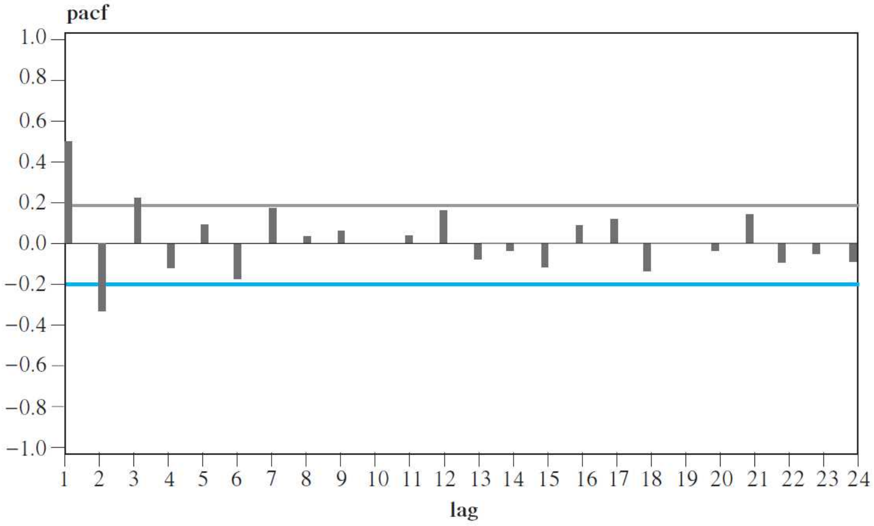
(ii) $k=2$ 인 경우, $\phi_{22} = Corr\,(Z_t - \alpha_1 Z_{t+1}\,,\, Z_{t+2} - \beta_1 Z_{t+1})$

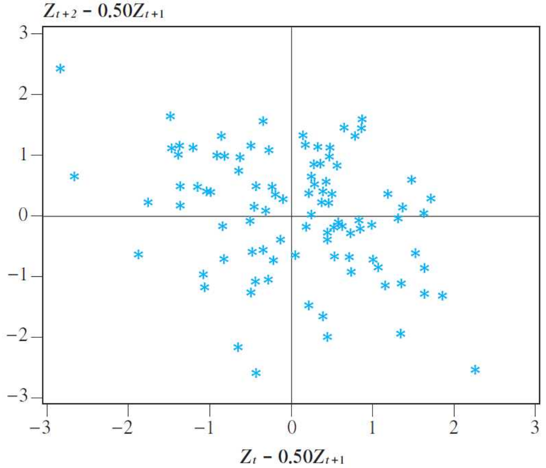
$$= Corr\,(Z_t - \rho_1 Z_{t+1}\,,\, Z_{t+2} - \rho_1 Z_{t+1}) \quad (\because\ \alpha_1 = \beta_1 = \rho_1)$$

$$= \frac{Cov\,(Z_t - \rho_1 Z_{t+1}\,,\, Z_{t+2} - \rho_1 Z_{t+1})}{\sqrt{Var\,(Z_t - \rho_1 Z_{t+1})\, Var\,(Z_{t+2} - \rho_1 Z_{t+1})}}$$

$$= \frac{\gamma_2 - 2\rho_1\gamma_1 + \rho_1^2\gamma_0}{\gamma_0 - 2\rho_1\gamma_1 + \rho_1^2\gamma_0} = \frac{\rho_2 - 2\rho_1^2 + \rho_1^2}{1 - 2\rho_1^2 + \rho_1^2} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

예제 5.2 $Z_t = \epsilon_t + 0.8\epsilon_{t-1}$ 에서 생성된 모의실험자료





PACF 계산 방법 2 (회귀모형 사용)

종속변수 Z_{t+k} 를 $Z_{t+k-1}, Z_{t+k-2}, \ldots, Z_t$ 에 회귀시킨 회귀식

$$Z_{t+k} = \phi_{k1} Z_{t+k-1} + \phi_{k2} Z_{t+k-2} + \cdots + \phi_{kk} Z_t + \epsilon_{t+k}$$

양변에 $Z_{t+k-j}\,(j \geq 1)$ 를 곱한 후 기대값을 구하여 보면,

$$\gamma_j = \phi_{k1}\gamma_{j-1} + \phi_{k2}\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\gamma_{j-k}$$

양변을 γ_0 로 나누면, $\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + \phi_{k2}\rho_{j-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_{j-k}$

따라서, $j = 1, 2, \ldots, k$ 에 대하여,

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_{k1}\rho_0 + \phi_{k2}\rho_1 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-1} \\ \rho_2 = \phi_{k1}\rho_1 + \phi_{k2}\rho_0 + \cdots + \phi_{kk}\rho_{k-2} \\ \qquad \vdots \\ \rho_k = \phi_{k1}\rho_{k-1} + \phi_{k2}\rho_{k-2} + \cdots + \phi_{kk}\rho_0 \end{cases}$$

위의 연립방정식을 Cramer 공식을 이용하여 풀면,

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}, \; \dots \; , \quad \phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

- **표본부분자기상관함수(sample partial autocorrelation function:$SPACF$) $\hat{\phi}_{kk}$**

  − ϕ_{kk} 계산식에서 ρ_j 대신에 $SACF$ $\hat{\rho}_j$ 를 대입하여 구함

  − k 가 커질 경우 행렬식의 계산이 어려움

  − Durbin−Levinson 알고리즘 (Durbin, 1960) 이용

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1 ,$$

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k} \hat{\phi}_{kj}\hat{\rho}_j},$$

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1}\hat{\phi}_{k,k+1-j}\ ,\ \ j = 1, 2, \cdots, k$$

6 장 정상 자기회귀이동평균과정

6.1 자기회귀과정(autoregressive process)

- 확률과정 $\{Z_t\}$: 자기회귀과정(autoregressive process, AR process)

  $Z_t = f\,(Z_{t-1},\, Z_{t-2},\, \ldots\,) + \varepsilon_t$

  단, $\{\varepsilon_t\}$는 평균 0, 분산 σ_ε^2을 가지는 백색잡음과정

- $AR(p)$ 과정

$$\begin{aligned} Z_t - \mu &= \phi_1 (Z_{t-1} - \mu) + \phi_2 (Z_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p (Z_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \\ &= \sum_{j=1}^{p} \phi_j (Z_{t-j} - \mu) + \varepsilon_t \end{aligned}$$

$$\dot{Z}_t = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \dot{Z}_{t-j} + \varepsilon_t \quad \text{where} \quad \dot{Z}_t = Z_t - \mu$$

또는, $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$ where $\delta = (1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p)\,\mu$

- 후진작용소(backshift operator) B

  $BZ_t = Z_{t-1}$, $B^2 Z_t = Z_{t-2}$, $\cdots$, $B^j Z_t = Z_{t-j}$, $\cdots$

  $\phi(B)(Z_t - \mu) = \phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$ where $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$: AR작용소(AR operator)

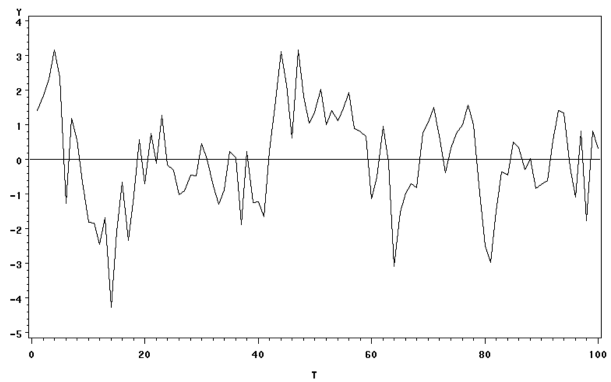
- $AR(p)$ 과정의 정상성 조건 :

  $\phi(X) = 0$ 의 근들이 단위원 밖에 있어야 함

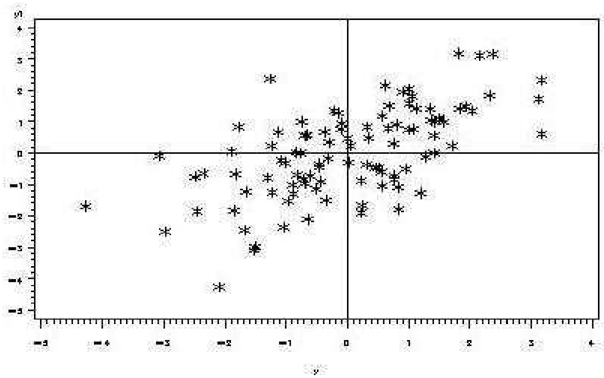
  즉, $\phi(X) = 0$ 의 근의 절대값이 1보다 커야 함

6.1.1 $AR(1)$ 과정: 마코프(Markov)과정

$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$ (또는 $\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t$ where $\phi(B) = 1 - \phi B$)



<그림 6.1> $Z_t = 0.5 Z_{t-1} + \varepsilon_t$



<그림 6.3> (Z_{t-1}, Z_t)의 산점도

- $AR(1)$ **과정의 정상성 조건**(stationary condition)

  $|\phi| < 1 \Leftrightarrow \phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다, 즉, $|B| = |1/\phi| > 1$과 동치

$$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t) = \delta + \phi\mu$$

$$\sigma_z^2 = Var(Z_t) = \phi^2 \, Var(Z_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) = \phi^2 \sigma_z^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

  따라서, $\mu = \delta / (1-\phi)$, $\sigma_z^2 = \sigma_\epsilon^2 / (1-\phi^2) = \gamma_0$

- $AR(1)$ 과정의 ACF

  $E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}) = \phi E(\dot{Z}_{t-1} \dot{Z}_{t-k}) + E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k})$,

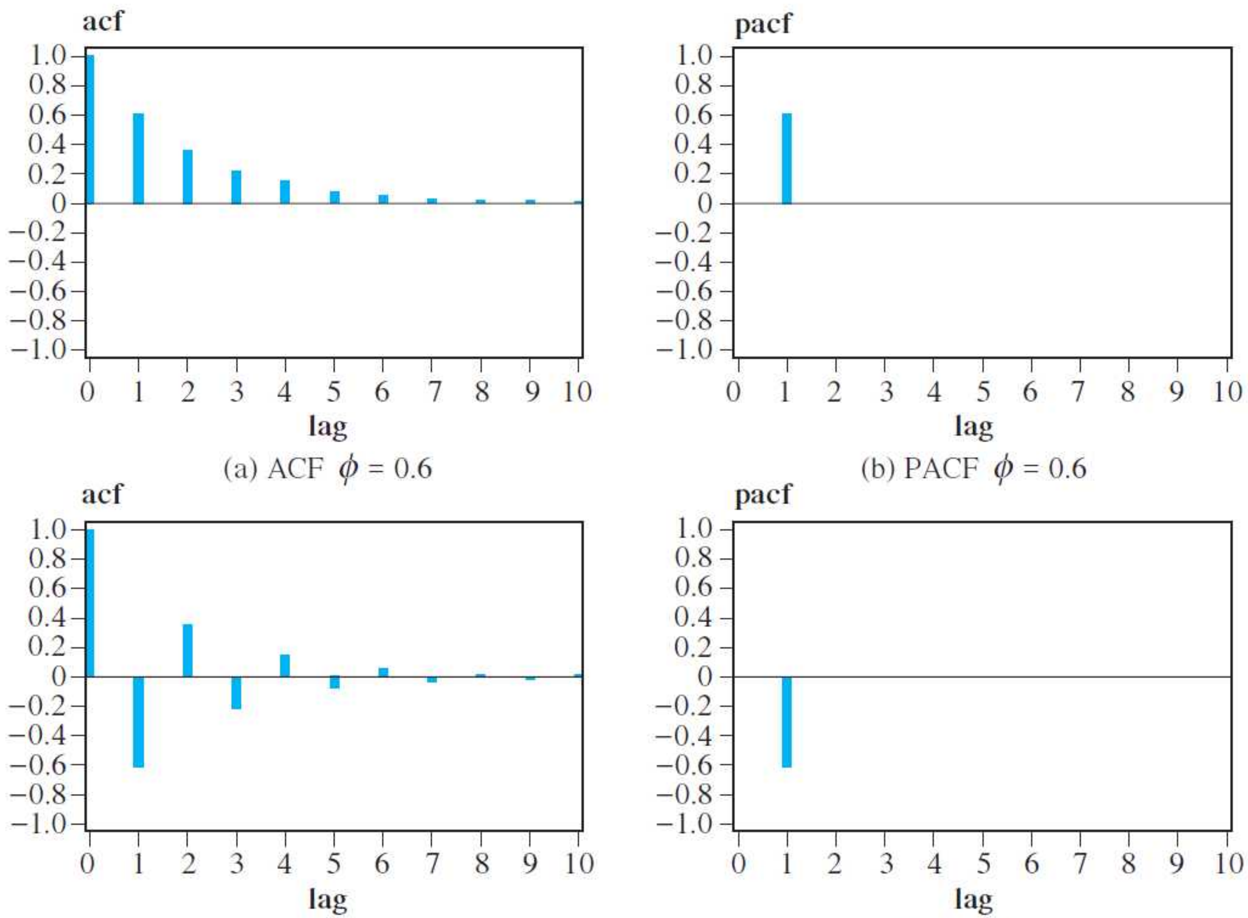
  $k \geq 1$ 일 때 $E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k}) = 0$: $\gamma_k = \phi\gamma_{k-1} = \phi^2\gamma_{k-2} = \cdots = \phi^k \gamma_0 = \phi^k \sigma_\epsilon^2 / (1-\phi^2)$, $k \geq 1$.

  k −시차 ACF : $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$, $k \geq 1$

- $AR(1)$ 과정의 $PACF$

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \phi(=\rho_1), & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

AR(1)과정의 ACF와 PACF의 이론적인 형태



(a) ACF $\phi = 0.6$ (b) PACF $\phi = 0.6$

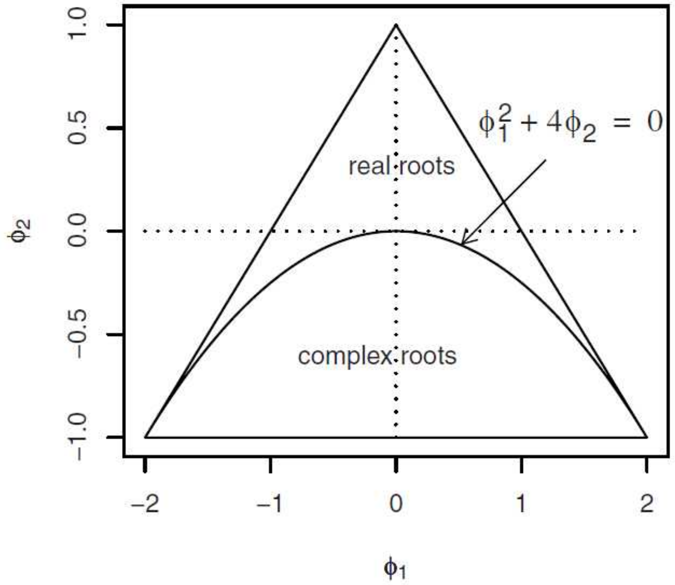
(c) ACF $\phi = -0.6$ (d) PACF $\phi = -0.6$

- $\phi > 0$인 경우에는 지수적으로 감소
- $\phi < 0$인 경우에는 양과 음의 값을 번갈아 가지며 지수적으로 감소

6.1.2 $AR(2)$ 과정

$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\phi(B)\dot{Z}_t = \varepsilon_t \quad \text{where} \quad \phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2$$



- **$AR(2)$ 과정의 정상성 조건**
  - $\phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다.
  - $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $-1 < \phi_2 < 1$

$$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) = \delta + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu \;\Rightarrow\; \mu = \delta$$

$$E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}) = \phi_1 E(\dot{Z}_{t-1}\dot{Z}_{t-k}) + \phi_2 E(\dot{Z}_{t-2}\dot{Z}_{t-k}) + E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k})$$

$$E(\varepsilon_t \dot{Z}_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma_\varepsilon^2, & k = 0 \\ \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, & k \geq 1 \end{cases}$$

따라서, $AR(2)$ **과정의** ACF : $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$, $k \geq 1$

- **Yule-Walker 방정식과 Y-W 추정량**

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2}, \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \quad , \quad \gamma_0 = \frac{1-\phi_2}{1+\phi_2}\frac{\sigma_\epsilon^2}{(1-\phi_2)^2-\phi_1^2} \quad \text{(AR(2)의 분산)}$$

$$\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 = \frac{\phi_1^2+\phi_2-\phi_2^2}{1-\phi_2}$$

- $AR(2)$ **과정의** ACF (6장 부록 차분 방정식 해법 참고)

  − $\phi(B)=0$ 의 두 근이 모두 실수일 때: 지수형태로 감소

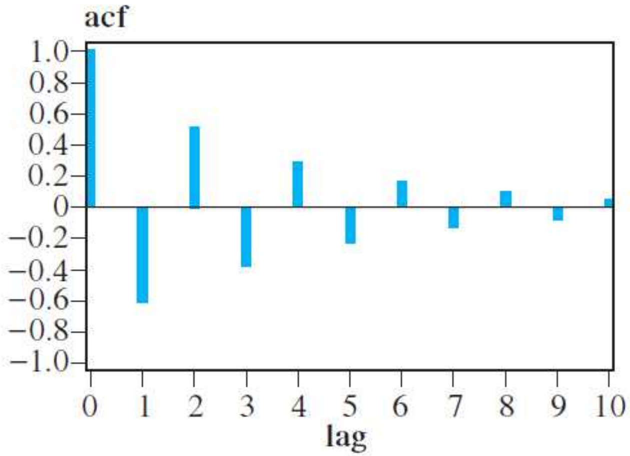
  − 두 근이 모두 복소수일 때: 점차 소멸하는 싸인(sine)함수의 형태

- $AR(2)$ **과정의** $PACF$

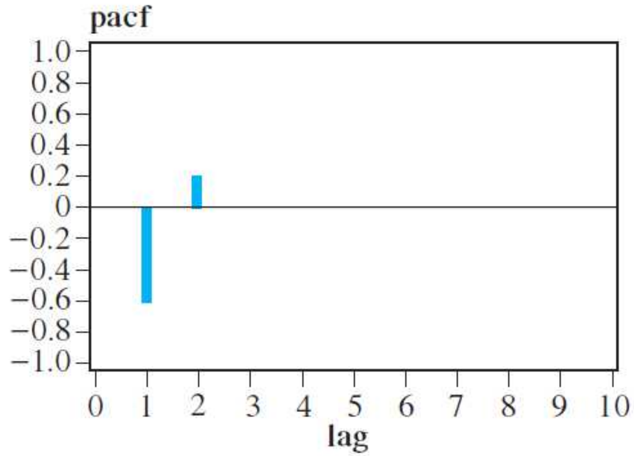
$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \quad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \phi_2$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1+\phi_2\rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1\rho_1+\phi_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1\rho_2+\phi_2\rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0\ , \quad \phi_{kk}=0,\ k \geq 4$$

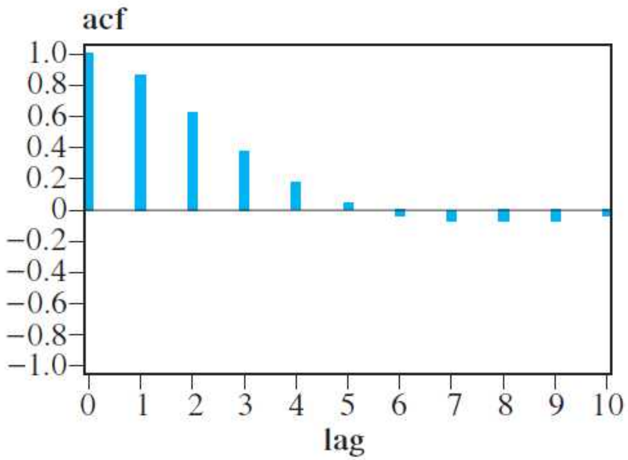
$\Rightarrow$ 시차 2 이후부터 0이 되는 절단형태



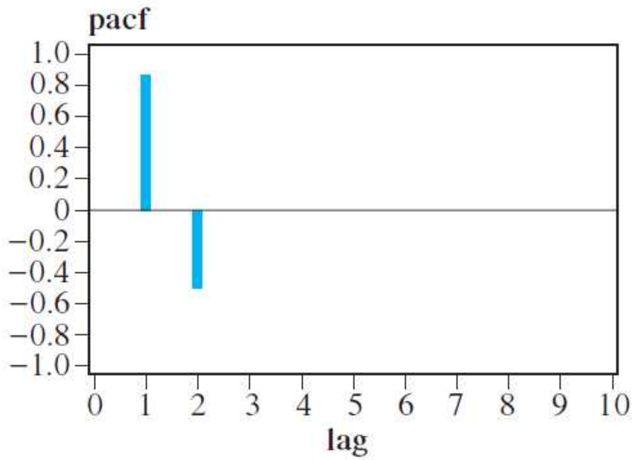
(c) ACF $\phi_1 = -0.5$ $\phi_2 = 0.2$



(d) PACF $\phi_1 = -0.5$ $\phi_2 = 0.2$



(g) ACF $\phi_1 = 1.3$ $\phi_2 = -0.5$



(h) PACF $\phi_1 = 1.3$ $\phi_2 = -0.5$

– ACF : 지수적으로 감소하거나 싸인함수의 형태로 감소

– $PACF$: 시차 2까지만 $\phi_{11} = \rho_1$과 $\phi_{22} = \phi_2$의 값을 갖고 그 이후로는 0

6.1.3 $AR(p)$ 과정

$$\phi(B)(Z_t-\mu)=\phi(B)\dot{Z}_t=\varepsilon_t$$

- $AR(p)$ **과정의 정상성 조건**

  $\phi(B)=1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p=0$의 근의 절대값이 1 보다 크다.

  G_i^{-1} $(i=1,2,\ ...\ ,p\ )$들이 $\phi(B)=0$ 의 서로 다른 해라고 하면

  $\phi(B)=(1-G_1B)(1-G_2B)\ \cdots\ (1-G_pB)=0$

  $\Rightarrow$ $\phi(B)=0$의 근인 G_i^{-1}의 절대값의 크기가 1보다 크면, 즉, $|G_i|<1$ 일 때 $AR(p)$ 과정이 정상적

- $AR(p)$ 의 ACF & PACF

$$E(\dot{Z}_t\dot{Z}_{t-k})=\phi_1E(\dot{Z}_{t-1}\dot{Z}_{t-k})+\ \cdots\ +\phi_pE(\dot{Z}_{t-p}\dot{Z}_{t-k})+E(\varepsilon_t\dot{Z}_{t-k})$$

$$\begin{cases}\gamma_0=\phi_1\gamma_1+\phi_2\gamma_2+\ \cdots\ +\phi_p\gamma_p+\sigma_\varepsilon^2, & k=0\\ \gamma_k=\phi_1\gamma_{k-1}+\phi_2\gamma_{k-2}+\ \cdots\ +\phi_p\gamma_{k-p}, & k\ge 1\end{cases}$$

$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, \ k \geq 1$ (Y−W eq.)

$$\boldsymbol{\rho}_p = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = P\boldsymbol{\phi} \qquad \therefore \ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\rho}_p$$

- $PACF \ \phi_{kk}$: 5장에서 설명한 알고리즘 (5.10)에 의해 구할 수 있음

  − $\phi_{kk} = 0, k > p$ ($\because \rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \cdots + \phi_p\rho_{k-p}, k \geq 1$)

  − 즉, $PACF$는 AR 모형의 차수판정에 도움이 됨.

