

Radiosidade

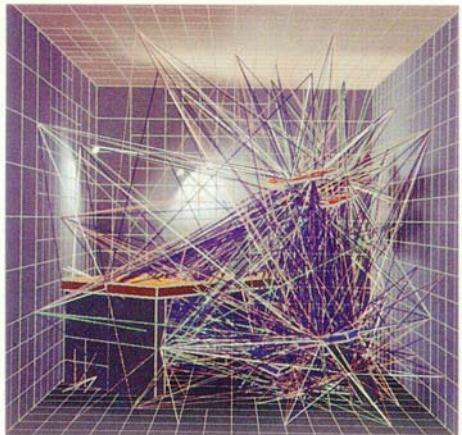
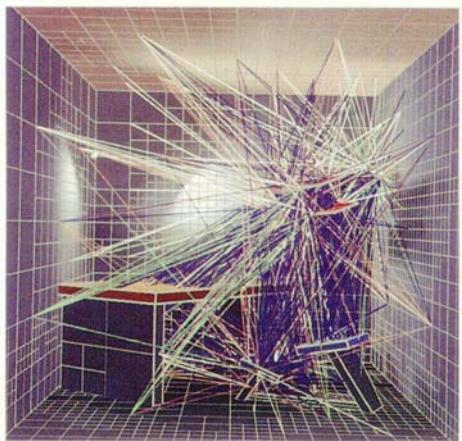
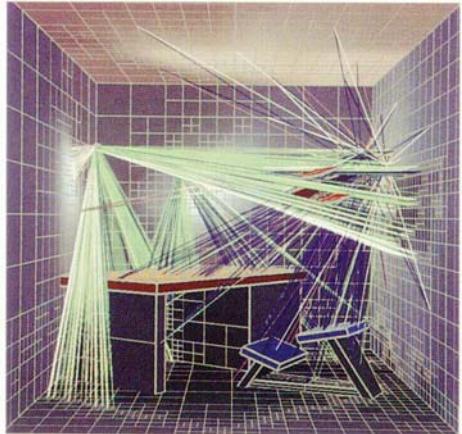
Modelos Locais de Iluminação

- Somente a luz direta ou a primeira reflexão numa superfície são consideradas (modelos de primeira ordem).
 - Modelo de Phong.
 - Completamente empírico.
 - Modelo de Cook e Torrance.
 - Esquema híbrido que usa um modelo físico baseado na rugosidade das superfícies para calcular a intensidade da reflexão e um modelo de ondas para certos efeitos de cor.
 - Modelo de Cabral.
 - Baseado completamente numa simulação física da rugosidade de superfícies.
 - Modelo de Kajiya.
 - Completamente baseado na teoria de ondas (*the rendering equation*).

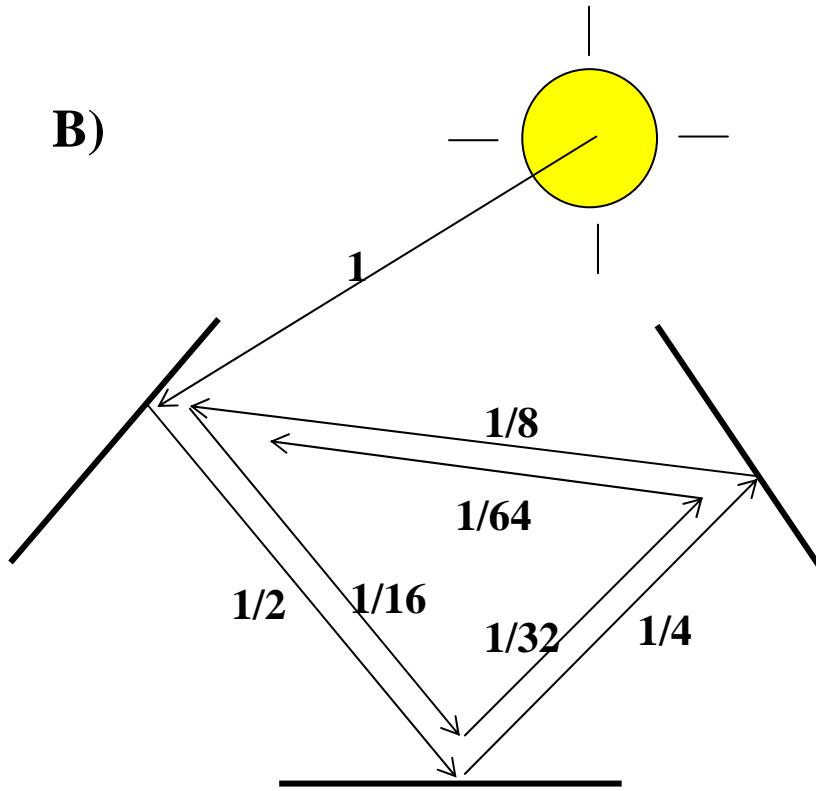
Modelos Globais de Iluminação

- Traçado de raios.
 - Usa um aspecto particular da interação luz-objeto: reflexão especular.
- Radiosidade.
 - Favorece a interação de superfícies difusas em detrimento da reflexão especular.
 - Baseado na teoria de transmissão de calor (Engenharia Mecânica).

Problemas com o Ray-tracing



A)

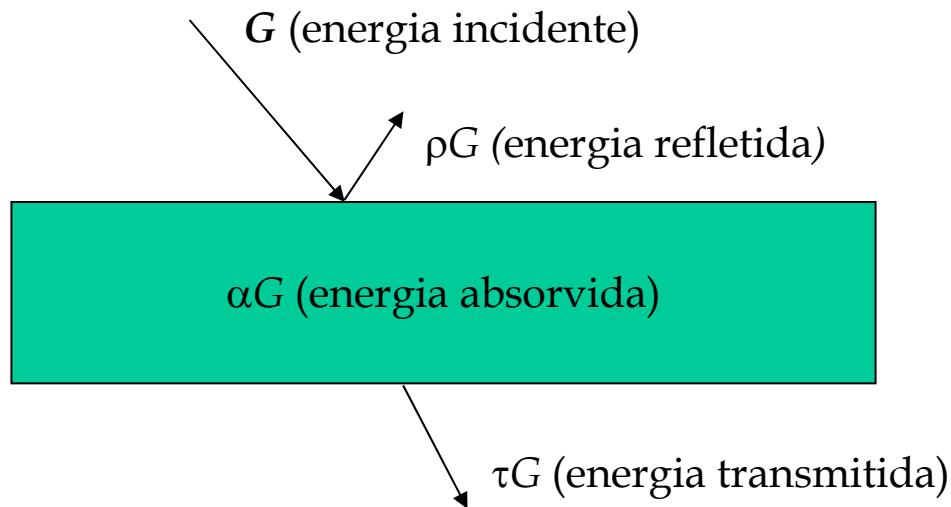


Definições e Propriedades

- Considere-se um raio ou um feixe de energia incidente num corpo:
 - $\alpha \equiv$ fração de energia incidente absorvida: **absorção**.
 - $\rho \equiv$ fração de energia incidente refletida: **reflectância**.
 - $\tau \equiv$ fração de energia incidente transmitida: **transmissão**.

Balanço de Energia

- $G = \alpha G + \rho G + \tau G \Rightarrow I = \alpha + \rho + \tau.$



Materiais

- Para maioria dos sólidos em engenharia $\tau = 0$.
- Para líquidos a mesma suposição pode ser feita (mas depende da espessura).
- Para gases a reflexão é muito pequena e considera-se $\rho = 0$.

Modelos de Reflexão

- A reflexão da energia radiante por uma superfície é descrita em termos de dois modelos ideais: refletores **difusos** e **especulares**.
- **Rugosidade** da superfície tem uma grande influência sobre as propriedades térmicas dos materiais.

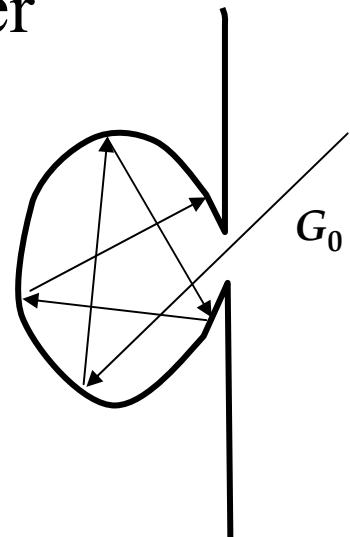
Comportamento em função da rugosidade.

- Se os elementos de rugosidade da superfície são muito pequenos comparados ao comprimento de onda da radiação a superfície é especular.
- Se os elementos de rugosidade da superfície são muito grandes comparados ao comprimento de onda da radiação a superfície é difusa.

Corpos Negros

- A superfície ideal para o estudo da radiação térmica é o **corpo negro**.
 - absorve toda a energia incidente em todos os comprimentos de onda (reflectância = 0).
- Corpo negro é uma idealização que pode ser imaginado como uma cavidade numa superfície com $0 < \alpha < 1$ (buraco de fechadura).

$$G_n = (1 - \alpha)^n G_0.$$



Emissividade

- A energia total emitida por um corpo por unidade de área por unidade de tempo é chamada de **irradiância** (potência emissiva).
- Toda superfície não negra terá uma irradiância E menor do que a de um corpo negro à mesma temperatura.

