

Introdução à Computação Gráfica Superfícies

Jonh Edson R. de Carvalho

Superfícies Paramétricas

- Pontos são dados por funções $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$

- Um caso simples: polinomiais de grau 1
(interpolacão bilinear)

$$x(s,0) = (1-s)P_{0,0} + sP_{1,0}$$

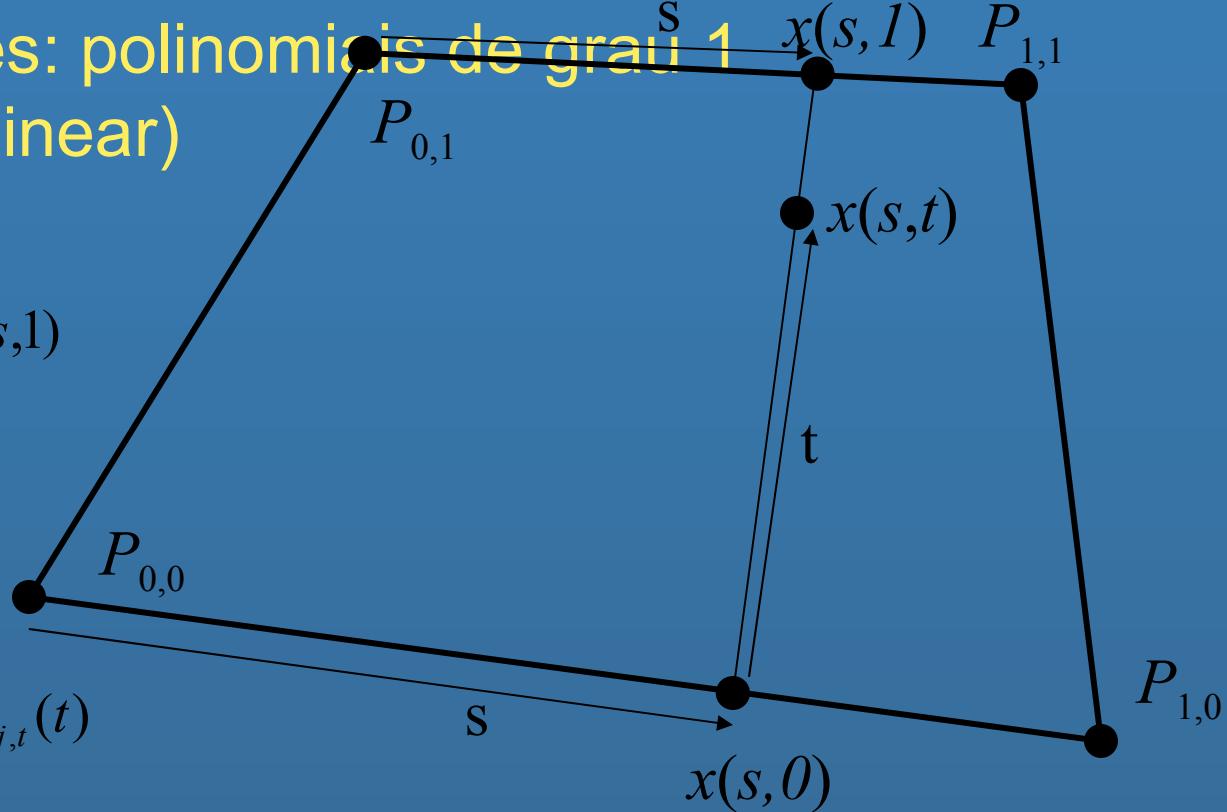
$$x(s,1) = (1-s)P_{0,1} + sP_{1,1}$$

$$x(s,t) = (1-t)x(s,0) + tx(s,1)$$

$$F_{0,s} = 1 - s, \quad F_{1,s} = s$$

$$F_{0,t} = 1 - t, \quad F_{1,t} = t$$

$$x(s,t) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{i,j} F_{i,s}(s) F_{j,t}(t)$$