- **$AR(p)$ 과정의 이론적인 ACF와 $PACF$의 일반적인 형태**

  − ACF : 지수함수의 형태로 또는 싸인함수와 같은 곡선의 형태를 가지며 점차 줄어듬

  − $PACF$: $AR(p)$모형의 차수인 시차 p까지는 0이 아니며 시차 p 이후에는 0이 됨

6.2 이동평균과정(moving average process)

선형과정에서 유한개의 ψ_j 만이 0이 아닌 확률과정

$\psi_1 = -\theta_1, \psi_2 = -\theta_2$, ... , $\psi_q = -\theta_q$ 이고 $k > q$ 인 경우에는 $\psi_k = 0$

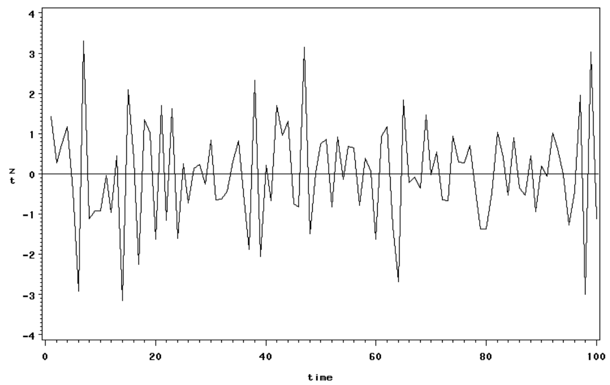
- $MA(q)$ 과정
  - $\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B)\varepsilon_t$
  - $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$: MA 작용소
  - $1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2 < \infty \Rightarrow$ 유한차수의 MA 과정은 항상 정상적
  - 주의: R 프로그램에서는 다른 모형식을 사용, $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$

6.2.1 $MA(1)$ 과정

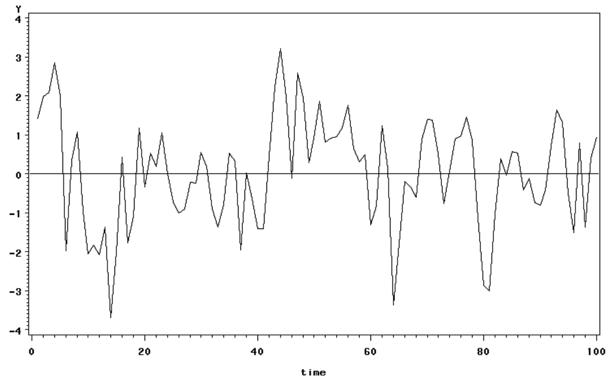
$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} = (1 - \theta B)\varepsilon_t$$

$$E(Z_t) = E(\mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) = \mu$$

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = E(\dot{Z}_t \dot{Z}_{t-k}) = E[(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-k} - \theta \varepsilon_{t-k-1})] = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \quad (= \sigma_z^2), & k = 0 \\ -\theta \sigma_\varepsilon^2, & k = 1 \\ 0, & k \ge 2. \end{cases}$$



$Z_t = \varepsilon_t - 0.6\varepsilon_{t-1} \quad (\rho_1 = -0.44)$



$Z_t = \varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1} \quad (\rho_1 = 0.44)$

<그림 6.6 & 6.7 > MA(1)과정의 시계열그림

- $MA(1)$ **과정의** ACF : 시차 1 이후부터는 0

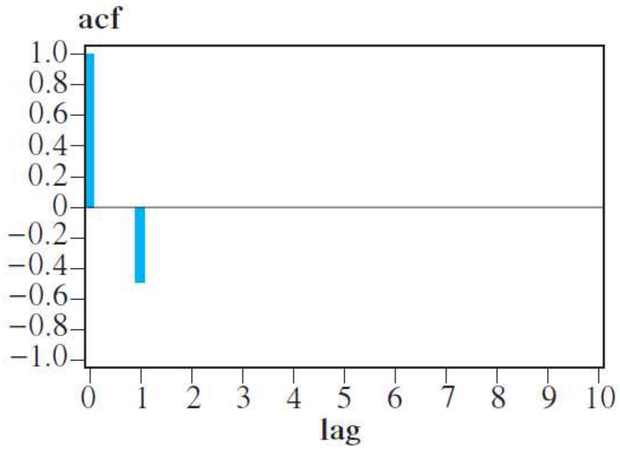
– $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$

– $AR(1)$과정의 $PACF$처럼 시차 1이후에는 0

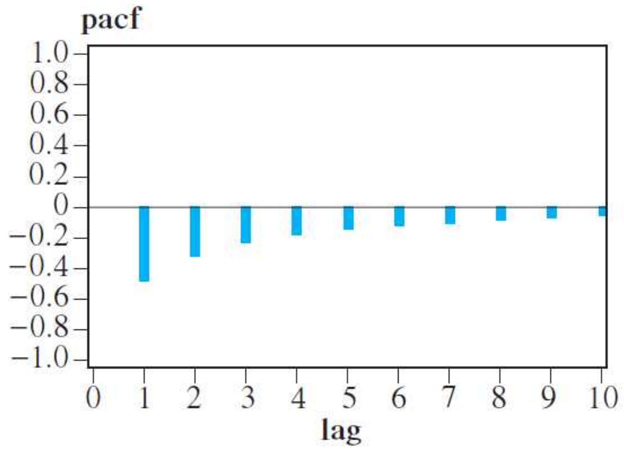
– $MA(1)$ **과정의** $PACF$: 지수적으로 감소하는 형태

– $\phi_{kk} = \dfrac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}$, $k \geq 1$ (by Cramer 공식)

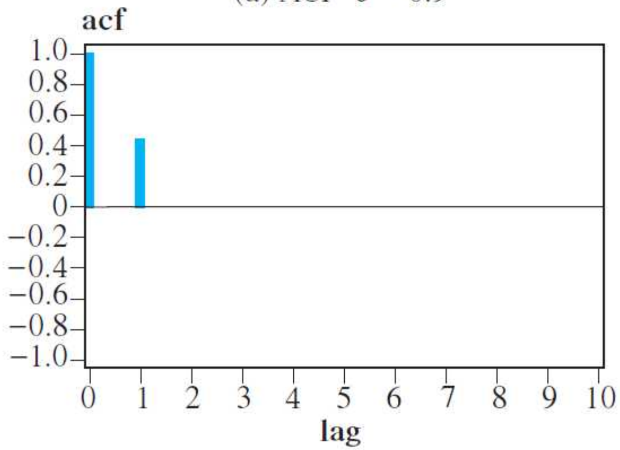
MA (1)과정의 ACF와 PACF의 이론적인 형태

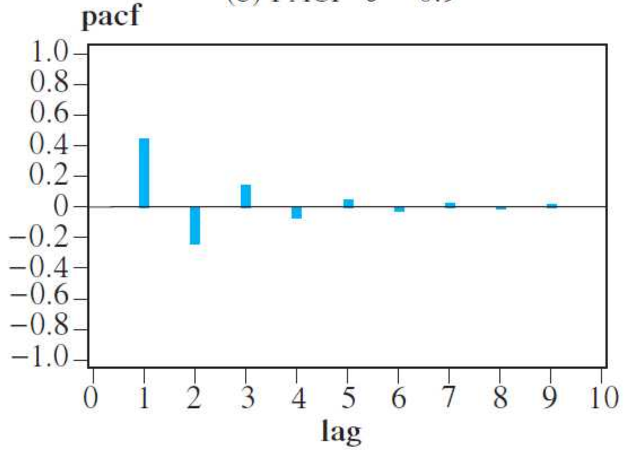


(a) ACF $\theta = 0.9$



(b) PACF $\theta = 0.9$





● 가역성(invertibility)

MA(1) 모형에서, θ 대신에 $1/\theta$ 을 사용하면, $\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \frac{1}{\theta}\varepsilon_{t-1}$

$$\gamma_k = \begin{cases} \left(1+\frac{1}{\theta^2}\right)\sigma_\varepsilon^2, & k=0 \\ -\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\theta}, & k=1 \\ 0, & k>1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$와 동일한 ACF를 가짐

- 가역성의 조건을 부과하는 이유
  - 하나의 ACF에 하나의 모형이 대응되도록 하기 위해서
  - 관측 불가능한 확률오차 ϵ_t 를 관측값들을 이용하여 표현 가능

- 가역성 조건 (invertibility condition)
  - $MA(1)$ 모형: 특성함수 $\theta(B)=1-\theta B=0$의 근의 절대값이 1보다 클 조건, 즉, $|\theta|<1$

    $\Rightarrow$ 가역성 조건을 만족시키는 MA(1) 모형은 하나만 존재

  - $MA(q)$모형: 특성함수 $\theta(B)=0$의 근의 절대값이 1보다 크다

    가역성 조건이 없는 경우, 2^q개의 모형이 동일한 ACF 형태를 가질 수 있음.

6.2.2 $MA(2)$ 과정

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} = \theta(B)\varepsilon_t\,, \quad \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

- **$MA(2)$ 과정의 가역성조건 :**
  - $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$의 근의 절대값이 1 보다 클 조건, 즉,
  - $\theta_1 + \theta_2 < 1$, $\theta_2 - \theta_1 < 1$, $-1 < \theta_2 < 1$

- ACF

$$\gamma_k = E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2})(\varepsilon_{t-k} - \theta_1 \varepsilon_{t-k-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-k-2})] = \begin{cases} (1+\theta_1^2+\theta_2^2)\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_z^2\,, & k=0 \\ -\theta_1(1-\theta_2)\sigma_\varepsilon^2\,, & k=1 \\ -\theta_2\sigma_\varepsilon^2\,, & k=2 \\ 0\,, & k \ge 3\,. \end{cases}$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1 + \theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\,, & k=1 \\ \dfrac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}\,, & k=2 \\ 0\,, & k \ge 3. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **$MA(2)$ 과정의** $PACF$: 지수적으로 감소하거나 혹은 소멸하는 싸인함수의 형태

- AR 과정과 MA과정의 쌍대성(duality)
  - $MA(1)$ 과정의 $PACF$는 $AR(1)$ 과정의 ACF의 형태와 같고
  - $MA(2)$ 과정의 $PACF$는 $AR(2)$ 과정의 ACF의 형태와 같다
  - $MA(1)$ 과정의 ACF는 $AR(1)$ 과정의 $PACF$의 형태와 같고
  - $MA(2)$ 과정의 ACF는 $AR(2)$ 과정의 $PACF$와 같다

6.2.3 $MA(q)$ 과정

$$\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} = \theta(B)\varepsilon_t$$

- **가역성의 조건** : $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q = 0$의 q 개 근들의 절대값이 모두 1보다 크다.
- ACF

For $\theta_0 = -1$, $\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma_\varepsilon^2, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \ldots, q \\ 0, & k \geq q+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $MA(q)$ **과정의** $PACF$: $AR(p)$ 과정의 ACF처럼 지수적 감소 또는 소멸하는 삼각함수의 혼합형태

6.4 자기회귀-이동평균과정

모수의 절약(parsimony), Box(1956)
적합한 모형을 선택하는 기준의 하나로 모형에 포함되는 모수의 개수가 가장 적은 모형을 선택

자기회귀-이동평균(autoregressive-moving average : ARMA)과정
자기회귀 부분과 이동평균 부분을 동시에 포함하는 확률과정

- $ARMA(p,q)$ 모형의 일반적인 형태

  $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$

  or

  $\phi(B)\dot{Z}_t = \theta(B)\varepsilon_t$, $\mu = \delta/(1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p)$

  where $\phi(B) = 1-\phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$ and $\theta(B) = 1-\theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$

  - **주의: R 프로그램에서는 다른 모형식을 사용**, $\theta(B) = 1+\theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q$

- $ARMA(p,q)$ **과정의 정상성 및 가역성 조건**
  - 정상성: 특성함수 $\phi(B)=0$의 근들이 모두 1보다 크다 ($AR(p)$ 과정이 정상적일 조건과 동일)
  - 가역성: 특성함수 $\theta(B)=0$ 의 근들이 모두 1보다 크다 ($MA(q)$ 과정의 가역성의 조건과 동일)

예: $ARMA(1,1)$

$Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ or $(1-\phi B)\dot{Z}_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$

- 정상성 조건 : $|\phi| < 1$, 가역성 조건 : $|\theta| < 1$
- ACF:

$\mu = E(Z_t) = E(\delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = \delta + \phi\mu$, $\mu = \delta/(1-\phi)$

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{(1+\theta^2-2\phi\theta)\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, & k=0 \\ \dfrac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, & k=1 \\ \phi^{k-1}\gamma_1, & k \geq 2 \end{cases}$$

$$\rho_1 = \frac{(\phi-\theta)(1-\phi\theta)}{1+\theta^2-2\phi\theta} \;\; ; \;\; \rho_k = \phi^{k-1}\rho_1, \quad k \geq 2.$$

$\Rightarrow$ 지수적으로 감소하나 감소하는 형태의 시작이 ρ_1부터 시작.

- $PACF$: $MA(1)$ 과정의 $PACF$ 처럼 지수적으로 감소하는 형태

$ARMA(p,q)$ 과정의 ACF와 $PACF$의 이론적인 특성

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p, q)
ACF	Tails off	Cuts off after lag q	Tails off
PACF	Cuts off after lag p	Tails off	Tails off

제 7 장 비정상 자기회귀−이동평균과정

- 비정상(nonstationary)시계열의 대표적인 특성

  ① 시계열의 수준이 시간대에 따라 다르다.
  ② 시계열이 추세를 가진다.
  ③ 시계열이 계절성을 보인다.
  ④ 시계열의 분산이 시간대에 따라 변한다.

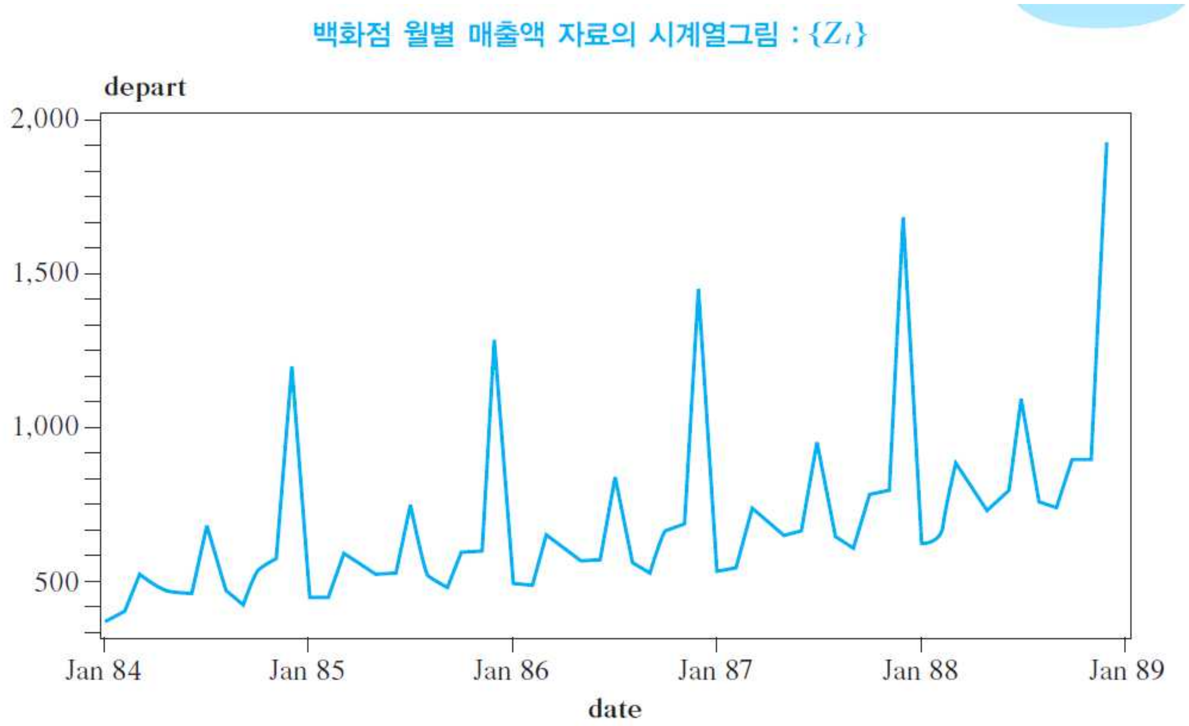
- 결정적추세(deterministic trend)
  − 시간(t)에 대한 함수 $f(t)$에 의하여 생성되는 추세 (영원히 지속)
  − 예: $Y_t = \mu_t + \epsilon_t$ where $\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$, $\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$

- 확률적추세(stochastic trend)
  −인접자료간의 확률적구조로 인하여 생기는 추세
  − 예: $Y_t = \mu_t + \epsilon_t$ where $\mu_t = Y_{t-1}$

- 비정상 시계열의 정상화
  − 시계열의 정상성 여부의 판단: 시계열그림과 $SACF$
  − 시계열의 정상화 방법: 로그변환, 추세분석이나 차분을 통한 추세 제거

예제 7.1 비정상성을 가지는 시계열

- 1984년 1월부터 1988년 12월까지 월별매출액(단위: 십만원)
- 평균수준이 완만하게 증가하는 추세, 유사한 형태로 반복되는 계절성
- 분산(시계열의 변동폭)이 증가

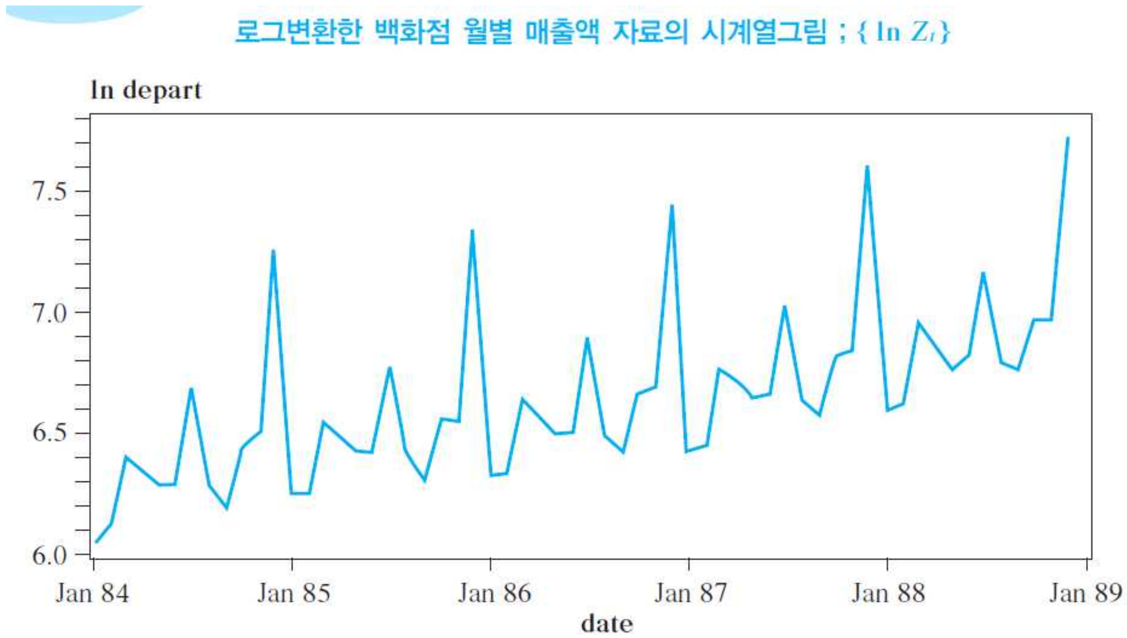


7.1 비정상시계열의 정상화

7.1.1 분산이 일정하지 않은 경우

- 분산안정화변환(variance stabilizing transformation)
  - 분산상수화를 위한 변환
  - 로그변환이나 제곱근변환

예제 7.2 분산안정화 변환의 예제



7.1.2 평균이 일정하지 않은 경우

(1) 결정적추세와 분해법

- 추세분석에서 다루고 있는 선형계절추세모형
- 분해법에서 가정하고 있는 모형

$$Y_t = T_t + S_t + I_t$$

where I_t : 서로 독립이고 동일한 분포 $(0, \sigma_I^2)$를 따르는 백색잡음

T_t : 추세성분, $T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \cdots + \beta_k t^k$

S_t : 계절성분, $S_t = \sum_{i=1}^{m} \{ \beta_{1i} \sin(f_i t) + \beta_{2i} \cos(f_i t) \}$

− 최소제곱법 또는 평활법 등에 의해 추세성분과 계절성분을 추정

− 변환된 자료 $\{Y_t\}$에 대하여,

평균수준 : 시간에 의존, $E(Y_t) = E(T_t + S_t + I_t) = T_t + S_t$

분산 : 시간과 무관

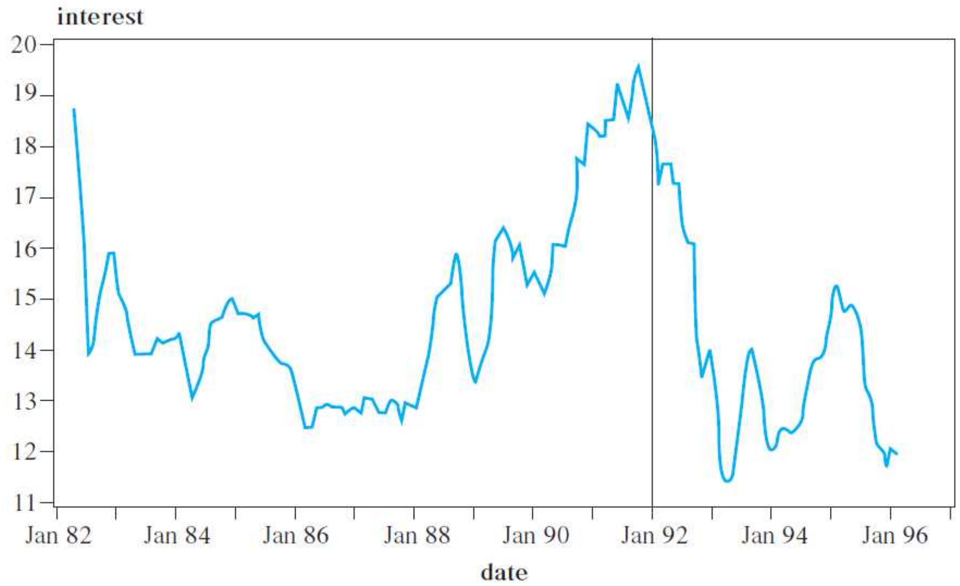
$Var(Y_t) = Var(T_t + S_t + I_t) = Var(I_t) = \sigma_I^2$; $Corr(Y_t, Y_{t+k}) = Corr(I_t, I_{t+k}) = 0$

$\Rightarrow$ 평균수준을 상수화시켜 정상시계열로 변환: $\hat{I}_t = Y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$

- **자기상관오차를 갖는 회귀모형**(regression model with autocorrelated error):
  불규칙성분 I_t가 정상 ARMA과정을 따르는 모형

(2) 확률적 추세와 차분법

이자율 자료의 시계열그림



⇒ 확률적추세를 갖는 비정상시계열: **차분**에 의해 정상화 가능

- 차분연산자 (differencing operator) ∇

$$\nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\nabla^2 Y_t = (1-B)^2 Y_t = (1-2B+B^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

예1: 선형추세모형 $Y_t = T_t + I_t = (\beta_0 + \beta_1 t\ ) + I_t$

- $E[Y_t] = \beta_0 + \beta_1 t$: 결정적추세를 갖는 비정상시계열
- 차분 적용: $\nabla Y_t = (1-B)Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \beta_1 + (I_t - I_{t-1}) \Rightarrow$ 정상시계열

예2: 2차추세모형 $Y_t = T_t + I_t = (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2\ ) + I_t$

- $\nabla^2 Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2} = 2\beta_2 + (I_t - 2I_{t-1} + I_{t-2})$
- 2차 차분된 시계열 $\left\{\nabla^2 Y_t\right\}$: 평균수준이 $E(\nabla^2 Y_t) = 2\beta_2$인 정상시계열

● **추세를 가지는 비정상시계열의 경우**

- 추세가 결정적추세인지 확률적추세인지를 결정: 시계열그림 또는 이론적 합리성
- 확률적추세 : 차분에 의해 정상화 (Fuller & Dickey(1979), **단위근검정(unit root test)**)
- 결정적추세 : 추세항을 포함하는 모형을 적합

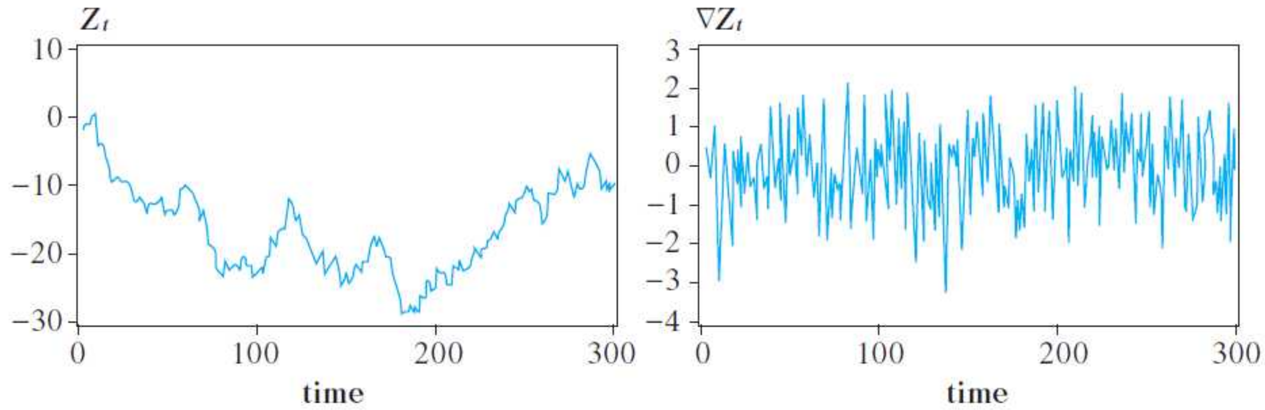
● **확률보행과정**

- $Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t$ 또는 $(1-B)Z_t = \epsilon_t$

  $\Rightarrow E[Z_t \mid Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots] = Z_{t-1}$: 전 시점의 수준에 의존
- $(1-B)^2 Z_t = \epsilon_t$ 또는 $Z_t = 2Z_{t-1} - Z_{t-2} + \epsilon_t$

  $\Rightarrow E[Z_t \mid Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots] = 2Z_{t-1} - Z_{t-2}$: 이전 두 시점의 수준에 의존
- 1차 차분하거나 2차 차분한 $\left\{\nabla Z_t\right\}$와 $\left\{\nabla^2 Z_t\right\}$는 평균수준이 0 인 정상과정

확률보행과정을 따르는 자료 $\{Z_t\}$와 1차 차분된 자료 $\{\nabla Z_t\}$의 시계열그림



로그변환한 백화점 월별 매출액 자료를 1차 차분한 자료의 시계열그림 ; $\{\nabla \ln Z_t\}$

- **계절성이 존재하는 비정상성**
  - <그림 7.5>와 같은 계절성 비정상성
  - 확률적 계절추세를 갖는 경우에는 계절주기 s를 이용한 계절차분 $(1-B^s)$에 의해 정상화
  - 결정적 계절추세 S_t에 의한 계절성도 계절차분을 적용하면 제거될 수 있음

- 차분 적용의 예

  (i) 결정적 계절 추세: $S_t = S_{t-s}$

  $Y_t = S_t + I_t$

  - 계절차분 $\nabla_s = 1 - B^s$을 적용
  - $\nabla_s Y_t = (1-B^s)(S_t + I_t) = (S_t + I_t) - (S_{t-s} + I_{t-s}) = I_t - I_{t-s}$
  - 계절차분된 시계열 $\{\nabla_s Y_t\}$: 평균수준이 $E(\nabla_s Y_t) = 0$인 정상시계열
  - 계절형단위근검정(seasonal unit root test): 계절형 확률적추세 존재 유무를 검정