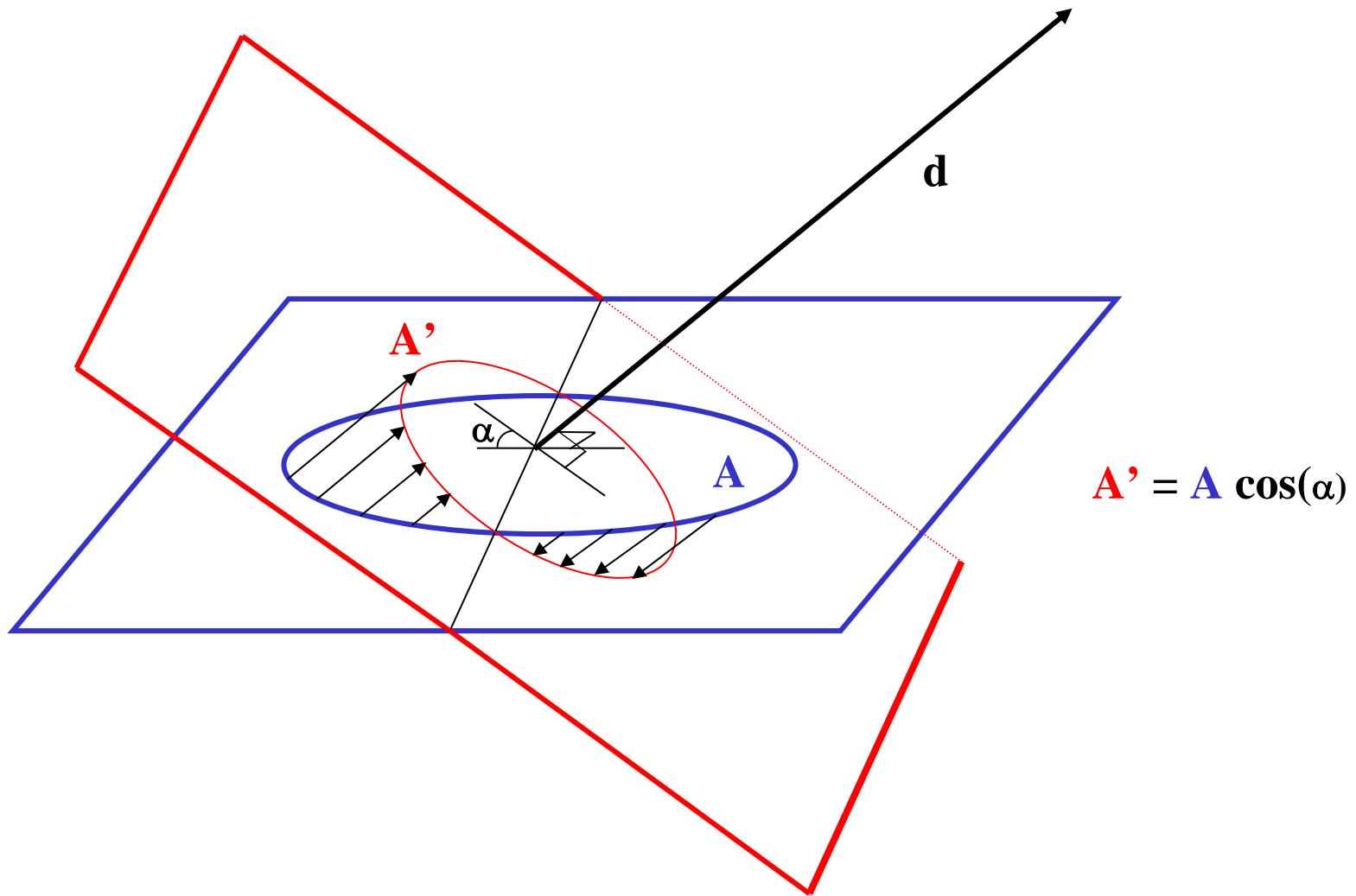
$$\varepsilon = E/E_b \text{ (emissividade).}$$

Emissividade x Temperatura

- Para condutores, emissividades altas correspondem a altas temperaturas.
- O mesmo não é válido para **não condutores**.
- Pela lei de Kirchhoff, $\alpha = \varepsilon$.

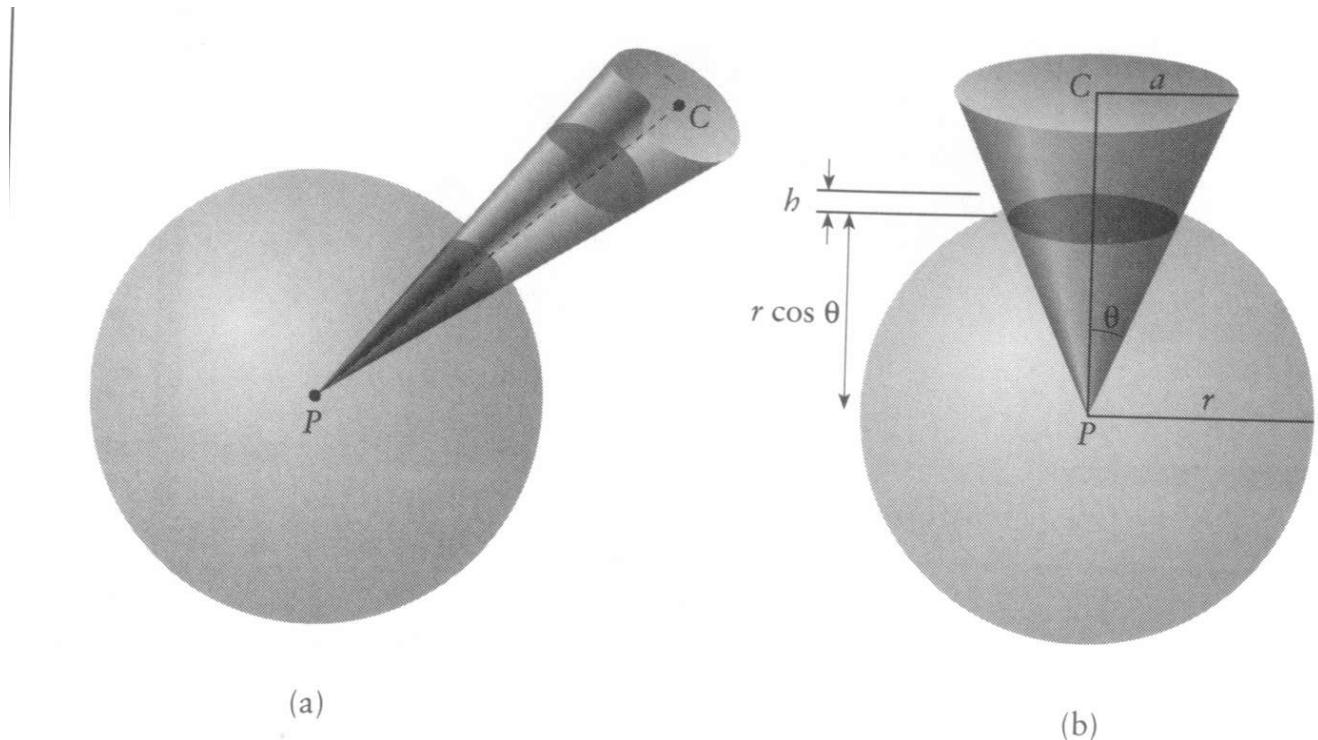
Área Aparente

(Vista de uma dada direção d)

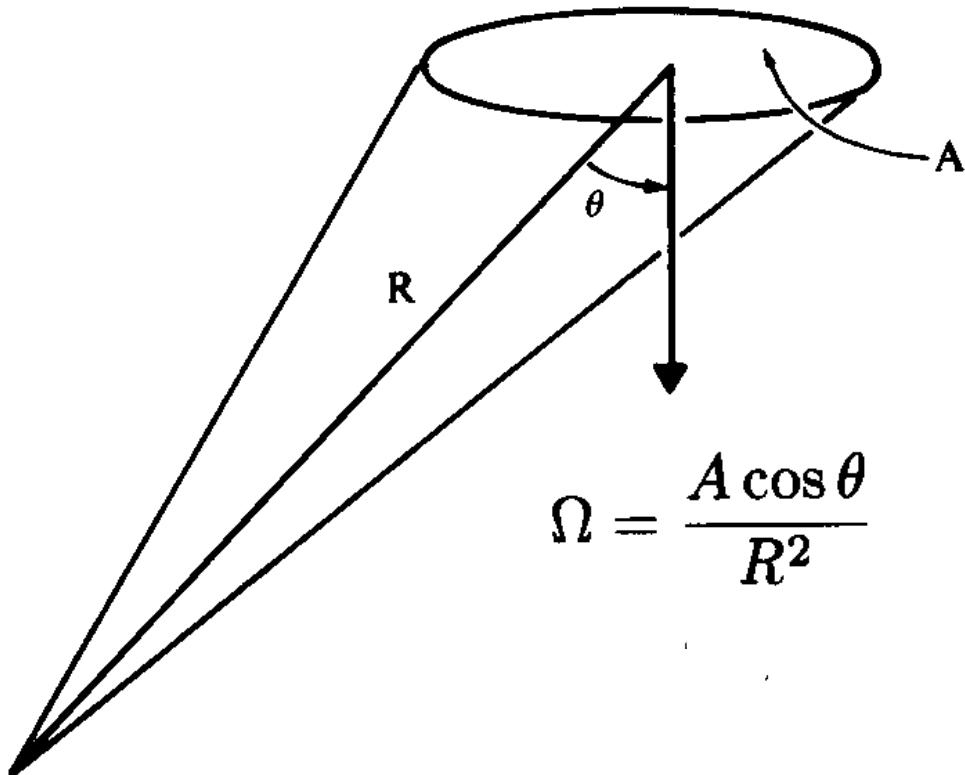


Ângulo Sólido

É a área determinada pela interseção de um cone com a esfera unitária.