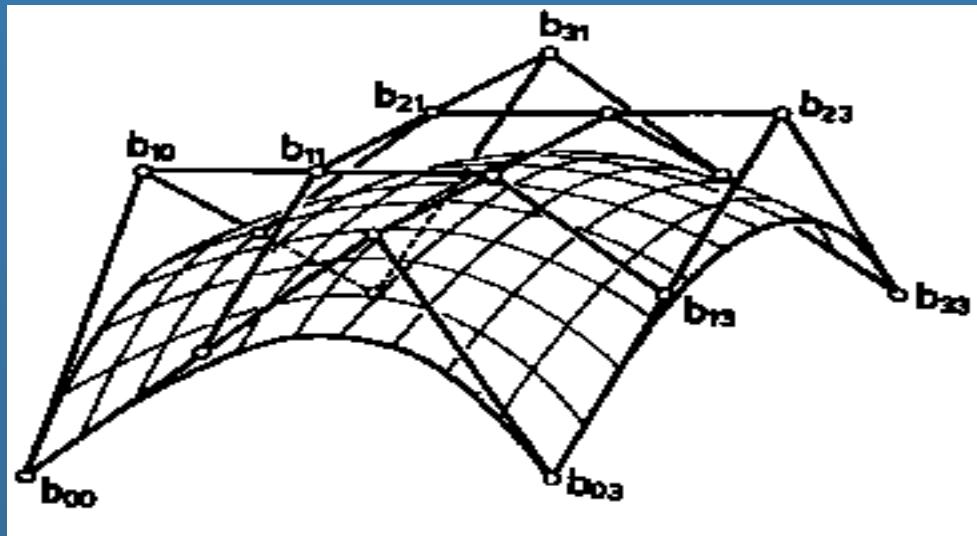
Retalhos de Superfície e Produto Tensorial

- Produto tensorial de duas curvas em forma paramétrica = superfície em forma paramétrica
- Fórmula geral:
$$\mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^d \sum_{j=0}^d \mathbf{P}_{i,j} F_{i,s}(s) F_{j,t}(t)$$
- Superfície definida para um retângulo no espaço de parâmetros
 - ◆ Tipicamente: $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$
- Forma da superfície especificada por uma grade de controle
 - ◆ 2 x 2 pontos para uma superfície bilinear
 - ◆ 3 x 3 pontos para uma superfície biquadrática
 - ◆ etc

Retalhos Bézier

$$\mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) B_j^m(t)$$

- Como as curvas Bézier, $B_i^n(s)$ e $B_j^m(t)$ são os polinômios de Bernstein de graus n e m , respectivamente
- Freqüentemente $n = m = 3$
 - ◆ Necessários $4 \times 4 = 16$ pontos de controle, $P_{i,j}$



Retalhos de Bézier

- Curvas na fronteira são curvas de Bézier
- Qualquer curva para s ou t constante é uma curva Bézier
- Podemos pensar assim:
 - ◆ Cada linha da grade com 4 pontos de controle define uma curva de Bézier para o parâmetro s
 - ◆ Ao avaliar cada curva para um mesmo s obtemos 4 pontos de controle “virtuais”
 - ◆ Pontos de controle “virtuais” definem uma curva Bézier em t
 - ◆ Avaliando esta curva em um dado t resulta no ponto $x(s,t)$



Propriedades dos Retalhos de Bézier

- O retalho interpola os pontos dos cantos da grade de controle
 - ◆ Decorre das propriedades análogas das curvas de Bézier
- O plano tangente em um ponto do canto é dado pelas duas arestas da grade incidentes no ponto
 - ◆ Decorre do fato que as curvas Bézier das fronteiras incidentes têm tangentes definidas pelas arestas correspondentes
- O retalho é restrito ao fecho convexo da grade de controle
 - ◆ As funções de base somam 1 e são positivas em toda parte