  (ii) 직선추세성분과 계절주기가 s인 계절성분을 동시에 가지는 비정상과정

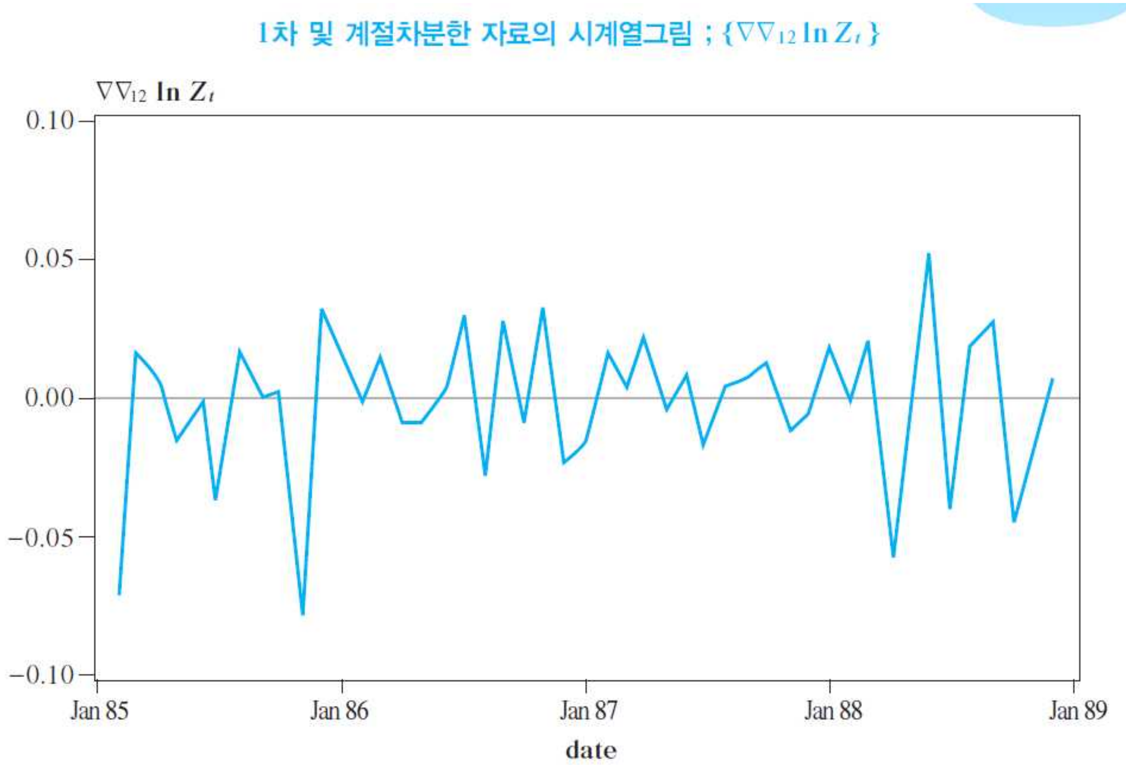
  $Y_t = (\beta_0 + \beta_1 t) + S_t + I_t$

  - 1차 차분과 주기가 s인 계절 차분을 동시에 적용
  - $\nabla\nabla_s Y_t = (1-B^s)(\beta_1 + S_t - S_{t-1} + I_t - I_{t-1}) = I_t - I_{t-s} - I_{t-1} + I_{t-s-1}$
  - $\{\nabla\nabla_s Y_t\}$: 평균수준이 0인 정상시계열

예제 7.4 비정상성을 제거하기 위한 계절차분의 예제

$\{\nabla\nabla_{12}\ln Z_t\}$에 $ARMA(p,q)$ 모형, 즉

$\phi(B)W_t = \theta(B)\epsilon_t$, 단, $W_t = \nabla\nabla_{12}\ln Z_t$



7.2 비정상 자기회귀-이동평균과정

- $\{Z_t\}$: **비정상 자기회귀-이동평균과정,** $ARIMA(p,d,q)$**과정**

  $\phi(B)(1-B)^d Z_t = \delta + \theta(B)\epsilon_t$ where $d = 1,2,\cdots$

  - 누적(integrated) I의 의미 : $I=1$인 경우

    $Z_t = (1-B)^{-1} W_t = \sum_{j=-\infty}^{t} W_j = Z_0 + \sum_{j=1}^{t} W_j$
  - **차분 차수 d의 결정** : 시계열그림과 $SACF$ 또는 단위근 검정
  - 결정적 추세라는 확신이 없는 경우에는 차분에 의한 정상화를 사용

1) 여러 형태

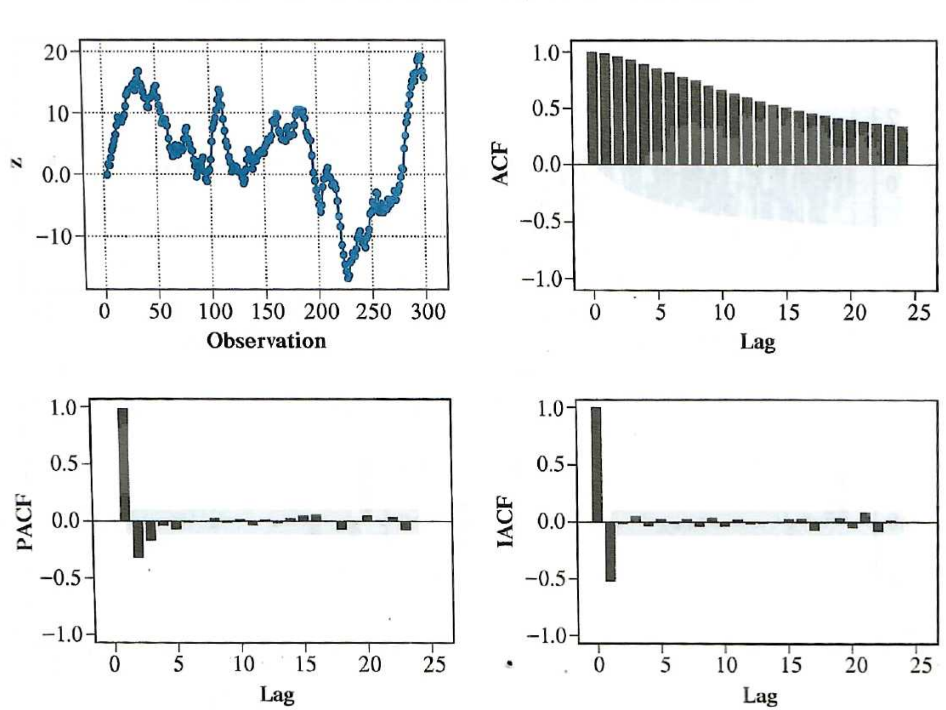
- 확률보행과정의 경우(확률적추세): $\rho_1 = Corr(Z_t, Z_{t+1}) = \sqrt{\dfrac{t}{t+1}} > 0$
- 절편이 없는 확률보행과정 : $ARIMA(0,1,0)$로 표기
- $ARIMA(p,d,q)$모형에서 $p=0$인 경우, $IMA(d,q)$모형
  - 예: IMA(1,1) $\Rightarrow$ $(1-B)Z_t = (1-\theta B)\epsilon_t$ or $Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t - \theta\,\epsilon_{t-1}$
  - IMA(1,1)의 경우: AR 특성방정식의 근이 1

- $ARIMA(p,d,q)$모형에서 $q=0$인 경우, $ARI(p,d)$모형
  - 예: ARI(1,1) $\Rightarrow$ $(1-\phi B)(1-B)Z_t = \epsilon_t$ or $Z_t = (\phi+1)Z_{t-1} - \phi Z_{t-2} + \epsilon_t$
  - ARI(1,1)의 경우: AR 특성방정식의 한 근이 1

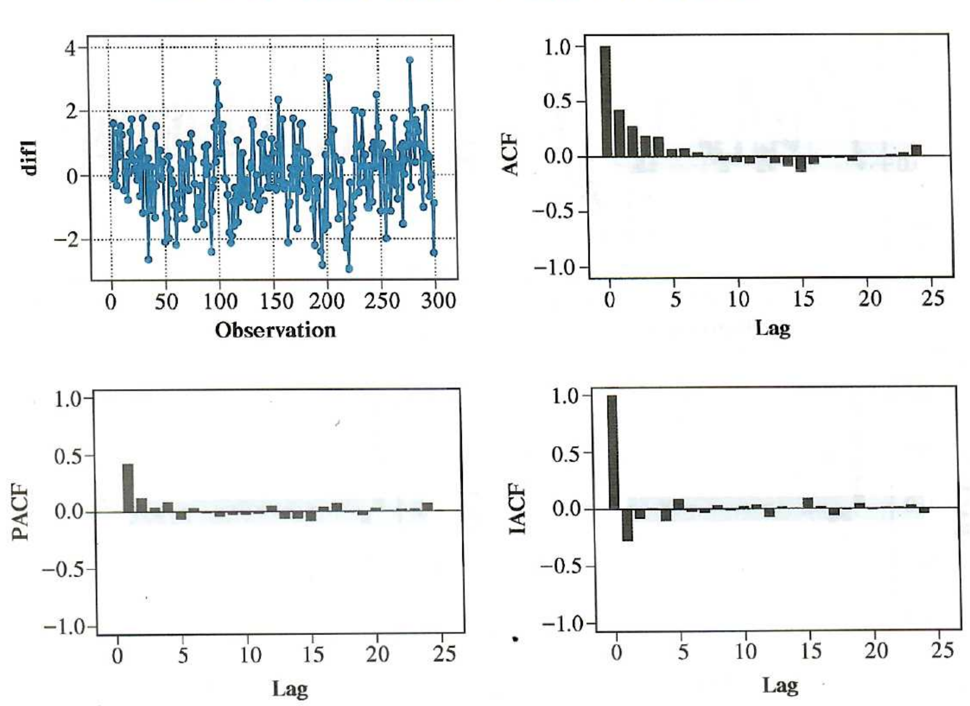
2) $SACF$

- 천천히 감소하는 $SACF$는 비정상성 가능성을 의미
- AR 특성방정식 $\phi(B)=0$의 인수분해: $\phi(B)=1-\phi_1 B-\cdots-\phi_p B^p=(1-G_1 B)\cdots(1-G_p B)$
- ρ_k의 일반형: $\rho_k = A_1 G_1^k + \cdots + A_p G_p^k \approx A_1 G_1^k \quad \text{where } |G_1| = \max\{|G_1|,\cdots,|G_p|\}$
- G_1가 1에 가까운 경우 ρ_k는 줄어드는 속도는 매우 느리게 됨.

ARIMA(1,1,1)과정의 시계열그림, SACF, SPACF, SIACF



ARIMA(1,1,1)과정의 시계열을 1차 차분한 후의 시계열그림과 SACF



7.3 과대차분

- 이미 정상화가 된 경우에 차분을 시도하는 경우
- 지나친 차분은 (S)ACF를 복잡하게 만들거나 분산을 크게 만듬

예: $MA(1)$, $Z_t = (1-\theta B)\epsilon_t$

− 차분 전

$$Var(Z_t) = (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2$$

$$\rho_k = \begin{cases} -\theta/(1+\theta^2), & k=1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

− 1차 차분 후

$$W_t = (1-B)(1-\theta B)\epsilon_t = 1-(1+\theta)B+\theta B^2\epsilon_t$$

$$Var(W_t) = 2(1+\theta+\theta^2)\sigma_\epsilon^2$$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-(1+\theta)^2}{2(1+\theta+\theta^2)}, & k=1 \\ \dfrac{-\theta}{2(1+\theta+\theta^2)}, & k=2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases} \quad \rightarrow \text{MA(2)?}$$

$\Rightarrow$ $Var(W_t) - Var(Z_t) = (1+\theta)^2\sigma_\epsilon^2 \ > 0$ (차분 후 분산이 더 커짐)

차분에 의해 모형이 더욱 복잡해지고 가역성의 조건도 만족시키지 않음

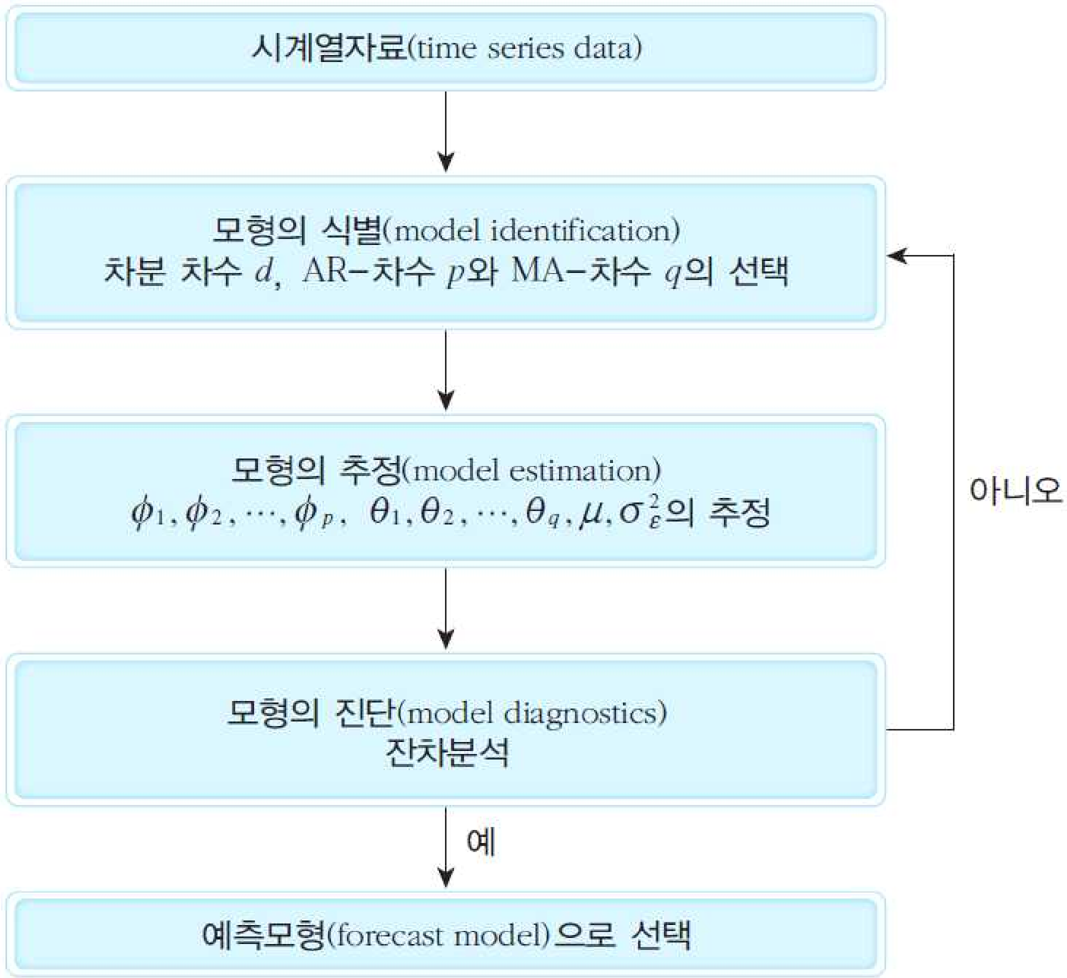
제 8 장 ARIMA 모형의 적합

8.1 모형의 적합절차

정상 $ARMA$ 모형 적합(fitting): $AR-$차수 p와 $MA-$차수 q의 차수를 결정

- **모형의 식별(model identification)단계**
  - 모형의 차수를 결정하는 과정
- **모수의 추정(model estimation)단계**
  - 식별된 모형의 모수들을 추정하는 과정
  - $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p$, $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_q$, 평균수준 μ와 백색잡음과정의 분산 σ_ε^2
- **모형의 진단(diagnostics)단계**
  - 잠정모형(tentative model)의 타당성 검토과정

ARIMA모형의 적합 절차



8.2 모형의 식별단계

$ARMA(p,q)$모형의 p와 q를 결정하는 단계

- **간결의 원칙(principle of parsimony)**
  추정할 모수의 개수가 증가하면 최종 예측모형이 복잡해질 뿐만 아니라 추정의 효율성도 떨어지므로 될 수 있으면 간단한 모형을 선호

잠정모형을 식별하기 위한 절차

<u>단계 1</u> : 적절한 변환

- 시계열그림과 표본상관도표(sample correlogram) 이용
- 비정상시계열은 정상시계열로 변환 : 분산안정화변환, 적절한 차분
- 차분이 필요한 경우
  ① 추세나 계절성이 존재한다.
  ② $SACF$가 서서히 감소한다.
  ③ 차분된 시계열의 분산이 이전 단계의 차분시계열의 분산보다 크지 않다.

<u>단계 2</u> : $ARMA$모형의 차수 p, q 결정

$SACF$ 와 $SPACF$를 이론적인 ACF, $PACF$와 비교

8.2.1 SACF & SPACF를 이용한 식별법

$ARMA(p,q)$모형의 차수 p, q 결정

- $AR(p)$**과정**
  - $\phi_{kk}=0,\ k \geq p+1$
  - $\hat{\phi}_{kk}$ 가 $k=p+1$부터 0에 가까우면 $AR(p)$ 모형으로 식별

  - $\phi_{kk}=0$ **여부의 판단:** $H_0 : \phi_{kk}=0$ vs $H_1 : \phi_{kk} \neq 0$, $k=1,2,$ ...

  $\Rightarrow |\hat{\phi}_{kk}| > 1.96\sqrt{1/n}$, $k \geq p+1$ 이면 유의수준 $\alpha=0.05$에서 H_0 기각

- $MA(q)$ **과정**
  - $\rho_k=0$, $k \geq q+1$
  - $\hat{\rho}_k$가 $k \geq q+1$일 때 전부 0에 가까우면 $MA(q)$ 모형으로 식별
  - $\rho_k=0$ **여부의 판단:** $H_0 : \rho_k=0$ vs $H_1 : \rho_k \neq 0$

  $\Rightarrow |\hat{\rho}_k| > 1.96\,S.E.(\hat{\rho}_k)$이면 유의수준 $\alpha=0.05$에서 H_0 기각; $S.E.(\hat{\rho}_k) \doteq \sqrt{\frac{1}{n}\left(1+\sum_{i=1}^{k-1}\hat{\rho}_i^{\,2}\right)}$

8.2.2 여러 가지 모형식별법

SACF와 SPACF 이용

R과 S배열법 : Gray 등(1978)

모퉁이방법(coner method) : Bequin(1980)

확장표본자기상관함수(Extended SACF, ESACF): Tsay와 Tiao(1984)

- **모형선택의 기준(model selection criterion)**으로 사용되는 통계량 이용
  - Akaike(1973, 1974) : AIC(Akaike's Information Criterion) 통계량

$$AIC = n\ln\hat{\sigma}_\epsilon^2 + 2(p+q)$$

  - Schwarz(1978) : SBC(Schwartz's Bayesian Criterion) 통계량

    또는 BIC(Bayesian Information Criterion)

$$SBC = n\ln\hat{\sigma}_\epsilon^2 + (p+q)\ln n$$

n : 시계열 관측값의 개수

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2$: σ_ϵ^2의 최대가능도추정량

$p+q$: 일종의 벌칙함수로써 p와 q가 커짐에 따라 AIC 값을 증가시키는 역할

$\Rightarrow$ 여러 모형의 AIC 값을 계산해서 가장 작은 값을 갖는 모형을 선택

8.3 모수의 추정

- $ARMA(p,q)$모형

$$Z_t-\mu=\phi_1(Z_{t-1}-\mu)+\cdots+\phi_p(Z_{t-p}-\mu)+\varepsilon_t-\theta_1\varepsilon_{t-1}-\cdots-\theta_q\varepsilon_{t-q} \quad \text{where} \quad \varepsilon_t \sim WN(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

– 추정해야 할 $p+q+2$ 개의 모수 : $\boldsymbol{\phi}=(\phi_1, \ldots, \phi_p)'$, $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1, \ldots, \theta_q)'$, $E(Z_t)=\mu$, σ_ϵ^2

– $\boldsymbol{\varepsilon}=(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)'$의 joint pdf (정규분포 가정하에서)

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\sigma_\varepsilon^2)=(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right]$$

$$\text{where} \quad \varepsilon_t=\theta_1\varepsilon_{t-1}+\cdots+\theta_q\varepsilon_{t-q}+(Z_t-\mu)-\phi_1(Z_{t-1}-\mu)-\cdots-\phi_p(Z_{t-p}-\mu)$$

– **최대가능도추정법** : $p(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta},\sigma_\varepsilon^2)$를 최대로 하는 추정법

– **최소제곱추정법** : 오차제곱합 $\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2$를 최소로 하는 추정법

$\Rightarrow$ 조건부 최소제곱법과 비조건부 최소제곱법 : 초기값 처리가 다름

8.3.1. 적률추정법(method of moment estimation)

모집단의 적률에 대응되는 표본적률의 방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법

● $AR(p)$모형의 적률추정 : Yule−Walker 방정식 이용

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}\,, \quad k \geq 1$$

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ 모집단의 적률 ρ_k를 상응하는 표본의 적률 $\hat{\rho}_k$로 대치

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_p = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{P}} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

따라서, 적률추정량 $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \ldots, \hat{\phi}_p)'$: $\hat{\boldsymbol{\phi}} = \hat{\boldsymbol{P}}^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}_p$ (또는 Yule−Walker 추정량)

σ_ε^2 의 적률추정량 : $\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \cdots + \phi_p\gamma_p + \sigma_\varepsilon^2$ 이용

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\gamma}_0(1 - \hat{\phi}_1\hat{\rho}_1 - \hat{\phi}_2\hat{\rho}_2 - \cdots - \hat{\phi}_p\hat{\rho}_p)$ where $\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \overline{Z})^2$ and $\hat{\mu} = \overline{Z} = \sum_{t=1}^{n} Z_t / n$

예제 8.1 $AR(1)$ 모형 : $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$

- ϕ 의 Yule−Walker추정량 : $\hat{\phi} = \hat{\rho}_1$
- σ_ε^2 의 적률추정량 : $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \hat{\gamma}_0(1 - \hat{\phi}^2)$

− 적률추정량들은 반올림 오차들에 매우 민감; 보통 최종 추정 방법으로서는 부적합
− 최소제곱추정법과 최대가능도추정법 등의 초기 추정값으로 사용

8.3.2 조건부 최소제곱추정법

오차의 제곱합이 가장 작게 되도록 하는 모수들의 추정량을 구하는 방법

$\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)'$가 주어졌을 때, $\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2$를 최소로 하는 추정법

$\varepsilon_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + (Z_t - \mu) - \phi_1 (Z_{t-1} - \mu) - \cdots - \phi_p (Z_{t-p} - \mu)$

- 필요한 초기값 :
  $\boldsymbol{Z}_* = (Z_{1-p}, Z_{1-p+1}, \ldots, Z_{-1}, Z_0)'$
  $\boldsymbol{\varepsilon}_* = (\varepsilon_{1-q}, \varepsilon_{1-q+1}, \ldots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0)'$

- **조건부 최소제곱추정량(CLSE) :** $\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p)'$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_q)'$, $\hat{\mu}$
  - 초기조건 $\boldsymbol{Z}_*$와 $\boldsymbol{\varepsilon}_*$가 주어졌을 때
  - **조건부 오차제곱합**(conditional error sum of squares) $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu)$을 최소로 해주는 $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}$와 μ

$$S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu \mid \boldsymbol{Z}_*, \boldsymbol{\varepsilon}_*, \boldsymbol{Z})$$

  - 초기조건 $\boldsymbol{Z}_*$와 $\boldsymbol{\varepsilon}_*$를 주는 방법: 시계열의 표본평균 $\bar{Z}$와 ε_t의 기대값인 0을 사용

$$S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu \mid \boldsymbol{Z})$$

- σ_ε^2 의 최소제곱추정량: $\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \dfrac{S_*(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu})}{\nu}$

  자유도 ν : $S_*(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu})$을 구성하는 제곱합 항들의 수에서 추정된 모수의 수를 뺀 값

  $ARMA(p,q)$모형의 경우 : $\nu = (n-p)-(p+q+1) = n-(2p+q+1)$

예제 8.3 $AR(1)$모형 $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$

- 조건부 오차제곱합 : $S_*(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2(\phi, \mu | \boldsymbol{Z}) = \sum_{t=2}^{n} \{(Z_t - \mu) - \phi(Z_{t-1} - \mu)\}^2$
- $\varepsilon_1 = 0$라는 초기조건하에서 오차제곱합을 계산

- $S_*(\phi,\mu)$를 최소로 하는 μ 와 ϕ :

$$\frac{\partial S_*(\phi, \mu)}{\partial \mu} = -2 \sum_{t=2}^{n} (1-\phi)\{(Z_t - \mu) - \phi(Z_{t-1} - \mu)\}$$

$$\frac{\partial S_*(\phi, \mu)}{\partial \phi} = -2 \sum_{t=2}^{n} \{(Z_t - \mu) - \phi(Z_{t-1} - \mu)\}(Z_{t-1} - \mu)$$

– $\hat{\mu} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} Z_t - \phi \sum_{t=2}^{n} Z_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)}$ & $\hat{\phi} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \mu)(Z_{t-1} - \mu)}{\sum_{t=2}^{n}(Z_{t-1} - \mu)^2}$

– n이 상당히 큰 경우: $\hat{\mu} \approx \overline{Z}$ & $\hat{\phi} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \overline{Z})(Z_{t-1} - \overline{Z})}{\sum_{t=2}^{n}(Z_{t-1} - \overline{Z})^2}$ (cf. 적률추정량의 모양)

– σ_{ε}^2 의 조건부 최소제곱추정량 : $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = \dfrac{S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu})}{\nu}$ where 자유도 $\nu = (n-1) - 2 = n-3$

8.3.3 비조건부 최소제곱추정법

비조건부 최소제곱추정법

초기조건을 주는 대신 미지의 과거의 시계열값 Z_*와 ε_*를 후방예측한 값을 사용

8.3.4 최대가능도추정법(maximum likelihood estimation method)

- 모두 ϕ, θ, μ와 σ_ε^2의 가능도함수(likelihood function)를 최대로 하는 모수의 추정량을 구하는 방법
- 보통 백색잡음과정 $\{\varepsilon_t\}$가 $N(0,\sigma_\varepsilon^2)$ 분포를 따른다고 가정

- 예: $AR(1)$ 과정 $\dot{Z}_t = \phi \dot{Z}_{t-1} + \varepsilon_t$ where $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$

For a given Z_1, conditional joint pdf of $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$:

$$f(Z_2, Z_3, \ldots, Z_n | Z_1)$$

$$= f(Z_2|Z_1) f(Z_3|Z_2, Z_1) \cdots f(Z_n|Z_{n-1}, Z_{n-2}, \ldots, Z_1)$$

$$= \prod_{t=2}^{n} f(Z_t|Z_{t-1}) = \prod_{t=2}^{n} f(\varepsilon_t)|J|$$

$$f(Z_2, Z_3, \cdots, Z_n|Z_1) = \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}(\dot{Z}_t - \phi \dot{Z}_{t-1})^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=2}^{n}(\dot{Z}_t - \phi\dot{Z}_{t-1})^2\right\}$$

$$\dot{Z}_t = (1-\phi B)^{-1}\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j} \quad \Rightarrow \quad \dot{Z}_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2/(1-\phi^2)\right)$$

따라서, 모수 $\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2$ 의 가능도함수는,

$L(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2) = f(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = f(Z_1) f(Z_2, Z_3, \ldots, Z_n | Z_1)$

$$= \frac{(1-\phi^2)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(1-\phi^2)}{2\sigma_\varepsilon^2} Z_1^2\right\} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^{n} (\dot{Z}_t - \phi \dot{Z}_{t-1})^2\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right)^{\frac{n}{2}} (1-\phi^2)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} S(\phi, \mu)\right\}$$

단, $S(\phi, \mu) = \sum_{t=2}^{n} (\dot{Z}_t - \phi \dot{Z}_{t-1})^2 + (1-\phi^2) \dot{Z}_1^2$

일반적으로 가능도함수 대신 로그가능도함수(log−likelihood function)를 최대로 함

$$\ln L(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2) \propto \frac{1}{2} \ln(1-\phi^2) - \frac{n}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{S(\phi, \mu)}{2\sigma_\varepsilon^2}$$

- **$\hat{\phi}$ 와 $\hat{\mu}$ 의 최대가능도추정량:** $\ln L(\phi, \mu, \sigma_\varepsilon^2)$를 최대로 하는 ϕ 와 μ
- **σ_ε^2 의 최대가능도추정량:** $\hat{\sigma}_\varepsilon{}^2 = \frac{1}{n} S(\hat{\phi}, \hat{\mu})$
- $S(\phi, \mu) = (1-\phi^2)(Z_1 - \mu)^2 + S_*(\phi, \mu)$

8.3.5 비선형추정법과 추정량의 점근분포

최소제곱 및 최대가능도 추정은 오차 제곱합을 최소화하는 문제와 관련됨.