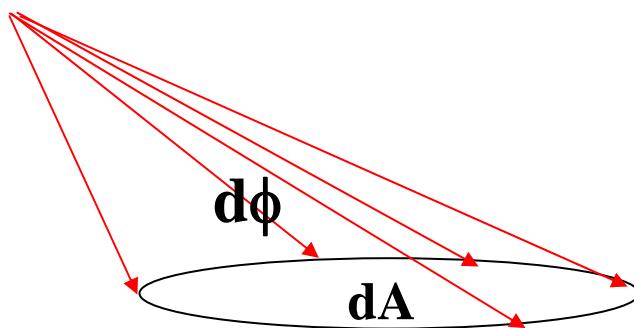
Ângulos Sólidos Elementares



Grandezas Radiométricas

Radiant term	Symbol	Definition	Unit
Energy	Q	—	J
Energy density	w	dQ/dV	J/m^3
Power (flux)	Φ	dQ/dt	W
Flux area density	u	$d\Phi/dA$	W/m^2
Intensity	I	$d\Phi/d\vec{\omega}$	W/sr
Exitance (radiosity)	M	$d\Phi/dA$	W/m^2
Irradiance	E	$d\Phi/dA$	W/m^2
Radiance	L	$d^2\Phi/(dA d\vec{\omega} \cos \theta)$ $= dI/dA^\Phi$ $= dE/d\vec{\omega}^\Phi$	$W/(m^2 \cdot sr)$

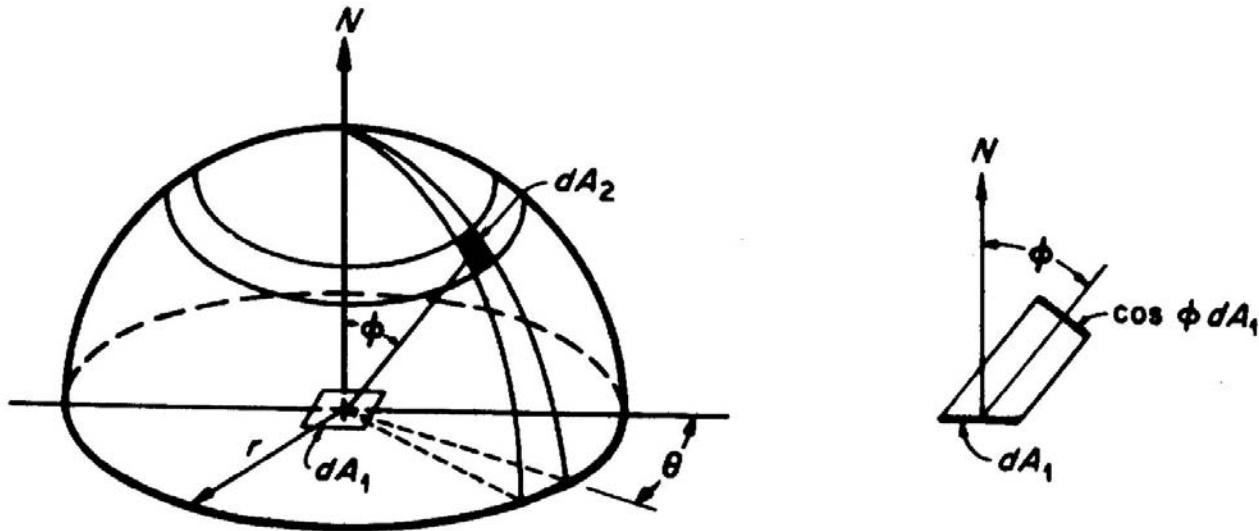
Irradiância:



Energia Total Irradiada

- A energia total irradiada por um elemento de superfície dA_1 é interceptada por um hemisfério imaginário centrado no elemento emissor.
- Seja q_{1-2} a energia que sai do emissor e atinge o sensor e I a radiância do emissor
- Então: $dq_{1-2} = I \cos(\phi) dA_1 d\omega$
 - O ângulo sólido unitário ω é definido por:
$$d\omega = dA_2/r^2.$$

Irradiância



- Integrando sobre todo o hemisfério:

$$dA_2 = r d\phi (r \sin(\phi) d\theta). \text{ Logo,}$$

$$d\omega = \frac{rd\phi(r \sin(\phi)d\theta)}{r^2} = \sin(\phi) d\phi d\theta$$

Irradiância

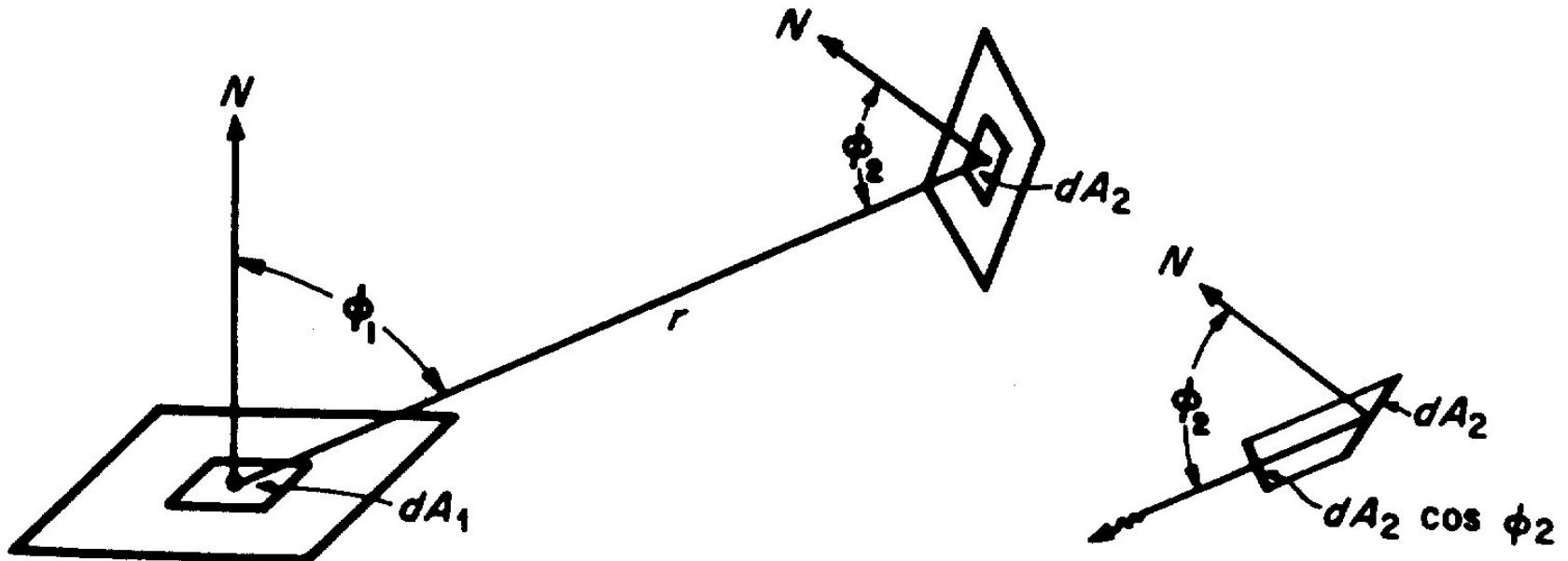
$$q_{1-2} = dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta$$

que para um emissor difuso perfeito (corpo negro)
 $I=c^{\text{te}}$ resulta em:

$$\frac{q_{1-2}}{dA_1} = E = \pi I$$

- Potência emissiva (irradiância) de um corpo negro é igual a π vezes a intensidade da radiação (radiância).