Retalhos Bézier em Forma Matricial

$$x(s, t) = S^T B^T PBT$$

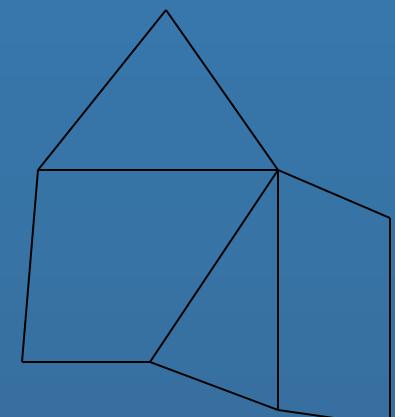
$$x(s, t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Se os pontos de controle não se modificam, pode-se pré-computar o produto das 3 matrizes do meio:

$$x(s, t) = \begin{bmatrix} s^3 & s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{0,0} & M_{0,1} & M_{0,2} & M_{0,3} \\ M_{1,0} & M_{1,1} & M_{1,2} & M_{1,3} \\ M_{2,0} & M_{2,1} & M_{2,2} & M_{2,3} \\ M_{3,0} & M_{3,1} & M_{3,2} & M_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

Malhas de Retalhos Bézier

- São malhas compostas de diversos retalhos unidos ao longo de suas fronteiras
 - ◆ As arestas das grades de controle precisam se justapor perfeitamente
 - ◆ As grades precisam ser retangulares



Continuidade em Malhas de Retalhos Bézier

- Como no caso das curvas Bézier, os pontos de controle precisam satisfazer restrições para assegurar continuidade paramétrica
- Continuidade ao longo das arestas dos retalhos:
 - ◆ $C^0 \rightarrow$ Pontos de controle da aresta são os mesmos em ambos retalhos
 - ◆ $C^1 \rightarrow$ Pontos de controle vizinhos aos da aresta têm que ser colineares e eqüidistantes
 - ◆ $C^2 \rightarrow$ Restrições sobre pontos de controle mais distantes da aresta
- Para obter continuidade geométrica, as restrições são menos rígidas
 - ◆ $G^1 \rightarrow$ Pontos de controle vizinhos aos da aresta têm que ser colineares mas não precisam ser eqüidistantes
- Para obter continuidade C^1 nos vértices das grades
 - ◆ Todas as arestas incidentes no ponto têm que ser colineares