- AR(p) 모형: 오차는 모수에 관하여 선형적

  $\varepsilon_t = \dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p}$

  $\Rightarrow$ 오차는 모수에 관하여 선형적

- ARMA(1,1) 모형의 경우

$$\dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\varepsilon_t = \dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} = \dot{Z}_t - \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + \theta_1 \left(\dot{Z}_{t-1} - \phi_1 \dot{Z}_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-2} \right)$$

$$= \dot{Z}_t - (\phi_1 - \theta_1) \dot{Z}_{t-1} - \phi_1 \theta_1 \dot{Z}_{t-2} + \theta_1^2 \varepsilon_{t-2}$$

: 모수 ϕ 와 θ 에 관해 비선형

- **비선형최소제곱추정(nonliner least square estimation):**
  - 제곱합에 모수의 초기값을 주고 제곱합이 줄어드는 방향으로 모수의 값을 계속적으로 갱신
  - 만족할만한 수렴기준(convergence criteria)에 도달할 때까지 반복적으로 모수를 추정
  - 수렴기준 : 제곱합의 상대적 감소량, 모수추정값의 변화량 또는 최대반복 횟수 등
  - 비선형 탐색 알고리즘:

    Gauss-Newton방법, **최대경사법(the method of steepest descent),** Marguardt (1963) 알고리즘

- $AR(p)$모형에서의 모수 ϕ의 점근적분포 : (정상성 가정하에서)

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\phi}}-\boldsymbol{\phi}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma_\varepsilon^2 \boldsymbol{\Gamma}_p^{-1}) \text{ where } \boldsymbol{\Gamma}_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

e.g., For AR(1), $\Gamma_1 = \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2/(1-\phi^2)$

8.4 모형의 진단

- **모형의 진단(model diagnostics)단계**
  - 잠정모형의 유의성검정 시행 후 잠정모형의 타당성 여부를 판단하는 단계
  - 잔차분석(residual analysis)
  - 과대적합진단(overfitting diagnostics)

8.4.1 잔차분석

잔차(residual)를 이용하여 모형에 대한 가정이 옳은지를 알아봄

$e_t = Z_t - \hat{Z}_t =$ 관측값 $-$ 적합된 값

- **기본가정**
  - 오차의 정규성
  - 오차의 백색잡음
  - 오차의 독립성

  $\Rightarrow$ **잔차 e_t를 이용한 잔차진단**

(1) 정규성 가정

- 잔차들의 정규성 검정 또는 정규확률그림
- Jarque-Bera 검정 이용 (Jarque and Bera, 1980)

왜도와 첨도에 초점을 맞추어 두 모수가 표준정규분포와 얼마나 다른가를 결합검정

$$JB \equiv n\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\hat{e}_t^3}{\hat{\sigma}_e^3}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\hat{e}_t^4}{\hat{\sigma}_e^4} - 3\right)^2 \sim \chi^2(2) \quad \text{where } \hat{\sigma}_e^2\text{: 잔차의 표본 표준편차}$$

(2) 백색잡음과정의 확인

- 잔차의 시계열그림 (평균=0, 등분산성 확인)
- 잔차의 자기상관계수(residual SACF, RSACF) 및 부분자기상관계수(RSPACF)를 이용
- 포트맨토검정(portmanteau test)

귀무가설 : H_0 : $\rho_1(e) = \cdots = \rho_k(e) = 0$ 즉, "H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = 0$"

$\Rightarrow$ 모형이 적합하다 (goodness of fit test)

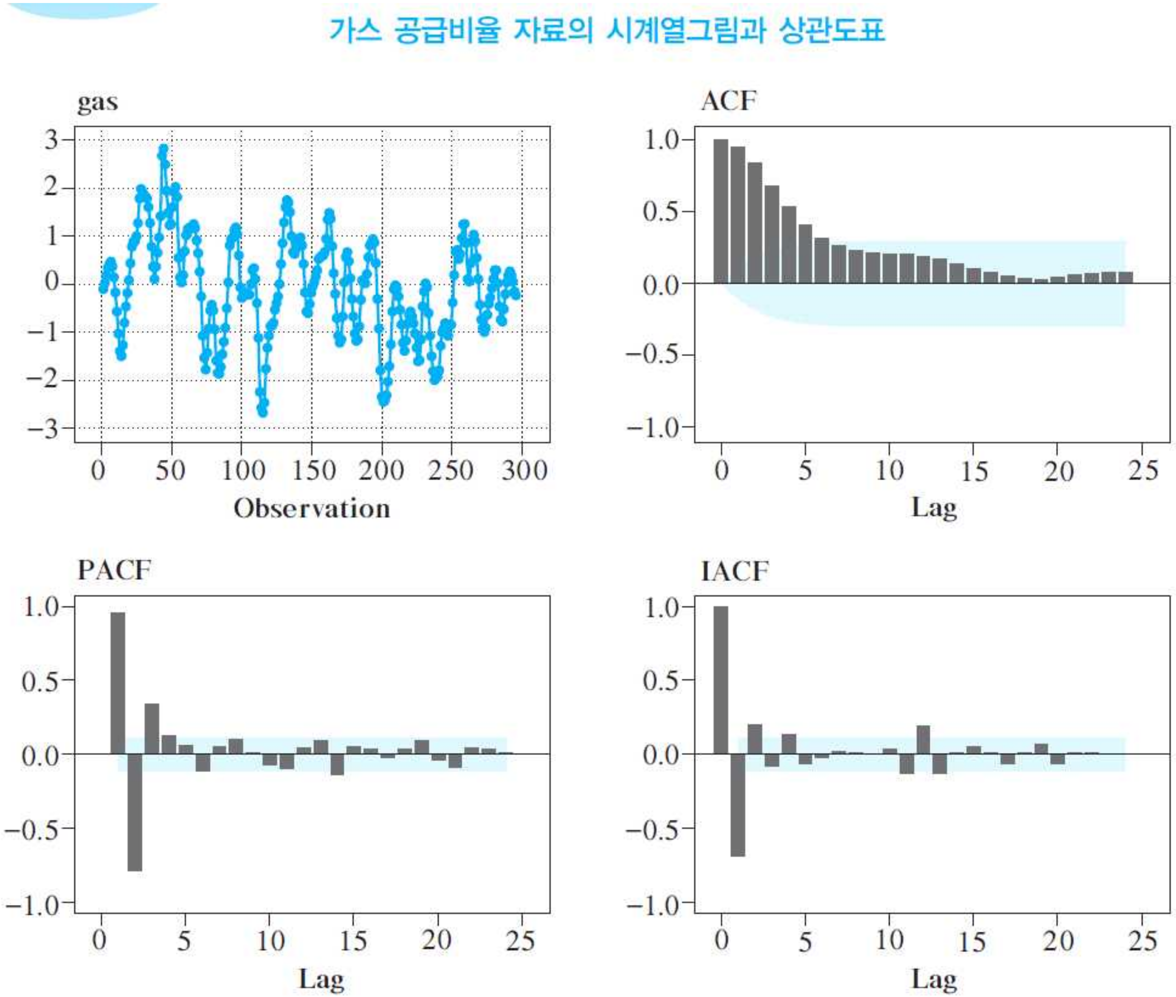
Box and Pierce (1970) 검정통계량: $Q^* = n\sum_{k=1}^{K}\hat{\rho}_k^2(e) \approx \chi^2(K-p-q)$ under H_0

Ljung and Box (1978) 검정통계량: $Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\hat{\rho}_k^2(e)/(n-k) \approx \chi^2(K-p-q)$ under H_0

(3) 잔차의 독립성 여부: 순위검정(rank test) or 부호검정(sign test)

8.5 모형의 적합 예제

예제 8.6 부록 A의 ‘gas.txt' (Box 등, 1994)의 가스로(gas furnace)자료
가스로에 입력되는 가스의 공급비율(input gas feed rate)자료



〈표 8－2〉 AR (3)모형 적합 결과

모수	추정값	표준오차	t－값	유의확률
μ	−0.1228	0.1090	−1.13	0.2609
ϕ_1	1.9761	0.0550	35.94	<0.0001
ϕ_2	−1.3750	0.0997	−13.80	<0.0001
ϕ_3	0.3434	0.0550	6.24	<0.0001

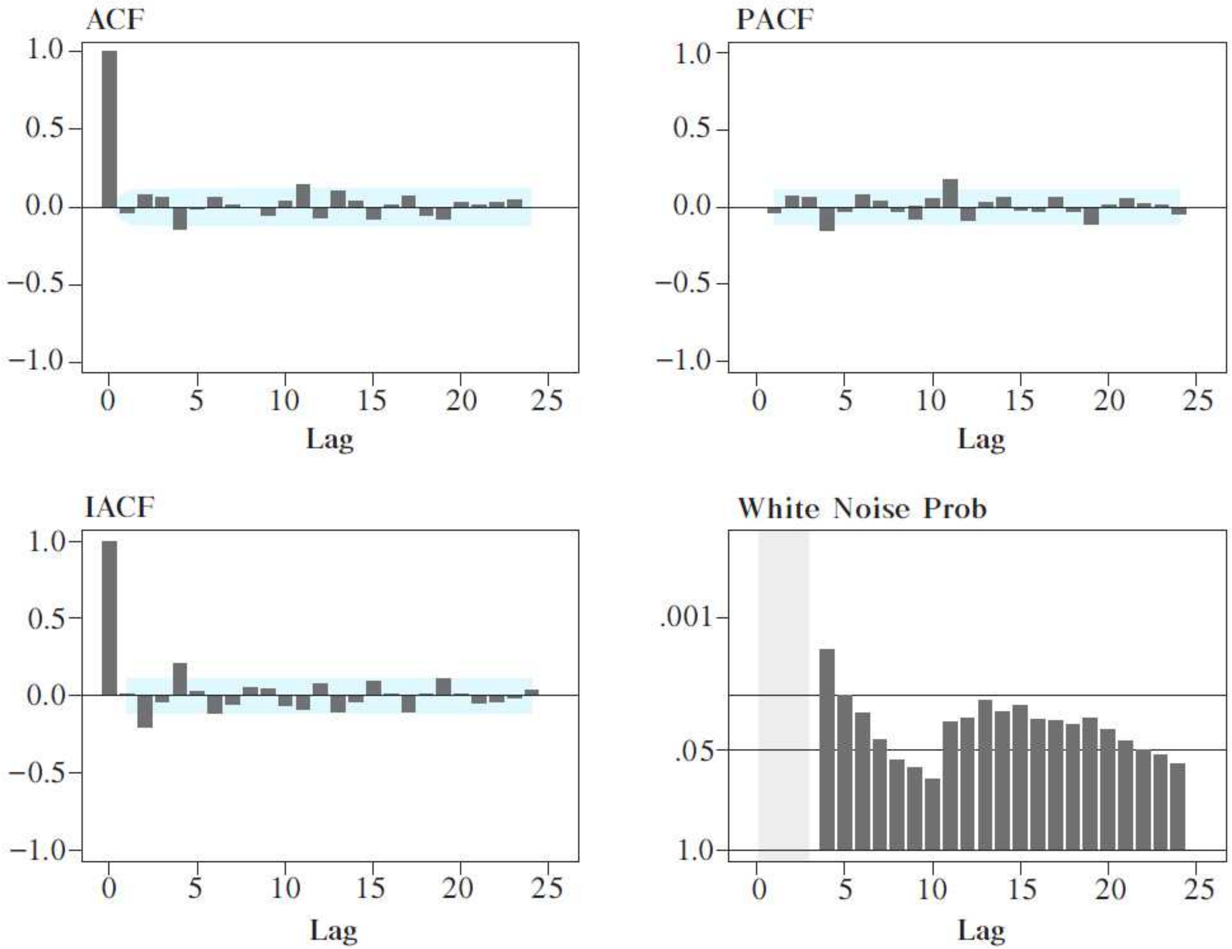
모수	추정값	표준오차	t－값	유의확률
ϕ_1	1.9695	0.0545	36.17	<0.0001
ϕ_2	−1.3659	0.0987	−13.84	<0.0001
ϕ_3	0.3389	0.0545	6.24	<0.0001

$$\Rightarrow Z_t = 1.97\, Z_{t-1} - 1.37\, Z_{t-2} + 0.34\, Z_{t-3} + \varepsilon_t,\ \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = 0.00357$$

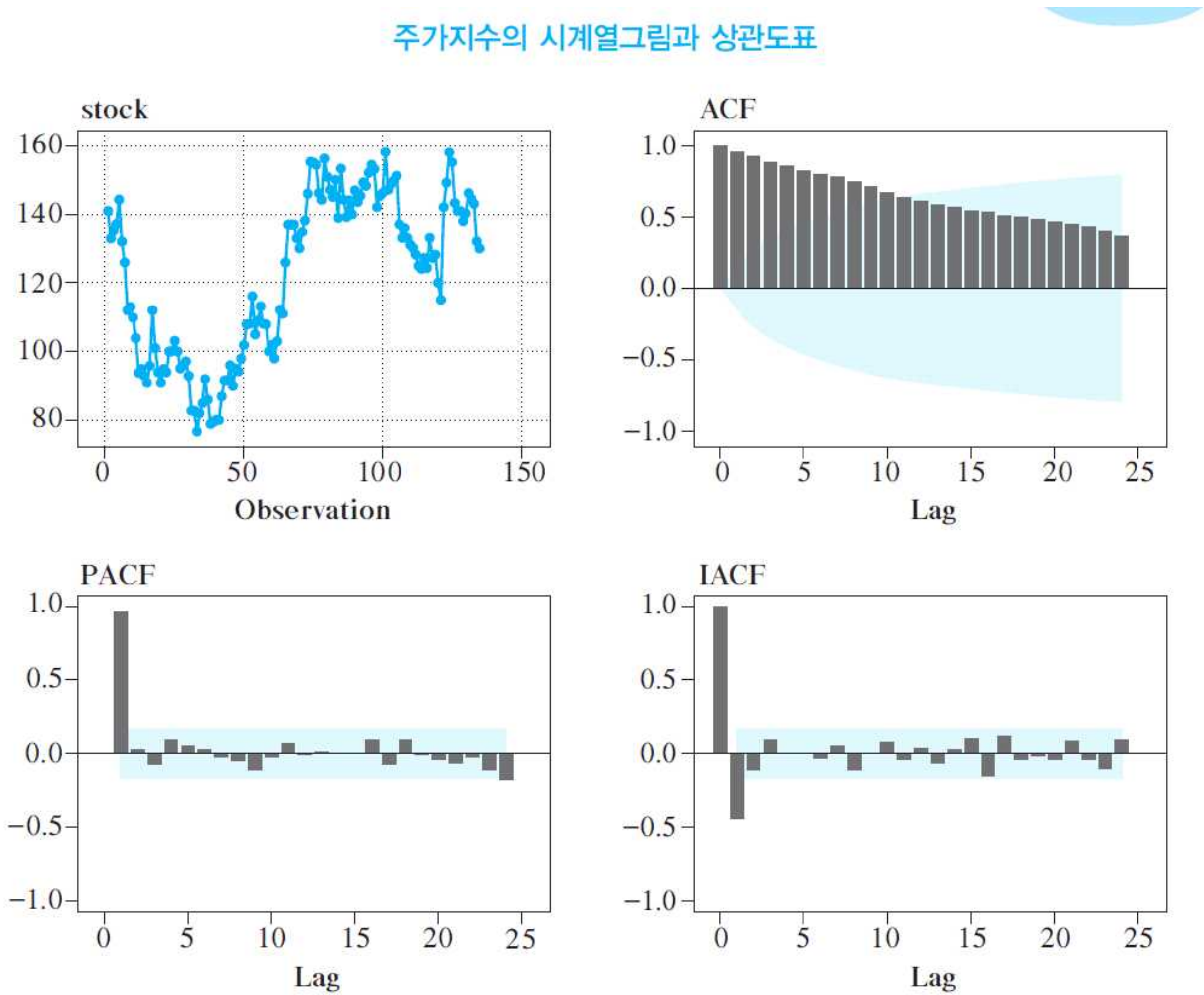
〈표 8－3〉 AR (3)모형 적합 후의 포트맨토검정 결과

포트맨토검정									
lag	카이제곱	자유도	유의확률	자기상관계수					
6	10.20	3	0.017	−0.035	0.071	0.058	−0.143	−0.009	0.059
12	19.77	9	0.019	0.015	0.003	−0.054	0.037	0.143	−0.077
18	27.71	15	0.023	0.099	0.042	−0.081	0.017	0.065	−0.053
24	30.88	21	0.076	−0.079	0.024	0.015	0.031	0.045	0.004

잔차의 상관분석


ACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
25
Lag
PACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
25
Lag
IACF
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0
5
10
15
20
25
Lag
White Noise Prob
.001
.05
1.0
0
5
10
15
20
25
Lag

예제 8.8 모 전자회사의 1992년 1월부터 1994년 10월 3주까지의 주별주가지수 자료

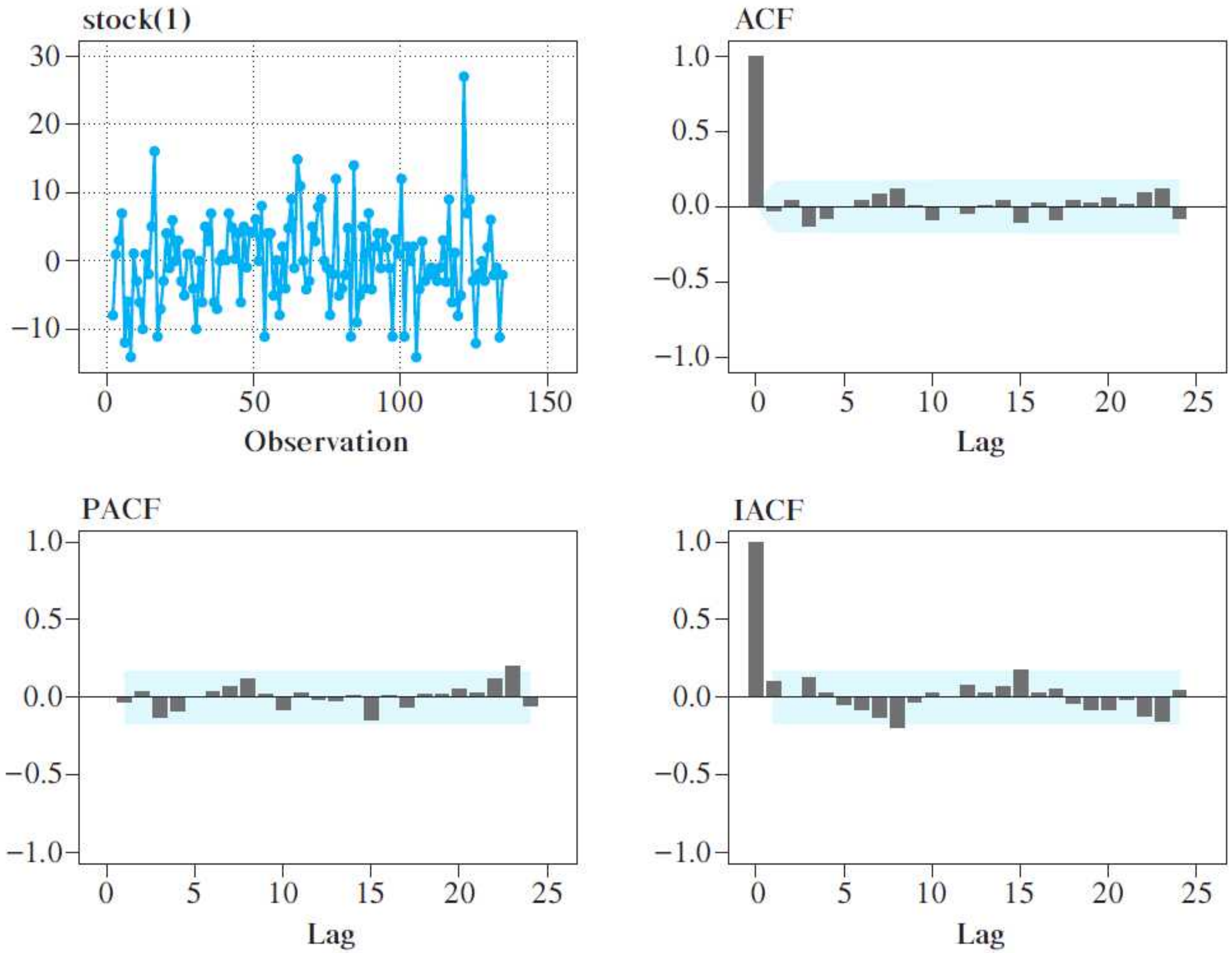


⇒ 비정상성이 확실한 경우에는 굳이 단위근 검정을 할 필요가 없다.

〈표 8-10〉 ADF 단위근검정 결과

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Tests							
type	lags	rho	Pr < rho	tau	Pr < tau	F	유의확률
case 1(zero mean)	0	−0.2794	0.6181	−0.46	0.5133		
	1	−0.1976	0.6367	−0.34	0.5623		
	2	−0.2203	0.6315	−0.36	0.5538		
case 2(single mean)	0	−5.3125	0.3998	−1.68	0.4408	1.42	0.7098
	1	−4.8989	0.4391	−1.56	0.5019	1.21	0.7615
	2	−5.5087	0.3820	−1.63	0.4651	1.33	0.7323
case 3(trend)	0	−11.5302	0.3247	−2.80	0.2006	4.11	0.3553
	1	−10.8206	0.3672	−2.56	0.3003	3.38	0.5017
	2	−12.6029	0.2673	−2.70	0.2371	3.76	0.4265

1차 차분된 주가지수의 시계열그림과 상관도표



- 최종적으로, 절편이 없는 랜덤워크모형 $ARIMA(0,1,0)$ 적합:
- $(1-B)Z_t = \varepsilon_t$ 혹은 $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$ (절편은 유의하지 않음)

제 9 장 예측

- 예측(forecast 또는 prediction)
  - 과거의 관측값들을 이용하여 가장 설명력이 높은 모형을 적합시키고
  - 외삽법(extrapolation method)에 의해 미래를 유추하는 것
  - 예측오차가 수반되므로 오차의 확률분포에 근거하여 예측값을 구함

9.1 최소 평균제곱오차 예측

$\hat{Y} = g(\boldsymbol{X})$: 예측값 & $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots)'$: Y와 관련된 확률벡터

- 최소 평균제곱오차(minimum MSE, MMSE) 예측
  - 평균제곱오차(mean square error, MSE) $E[Y - g(\boldsymbol{X})]^2$를 최소로 하는 값

  $\Rightarrow$ $E(Y|\boldsymbol{X})$

- Z_{n+l}의 MMSE 예측값
  - $Z_n(l) = E(Z_{n+l}|Z_n, Z_{n-1}, \ldots)$
  - 시점 n으로부터 l-시차 후의 예측(l-step-ahead forecast)
  - n : 예측을 시작하는 원점(origin)
  - l : 몇 시차 후의 미래를 예측하는지를 나타내는 선행시차(lead time)

- 예측오차(forecast error)
  - 예측값과 관측값의 차이
  - $e_n(l) = Z_{n+l} - Z_n(l)$

- $ARMA(p,q)$: $\phi(B)Z_t = \theta(B)\varepsilon_t$ 에서의 예측 (단, 모수는 알고 있다고 가정)
  - $\mu = 0$ 을 가정
  - $ARMA(p,d,q)$ 로의 확장: 유사, Wei (2006, Time Series Analysis 2nd) 참고

$$Z_n = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{n-j} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\psi}(B) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j = \theta(B)/\phi(B)$$

$$\begin{aligned} Z_{n+l} &= \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{n+l-j} = (\varepsilon_{n+l} + \psi_1\varepsilon_{n+l-1} + \cdots + \psi_{l-1}\varepsilon_{n+1}) + (\psi_l\varepsilon_n + \psi_{l+1}\varepsilon_{n-1} + \cdots) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1}\psi_j\varepsilon_{n+l-j} + \sum_{j=l}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{n+l-j} \end{aligned}$$

- $\sum_{j=0}^{l-1}\psi_j\varepsilon_{n+l-j}$: 미래의 오차들의 선형결합
- $\sum_{j=l}^{\infty}\psi_j\varepsilon_{n+l-j}$: 현재와 과거의 오차들의 선형결합
- $Var(Z_n) = \sigma_\varepsilon^2\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j^2$

$$\Rightarrow \quad Z_n(l) = E(Z_{n+l} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots) = E(Z_{n+l} \mid \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{n+l-j} \mid \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots\right) + E\left(\sum_{j=l}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n+l-j} \mid \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots\right)$$

$$= E\left(\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{n+l-j}\right) + \sum_{j=l}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n+l-j}$$

$$= \sum_{j=l}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n+l-j}$$

$\Rightarrow$ 시점 n으로부터 $l-$시차 후의 예측

● $l-$시차 후의 예측오차($l-$step−ahead forecast error) :

- $e_n(l) = Z_{n+l} - Z_n(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{n+l-j}$

- $E(e_n(l)) = 0$

  $Var(e_n(l)) = E(Z_{n+l} - Z_n(l))^2 = Var(\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j \varepsilon_{n+l-j}) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$

- For $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $(1-\alpha)100\%$ 예측 신뢰구간: $Z_n(l) \pm N_{\alpha/2}\, \sigma_\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2\right)^{1/2}$

- As $l \to \infty$, $Var(e_n(l)) \to Var(Z_n)$
  - 정상과정이면 수렴: 신뢰구간의 폭은 일정하게 유지
  - 비정상과정이면 발산: 신뢰구간 폭이 점점 넓어지며 발산