Interação entre Dois Elementos de Superfície



Fator de Forma

- **Fator de Forma** é a parcela de energia que deixa um elemento de superfície e atinge um outro elemento.

$$F_{A_i - A_j} = \frac{\text{energia radiante atingindo } A_j \text{ vindo de } A_i}{\text{energia radiante total deixando } A_i \text{ em todas as direções}}$$

Troca de Energia

- A energia irradiada por dA_1 que incide em dA_2 é:

$$dq_{1-2} = I \cos(\phi_1) dA_1 d\omega_{1-2}$$

onde $d\omega_{1-2}$ é a área de dA_2 vista por dA_1 .

$$d\omega_{1-2} = \cos(\phi_2) dA_2 / r^2$$

- A energia total irradiada por dA_1 é: $dq = I \pi dA_1$
- Assim, a troca de energia entre dois elementos infinitesimais é dependente somente da geometria:

$$F_{dA_1-dA_2} = \frac{dq_{1-2}}{dq} = \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) dA_2}{\pi r^2}$$

Fator de Forma

- Supondo que um emissor infinitesimal transmite energia para uma superfície finita:

$$F_{dA_1 - A_2} = \frac{\int_{A_2} I_1 \cos(\phi_1) dA_1 \cos(\phi_2) dA_2 / r^2}{\pi I_1 dA_1}$$

- Como I_1 e dA_1 são independentes de dA_2

$$F_{dA_1 - A_2} = \int_{A_2} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_2$$

Fator de Forma

- No caso da troca de energia entre duas superfícies Lambertianas finitas:

$$F_{A_1-A_2} = \frac{\int \int I_1 \cos(\phi_1) dA_1 \cos(\phi_2) dA_2 / r^2}{\int_{A_1} \pi I_1 dA_1}$$

$$F_{A_1-A_2} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{r^2} dA_1 dA_2$$

Teorema da Reciprocidade

- Soma dos fatores de forma num ambiente fechado é 1.

$$\sum_{j=1}^n F_{A_i - A_j} = 1.0$$

- Teorema da reciprocidade ($A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$).

$$A_1 F_{1-2} = \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

Propriedades de Subdivisão

- Natureza aditiva (quando o receptor é dividido):

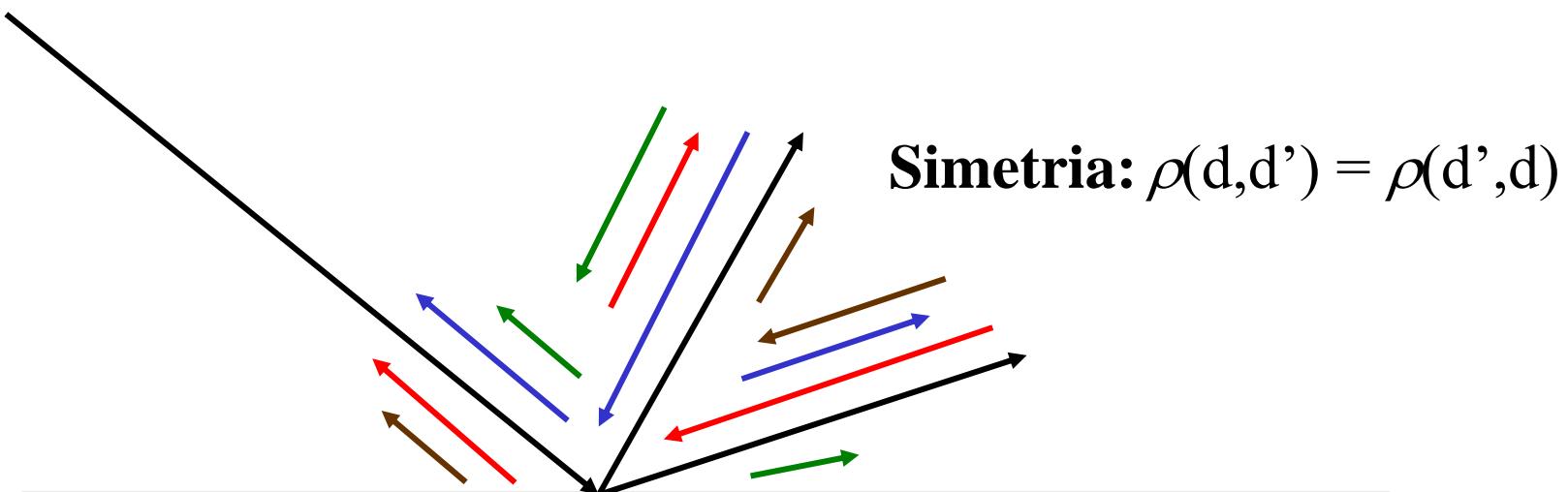
$$F_{dA_1 - A_2} = \int_{A_2} (F_{dA_1 - dA_2}) dA_2$$

- Subdivisão do emissor.

$$F_{A_1 - A_2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} (F_{dA_1 - dA_2}) dA_1$$

Reflectância Bi-direcional BRDF

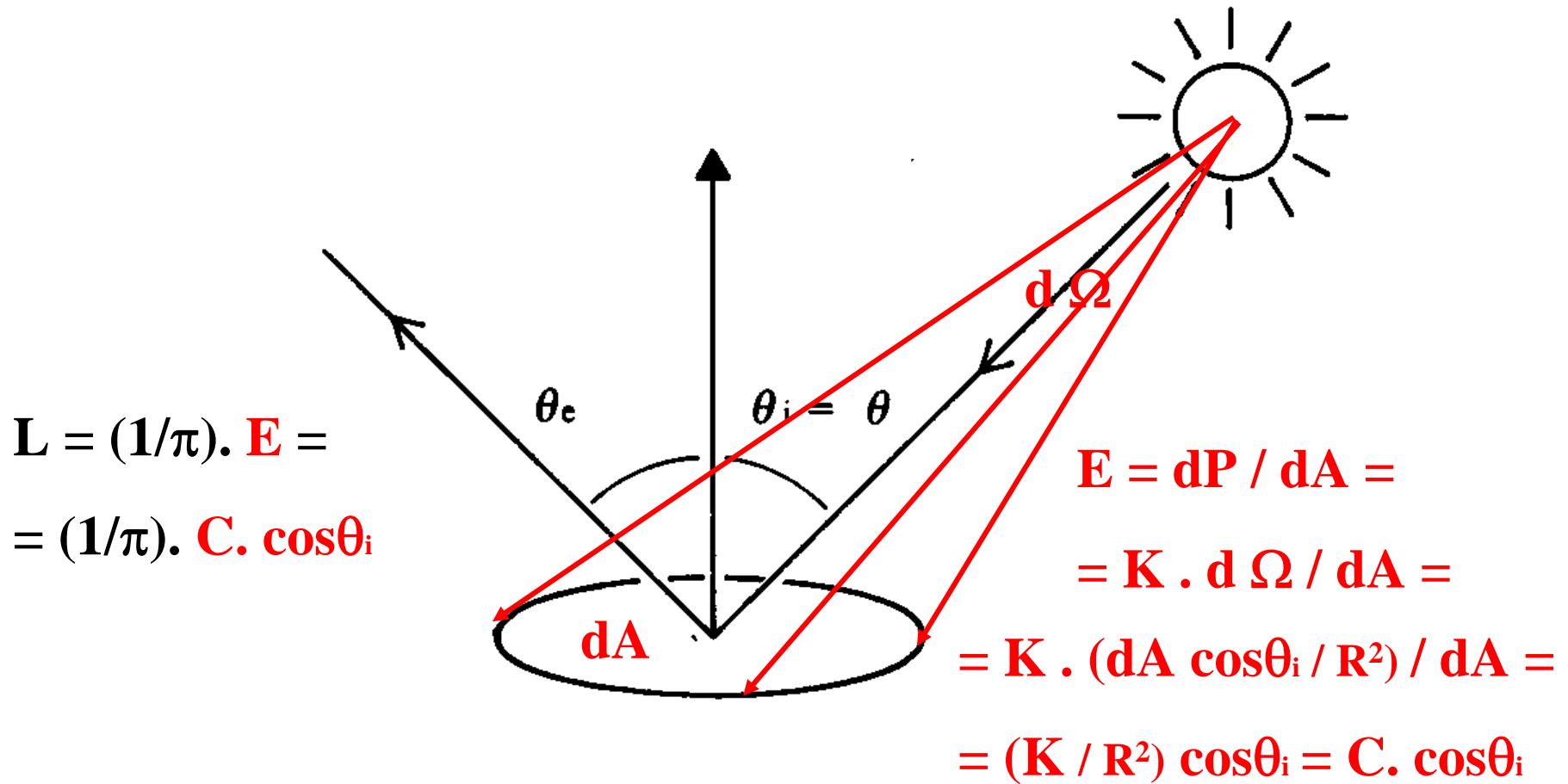
$$\rho(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = \frac{\text{Radiância que sai em uma direção}}{\text{Irradiância que chega de outra direção}}$$
$$= \frac{I_{\lambda,r}(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta_i, \phi_i) \cos(\theta_i) d\omega_i}$$