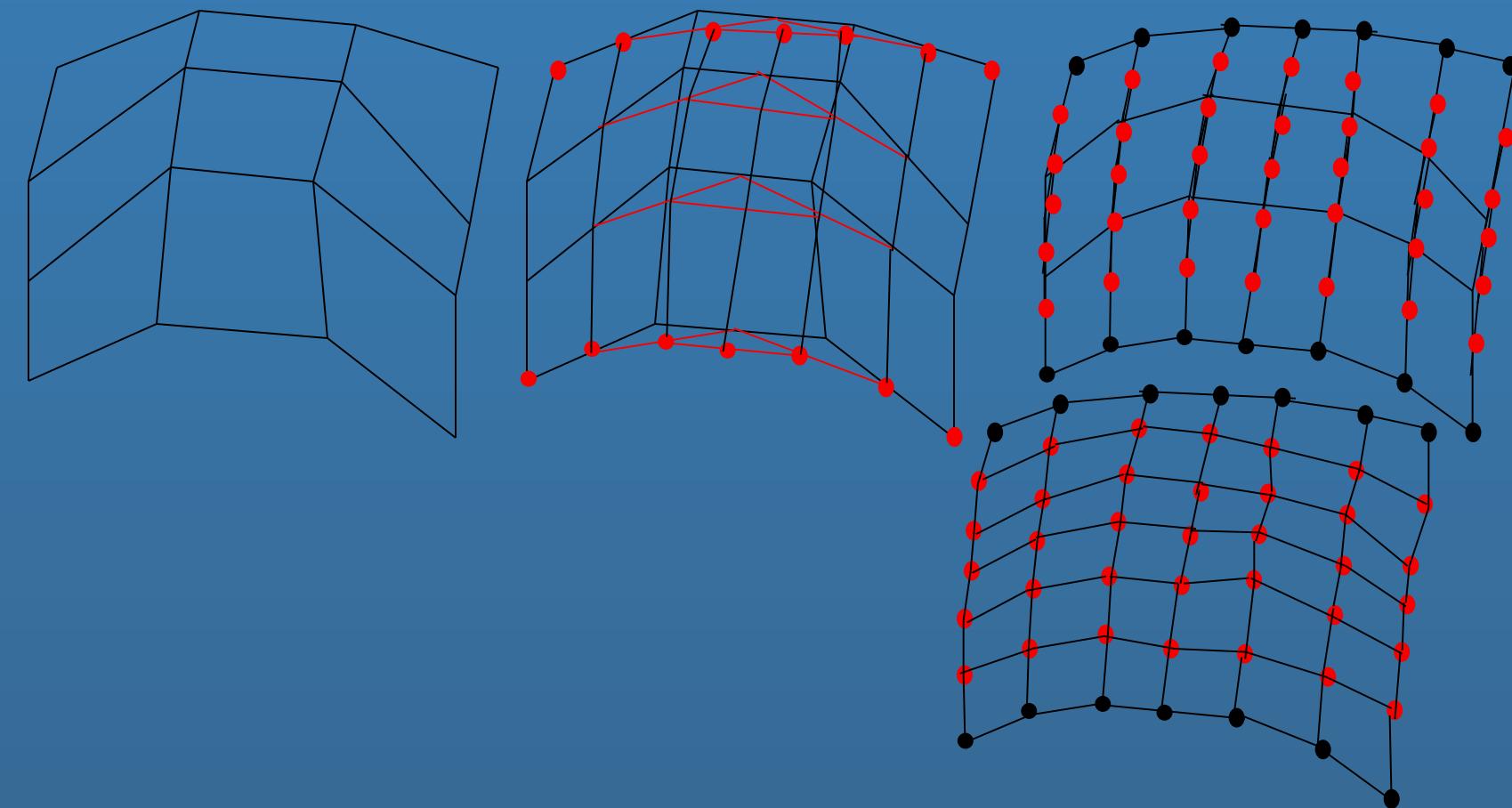
Desenhando Retalhos Bézier

- **Opção 1:** Avaliar o retalho para um conjunto de pontos do domínio paramétrico e triangular
 - ◆ Normalmente, s e t são tomados em intervalos (regulares ou não) de forma que os pontos avaliados formam uma grade
 - ◆ Cada célula da grade é constituída de quatro pontos que vão gerar 2 triângulos
 - ◆ Não se usa quadriláteros visto que os pontos não são necessariamente co-planares
 - ◆ Renderização fácil com *triangle strips*
 - ◆ Vantagem: Simples e suportado pelo OpenGL
 - ◆ Desvantagem: Não há uma maneira fácil de controlar o aspecto da superfície de forma adaptativa

Desenhando Retalhos Bézier

- **Opção 2: Usar subdivisão**
 - ◆ Permite controle de erro durante a aproximação
 - ◆ Definida de forma semelhante à subdivisão de curvas Bézier, mas refinamento é feito de forma alternada nos dois eixos de parâmetros
 - ◆ Sucessivamente computar pontos médios dos vértices e uní-los
 - Aplicar procedimento inicialmente em cada linha da grade de controle: $4 \times 4 \rightarrow 4 \times 7$
 - Repetir procedimento para cada coluna da grade de controle: $4 \times 7 \rightarrow 7 \times 7$

Midpoint Subdivision



Procedimento Adaptativo

- Através da subdivisão obtemos 4 grades de controle e testamos:
 - ◆ Se a grade é aproximadamente plana, ela é desenhada
 - ◆ Senão, subdividir em 4 sub-grades e aplicar o procedimento recursivamente
- Problema: Retalhos vizinhos podem não ser subdivididos uniformemente
 - ◆ Rachaduras: polígonos de controle não se justapõem
 - ◆ Pode ser consertado forçando grades mais subdivididas a se justaporem às grades menos subdivididas ao longo da aresta comum