- $ARIMA(p,d,q)$모형에서 예측값 구하기

  $\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)\varepsilon_t$

  - $\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d = 1-\varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_{p+d}B^{p+d}$
  - $Z_{n+l} = \varphi_1 Z_{n+l-1} + \cdots + \varphi_{p+d} Z_{n+l-(p+d)} + \varepsilon_{n+l} - \theta_1 \varepsilon_{n+l-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{n+l-q}$

  - $E(Z_{n+l-i} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_1) = \begin{cases} Z_n(l-i), & i=0,1,\ldots,l-1 \\ Z_{n+l-i}, & i \geq l \end{cases}$

  - $E(\varepsilon_{n+l-i} \mid Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_1) = E(\varepsilon_{n+l-i} \mid \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1)$

$$= \begin{cases} 0, & i=0,1,\ldots,l-1 \\ \varepsilon_{n+l-i}, & i \geq l \end{cases}$$

  l-시차 후의 예측값

  - $Z_n(l) = \begin{cases} \varphi_1 Z_n(l-1) + \cdots + \varphi_{p+d} Z_n(l-p-d) - \theta_l \varepsilon_n - \theta_{l+1}\varepsilon_{n-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{n+l-q}, & l \leq q \\ \varphi_1 Z_n(l-1) + \cdots + \varphi_{p+d} Z_n(l-p-d), & l > q \end{cases}$

  - $l > q$: MA항은 없어짐
  - $l \leq i$: $Z_n(l-i) = Z_{n+l-i}$

9.4 예제

예제 9.1 $AR(1)$**과정의 예측**

- $\dot{Z}_t = \phi \dot{Z}_{t-1} + \varepsilon_t$ where $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ and $E(Z_t) = \mu$
- 시점 n으로부터 l−시차 후의 관측값 : $\dot{Z}_{n+l} = \phi \dot{Z}_{n+l-1} + \varepsilon_{n+l}$
- $H_n = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}$: n시점까지의 주어진 관측값
- 조건부 기대값 $E(\cdot | H_n)$를 취하면
- $\dot{Z}_n(1) = E(\dot{Z}_{n+1} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n$

$$\dot{Z}_n(2) = E(\dot{Z}_{n+2} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n(1) = \phi^2 \dot{Z}_n$$

$$\dot{Z}_n(3) = E(\dot{Z}_{n+3} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n(2) = \phi^3 \dot{Z}_n$$

$$\vdots$$

- 시점 n으로부터 l−시차 후의 예측함수의 일반식: $\dot{Z}_n(l) = \phi^l \dot{Z}_n \Rightarrow Z_n(l) = \mu + \phi^l (Z_n - \mu)$
- $|\phi| < 1$ 이므로 l이 커짐에 따라 궁극적으로 $Z_n(l) \rightarrow \mu$ (Z_t의 평균)
- 예측오차 분산 : $\sigma^2(l) = Var(e_n(l)) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \left(\frac{1-\phi^{2l}}{1-\phi^2} \right)$
- l이 커짐에 따라 $\lim_{l \to \infty} \sigma^2(l) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$ (=AR(1) 과정의 분산)

- Z_{n+l}에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 예측구간

$$Z_n(l) \pm z_{\alpha/2}\,\sigma(l) = \mu + \phi^l(Z_n - \mu) \pm z_{\alpha/2}\,\sigma_\varepsilon\sqrt{\frac{1-\phi^{2l}}{1-\phi^2}}$$

예제 9.2 $MA(1)$**과정의 예측**

- $\dot{Z}_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ where $\dot{Z}_t = Z_t - \mu$ and $E(Z_t) = \mu$
- 시점 n으로부터 l-시차 후의 관측값 : $\dot{Z}_{n+l} = \varepsilon_{n+l} - \theta\,\varepsilon_{n+l-1}$
- 시점 n으로부터 예측값:

$$\dot{Z}_n(1) = E(\dot{Z}_{n+1} \mid H_n) = -\theta\,\varepsilon_n ,$$

$$\dot{Z}_n(l) = E(\dot{Z}_{n+l} \mid H_n) = 0 , \quad l \geq 2$$

- $Z_n(l) = \mu$, $l \geq 2$; 즉, $MA(1)$ 과정의 평균
- $MA(1)$ 과정이 가역성을 갖는 경우, $\dot{Z}_n(1)$의 계산은 $\varepsilon_n = (1-\theta B)^{-1}\dot{Z}_n = \sum_{j=0}^{\infty}\theta^j\dot{Z}_{n-j}$ 을 이용

- $l \geq 2$ 인 경우의 예측오차 : $e_n(l) = Z_{n+l} - Z_n(l) = \varepsilon_{n+l} - \theta\varepsilon_{n+l-1}$
- 예측오차의 분산 : $\sigma^2(l) = Var(e_n(l)) = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow$ MA(1) 과정의 분산

예제 9.3 $ARMA(1,1)$과정의 예측

– $\dot{Z}_t = \phi \dot{Z}_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

– 시점 n으로부터 l–시차 후의 관측값: $\dot{Z}_{n+l} = \phi \dot{Z}_{n+l-1} + \varepsilon_{n+l} - \theta\varepsilon_{n+l-1}$

$$\dot{Z}_n(1) = E(\dot{Z}_{n+1} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n - \theta\varepsilon_n$$

$$\dot{Z}_n(2) = E(\dot{Z}_{n+2} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n(1) = \phi^2 \dot{Z}_n - \phi\theta\varepsilon_n$$

$$\dot{Z}_n(3) = E(\dot{Z}_{n+3} \mid H_n) = \phi \dot{Z}_n(2) = \phi^3 \dot{Z}_n - \phi^2\theta\varepsilon_n$$

$$\vdots$$

– 시점 n으로부터 l–시차 후의 예측함수

$$\dot{Z}_n(l) = \phi^l \dot{Z}_n - \phi^{l-1}\theta\varepsilon_n \;\Rightarrow\; Z_n(l) = \mu + \phi^l(Z_n - \mu) - \phi^{l-1}\theta\varepsilon_n\,,\;\; l \geq 1$$

– 정상 $ARMA(1,1)$과정의 예측함수: $Z_n(l) \rightarrow \mu$ (ARMA(1,1)의 평균)

– 예측오차분산 : $\sigma^2(l) = Var[e_n(l)] = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{l-1} (\phi - \theta)^2 \phi^{2(j-1)} \right\}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{(\phi-\theta)^2 (1 - \phi^{2(l-1)})}{1-\phi^2} \right\} \rightarrow \sigma_\varepsilon^2 \left\{ 1 + \frac{(\phi-\theta)^2}{1-\phi^2} \right\}$$

– 궁극적인 예측오차의 분산 = $ARMA(1,1)$과정의 분산

예제 9.4 상수항이 없는 $ARIMA(1,1,0)$ 과정의 예측

− $(1-\phi B)(1-B)Z_t=\varepsilon_t$; $Z_t=(1+\phi)Z_{t-1}-\phi Z_{t-2}+\varepsilon_t$

− 시점 n으로부터 l−시차 후의 관측값과 예측값

$$Z_{n+l} = (1+\phi)Z_{n+l-1}-\phi Z_{n+l-2}+\varepsilon_{n+l}$$

$$Z_n(1) = E(Z_{n+1}|H_n) = (1+\phi)Z_n-\phi Z_{n-1}$$

$$Z_n(2) = E(Z_{n+2}|H_n) = (1+\phi)Z_n(1)-\phi Z_n$$

$$Z_n(3) = E(Z_{n+3}|H_n) = (1+\phi)Z_n(2)-\phi Z_n(1)$$

$$\vdots$$

<u>Theorem (차분방정식의 해법)</u>

− Let $C(B)Z_t=0$ where $C(B)=1+C_1B+C_2B^2+\cdots+C_nB^n$

− Homogeneous linear difference equation, 동질적 차분 방정식

If $C(B)=\Pi_{i=1}^{N}(1-m_iB)^{s_i}$ where $\sum_{i=1}^{N}s_i=n$ and $B_i=m_i^{-1}\,(i=1,2,\cdots,N)$ are roots of multiplicity of $C(B)=0$, then

$$Z_t=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{s_i-1}c_{ij}t^jm_i^t \quad \text{for any constants } c_{ij}$$

In particular, if $s_i=1$ for all i and $m_i^{-1}(i=1,2,\cdots,n)$ are all distinct, $Z_t=\sum_{i=1}^{n}c_im_i^t$

- 용어: $C(1/B)=0$을 보조방정식이라고 함.

- 예측함수 $Z_n(l)$: 차분방정식의 해
  - $Z_n(l)-(1+\phi)Z_n(l-1)+\phi Z_n(l-2)=(1-\phi B)(1-B)Z_n(l)=0$
  - 보조방정식 $m_1-\phi=0$ 과 $m_2-1=0$ 의 근: $m_1=\phi$ 와 $m_2=1$

$$Z_n(l)=c_1^{(n)}m_1^l+c_2^{(n)}m_2^l=c_1^{(n)}\phi^l+c_2^{(n)}, \quad l\geq 1$$

  - 초기조건

$$Z_n(1)=c_1^{(n)}\phi+c_2^{(n)}=(1+\phi)Z_n-\phi Z_{n-1}$$

$$Z_n(2)=c_1^{(n)}\phi^2+c_2^{(n)}=(1+\phi)Z_n(1)-\phi Z_n=\{(1+\phi)^2-\phi\}Z_n-(1+\phi)\phi Z_{n-1}$$

$$\Rightarrow c_1^{(n)}=\frac{-\phi}{1-\phi}(Z_n-Z_{n-1}) \text{ and } c_2^{(n)}=\frac{1}{1-\phi}(Z_n-\phi Z_{n-1})$$

- $l-$시차 후의 예측값의 일반 형태

$$Z_n(l)=\frac{-\phi^{l+1}}{1-\phi}(Z_n-Z_{n-1})+\frac{1}{1-\phi}(Z_n-\phi Z_{n-1}),\ l\geq 1$$

  - $|\phi|<1$이라면 $(Z_n-\phi Z_{n-1})/(1-\phi)$로 수렴
  - 즉, 예측의 원점이 바뀐다면 예측값은 다른 값으로 수렴

- 예측오차의 분산 : Z_n을 무한이동평균의 형태로 표현하는 것이 편리

$$Z_n = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{n-j}$$

$$(1-\phi B)(1-B)(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\cdots+\psi_j B^j+\cdots)=1$$

$$\psi_1 - (1+\phi) = 0$$

$$\psi_2 - (1+\phi)\psi_1 + \phi = 0$$

$$\vdots$$

$$\psi_j - (1+\phi)\psi_{j-1} + \phi\psi_{j-2} = 0$$

차분방정식 $\{1-(1+\phi)B+\phi B^2\}\psi_j = 0$의 해: $\psi_j = c_1\phi^j + c_2$, $j \geq 1$

초기조건: $\psi_1 = c_1\phi + c_2 = (1+\phi)$ and $\psi_2 = c_1\phi^2 + c_2 = (1+\phi)\psi_1 - \phi = \phi^2 + \phi + 1$

$\Rightarrow$ $c_1 = \phi/(\phi-1)$ 과 $c_2 = 1/(1-\phi)$

ψ_j의 일반식: $\psi_j = \dfrac{\phi^{j+1}}{\phi-1} + \dfrac{1}{1-\phi}$

− l이 커짐에 따라 ψ_j가 0으로 수렴하는 대신 $1/(1-\phi)$로 수렴

− 예측오차 분산 : $\sigma^2(l) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{j=0}^{l-1} \psi_j^2$ 발산

예제 11.5 상수항을 가지는 $ARIMA(0,1,1)$ 또는 $IMA(1,1)$과정의 예측

– $(1-B)Z_t = \delta + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$; $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

– 시점 n으로부터 l−시차 후의 관측값과 예측값

$$Z_{n+l} = \delta + Z_{n+l-1} + \varepsilon_{n+l} - \theta\varepsilon_{n+l-1}$$

$$Z_n(1) = \delta + Z_n - \theta\varepsilon_n$$

$$Z_n(2) = \delta + Z_n(1)$$

$$Z_n(3) = \delta + Z_n(2) = 2\delta + Z_n(1)$$

$$\vdots$$

$$Z_n(l) = \delta + Z_n(l-1) = (l-1)\delta + Z_n(1) = l\,\delta + Z_n - \theta\varepsilon_n\,,\quad l \ge 1.$$

$\Rightarrow$ 예측함수 : 기울기 δ, 절편 $Z_n - \theta\epsilon_n$ (기울기 및 예측원점에 의존)

– 예측오차의 분산

$(1-B)(1+\psi_1 B + \psi_2 B^2 + \cdots) = (1-\theta B)$; 따라서, $\psi_j = 1-\theta$, $j \ge 1$

$$Var[e_n(l)] = \sigma_\varepsilon^2[1 + (1-\theta)^2 + \cdots + (1-\theta)^2]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2[1 + (l-1)(1-\theta)^2],\ l \ge 1.$$

예측오차의 분산 : l이 커짐에 따라 발산, 예측구간의 폭도 점차 넓어짐

- 요약

− 정상 $ARMA$ 과정의 예측값: 가정된 확률과정의 평균으로 수렴
− 예측오차의 분산: 가정된 확률과정의 분산으로 수렴

− 비정상 $ARIMA$ 과정의 예측값 : 상수항 및 예측원점에 의존
− 예측오차의 분산: 발산

제10장 계절형 자기회귀-이동평균모형

- Z_t가 주기 $s(>1)$인 계절성을 가지는 시계열
  - 계절성(seasonality): $Z_t = Z_{t-s}$ for all t
  - R함수: forecast::findfrequency(y)

- 시계열 모형의 일반적 형태

  $Z_t = f(T_t, S_t, I_t)$ where T_t: 추세성분(비계절성분), S_t: 계절성분, I_t: 불규칙성분

  - 예: $Z_t = T_t + S_t + I_t$, $Z_t = T_t \cdot S_t + I_t$

- ARMA 오차를 가지는 회귀모형: $Z_t = a + bt + S_t + N_t$
  - S_t : 주기가 s인 결정적 t의 함수
    - $S_t = \sum_{j=1}^{K} \left\{ \beta_{1j} \sin\left(\frac{2\pi j}{s} t\right) + \beta_{2j} \cos\left(\frac{2\pi j}{s} t\right) \right\}$ for $1 \le K \le [s/2]$
    - Fourirer Terms: 차분방정식 $(1 - B^s) S_t = 0$의 일반해
  - N_t : 정상 $ARMA(p,q)$모형, $\phi(B) N_t = \theta(B) \varepsilon_t$, $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - R 함수: forecast::fourier(y, K)

- 계절성을 반영하기 위한 ARIMA 모형의 접근 방법
  - 계절성의 비정상성 부분은 계절 차분으로 제거; 즉, $S_t = S_{t-s} + \eta_t$
  - 계절성의 정상성 부분은 ARMA로 모형화
  - 비계절성 부분과 계절성 부분을 곱하기로 연결; AR 및 MA 부분이 인수분해된 형태

<u>Theorem (차분방정식의 해법 II)</u>

Consider the second-order difference equation with the following auxiliary equation:

$$1 - C_1 B - C_2 B^2 = (1 - m_1 B)(1 - m_2 B) = 0$$

with C_1 and $C_2 \in R$, $m_1 = c + di = \alpha(\cos\phi + i\sin\phi)$ and $m_2 = c - di = \alpha(\cos\phi - i\sin\phi)$.

Then, $Z_t = b_1 \alpha^t \cos\phi t + b_2 \alpha^t \sin\phi t$ where b_1 and b_2 are real.

- Note that $\alpha = (c^2 + d^2)^{1/2}$ and $\phi = \tan^{-1}(d/c)$.
- Example: Let $Z_t - Z_{t-4} = 0$. Find the closed form solution for Z_t.

$$C(B) = 1 - B^4 = 0 \quad \therefore \quad m = 1, -1, \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2), \cos(\pi/2) - i\sin(\pi/2)$$

$$Z_t = b_1 + b_2(-1)^t + b_3\cos(t\pi/2) + b_4\sin(t\pi/2) = b_1 + b_2\cos(t\pi) + b_3\cos(t\pi/2) + b_4\sin(t\pi/2)$$

$$= b_1 + \sum_{j=1}^{2}\{b_{1j}\cos(2\pi j/s)t + b_{2j}\sin(2\pi j/s)t\}$$

10.1 계절형 ARIMA 모형

- 시계열이 순수하게 계절형인 경우

  $\Phi(B^s)(1-B^s)^D Z_t = \delta + \Theta(B^s)u_t$

  where $u_t \sim WN(0,\sigma_u^2)$ and $\Phi(B^s) = (1-\Phi_1 B^s - \Phi_2 B^{2s} - \cdots - \Phi_P B^{Ps})$

  $\Theta(B^s) = (1-\Theta_1 B^s - \Theta_2 B^{2s} - \cdots - \Theta_Q B^{Qs})$

  − 관련된 문제: 어떻게 식별할 것인가?

  − ACF 및 PACF는 어떤 모양을 가지는가?

예제 10.1 상수항이 없는 계절형 MA 모형: $Z_t = (1-\Theta B^s)u_t$

자기상관함수: $\gamma_k = \begin{cases} (1+\Theta^2)\sigma_u^2, & k=0 \\ -\Theta\sigma_u^2, & k=s \\ 0, & k \neq 0,\, s \end{cases}$

ACF: $\rho_s = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=s \\ 0, & k \neq 0,\, s \end{cases}$

$\Rightarrow$ 계절 s에 해당하지 않는 모든 시차에서는 ACF=0

비계절 자기상관을 허용하지 않는 매우 제한적인 모형

- 계절 모형의 확장: $u_t \sim ARIMA(p,d,q)$ 모형 where $\Phi(B^s)(1-B^s)^D Z_t = \delta + \Theta(B^s)u_t$

Suppose: $\phi(B)(1-B)^d u_t = \theta(B)\varepsilon_t$, then

$$\phi(B)\Phi(B^s)(1-B^s)^D(1-B)^d Z_t = \delta^* + \theta(B)\Theta(B^s)\varepsilon_t$$

- $\delta^* = \phi(B)(1-B)^d\delta$
- AR 차수 $p+Ps$, MA 차수 $q+Qs$

- **승법계절모형(multiplicative seasonal model)**
- 표시: $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)s$ 모형; 단, s는 계절주기
- $\phi^*(B)(1-B^s)^D(1-B)^d Z_t = \delta^* + \theta^*(B)\varepsilon_t$의 형태 (비승법 모형과 비교)
- $\phi^*(B) = \phi(B)\Phi(B^s)$와 $\theta^*(B) = \theta(B)\Theta(B^s)$의 많은 계수들이 0이 됨

예제 10.2 $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ **모형**

$$W_t = (1-B)(1-B^{12})Z_t = (1-\theta B)(1-\Theta B^{12})\varepsilon_t$$

$$ACF:\ \rho_k = \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k=2,3,\cdots,10 \\ \dfrac{\theta\Theta}{(1+\theta^2)(1+\Theta^2)}, & k=11 \\ -\dfrac{\Theta}{1+\Theta^2}, & k=12 \\ \rho_{11}, & k=13 \\ 0, & k>13 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ACF는 시차 1, 11, 12, 13 에서만 0이 아님

시차 12를 중심으로 대칭 $\rho_{13} = \rho_{11}$

- 비승법계절모형

  $W_t = (1-\theta B - \Theta B^{12} - \theta_{13} B^{13})\varepsilon_t$, $\theta_{13} = -\theta\Theta$

  - $\theta_{13} = -\theta\Theta$인 $MA(13)$ 모형, 많은 B^k의 계수들이 0이 됨
  - $MA(13)$ 비승법 모형과 비교

    $$W_t = (1-\theta_1 B - \theta_{12} B^{12} - \theta_{13} B^{13})\varepsilon_t$$

    $$\rho_{11} = \frac{\theta_1\theta_{12}}{1+\theta_1^2+\theta_{12}^2+\theta_{13}^2} \quad \text{and} \quad \rho_{13} = \frac{-\theta_{13}}{1+\theta_1^2+\theta_{12}^2+\theta_{13}^2}$$

    일반적으로 $\rho_{11} \neq \rho_{13}$, 시차12를 중심으로 대칭이 아니다.
  - 비승법계절모형과 승법계절모형은 계절 시차를 중심으로 ACF들의 대칭 여부로 판단

예제 10.3 $ARIMA(0,0,1)(1,0,0)_{12}$ **모형**

$(1-\Phi B^{12})Z_t = (1-\theta B)\varepsilon_t$

자기상관함수:

$$\begin{cases} \gamma_0 = E[Z_t(\Phi Z_{t-12}+\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1})] \quad = \Phi\gamma_{12}+E[Z_t\varepsilon_t]-\theta E[Z_t\varepsilon_{t-1}] \\ \gamma_1 = E[Z_{t-1}(\Phi Z_{t-12}+\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1})] = \Phi\gamma_{11}-\theta E[Z_{t-1}\varepsilon_{t-1}] \\ \gamma_2 = \Phi\gamma_{10} \\ \quad\vdots \\ \gamma_{10} = \Phi\gamma_2 \\ \gamma_{11} = E[Z_{t-11}(\Phi Z_{t-12}+\varepsilon_t-\theta\varepsilon_{t-1})] = \Phi\gamma_1 \\ \gamma_{12} = \Phi\gamma_0 \\ \gamma_{13} = \Phi\gamma_1 \\ \gamma_k = \Phi\gamma_{k-12}, \;\; k > 13 \end{cases}$$

$$\gamma_0 = \Phi\gamma_{12} + (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \;\;,\;\; \gamma_{12} = \Phi\gamma_0 \quad \rightarrow \; \gamma_0 = \frac{1+\theta^2}{1-\Phi^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_1 = \Phi\gamma_{11} - \theta\sigma_\varepsilon^2 \;,\;\; \gamma_{11} = \Phi\gamma_1 \qquad\qquad \rightarrow \; \gamma_1 = -\frac{\theta}{1-\Phi^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_2 = \Phi\gamma_{10} \;\;,\; \gamma_{10} = \Phi\gamma_2 \qquad\qquad \rightarrow \; \gamma_2 = \gamma_3 = \cdots = \gamma_{10} = 0$$

$$\gamma_{11} = -\frac{\theta\Phi}{1-\Phi^2}\sigma_\varepsilon^2, \quad \gamma_{12} = \frac{\Phi}{1-\Phi^2}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow ACF:\ \rho_k = \begin{cases} -\dfrac{\theta}{1+\theta^2}, & k=1 \\ 0, & k=2,3,\ldots,10 \\ -\dfrac{\theta\Phi}{1+\theta^2}, & k=11 \\ \Phi, & k=12 \\ \rho_{11}, & k=13 \end{cases}$$

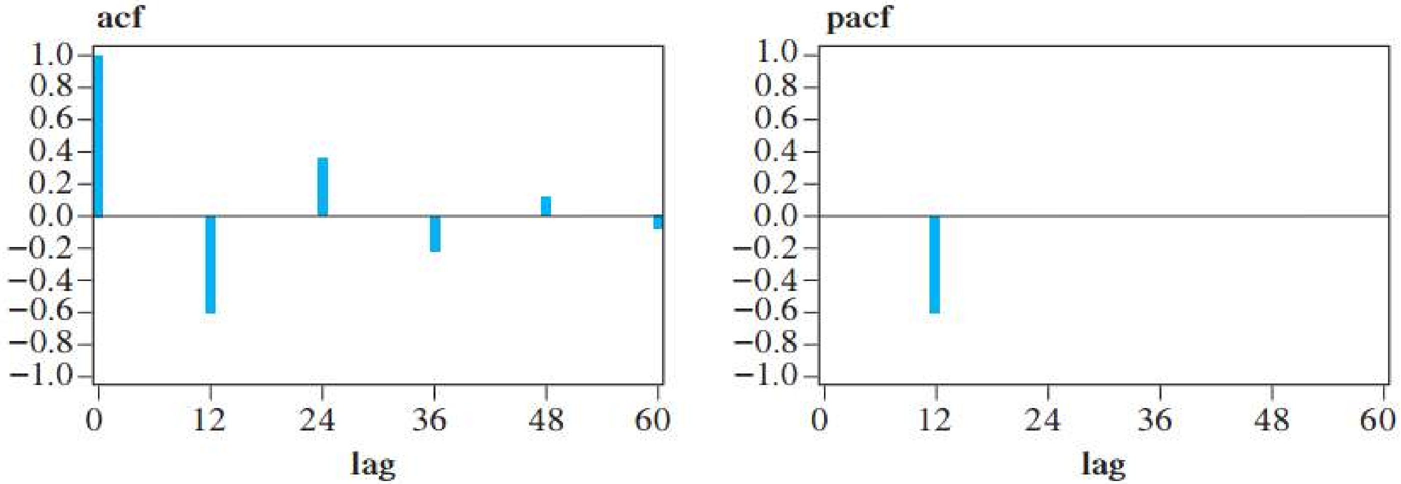
예제 10.4 $ARIMA(0,0,0)(1,0,0)_{12}$ **모형**

$(1-\Phi B^{12})Z_t = \varepsilon_t$

$$ACF:\ \rho_k = \begin{cases} \Phi^{k/12}, & k=12,24,\ldots \\ 0, & \text{그 외의 경우} \end{cases}$$

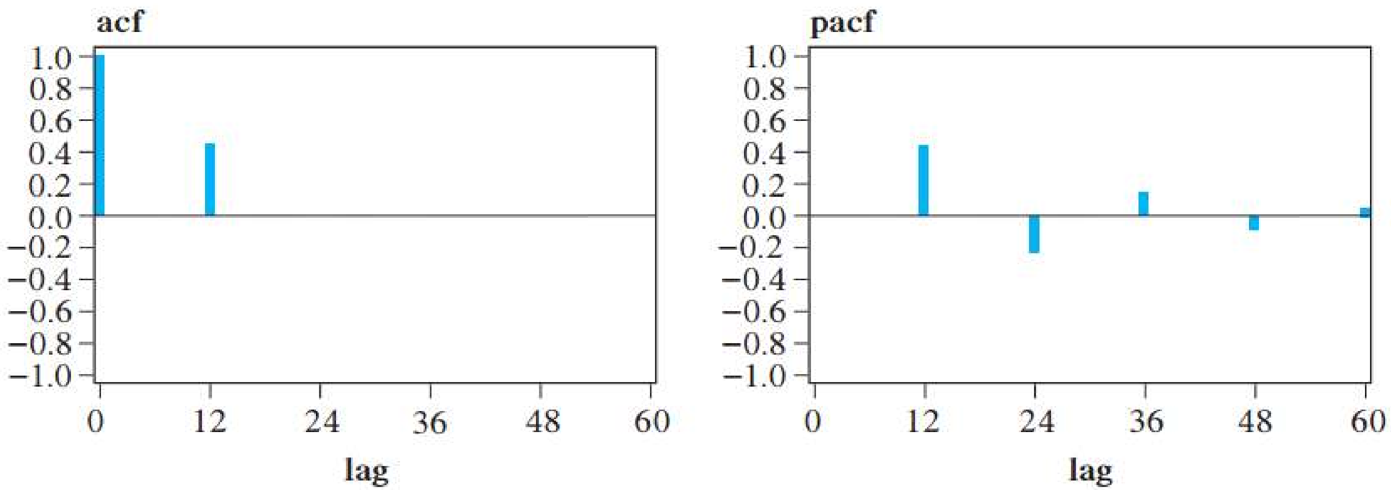
$\Rightarrow$ 계절 시차의 배수에 해당되는 12, 24, ... 등에서만 0이 아니고 다른 시차에서는 0이 됨

- 계절형 모형에서 PACF의 형태는 복잡한 형태; 단, 비계절형과의 조합을 유추할 수 있음.