Superfícies Lambertianas

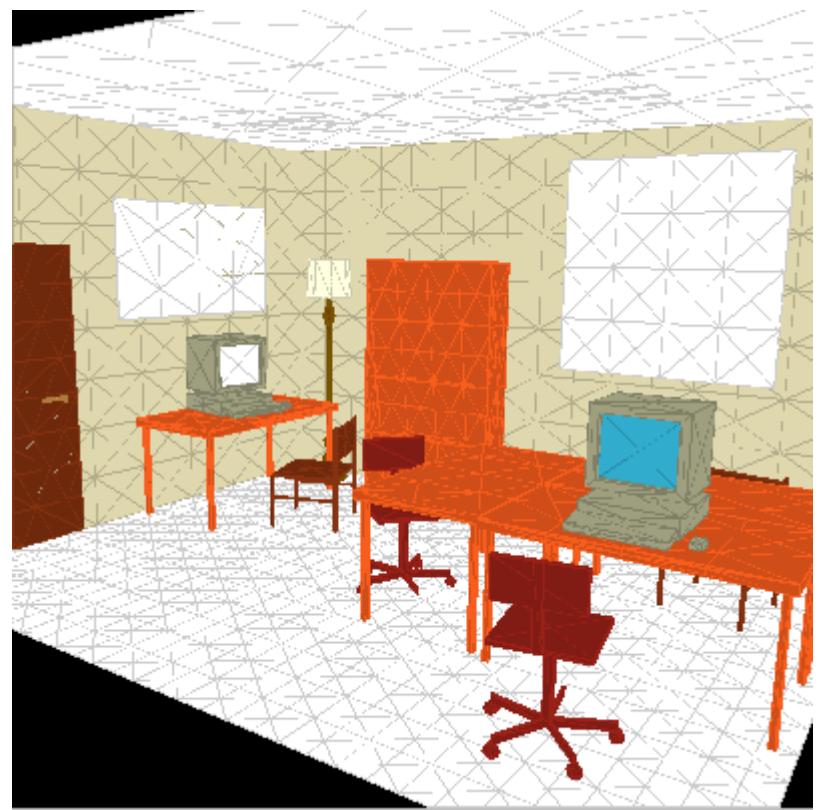
Reflexão é idêntica em todas as direções

$$\text{BRDF: } \rho(d, d') = \text{constante} = 1/\pi$$



Radiosidade Clássica

- Todas as superfícies são opacas.
- Todas as superfícies são refletores difusos perfeitos ($\rho = c^{te}$).
- Superfícies são discretizadas em retalhos pequenos (*patches*).
- Radiosidade constante nos retalhos.
- Irradiância constante nos retalhos.



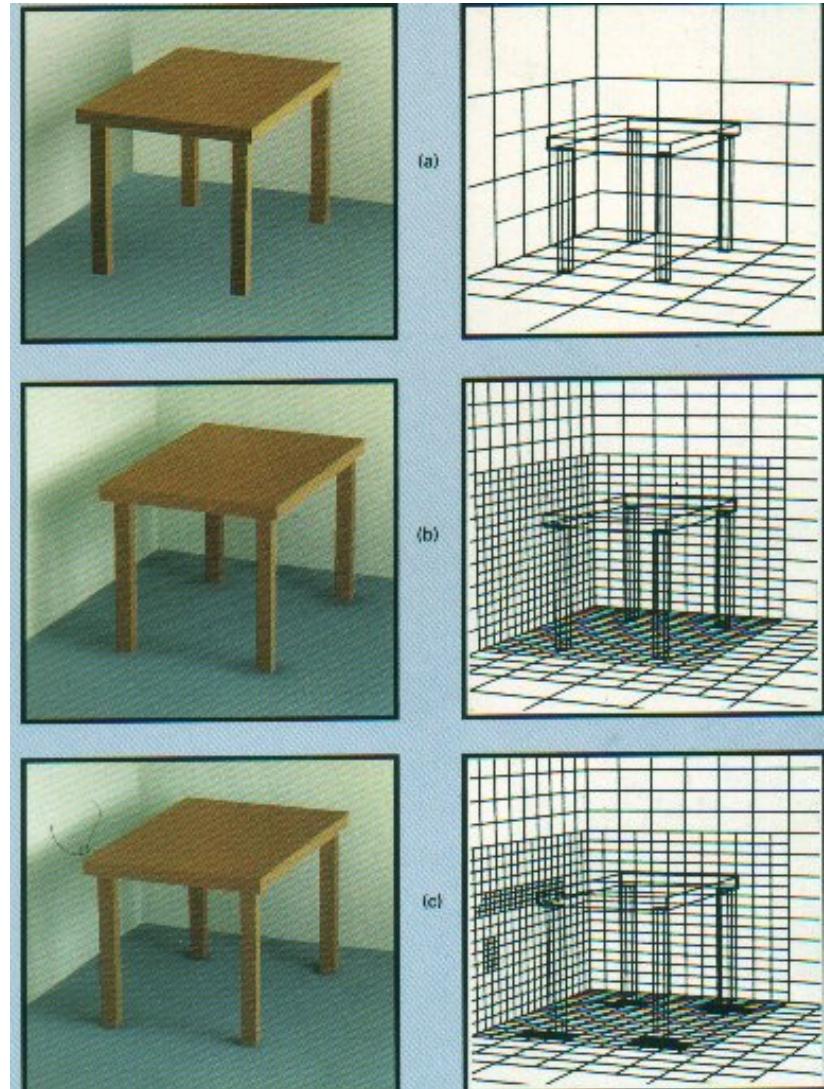
Conceito

- Método de relaxação.
 - Trata a iluminação global como um sistema linear.
 - Requer BRDF constante (superfícies difusas).
 - Resolve equação de iluminação como um problema matricial.
- Processo
 - Subdivide em retalhos.
 - Calcula fatores de forma.
 - Resolve radiosidade.
 - Exibe retalhos.



Hemicubo para Computar Fatores de Forma

- a) 145 retalhos
- b) 1021 retalhos
- c) refinamento de b) por subdivisão adaptativa com 1036 sub-retalhos



Sistema Linear

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ji} B_j A_j$$
$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ij} B_j$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

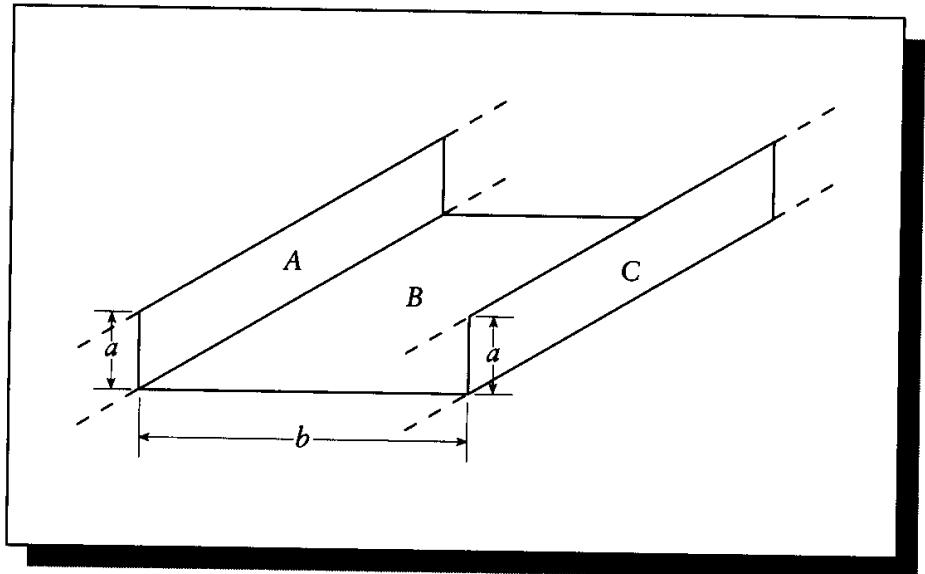
Um Exemplo

Fatores de Forma: $g = b/a$

$$F_{A,B} = \frac{1}{2} \left(1 + g - \sqrt{1 + g^2} \right)$$

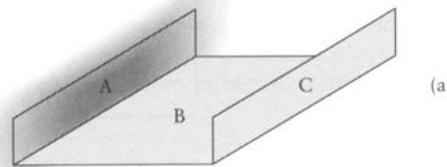
$$F_{A,C} = \sqrt{1 + g^2} - g$$

$$F_{B,C} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{g} - \sqrt{1 + \left(\frac{1}{g} \right)^2} \right)$$

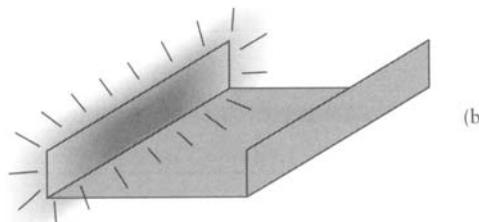


$$K = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_A F_{A,B} & -\rho_A F_{A,C} \\ -\rho_B F_{B,A} & 1 & -\rho_B F_{B,C} \\ -\rho_C F_{C,A} & -\rho_C F_{C,B} & 1 \end{bmatrix}$$

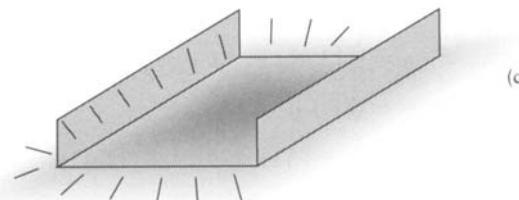
Prateleira Infinita



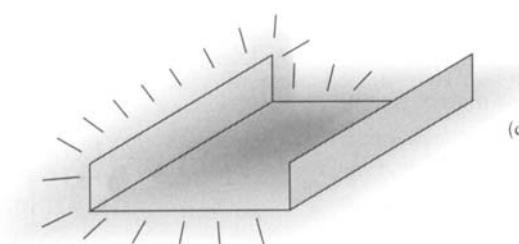
**Só A emite e
não reflete.**



A emite e reflete.