Computando o Vetor Normal

- Derivadas parciais em relação a t e a s pertencem ao plano tangente
- Vetor normal é calculado normalizando o produto cruzado de ambas

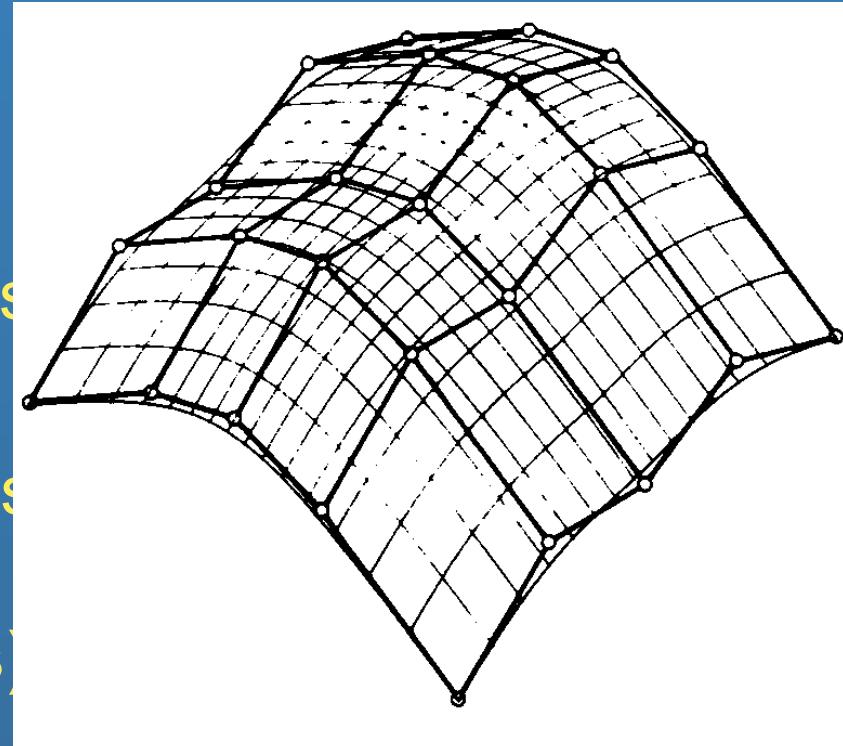
$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right|_{s,t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} \frac{dB_i^n}{ds} \Bigg|_s B_j^m(t)$$
$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{s,t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i^n(s) \frac{dB_j^m}{dt} \Bigg|_t$$

$$\mathbf{n} = \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial s} \right|_{s,t} \times \left. \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right|_{s,t}$$
$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}$$

Retalhos B-spline

$$\mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} B_i(s) B_j(t)$$

- $B_i(s)$ e $B_j(t)$ são as funções da base B-spline
- É necessário fornecer dois vetores de nós, um para cada direção (parâmetros)
- Também podemos ter superfícies B-spline uniformes e não uniformes



Forma Matricial das funções B-spline bicubicas

$$\mathbf{P}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} M P M^T \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

Onde P é a matriz de pontos de controle e M é a matriz de coeficientes

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} & \mathbf{P}_{0,2} & \mathbf{P}_{0,3} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} & \mathbf{P}_{1,2} & \mathbf{P}_{1,3} \\ \mathbf{P}_{2,0} & \mathbf{P}_{2,1} & \mathbf{P}_{2,2} & \mathbf{P}_{2,3} \\ \mathbf{P}_{3,0} & \mathbf{P}_{3,1} & \mathbf{P}_{3,2} & \mathbf{P}_{3,3} \end{bmatrix} \quad M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