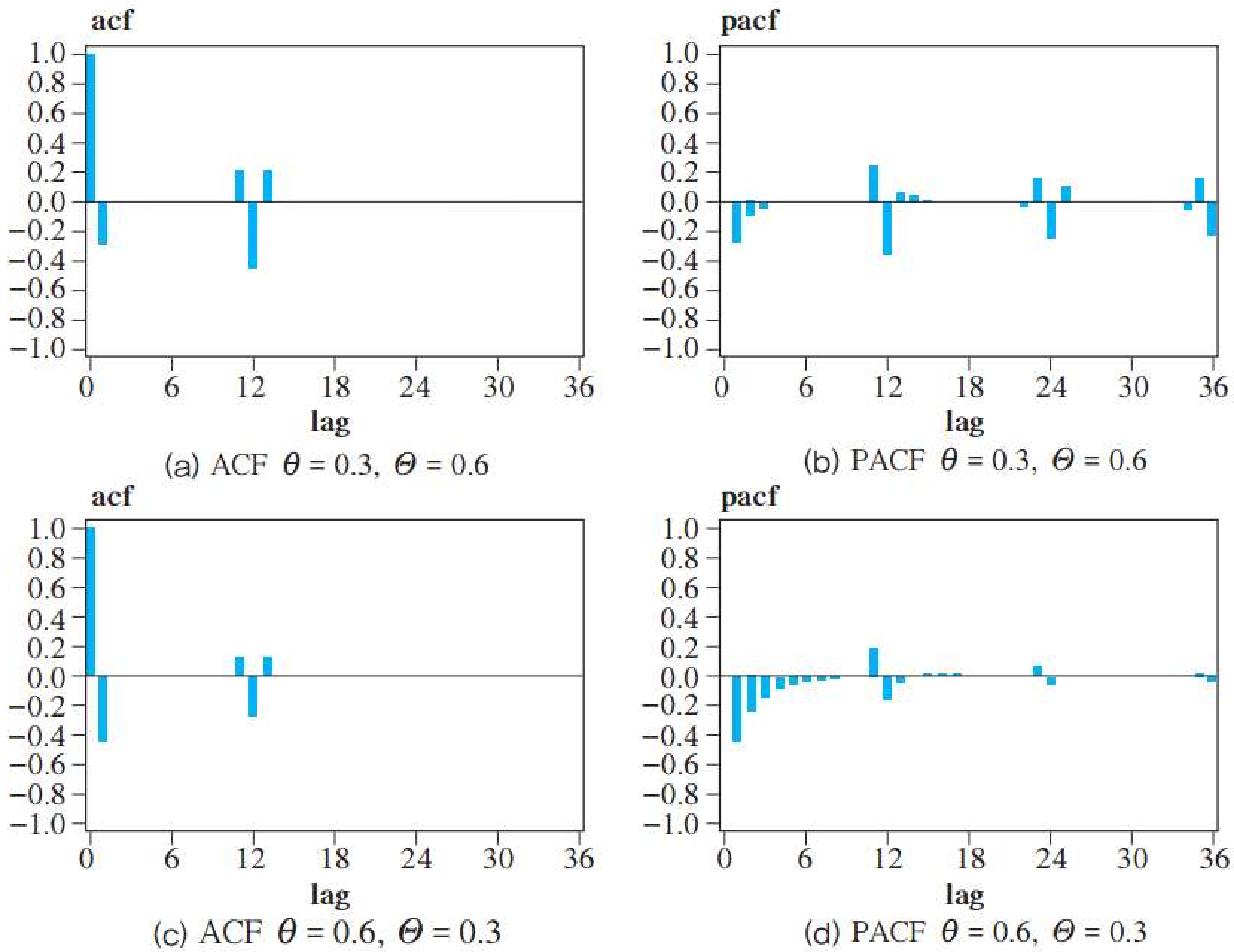
(c) ACF $\Phi = -0.6$ (d) PACF $\Phi = -0.6$

<그림 10.1> $ARIMA(0,0,0)(1,0,0)_{12}$ 모형의 ACF와 $PACF$

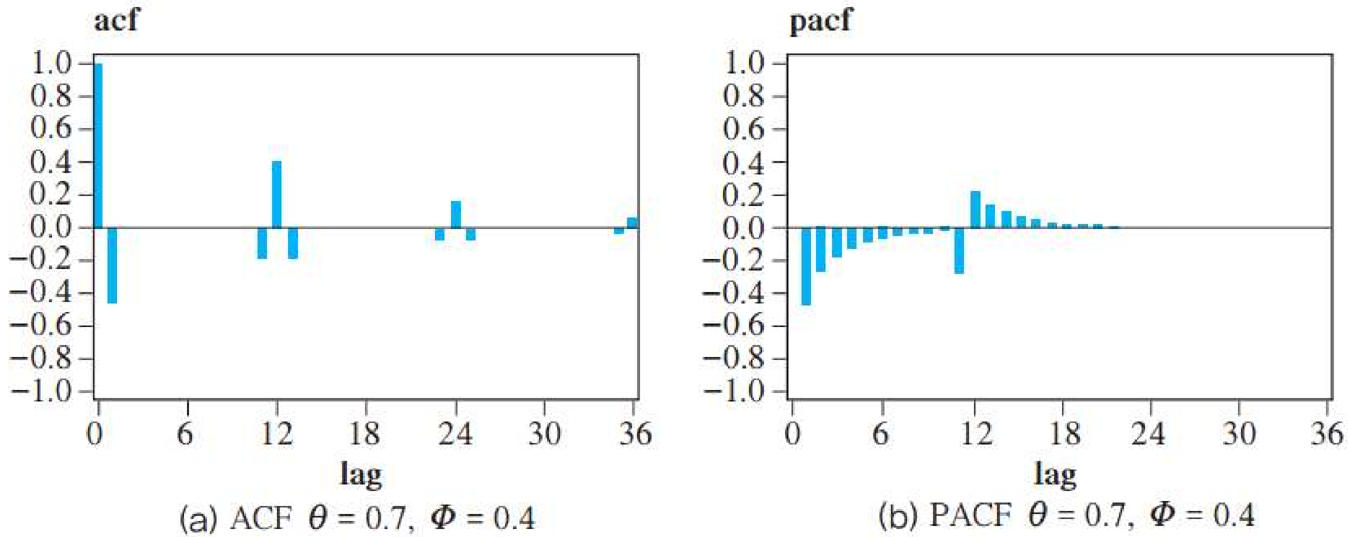


(c) ACF $\Theta = -0.6$ (d) PACF $\Theta = -0.6$

<그림 10.2> $ARIMA(0,0,0)(0,0,1)_{12}$ 모형의 ACF와 $PACF$



<그림 10.4> $ARIMA(0,0,1)(0,0,1)_{12}$ 모형의 ACF와 $PACF$

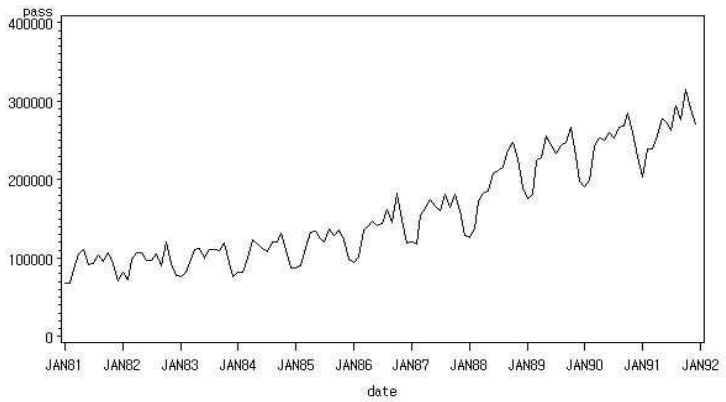


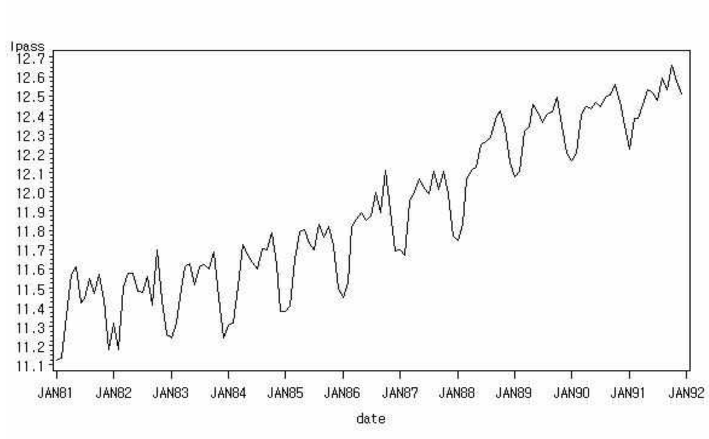
<그림 10.5> $ARIMA(0,0,1)(1,0,0)_{12}$ 모형의 ACF와 $PACF$

10.2 예제

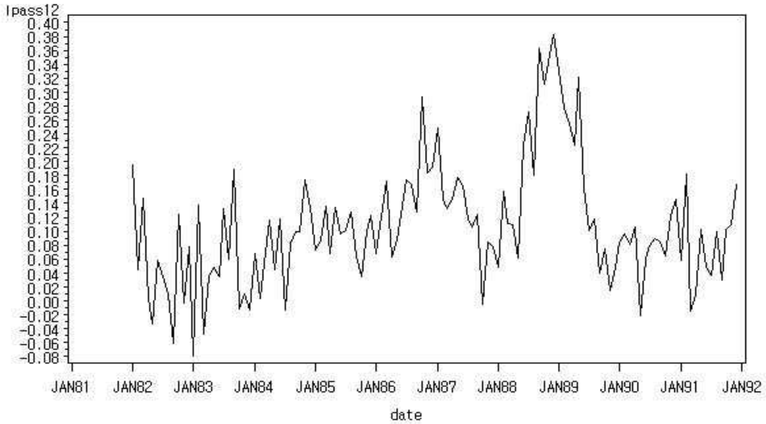
예제 10.5 승법계절 $ARIMA$ 모형의 적합예제

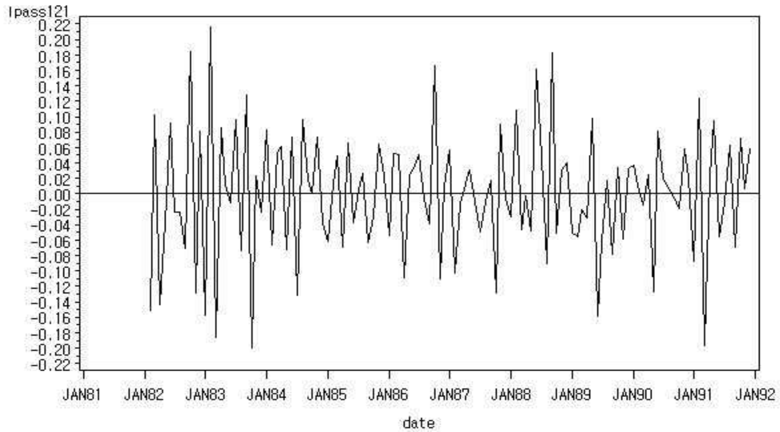
- 1981년 1월부터 1991년 12월까지 우리나라에 입국한 관광객의 시계열자료
- 로그변환을 통한 분산안정화 변환





<그림 10.7 & 10.8> 국내 입국관광객 자료 $\{Z_t\}$와 로그변환된 자료의 시계열그림, $\{\ln Z_t\}$

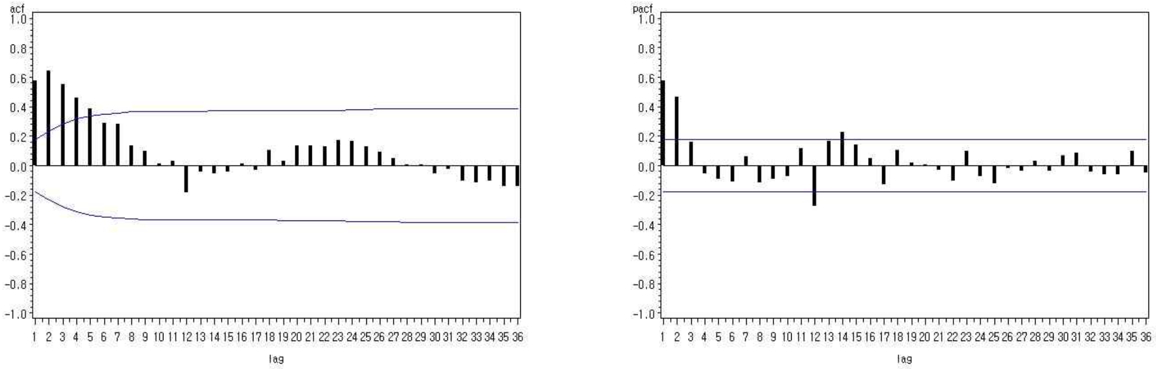




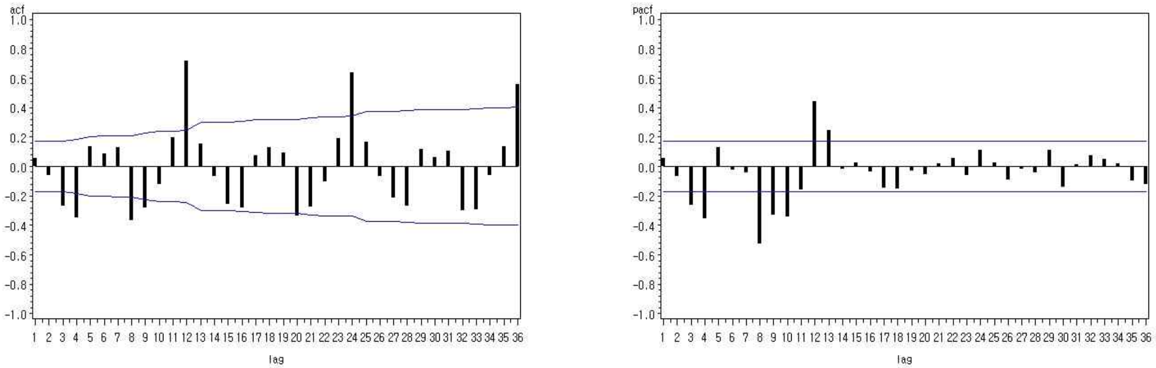
<그림 10.9> 로그변환과 계절차분된 자료의 시계열그림, $\{(1-B_{12})\ln Z_t\}$

<그림 10.10> 로그변환과 계절차분 및 1차 차분된 자료의 시계열그림, $\{(1-B)(1-B^{12})\ln Z_t\}$

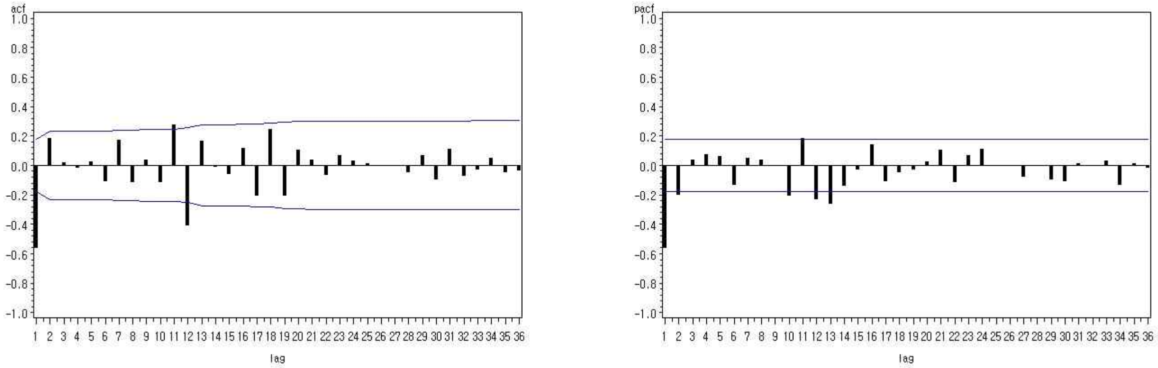
- 계절형 비정상성을 제거하기 위한 계절차분
  - 증가하는 추세를 제거하기 위해서 1차 차분 $(1-B)$를 먼저 실시할 수도 있음
  - 계절 차분 $(1-B^{12})$은 1차 차분 $(1-B)$을 포함하고 있으므로 계절차분만 해도 충분한 경우 있음
  - 그러나, 계절차분과 1차 차분을 동시에 실시해야 하는 경우도 많음



<그림 10.11> 계절차분 후의 *SACF*와 *SPACF*



<그림 10.12> 1차 차분 후의 *SACF*와 *SPACF*



<그림 10.13> 계절 및 1차 차분 후의 $SACF$와 $SPACF$

- $W_t = (1-B)(1-B^{12})\ln Z_t$ 의 $SACF$와 $SPACF$, <그림 10.13>
- 상수항이 없는 $ARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ 모형 적합

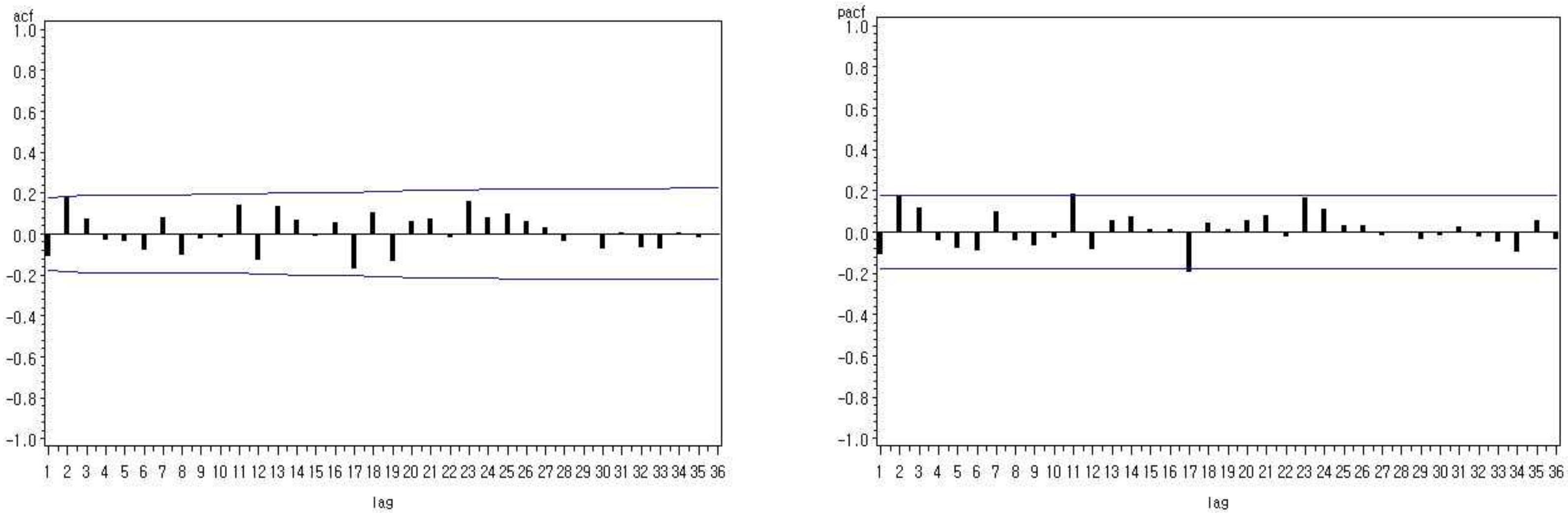
모수	추정값	표준오차	t-값	유의확률	lag
θ_1	0.542	0.08	6.79	<0.0001	1
Θ_{12}	0.519	0.09	5.77	<0.0001	12

$$\Rightarrow (1-B)(1-B^{12})Z_t = (1-0.542B)(1-0.519B^{12})\varepsilon_t$$

[표 10.1] 잔차의 백색잡음 여부 판정을 위한 포맨토우검정 결과

포트맨토 검정

lag	카이제곱	자유도	유의확률	자기상관계수					
6	6.34	4	0.175	-0.110	0.156	0.107	-0.008	-0.030	-0.050
12	10.57	10	0.392	0.060	-0.102	-0.006	-0.073	0.098	-0.055
18	17.04	16	0.383	-0.039	-0.003	-0.036	0.004	-0.172	0.116
24	25.25	22	0.285	-0.109	0.042	0.077	-0.063	0.160	0.077
30	27.22	28	0.506	0.052	0.007	0.019	-0.092	-0.018	-0.024
36	30.41	34	0.644	-0.047	-0.069	-0.093	-0.052	-0.022	-0.017



<그림 10.15> 잔차의 $RSACF$와 $RSPACF$

제12장 개입분석(intervention analysis)

- ○ time series modeling + external information
  (time series' normal behavior) (effects of interventions)
- ○ a formal test of a change in the mean of a time series
- ○ 즉, 개입이 시계열의 평균을 어떤 형태로(얼마나) 변화시켰는가?

ex1. Sky jackings & metal detectors (1968:1~1988:4, quarterly)

- Enders, Sandler, and Cauleg (1990)
- USA & other countries began to install metal detectors in January 1973
- The number of skyjacking incidents appears to take a sizable and permanent decline at this date
- We are interested in actually measuring the effects of installing the metal detectors.

Poor test

- Comparison of the means of
  $\{Y_t\}$ for $\forall t < 1973:1$ and $\{Y_t\}$ for $\forall t \geq 1973:1$
- However, successive values of y_t are serially correlated

개입 ARIMAX 모형 활용 사례

- **환경(수질), 교통, 질병, 행정, 석유파동, 상품광고 등 다양한 분야에서 활용**

국외 활용사례

- **환경**
  - ✓ Quinte Bay(1972-2008년)의 인(P)과 클로로필에 대한 개입시계열분석 (Nicholls, 2012)
  - ✓ LA 지역 오존 농도(1955-1972년)의 개입시계열분석 (Box and Tiao, 1975)
- **교통**
  - ✓ 9/11이 미국 항공여행수요에 미친 영향 분석 (Lai and Lu, 2005)
  - ✓ 항공기 납치 사건에 미치는 금속탐지기 도입 효과 (Enders and Sandler, 1993)

국내 활용사례

- **교통**
  - ✓ 경부고속도로 최고제한속도 상향에 따른 교통사고 영향 분석 (Song and Seong, 2017)
  - ✓ 개입모형을 이용한 한국의 입출국자 수의 분석 (Kim and Seong, 2011)
  - ✓ 계절형 ARIMA-Intervention 모형을 이용한 여행목적별 제주 관광객 수 예측에 관한 연구 (Song, 2019)
- **보건 행정**
  - ✓ 시계열 자료를 이용한 병원 간호 인력의 변화 추이 및 병원 간호사 확보를 위한 정책의 효과 평가 (Part et al., 2012)

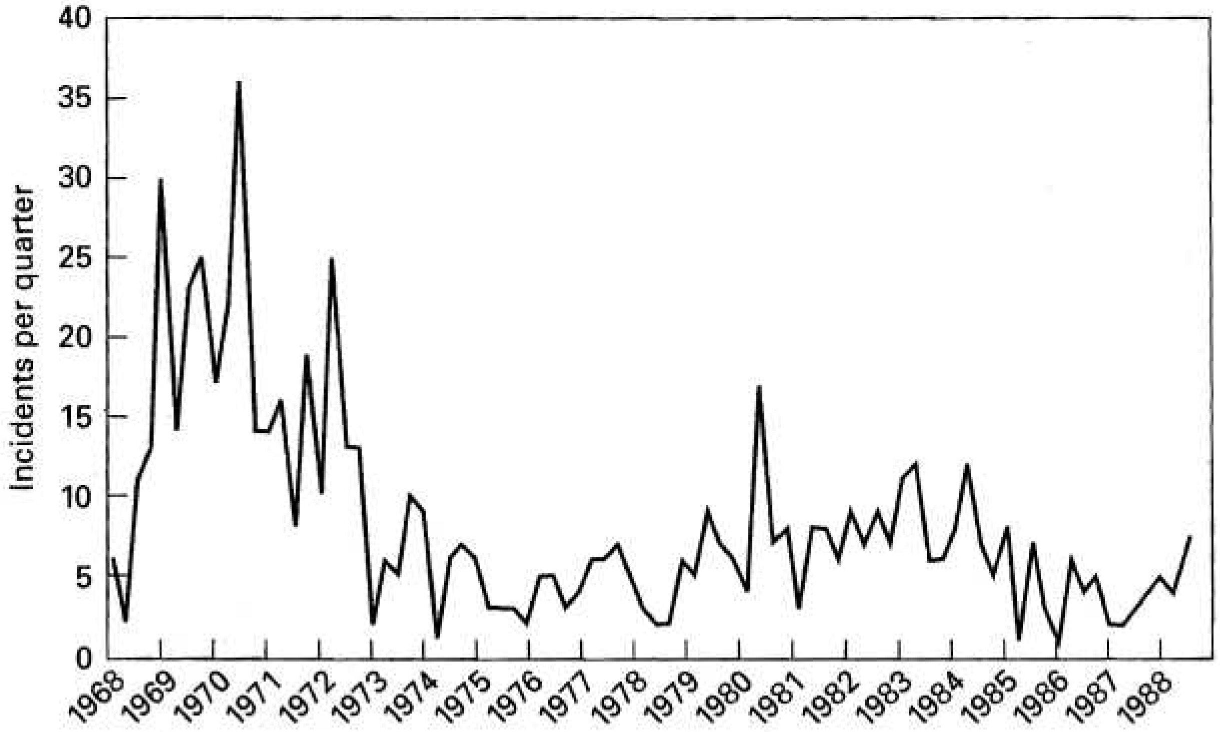


FIGURE 5.2 Skyjackings

Quarterly totals of all transnational and U.S. domestic skyjackings
(미국을 포함한 전세계적, 분기별 총 항공기납치 건수)