**Só B emite e não
reflete.**



**A e B emitem e
refletem.**

Reflectivity	Emissivity	Radiosity
$\begin{bmatrix} \rho_A \\ \rho_B \\ \rho_C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ B_C \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.11660 \\ 0.10354 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00709 \\ 0.11743 \\ 0.10428 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.21133 \\ 1 \\ 0.21133 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.04647 \\ 0.02906 \\ 0.32853 \end{bmatrix}$

Cálculo dos Fatores de Forma

- Necessidade de avaliar uma integral de superfície dupla.
- Inviável computacionalmente para ambientes complexos.
- Ineficiente computacionalmente.

Método Numérico

- Converte integral de superfície dupla numa integral de linha dupla (teorema de Stokes).
- Apropriado para ambientes simples.
- Método empregado no paper de 1984 de Goral.

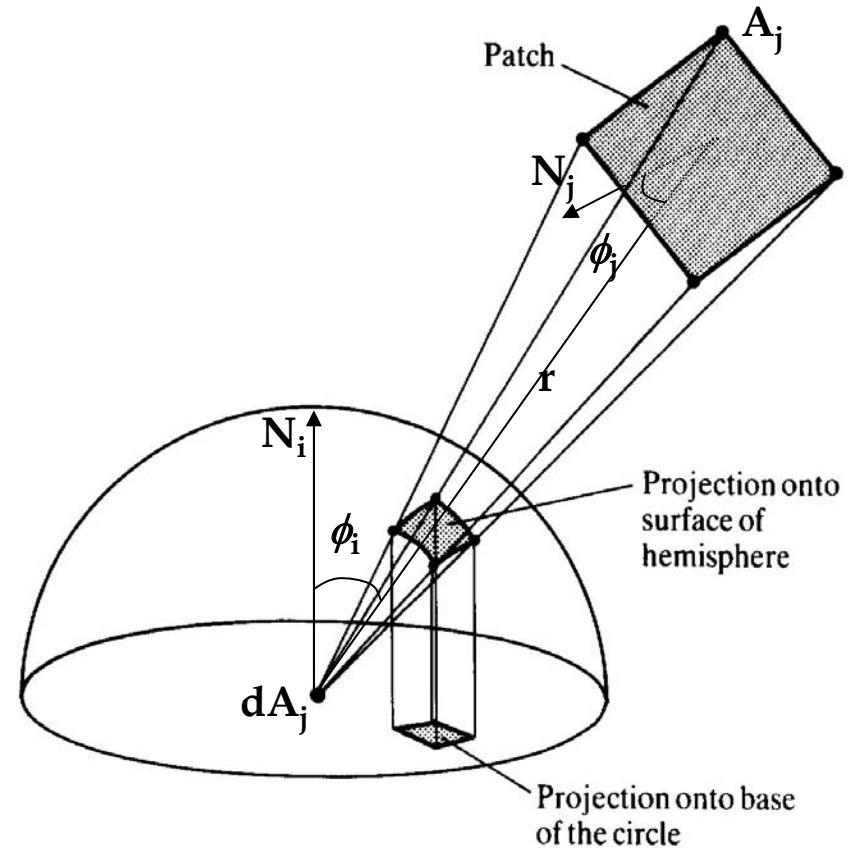
Método do Hemicubo

- Introduzido em 1985 pelo grupo de Cornell.
- Distância entre dois retalhos é grande comparada a área do retalho.
 - Integral interna não varia muito em relação a integral externa.
 - Integral área-área é aproximada pela integral diferencial-área.

$$F_{A_1-A_2} \approx F_{dA_1-dA_2} = \int_{A_2} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_2$$

Analogia de Nusselt

- Fator de forma é equivalente a fração do círculo unitário correspondente a projeção do retalho sobre o hemisfério, seguida pela projeção sobre a base do círculo.



Discretização do Hemicubo

- Qualquer retalho que tenha a mesma projeção sobre o hemisfério tem o mesmo fator de forma.
- Pode-se projetar sobre um **hemicubo** ao invés de um hemisfério.
- Faces do hemicubo são divididas em **pixels**.
 - Cada pixel é considerado um retalho.
 - Fatores diferencial-área são pré-calculados (fatores delta) e armazenados em uma tabela de busca.

Hemicubo

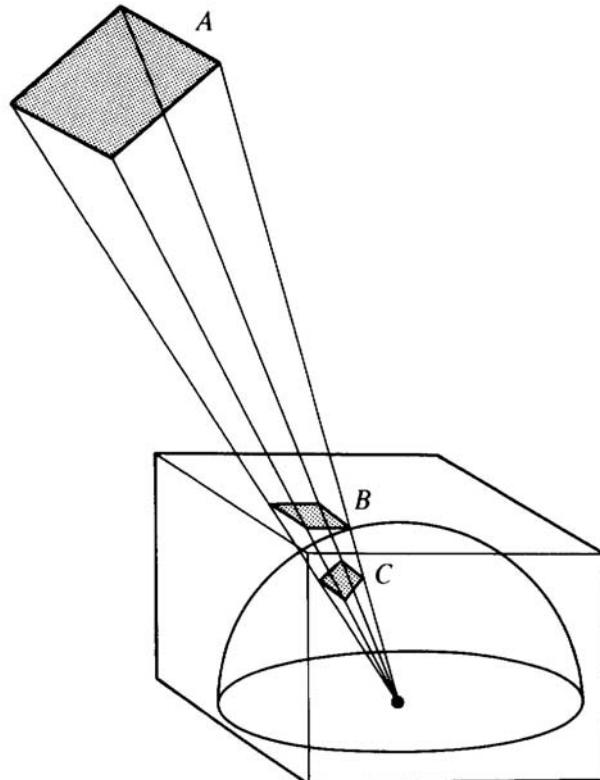
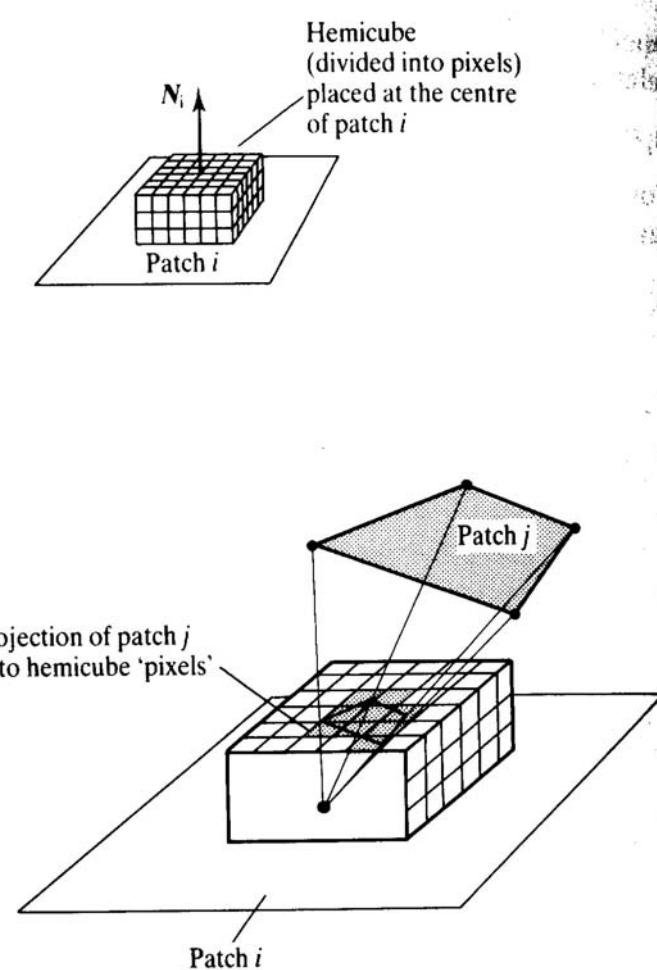