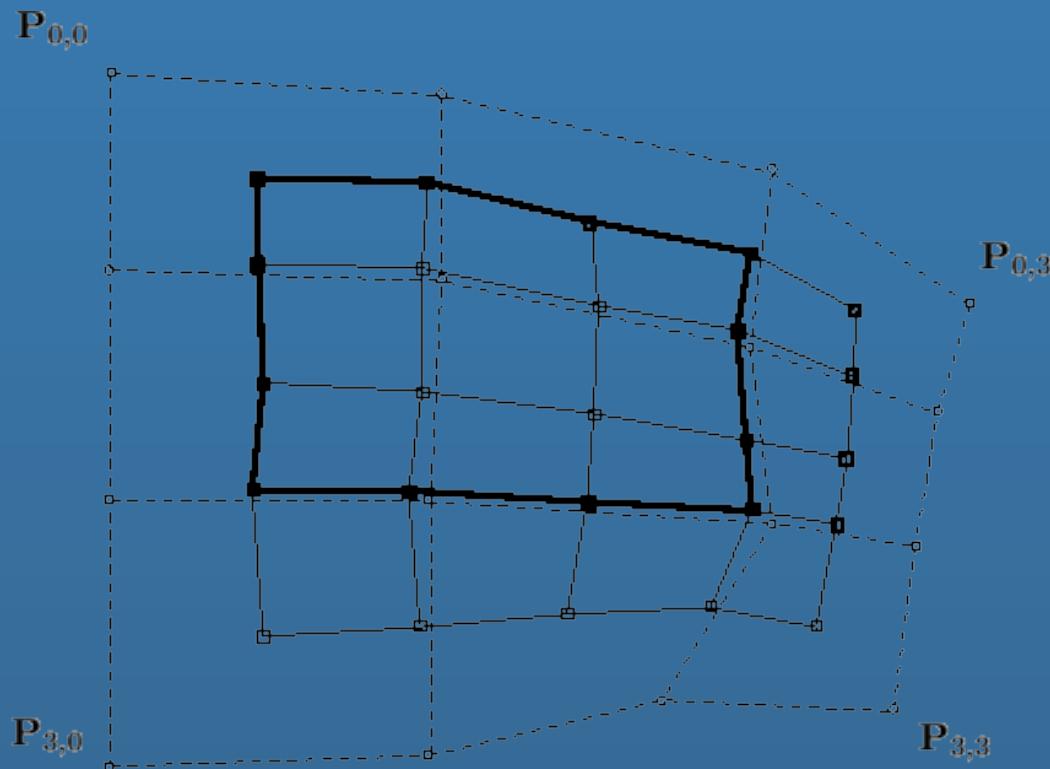
Avaliando Retalhos B-spline Uniformes

- Como todas as funções de base são translações de uma mesma função
 - ◆ Seja $a = \lfloor s \rfloor$, $b = \lfloor t \rfloor$
 - ◆ Computar: $u = s - a$, $v = t - b$
 - ◆ Usar funções da base para intervalo $[0,1)$

$$\mathbf{X}(s, t) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{a+i, b+j} B_i(u) B_j(v)$$

Subdivisão de Retalhos B-spline

- A grade de controle de uma B-spline bicúbica pode ser subdividida em 4 sub-grades permitindo um esquema de desenho adaptativo
 - ◆ 25 pontos de controle são gerados divididos em 4 grupos de 9
 - ◆ <http://graphics.cs.ucdavis.edu/CAGDNotes/Cubic-B-Spline-Surface-Refinement/Cubic-B-Spline-Surface-Refinement.html>



Propriedades dos Retalhos B-spline

- Retalho restrito ao fecho convexo da grade de controle
- Continuidade é C^2 para B-splines bicúbicas
- Pode-se forçar interpolação através da duplicação dos nós de controle
 - ◆ Problema: Derivadas parciais desaparecem e normais ficam indefinidas
 - ◆ Solução: Usar ponto próximo da superfície ou estimar pela média das normais da grade de controle
 - ◆ Melhor ainda: Usar B-splines interpoladoras
- O uso de B-splines não uniformes dá mais controle à modelagem
- Retalhos NURBS podem ser também definidos