(1) Intervention analysis

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + c_0 z_t + \varepsilon_t \quad , \qquad |a_1| < 1$$

where $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ and $z_t = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1973:1 \\ 1 & \text{for } t \geq 1973:1 \end{cases}$

- 가정: Y_t는 ARIMA 모형을 따르고 그 기본구조는 변화없다.
- z_t : dummy variable
- For $t < 1973:1$,
  intercept: a_0 , (long-run) mean of Y_t : $a_0/(1-a_1)$
- For $t \geq 1973:1$,
  intercept: $a_0 + c_0$, (long-run) mean of Y_t : $(a_0 + c_0)/(1-a_1)$
- long-run effect of the intervention : $\dfrac{c_0}{1-a_1}$

- extensions
  - $Y_t = a_0 + \phi(B) Y_{t-1} + c_0 z_t + \theta(B) \varepsilon_t$
  - $Y_t = a_0 + \phi(B) Y_{t-1} + c_0 z_{t-d} + \theta(B) \varepsilon_t$: d-시차 지연

- Several intervention function (IF) (z_t의 형태; assume a delay of 3 time unit)

  (i) step (pure jump) function; (ii) pulse function

  (iii) gradually changing function; (iv) prolonged impulse function

  – step function: 영구적인 변화; 예: 법 또는 제도의 시행, 댐 건설

  – pulse function: 일시적인 변화; 예: 질병 유행, 대형 사고(9/11, 지진 등)

  – Often, the shape of the IF and the delay factor d are clear from ***a priori reasoning***

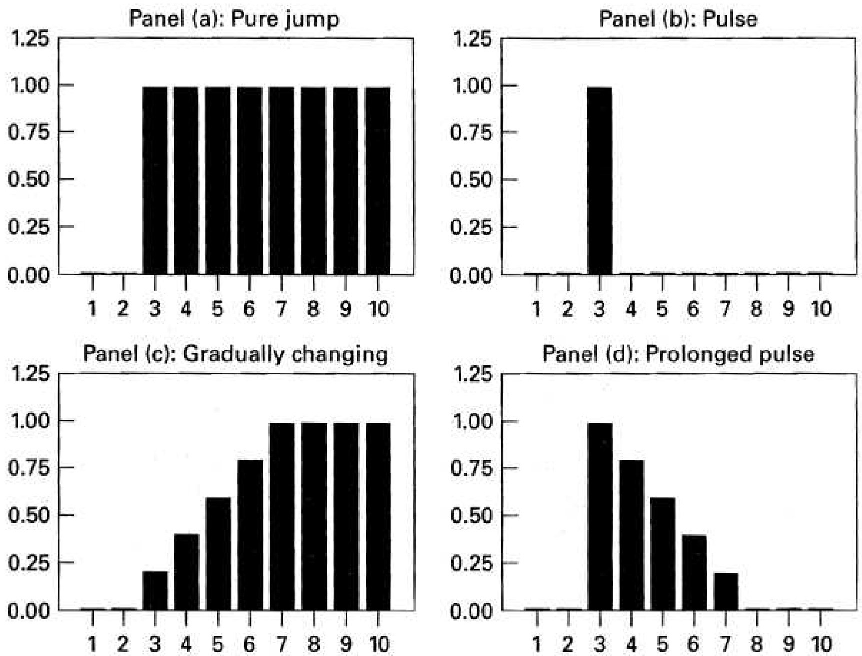


FIGURE 5.3 Typical Intervention Functions

(2) Estimation

Step1 :

Use the longest data span (i.e., either the pre− or the post−intervention observations) to find a plausible set of ARIMA models and **be careful that the sequence is stationary**.

cf) may use the pre−invention observations irrespective of the data span

Step2 :

Estimate the various models over the entire sample period, including the **effect of the intervention**

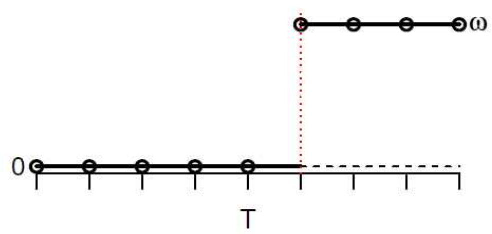
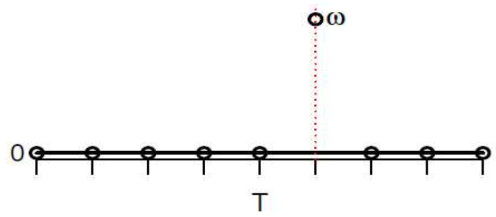
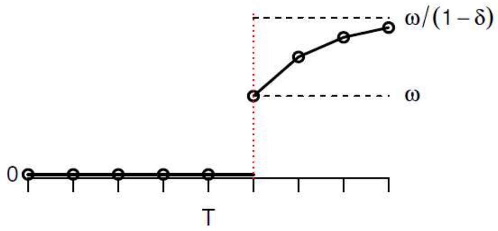
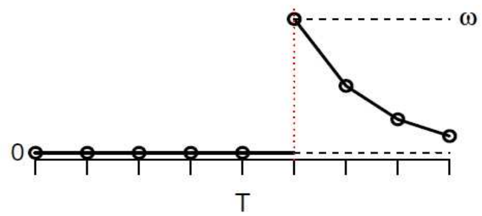
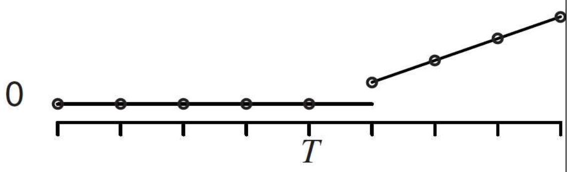
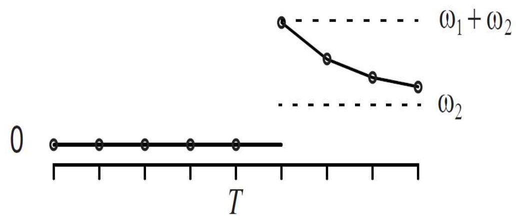
Step3 :

Perform diagnostic checks of the estimated equations

- statistical significance of coefficients
- residuals check (WN, normality,...)
- compare the results of the maintained model to those of reasonable rivals

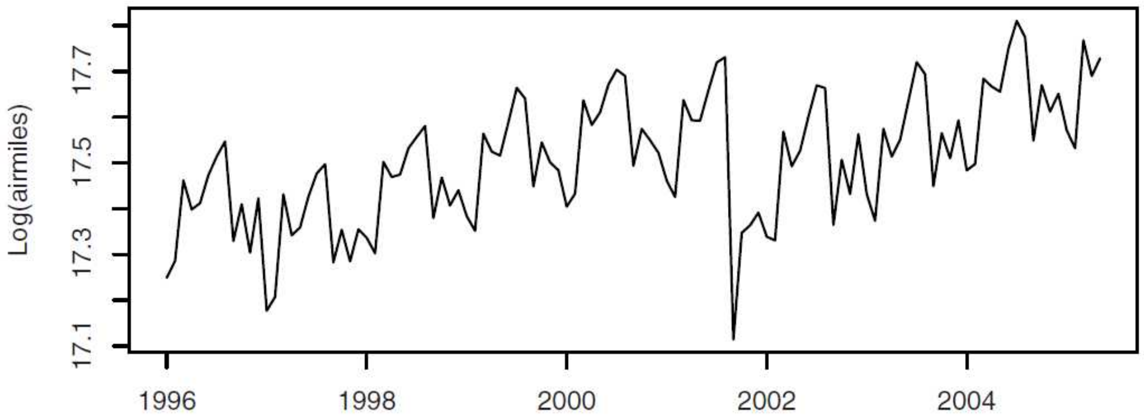
(3) 개입함수의 형태들 (개입 발생 시점을 T & $d=1$로 가정)

Let $I_t = \begin{cases} 1 & , t \geq T \\ 0 & , t < T \end{cases}$ and $P_t = \begin{cases} 1 & , t = T \\ 0 & , t \neq T \end{cases}$

Step Type		Pulse Type	
$z_t = wBI_t$		$z_t = wBP_t$	
$z_t = \dfrac{w}{1-\delta B} BI_t$		$z_t = \dfrac{w}{1-\delta B} BP_t$	
$z_t = \dfrac{w}{1-B} BI_t$		$z_t = \left[\dfrac{w_1}{1-\delta B} + \dfrac{w_2}{1-B} \right] BP_t$	

추가적 형태: ① $z_t = \dfrac{w}{1-B^4} B^d I_t$ ② $z_t = w_0 P_t + \dfrac{w_1}{1-w_2 B} P_t$ (a strong instantaneous chilly effect) ex2. (Monthly U.S. passenger−airmiles data : Jan. 1996 through May. 2005)

(passenger−airmiles: 모든 승객들의 탑승거리 miles의 합)



− the terrorist attacks of Sep. 2001 deeply depressed air traffic around that period, but air traffic gradually regained the losses as time went on

− how to model the intervention effect (9/11 effect)

$z_t = w_0 P_t + \frac{w_1}{1 - w_2 B} P_t$ 를 이용한다면,

- $w_0 + w_1$: instantaneous 9/11 effect
- for $k \geq 1$, $w_1(w_2)^k$: 9/11 effect k months afterward

Step1 : Based on the preintervention logged data, log ARIMA(0,1,1)×(0,1,1)

Step2 : Include Intervention effect

- fitted model: $\log Y_t = z_t + N_t = w_0 P_t + \frac{w_1}{1-w_2 B} P_t + \frac{(1-\theta B)(1-\Theta B^{12})}{(1-B)(1-B^{12})}\epsilon_t$

- 9/11에 대한 airmiles의 변화비율 계산

  (9/11이 없었다면, n_t ; 9/11에 의해서는 Y_t ; 감소량은, $n_t - Y_t$)

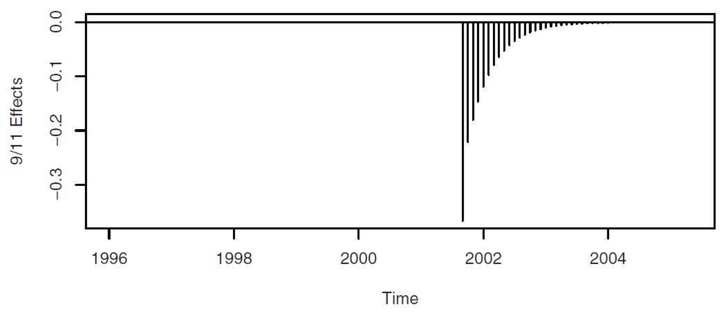
$$n_t = \exp(N_t) \text{ 라고 하면, } Y_t = \exp\left(w_0 P_t + \frac{w_1}{1-w_1 B} P_t\right) n_t$$

따라서, 9/11에 의한 승객 감소 비율은, $\frac{n_t - Y_t}{n_t} \times 100 = \left(1-\exp\left(w_0 P_t + \frac{w_1}{1-w_2 B} P_t\right)\right) \times 100$

$$t = T \text{ (Sep-2001)이면, } \frac{n_T - Y_T}{n_T} \times 100 = \left(1-\exp\left(w_0 + w_1\right)\right) \times 100$$

$$t = T+k \text{ 이면, } \frac{n_{T+k} - Y_{T+k}}{n_{T+k}} \times 100 = \left(1-\exp\left(w_1 w_2^k\right)\right) \times 100$$

Exhibit 11.8 The Estimated 9/11 Effects for the Air Passenger Series

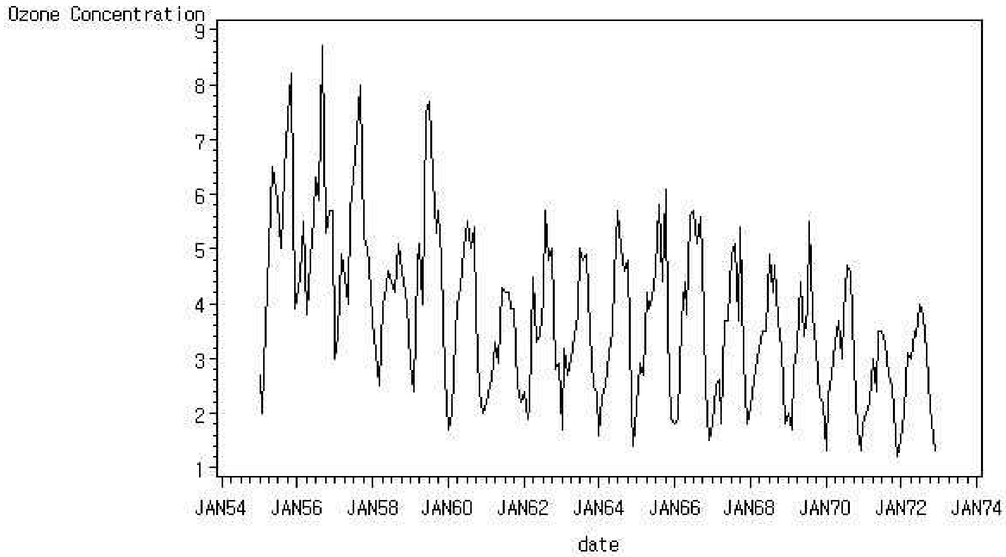


ex3.(Ozone 자료; 조신섭, 손영숙 (2002, p.409))

— LA지역 Ozone농도 (1955.1~1972.12)

— 1960 : 활성 탄화수소 제한하는 법(Rule 63) (판매되는 휘발유에 제한)

1966 : 오존 발생량을 줄일 수 있는 엔진을 필수적으로 장착해야 하는 법안이 통과



Step1 : 1955~1959

$$\left(1-B^{12}\right)Y_t=(1-\theta B)\left(1-\Theta B^{12}\right)\varepsilon_t$$

Step2 :

$$I_{1t}=\begin{cases}0 & ,t<1960:1\\ 1 & ,t\geq 1960:1\end{cases}$$

$$I_{2t}=\begin{cases}1 & ,\ summer(1966\text{년 이후 } 6\sim 10\text{월})\\ 0 & ,o.w\end{cases}$$

$$I_{3t}=\begin{cases}1 & ,winter(1966\text{년 이후 } 11\sim 5\text{월})\\ 0 & ,o.w\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 새로운 엔진이 여름철과 겨울철에 효과가 다르다고 판단

$$Y_t=w_1I_{1t}+\frac{w_2}{1-B^{12}}I_{2t}+\frac{w_3}{1-B^{12}}I_{3t}+\frac{(1-\theta B)\left(1-\Theta B^{12}\right)}{1-B^{12}}\varepsilon_t$$

제15장 벡터 시계열 모형

경기지표 연구 : 국내총생산(GDP), 실업률, 고용률, 수출입액과 총투자액 등
회사의 매출성과 연구 : 판매량, 판매가격, 판매인력 및 광고비용 등

전이함수모형 : 여러 개의 입력 시계열과 한 개의 출력 시계열 간의 입출력 관계
자기회귀오차모형 : 종속변수와 연관이 되는 여러 개의 독립변수들 간의 관계

제약점 : 피드백(feedback)을 다룰 수 없거나 특정한 형태의 오차모형만을 사용할 수 있다

벡터(vector) 또는 다변량(multivariate) 시계열 모형
여러 개의 시계열 변수들을 동시에 고려
이들의 동적인 특성과 상호작용을 분석

15.1 공분산과 정상성

벡터 시계열 Z_t : m 개의 일변량 시계열변수 Z_{it}들로 구성된 랜덤벡터

$Z_t = (Z_{1t}, Z_{2t}, \cdots, Z_{mt})'$

▶ 엄격한 의미의 정상성(strictly stationarity)
임의의 자연수 $t_1, t_2, \ldots, t_n$과 k에 대하여
확률벡터 $(\boldsymbol{Z}_{t_1}, \boldsymbol{Z}_{t_2}, \cdots, \boldsymbol{Z}_{t_n})$의 jpdf와 $(\boldsymbol{Z}_{t_1+k}, \boldsymbol{Z}_{t_2+k}, \cdots, \boldsymbol{Z}_{t_n+k})$의 jpdf가 동일한 경우

▶ 약한 의미의 정상성(weakly stationrity)
1차와 2차 적률들이 시간의 흐름에 따라 불변

15.1.1 상관계수 행렬

▶ 교차공분산(cross covariance) 행렬 $\Gamma(k)$
$E(\boldsymbol{Z}_t) = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)'$ for $E(Z_{it}) = \mu_i$, $\mu_i (i = 1, \ldots, m)$: 시간 t와 무관하게 일정

$$\Gamma(k) = Cov(\boldsymbol{Z}_t, \boldsymbol{Z}_{t-k}) = E[(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Z}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \cdots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{21}(k) & \cdots & \gamma_{2m}(k) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \cdots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix}$$

$E(Z_{it} - \mu)(Z_{j,t-k} - \mu) = \gamma_{ij}(k)$: Z_{it}와 $Z_{j,t-k} (j \neq i)$의 공분산
$\Rightarrow$ 시간 t와 무관하고 시차 k에만 의존

유의 : 시차 $k(\neq 0)$의 교차공분산 행렬은 대칭성이 성립하지 않는다

$\gamma_{12}(k) = Cov(Z_{1t}, Z_{2,t-k}) \neq Cov(Z_{2t}, Z_{1,t-k}) = \gamma_{21}(k)$

▶ **교차상관계수 행렬**(cross−correlation matrix) $\boldsymbol{\rho}(k)$

$$\boldsymbol{\rho}(k) = D^{-1/2}\,\Gamma(k)\,D^{-1/2} = [\,\rho_{ij}(k)\,]\,.$$

$$D = diag[\,\gamma_{11}(0), \gamma_{22}(0),\, \cdots, \gamma_{mm}(0)\,]$$

$D^{-1/2}$은 $D^{1/2}D^{1/2} = D$를 만족하는 $(m \times m)$차원 행렬 $D^{1/2}$의 역행렬

$\rho_{ij}(k)$: Z_{it}와 $Z_{j,t-k}$의 상관계수

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii(0)}\gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(Z_{it}, Z_{j,t-k})}{\sqrt{Var(Z_{it})\,Var(Z_{jt})}}\,.$$

정상성의 가정 하에서 $\Gamma(k) = \Gamma'(-k)$, $\boldsymbol{\rho}(k) = \boldsymbol{\rho}'(-k)$

예: $\rho_{12}(k) = Corr(Z_{1t}, Z_{2,t-k}) = Corr(Z_{2,t-k}, Z_{1t}) = \rho_{21}(-k)$

- Z_{it} **와** $Z_{jt}\,(j \neq i)$ **의 연관성**

(1) 모든 $k \geq 0$에 대하여 $\rho_{ij}(k) = \rho_{ji}(k) = 0$이면 두 시계열 사이에 **선형상관**(linear correlation) 관계가 없다.

(2) $\rho_{ij}(0) \neq 0$이면 두 시계열 사이에 **동행상관**(concurrent correlation) 관계가 있다.

(3) 임의의 $k > 0$에 대하여 $\rho_{ij}(k) = 0$이고 $\rho_{ji}(k) = 0$이면, 두 시계열 사이에 **선후행**(lead−lag) 관계는 없다.

(4) 모든 $k > 0$에 대하여 $\rho_{ji}(k) = 0$이지만 임의의 $\ell > 0$에 대하여 $\rho_{ij}(\ell) \neq 0$이면, 에서 로 한 쪽 방향으로만 선형 관계가 존재한다. 즉, Z_{jt}은 Z_{it}의 임의의 과거값들에 의존하지 않으나 는 Z_{jt}의 과거값들에 의존한다.

(5) 임의의 $k > 0$와 $\ell > 0$에 대하여 $\rho_{ij}(k) \neq 0$와 $\rho_{ji}(\ell) \neq 0$이 성립한다면 두 시계열 사이에 **피드백**(feedback) 관계가 있다.

- 표본교차공분산 행렬 $\hat{\Gamma}(k)$와 표본교차상관계수 행렬 $\hat{\boldsymbol{\rho}}(k)$

$$\hat{\Gamma}(k) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(\boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}})(\boldsymbol{Z}_{t-k} - \overline{\boldsymbol{Z}})', \qquad \hat{\boldsymbol{\rho}}(k) = \hat{D}^{-1/2}\,\hat{\Gamma}(k)\,\hat{D}^{-1/2} \quad \text{for } k \geq 0$$

where $\overline{\boldsymbol{Z}} = \left(\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{Z}_t\right)/n$는 표본평균 벡터이고 $\hat{D} = diag\left[\,\hat{\gamma}_{11}(0), \cdots, \hat{\gamma}_{mm}(0)\,\right]$

15.2 벡터 자기회귀이동평균모형(vector ARMA; VARMA)

15.2.1 벡터 자기회귀과정 $VAR(p)$

$$Z_t = \delta + \Phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{또는} \quad (I - \Phi_1 B) Z_t = \delta + \varepsilon_t$$

δ : m차원 벡터

Φ : $(m \times m)$차원 행렬

$\{\varepsilon_t\}$: 평균 $\mathbf{0}$, 공분산 행렬 Σ_ε인 서로 상관관계가 없는 확률 벡터

Σ_ε는 $(m \times m)$차원 양정치(positive definite) 행렬

$m = 2$인 경우 $VAR(1)$:

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

또는

$$Z_{1t} = \delta_1 + \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad Z_{2t} = \delta_2 + \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + \varepsilon_{2t}$$

▶ 그랜저 인과성(Granger causality)

- $\phi_{12}=0$ 이고 $\phi_{21}\neq 0$ 인 경우, Z_{1t} 는 $Z_{2,t-1}$ 에 의존하지 않고 Z_{2t} 는 $Z_{1,t-1}$ 에 의존
- $Z_{1,t-1}$ 를 알면 Z_{2t} 를 예측하는 데 도움을 주지만, 그 역은 성립하지 않음을 의미
- 입력변수 Z_{1t} 에서 출력변수 Z_{2t} 방향으로의 인과성
- 원인과 결과를 의미하지 않고 단지 예측력 측면에서 Z_{1t} 는 Z_{2t} 의 설명변수 역할

▶ $VAR(1)$ 의 정상성 조건

$|\Phi(B)|=|I-\Phi B|=0$ 의 근이 단위원 밖에 있다 (근의 절대값이 1 보다 크다)

I : m 차원의 단위행렬

$\lambda=1/B$ 라고 놓으면 $|I-\Phi B|=0$ 는 $|\lambda I-\Phi|=0$ 와 동치

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$: $|\lambda I-\Phi|=0$ 를 만족하는 Φ 의 고유값

$|\lambda_i|<1, i=1, \ldots, m$ 은 $VAR(1)$ 이 정상성을 만족할 필요충분조건

$VAR(1)$ 의 정상성 가정 하에서

$$E(\boldsymbol{Z}_t) = \boldsymbol{\mu} = (I - \Phi_1)^{-1}\boldsymbol{\delta} \text{ 또는 } (I - \Phi_1)\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\delta},$$

$$\Gamma(k) = E[(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{Z}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{cases} \Phi_1\Gamma(-1) + \Sigma_\varepsilon, & k = 0 \\ \Phi_1\Gamma(k-1) = \Phi_1^k\Gamma(0), & k \ge 1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\rho}(k) = \Upsilon^k\boldsymbol{\rho}(0),\ k > 0$$

$$\Upsilon = D^{-1/2}\Phi_1 D^{1/2}.$$

$VAR(p)$ 과정:

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\delta} + \Phi_1\boldsymbol{Z}_{t-1} + \cdots + \Phi_p\boldsymbol{Z}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} \Phi_{11,j} & \Phi_{12,j} & \cdots & \Phi_{1m,j} \\ \Phi_{21,j} & \Phi_{22,j} & \cdots & \Phi_{2m,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{m1,j} & \Phi_{m2,j} & \cdots, & \Phi_{mm,j} \end{bmatrix}, j = 1, \ldots, p \quad (m \times m) \text{ 차원 행렬}$$

또는

$$\Phi(B)\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

where $\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p$: 후진작용소의 행렬 다항식

▶ $VAR(p)$ **모형의 정상성 조건**: $|\Phi(B)| = 0$ 의 모든 근들이 단위원 밖에 존재

$$\boldsymbol{Y}_t = \Phi \boldsymbol{Y}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t$$

$$\boldsymbol{Y}_t = (\boldsymbol{Z}_t', \boldsymbol{Z}'_{t-1} \cdots, \boldsymbol{Z}'_{t-p+1})' \text{ and } \quad \boldsymbol{\epsilon}_t = (\boldsymbol{\varepsilon}'_t, \mathbf{0}', \cdots, \mathbf{0}')'$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \cdots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{bmatrix}$$

$(mp \times mp)$ 행렬 Φ의 고유값이 1 보다 작다는 조건과 동일

정상성 가정 하에서

$$E(\boldsymbol{Z}_t) = \boldsymbol{\mu} = (I - \Phi_1 - \cdots - \Phi_p)^{-1}\boldsymbol{\delta} = [\Phi(1)]^{-1}\boldsymbol{\delta},$$

$$\Gamma(k) = \Phi_1 \Gamma(k-1) + \cdots + \Phi_p \Gamma(k-p), \ k > 0$$

$$\boldsymbol{\rho}(k) = \Upsilon_1 \boldsymbol{\rho}(k-1) + \cdots + \Upsilon_p \boldsymbol{\rho}(k-p), \ k > 0$$

$$\Upsilon_i = D^{-1/2} \Phi_i D^{1/2}.$$

▶ 부분자기회귀(partial autoregression) 행렬 $P(k)$

Tiao and Box (1981)는 PACF를 다변량으로 확장 다변량 선형회귀모형에서 로 정의

$$\boldsymbol{Z}_{t+k} = \Phi_{k,1}\boldsymbol{Z}_{t+k-1} + \Phi_{k,2}\boldsymbol{Z}_{t+k-2} + \cdots + \Phi_{k,k}\boldsymbol{Z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{k,t+k}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,t+k}$는 오차항, 계수행렬 $\Phi_{k,s},\ s = 1,2,\ \ldots, k$

$E[(\boldsymbol{Z}_{t+k} - \Phi_{k,1}\boldsymbol{Z}_{t+k-1} - \cdots - \Phi_{k,k}\boldsymbol{Z}_t)(\boldsymbol{Z}_{t+k} - \Phi_{k,1}\boldsymbol{Z}_{t+k-1} - \cdots - \Phi_{k,k}\boldsymbol{Z}_t)']$을

최소로 하는 $m \times m$ 행렬 $\Phi_{k,s}$는 다음과 같은 다변량 Yule-Walker **방정식**으로부터 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \cdots & \Gamma'(k-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \cdots & \Gamma'(k-2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Gamma(k-1) & \Gamma(k-2) & \cdots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{k,1}' \\ \Phi_{k,2}' \\ \vdots \\ \Phi_{k,k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(k) \end{bmatrix}$$

$VAR(p)$ 과정의 $\Phi_{k,k}$ 의 성질: $\Phi_{k,k} = \begin{cases} \Phi_p, & k = p \\ \boldsymbol{0}, & k > p \end{cases}$

- $VAR(p)$ 모형의 차수 p를 결정하는데 유용하게 이용
- **유의** : $\Phi_{k,k}$의 원소들은 일변량의 경우와는 달리 부분자기상관계수가 아니다

15.2.2 벡터 이동평균과정 $VMA(q)$

$VMA(1)$ **모형:** $\quad Z_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$ 또는 $Z_t = \boldsymbol{\mu} + (I - \Theta_1 B)\boldsymbol{\varepsilon}_t$

$\boldsymbol{\mu}$: m 차원 평균벡터

Θ_1 : $(m \times m)$ 차원 행렬

$\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$: 평균 $\mathbf{0}$, 공분산 행렬 Σ_ε 서로 상관관계가 없는 확률 벡터

Σ_ϵ 는 $(m \times m)$ 차원 양정치(positive definite) 행렬

$VMA(1)$ 과정의 공분산 및 교차공분산 행렬 $\Gamma(k)$:

$$\Gamma(0) = E[(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1})(\boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1})'] = \Sigma_\varepsilon + \Theta_1 \Sigma_\varepsilon \Theta'_1$$

$$\Gamma(k) = E[(Z_t - \boldsymbol{\mu})(Z_t - \boldsymbol{\mu})'] = \begin{cases} -\Theta \Sigma_\varepsilon, & k = 1 \\ \mathbf{0}, & k > 1 \end{cases}$$

$$\Gamma(-1) = \Gamma'(1)$$

$$\Gamma(k) = \mathbf{0},\ k > 1$$

: $VMA(1)$과정은 $\Sigma_\varepsilon = Cov(\boldsymbol{\varepsilon}_t)$가 존재하기만 하면 항상 정상성을 만족

▶ 가역성(invertibility) 조건

$|I-\Theta_1 B|=0$의 근이 1 보다 크다

Θ_1의 고유값의 절대값이 모두 1 보다 작다는 조건과 동일

$VMA(q)$ **모형:**

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} - \cdots - \Theta_q \boldsymbol{\varepsilon}_{t-q} \quad \text{또는} \quad \boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu} + \Theta(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t .$$

Θ_i : $(m \times m)$차원 행렬

$\Theta(B) = I - \Theta_1 B - \cdots - \Theta_q B^q$: 후진작용소에 의한 행렬 다항식

- $VMA(q)$ 과정은 항상 정상성을 만족
- $|\Theta(B)|=0$의 모든 근들이 단위원 밖에 존재하면 가역성을 만족

① $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{Z}_t)$

② $\Gamma(0) = \Sigma_\varepsilon + \Theta_1 \Sigma_\varepsilon \Theta_1{}' + \cdots + \Theta_q \Sigma_\varepsilon \Theta_q{}'$

③ $k > q$ 이면 $\Gamma(k) = \mathbf{0}$ 이고 $\boldsymbol{\rho}(k) = \mathbf{0}$ 이다.