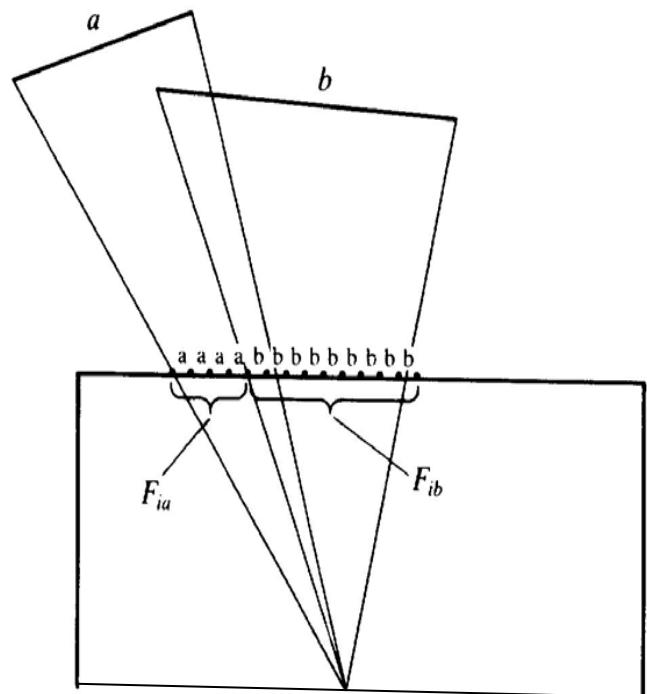
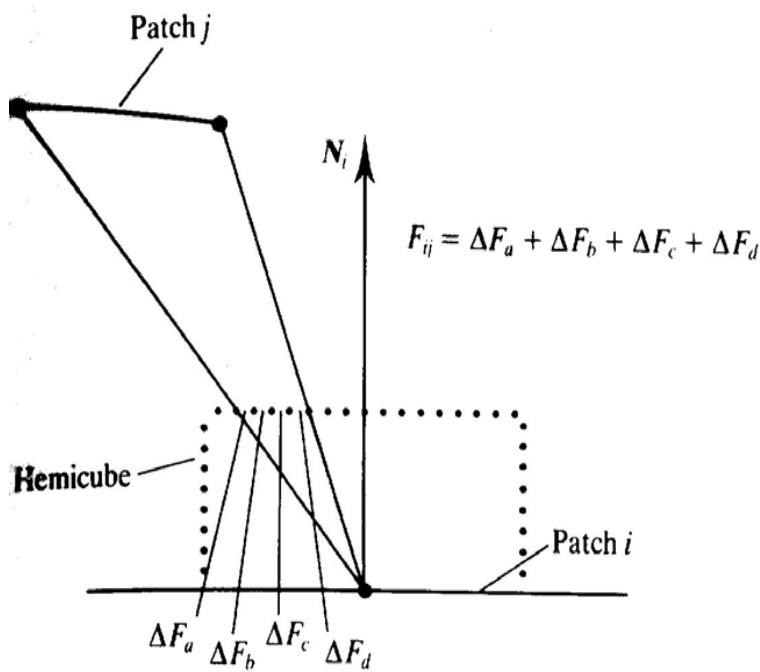
Figure 11.7 The justification for using a hemicube. Patches *A*, *B* and *C* have the same form factor.



Oclusão

- Todo retalho de superfície é projetado no hemicubo.
- Se o mesmo pixel contiver a projeção de dois retalhos, usa-se aquela correspondendo ao retalho mais próximo (análogo ao z-buffer).

Soma dos Fatores Delta



Integração dos Fatores Delta

- Por fim teremos conjuntos conexos de pixels que são projeções dos retalhos mais próximos.
- Executa-se então a soma para cada F_{ij} (q é o conjunto de pixels sobre o qual A_j se projeta).

$$F_{ij} = \sum_q \Delta F_q$$

Pré-cálculo dos Fatores Delta

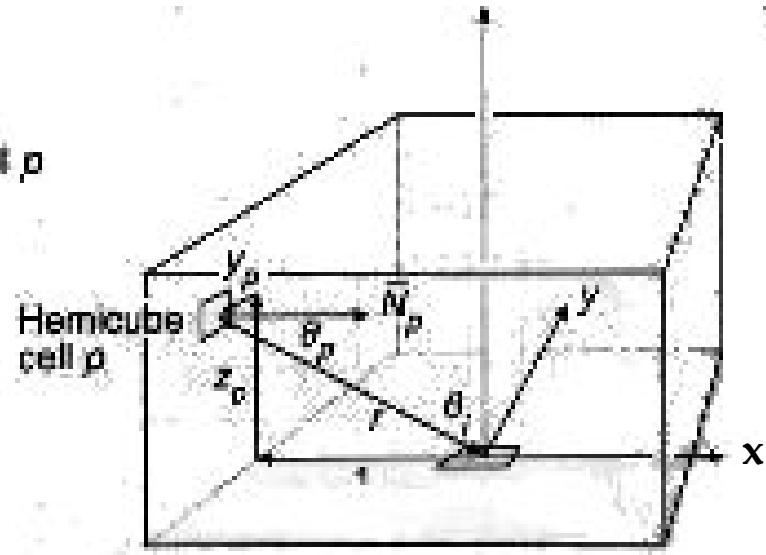
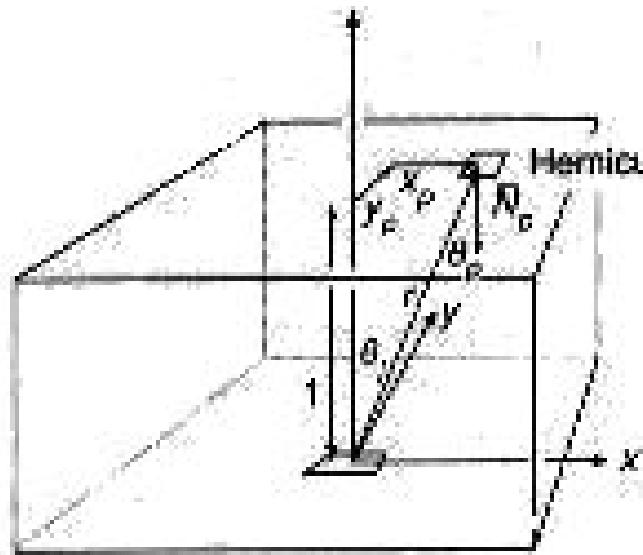
- Na superfície no topo do hemicubo:

$$\Delta F_q = \frac{\cos(\phi_i) \cos(\phi_j)}{\pi r^2} \Delta A = \frac{1}{\pi(x_q^2 + y_q^2 + 1)^2} \Delta A$$

- Na superfície lateral perpendicular a x:

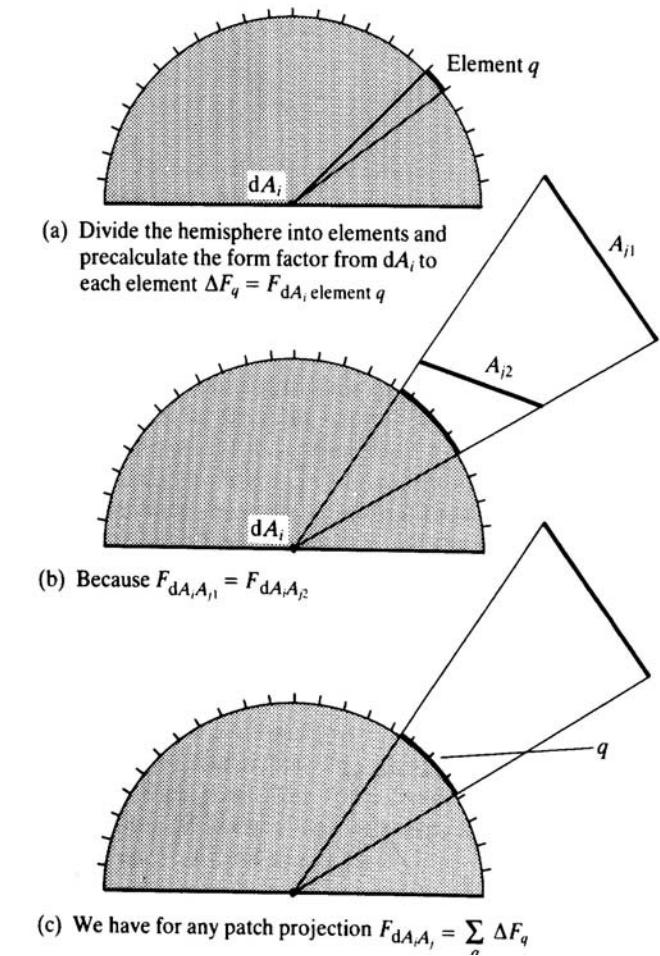
$$\Delta F_q = \frac{z_q}{\pi(y_q^2 + z_q^2 + 1)^2} \Delta A$$

Geometria para Cálculo dos Fatores Delta



Projeção dos Retalhos

- Centro de projeção é o centro do hemicubo.
- Cada face do hemicubo define um frustum de visão.
- Arestas do hemicubo definem planos de recorte.
- Retalhos são projetados sobre cada face do hemicubo.