④ $\Gamma(k) = \sum_{j=k}^{q} \Theta_j \Sigma_\varepsilon \Theta'_{j-k}$, $1 \le k \le q$; 단, $\Theta_0 = -I$.

$VMA(1)$ 의 일변량 시계열 간의 관계:

$$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t - \Theta\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} \, \theta_{12} \\ \theta_{21} \, \theta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \end{bmatrix}.$$

① $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$ 이면 두 개의 시계열 사이에는 선후행 관계는 없다.

② $\theta_{12} = 0$ 이지만 $\theta_{21} \neq 0$ 이면 Z_{1t} 에서 Z_{2t} 로 한쪽 방향으로만 영향을 미친다.

③ $\theta_{12} \neq 0$ 이고 $\theta_{21} \neq 0$ 이면 두 시계열 간의 피드백 관계가 있다.

15.3 벡터 자기회귀이동평균모형의 적합 및 예측

식별, 추정, 진단 3 단계

15.3.1 모형의 식별

모형의 차수 결정 : 교차상관계수 행렬, 부분자기회귀 행렬 이용

- 표본교차상관계수 행렬: $\hat{\boldsymbol{\rho}}(k) = [\hat{\rho}_{ij}(k)]$,

  $\hat{\rho}_{ij}(k)$는 $VMA(q)$ 모형의 차수 q를 정하는데 유용

$$Var[\hat{\rho}_{ij}(k)] \approx \frac{1}{n-k}\left[1+2\sum_{s=1}^{q}\rho_{ii}(s)\rho_{jj}(s)\right],\ |k| > q\ ;\quad \text{Bartlett (1955)}$$

- Schematic representation

– SAS/ETS

– 교차상관계수 행렬의 구성요소들이 많은 관계로 계수의 유의확률 대신에 +와 –를 이용하여 계수 행렬의 (i,j)번째 요소가 유의한지 여부를 판단하는 방법을 제안, Tiao and Box (1981)

- 표본부분자기회귀 행렬 $\hat{\Phi}_{kk}$은 $VAR(p)$ 모형의 차수 결정에 유용

VAR 모형의 차수를 결정하는 또 다른 방법

먼저 적당히 큰 값 p_0에 대해 $VAR(i), i=1,2,...,p_0$ 모형의 모수 Φ_i들을 최소제곱법으로 추정

잔차 $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} = \boldsymbol{Z}_t - \hat{\boldsymbol{\delta}}^{(i)} - \hat{\Phi}_1^{(i)} \boldsymbol{Z}_{t-1} - \cdots - \hat{\Phi}_i^{(i)} \boldsymbol{Z}_{t-i}$; 단, $t \geq i+1$

$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(i)}$ 와 $\hat{\Phi}_j^{(i)} (j=1, \cdots, i)$: 최소제곱추정량 & $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(0)} = \boldsymbol{Z}_t - \overline{\boldsymbol{Z}}$, $i=0$

잔차 공분산 행렬의 추정량

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{n-2i-1} \sum_{t=i+1}^{n} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(i)} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)})', \ i \geq 0$$

① **카이제곱검정** : 순차적으로 귀무가설 $H_0 : \Phi_i = 0$과 대립가설 $H_1 : \Phi_i \neq 0$을 검정

주어진 시계열 자료에 $i=1$부터 시작하여 $i=p_0$까지 순차적으로 $VAR(i)$ 모형을 적합한 후,

$$M(i) = -(n-m-i-3/2)\ln\left(\frac{|\hat{\Sigma}_i|}{|\hat{\Sigma}_{i-1}|}\right)$$

귀무가설 하에서 $M(i) \approx \chi^2(m^2)$, Tiao and Box (1981)

최초로 귀무가설이 기각되지 않는 $i=p$를 VAR 모형의 차수로 선택!

② **정보량 :**

Akaike Information Criterion, $AIC(i)$를 최소로 하는 i를 VAR모형의 차수로 선택

$$AIC(i) = \ln(|\widetilde{\Sigma}_i|) + \frac{2m^2 i}{n}, \quad \widetilde{\Sigma}_i = \frac{1}{n}\sum_{t=i+1}^{n} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)})'.$$

Schwartz Bayesian Criterion(SBC)

$$SBC(i) = \ln(|\widetilde{\Sigma}_i|) + \frac{m^2 i \ln(n)}{n}.$$

15.3.2 모수의 추정

최소제곱법 또는 최대가능도법에 의해 모수들을 추정

VAR모형 : 다변량 선형모형의 형태로 나타낸 후 최소제곱법에 의해 모수를 추정하면 선형모형의 이론적인 성질을 이용할 수 있다는 장점

초기값 $Z_{-p+1}, \cdots, Z_0$이 주어졌다고 가정

$Y = \left(Z_1, \cdots, Z_n\right)$: $(m \times n)$차원 행렬,

$B = \left(\delta, \Phi_1, \cdots, \Phi_p\right)$: $(m \times (mp+1))$차원 행렬,

$X_t = (1, Z_t', \cdots, Z'_{t-p+1})'$: $((mp+1)\times 1)$차원 행렬,

$X = (X_0, \cdots, X_{n-1})$: $((mp+1)\times n)$차원 행렬,

$E = (\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n)$: $(m\times n)$차원 행렬,

$\boldsymbol{y} = \mathrm{vec}(Y)$: mn차원 벡터,

$\boldsymbol{\beta} = \mathrm{vec}(B)$: (m^2p+m)차원 벡터,

$\boldsymbol{e} = \mathrm{vec}(E)$: mn차원 벡터.

vec 기호 : $(m\times n)$차원 행렬 $A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$을 벡터로 변환하는 연산자

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}$$

$VAR(p)$ 모형은, $Y = BX + E$ 또는 $\boldsymbol{y} = (X' \otimes I_m)\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{e}$

$\otimes$, Kronecker의 곱셈 연산자 : $(m\times n)$차원 행렬 $A = (a_{ij})$와 $(p\times q)$차원 행렬

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}: (mp\times nq)\text{차원의 행렬}$$

관련 성질: $vec(ABC) = (C' \otimes A)vec(B)$

β와 Σ_{ε}의 **최소제곱추정량**은

$$\hat{\beta} = \left[(X' \otimes I_m)'(X' \otimes I_m) \right]^{-1} (X' \otimes I_m)' \boldsymbol{y} = \left((XX')^{-1} X \otimes I_m \right) \boldsymbol{y}$$

$$\hat{\Sigma}_{\varepsilon} = \frac{1}{n-(mp+1)} [\boldsymbol{y} - (X' \otimes I_m)\hat{\beta}][\boldsymbol{y} - (X' \otimes I_m)\hat{\beta}]'$$

$\boldsymbol{y}$가 정상성을 만족하고 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$들이 백색잡음인 경우 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$은 일치성을 만족

점근분포: $\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Gamma_P^{-1} \otimes \Sigma_{\varepsilon})$

단, $\frac{1}{T} XX'$는 Γ_p^{-1}로 확률수렴(converge in probability)

$\xrightarrow{d}$는 분포수렴(converge in distribution)

▶ 최대가능도추정법

$\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$이 서로 독립인 m차원 다변량 정규분포 $N_m(\mathbf{0}, \Sigma_\varepsilon)$를 따른다고 가정

모수행렬 B와 Σ_ε의 로그가능도함수

$$L(B, \Sigma_\epsilon) = -\frac{mn}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln|\Sigma_\epsilon| - \frac{1}{2}tr\left[(Y-BX)'\Sigma_\epsilon^{-1}(Y-BX)\right]$$

B 및 Σ_ε에 대해서 일차 미분 $\Rightarrow$ 최대가능도추정량 $\widetilde{B}$와 $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$

$$\widetilde{B} = YX'(XX')^{-1},$$

$$\widetilde{\Sigma}_\varepsilon = \frac{1}{n}(Y-\widetilde{B}X)(Y-\widetilde{B}X)'.$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$가 다변량 정규분포를 따르는 경우,

최대가능도추정량 $\widetilde{B}$와 최소제곱추정량 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$는 동일한 분포를 따른다(Reinsel, 1993).

$VARMA(p,q)$ 모형의 추정은 $VAR(p)$ 과정보다 훨씬 복잡

자세한 이론은 Hillmer and Tiao (1979)와 Lütkepohl (2005)를 참고

15.3.3 모형의 진단

벡터 시계열모형과 일변량 시계열모형 동시에 진단

▶ 벡터 시계열모형의 진단 단계 : AIC 정보량 또는 SBC 정보량을 최소로 하는 모형 선택

▶ 다변량 **포트맨토검정통계량** $Q_m(k)$ 이용

$$H_0 : \boldsymbol{\rho}(1) = \cdots = \boldsymbol{\rho}(k) = \mathbf{0} \ \text{ vs } \ H_1 : \text{임의의 } i\,(1 \le i \le k)\text{에 대하여 } \boldsymbol{\rho}(i) \neq 0$$

포트맨토검정통계량: $Q_m(k) = n^2 \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{n-\ell} tr\left(\hat{\boldsymbol{\rho}}(\ell)' \hat{\boldsymbol{\rho}}(0)^{-1} \hat{\boldsymbol{\rho}}(\ell) \hat{\boldsymbol{\rho}}(0)^{-1}\right)$

귀무가설 하에서 $Q_m(k)$는 점근적으로 자유도가 $m^2k - g$인 카이제곱분포를 따름

g : 행렬 $\Phi_i\,(i = 1, \cdots, p)$와 $\Theta_j\,(j = 1, \cdots, q)$에서 추정된 모수의 개수

n : 표본의 크기, m : 벡터 시계열의 차수, $tr(A)$: 행렬 A의 자취(trace)

k는 다양한 기준에 의해 결정; Tsay (2010) $k \approx \log(n)$을 추천 (power)

모형이 잘 적합되었는지 알아보는 진단은 주로 잔차 이용

15.3.4 예측

적합된 최종 모형을 이용한 시점 n으로부터 l-시차 후의 값의 예측

평균제곱오차를 최소로 하는 값 : 조건부 기댓값

예: $VAR(p)$ 모형의 1-시차 후의 예측값과 예측오차

$$Z_n(1) = E[Z_{n+1} | Z_1, \ldots, Z_n] = \delta + \sum_{i=1}^{p} \Phi_i Z_{n+1-i}$$

$$e_n(1) = Z_{n+1} - Z_n(1) = \varepsilon_{n+1}$$

예측오차의 공분산 행렬 Σ_ε

2-시차 후의 예측값과 예측오차:

$$Z_n(2) = \delta + \Phi_1 Z_n(1) + \sum_{i=2}^{p} \Phi_i Z_{n+2-i}$$

$$e_n(l) = \varepsilon_{n+2} + \Phi_1 [Z_{n+1} - Z_n(1)] = \varepsilon_{n+2} + \Phi_1 \varepsilon_{n+1}$$

예측오차의 공분산 행렬 $\Sigma_\varepsilon + \Phi_1 \Sigma_\varepsilon \Phi_1'$

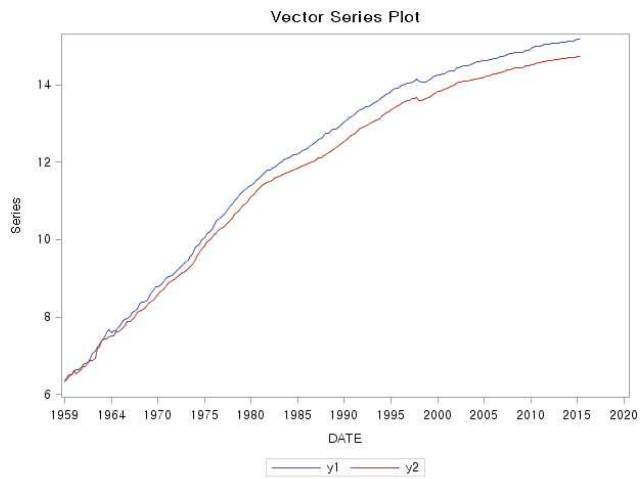
시계열 Z_t가 정상성을 만족할 때,

l-시차 후의 예측값 $Z_n(l)$은 Z_t의 평균 μ로 수렴

예측오차의 공분산 행렬은 Z_t의 공분산행렬로 수렴

15.4 예제

예 15-1 국민총소득(GNI)과 총소비지출(consumption) 계절조정 명목자료
기간: 1960. 1분기 - 2015. 2 분기, 출처: 한국은행, 단위 억원, $n = 222$



<Fig 1> 로그변환된 수입과 소비의 시계열그림

- 시계열그림 : 증가하는 추세를 보여주고 있어 차분한 후에 분석을 하는 것이 타당
- 일변량 시계열의 단위근검정 결과도 차분이 필요함을 시사

[Table 1] 교차상관, 부분자기회귀, 부분교차상관행렬

Schematic Representation of Cross Correlations				
변수/ Lag	0	1	2	3
∇Z_{1t}	+ +	+ +	+ +	+ +
∇Z_{2t}	+ +	+ +	+ +	+ +
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between				

Schematic Representation of Partial Autoregression			
변수/ Lag	1	2	3
∇Z_{1t}	+ +	. +	. +
∇Z_{2t}	+ +	+ .	+ .
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between			

차분된 시계열의 각종 행렬 : VAR(3) 모형을 적합하는 것이 타당

계절형 자료가 아닌 경우 추정할 상관계수의 개수는 너무 크지 않은 것이 좋다.

계절조정된 자료를 분석하였으므로 lag=3 이용

[Table 2] 추정된 VAR(3) 모수들의 유의성

Schematic Representation of Parameter Estimates			
변수/ Lag	C	AR1	AR2
ΔZ_{1t}	+	. +	. +
ΔZ_{2t}	+	. .	+ .
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between			

VAR모형의 i 번째 AR 모수행렬을 $\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11,i} & \phi_{12,i} \\ \phi_{21,i} & \phi_{22,i} \end{bmatrix}$

AR 모수 $\phi_{12,1}, \phi_{12,2}, \phi_{21,2,} \phi_{12,3}, \phi_{21,3}$와 상수가 유의

이들 모수만이 포함된 모형을 다시 적합

$$\begin{bmatrix} \nabla Z_{1t} \\ \nabla Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.34 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla Z_{1,t-1} \\ \nabla Z_{2,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.27 \\ 0.47 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla Z_{1,t-2} \\ \nabla Z_{2,t-2} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0.20 \\ 0.23 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla Z_{1,t-3} \\ \nabla Z_{2,t-3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

잔차진단:

– 잔차들의 교차상관행렬이 lag 4까지 모두 유의하지 않고, 포맨토우 검정의 유의확률: 0.084

– 잔차들이 백색잡음이라는 가설을 기각하지 못함

[Table 3] 잔차의 백색잡음검정 결과

Schematic Representation of Cross Correlations of Residuals				
변수/Lag	0	1	2	3
ΔZ_{1t}	+ +	. .	. .	. .
ΔZ_{2t}	+ +	. .	. .	. .
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between				

Partial Test for Cross Correlations of Residuals			
Up to Lag	DF	Chi-Squar	Pr > ChiSq
4	4	8.20	0.0844

벡터시계열모형으로부터 구한 소득(Z_{1t})과 소비(Z_{2t})의 일변량 시계열모형

$$\nabla Z_{1t} = 0.01 + 0.34 \nabla Z_{2,t-1} + 0.27 \nabla Z_{2,t-2} + 0.2 \nabla Z_{2,t-3} + \varepsilon_{1t}$$

$$\nabla Z_{2t} = 0.01 + 0.47 \nabla Z_{1,t-2} + 0.23 \Delta Z_{1,t-3} + \varepsilon_{2t}$$

소비가 소득에 의해 영향을 받는지를 알아보기 위한 Granger−Causality 검정 :

[Table 4] Granger−Causality 검정 결과

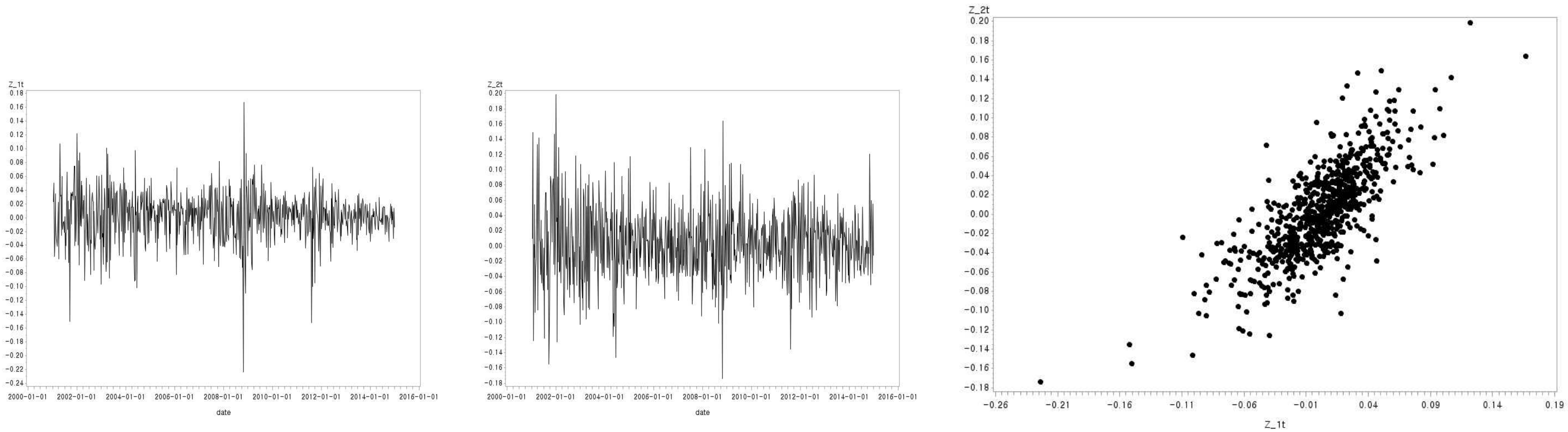
Granger-Causality Wald Test		
DF	Chi-Square	Pr > Chisq
3	46.76	< .0001

예 15-2 코스피200 지수와 삼성전자주가의 주별 로그수익률 자료

기간: 2001년 1월 8일부터 2014년 12월 29일

$$\boldsymbol{Z}_t = (Z_{1t}, Z_{2t})' = (\ln[KOS_t / KOS_{t-1}], \ln[SAM_t / SAM_{t-1}])'.$$

KOS_t 와 SAM_t 는 각각 t 시점$(t=1,\cdots,n;\, n=730)$ 에서의 코스피 200지수와 삼성전자주가



두 개의 시계열은 동행상관 관계가 높을 것으로 기대

[Table 5] 교차상관, 부분자기회귀, 부분교차상관 행렬

Schematic Representation of Cross Correlations						
변수/ Lag	0	1	2	3	4	5
Z_{1t}	++	--	..	..	..	..
Z_{2t}	++	--	..	..	++	..
+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between						

Schematic Representation of Partial Autoregression					
변수/ Lag	1	2	3	4	5
Z_{1t}	..	..	..	..	..
Z_{2t}	-.	..	..	..	..
+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between					

Schematic Representation of Partial Cross Correlations					
변수/ Lag	1	2	3	4	5
Z_{1t}	.-	..	..	..	..
Z_{2t}	.-	..	..	..	..
+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between					

유의수준 5%에서 $VAR(1)$을 초기 모형으로 고려
정보량 기준을 사용할 경우 AIC가 차수 3에서 최소값을 갖기 때문에 $VAR(3)$를 고려
여기서는 모수절약의 원칙에서 초기 모형으로 $VAR(1)$을 우선 적합

[Table 6] 추정된 VAR(1) 모수들의 유의성 및 잔차의 교차상관계수 행렬 및 포트맨토검정

Schematic Representation of Parameter Estimates		
변수/ Lag	C	AR1
Z_{1t}	.	. .
Z_{2t}	.	- .
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between		

Schematic Representation of Cross Correlations of Residuals						
변수/ Lag	0	1	2	3	4	5
Z_{1t}	++	..	..	..	..	..
Z_{2t}	++	..	..	..	++	..
+ is > 2*std error, - is < -2*std error, . is between						

Partial Test for Cross Correlations of Residuals			
Up to Lag	DF	Chi-Squar	Pr > ChiSq
2	4	1.95	0.7448
3	8	4.54	0.8054
4	12	10.22	0.5965
5	16	11.11	0.8026
6	20	13.52	0.8538
7	24	17.45	0.8288

– VAR모형의 추정된 계수들은 유의성이 강하지 않으나 포트맨토검정에 의하면 잔차의 무상관성과 백색잡음을 확인

– 잔차의 교차상관계수 행렬에 의해 시차 4 항을 $VAR(1)$ 모형에 추가적으로 고려

[Table 7] VAR(4) 모형의 추정 결과: 완전모형 및 축소모형

(a) 완전모형

Schematic Representation of Parameter Estimates			
변수/ Lag	C	AR1	AR4
Z_{1t}	.	. .	. .
Z_{2t}	.	– .	. .
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between			

(b) 축소모형

Schematic Representation of Parameter Estimates			
변수/ Lag	C	AR1	AR4
Z_{1t}	.	- *	* +
Z_{2t}	.	- .	* +
+ is > 2sd*error, - is < -2sd*error, . is between			

(a)의 완전모형(full model)은 $VAR(4)$를 적합한 추정 결과
 단, VAR모형에서 시차 2 및 3에 대한 계수 행렬 Φ_2와 Φ_3는 영행렬로 제약
 추정된 결과를 바탕으로 적합 모형을 단순화하기 위하여 추정 계수들 중 비교적 유의성이 약한 $\phi_{12,1}$, $\phi_{11,4}$, $\phi_{22,1}$와 $\phi_{21,4}$의 값들은 모두 0으로 제약

(b)의 축소모형(reduced model)은 단순화된 $VAR(4)$의 추정 결과
 해석의 편의상 모형의 절편은 유의성에 관계없이 포함시켰으며, 축소모형에 대한 잔차는 유의수준 5%에서 교차상관계수 행렬 및 포트맨토검정을 통하여 백색잡음가정을 만족함을 확인

추정된 축소모형

$$Z_{1t} = 0.002 - 0.095\,Z_{1,t-1} + 0.060\,Z_{2,t-4} + \epsilon_{1t},$$

$$Z_{2,t} = 0.003 - 0.170\,Z_{1,t-1} + 0.079\,Z_{2,t-4} + \epsilon_{2t}.$$

코스피200지수와 삼성전자주가 수익률은 영향을 미치는 시차는 다르지만 서로 피드백 관계를 가지면서 움직이고 있다. 코스피200지수에서 삼성전자주가로의 한쪽 방향의 영향만 존재하는 것이 아니라 쌍방의 영향이 있음에 주목