Traçado de Raios

- Pode-se usar uma esfera discretizada em elementos de área com fatores delta pré-calculados.
- Raios são lançados através de cada elemento de área da esfera.
- Considera-se a interseção com um retalho mais próxima do centro da esfera.
- Troca-se a complexidade do código hemicubo pela do código de traçado de raios.

Acumulação

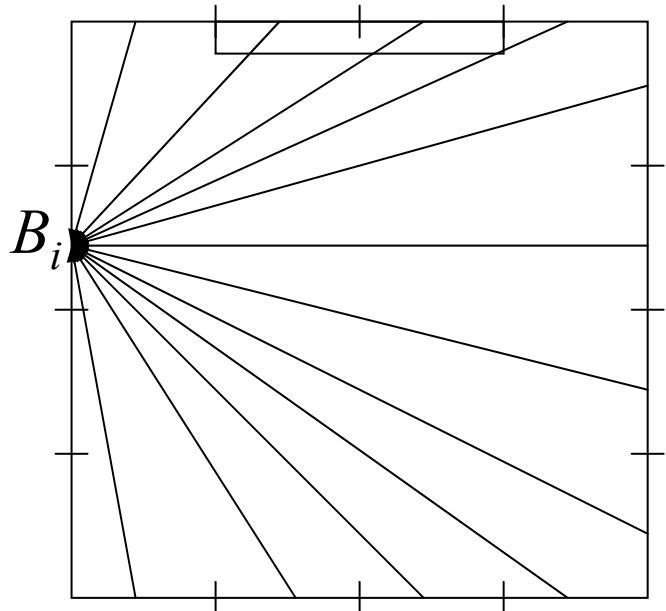
- Resolve $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como um sistema linear $MB = E$
- Solução de uma linha provê a solução de um único retalho.
- Intensidade de cada retalho é atualizada de acordo com sua posição na matriz.
- Jacobi

$$B_i^{(k+1)} = E_i - \sum_{j \neq i} M_{ij} B_j^{(k)}$$
 - Radiosidade = Emissão mais outras radiosidades refletidas
- Gauss-Seidel

$$B_i = E_i - \sum_{j \neq i} M_{ij} B_j$$
 - Cálculo no local.
- Sobre-relaxação

$$B_i^{(k+1)} = 110\% B_j^{(k+1)} - 10\% B_j^{(k)}$$
 - Gauss-Seidel é muito conservativo

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} & B_1 & E_1 \\ -\rho_2 F_{21} & 1 & \cdots & -\rho_2 F_{2n} & B_2 & E_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 & B_n & E_n \end{array} \right]$$



Refinamento Progressivo

- A imagem inteira é atualizada a cada iteração, ao invés de um único retalho.

$$B_i \text{ devido a } B_j = \rho_i B_j F_{ij}, \forall j$$

- Invertendo a relação:

$$B_j \text{ devido a } B_i = \rho_j B_i F_{ij} \frac{A_i}{A_j}, \forall j$$

- Requer um único hemicubo centrado em i .
- Um único retalho atira luz na cena e as radiosidades de todos os retalhos são atualizadas simultaneamente.
- Fatores de forma são calculados *on the fly*.

Algoritmo

- Um retalho é escolhido por vez para disparar luz.
- O retalho i dispara ΔB_i , a radiosidade que recebeu desde a última iteração.
- Disparam primeiro os retalhos que influenciam mais a cena ($\Delta B_i A_i$ maior).
- Inicialmente, $B_i = \Delta B_i = E_i$, para todo retalho.

Pseudo-Código

Selecione retalho i;

Calcule F_{ij} para cada retalho j;

Para cada retalho j faça {

$$\Delta Rad = \rho_j \Delta B_i F_{ij} A_i / A_j;$$

$$\Delta B_j = \Delta B_j + \Delta Rad;$$

$$B_j = B_j + \Delta Rad;$$

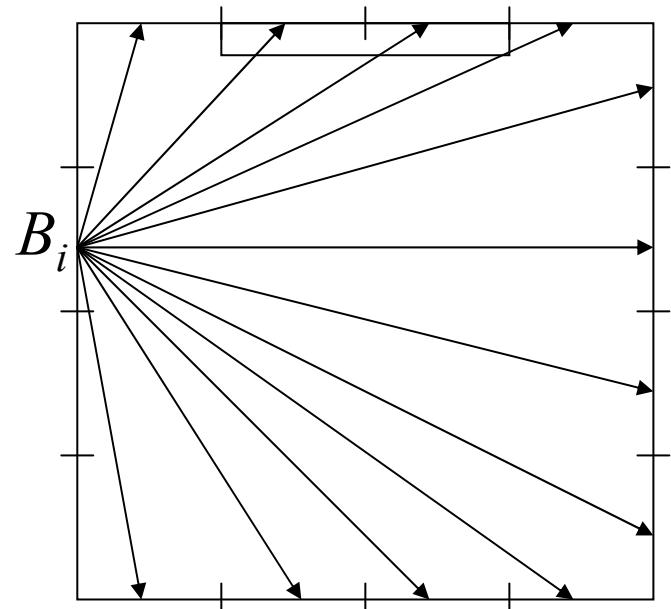
}

$$\Delta B_i = 0;$$

Disparo

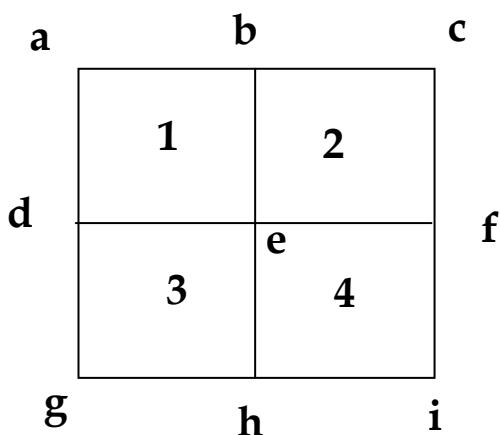
- Refinamento Progressivo
- Distribui radiosidade extra ΔB_i pelos outros retalhos
$$B_j^{(k+1)} = B_j^{(k)} + \rho_j F_{ji} \Delta B_i$$
- Radiosidade extra “não disparada” é o que recebemos da última iteração
$$\Delta B_i = B_j^{(k)} - B_j^{(k-1)}$$
- Energia parte dos emissores
- Distribui “progressivamente” pela cena
- Pode usar um termo ambiente durante o processamento da cena, que é diminuído a medida que a radiosidade progressiva converge

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 & \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$



Calculando Radiosidade nos Vértices

- Uma vez obtidas as radiosidades nos retalhos, precisamos extrapolá-las para os vértices.
- Radiosidades nos vértices alimentam então um visualizador tipo Gouraud.



$$B_e = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$(B_b + B_e)/2 = (B_1 + B_2)/2$$

$$(B_a + B_e)/2 = B_1$$

Problemas da Solução por Inversão

- O sistema $MB = E$ pode ser resolvido invertendo-se a matriz M .
- O tamanho de M é enorme e acarreta problemas de armazenamento e de inversão.
 - M é quadrada ($n \times n$, n número de retalhos.)
 - Dobrar n quadruplica o número de elementos de M .

Métodos de Relaxação

- Vários métodos iterativos foram desenvolvidos que iniciam o vetor B com uma solução inicial e então a refinam até que o erro esteja dentro de uma tolerância pré-definida.
- Radiosidade utiliza métodos de **relaxação**.

Um Pouco de Teoria

- Seja um sistema linear $Kx = b$, onde K é uma matriz $n \times n$, x e b são vetores coluna de dimensão n .
- Será gerada uma série de soluções aproximadas x que devem convergir para a solução real.
- $x^{(g)}$ é a aproximação no passo g .

Erro da Aproximação

- $e^{(g)} = x - x^{(g)}$ é o **erro**.
- $r^{(g)} = b - K x^{(g)} = K e^{(g)}$ é o **resíduo**.
- Métodos de relaxação usam o resíduo para refinar a aproximação e gerar o sucessor $x^{(g+1)}$.
- A estratégia é olhar para um elemento $r_i^{(g)}$ do vetor de resíduo e aplicar uma transformação ao elemento correspondente $x_i^{(g)}$ de forma a que $r_i^{(g)} \rightarrow 0$.

Convergência

- Outros elementos de r podem crescer, mas espera-se que a tendência geral seja na direção de valores menores para todos os elementos do resíduo.

$$\sum_{k=1}^n K_{i,k} x_k^{(g)} = b_i$$

$$K_{i,i} x_i^{(g)} = b_i - \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^n K_{i,k} x_k^{(g)} = r_i^{(g)} + K_{i,i} x_i^{(g)}$$

$$(\div K_{i,i})$$

$$x_i^{(g+1)} = \frac{r_i^{(g)}}{K_{i,i}} + x_i^{(g)}$$

Parada

- Ajustar um elemento até que seu resíduo vá para zero é chamado de **relaxamento do elemento**.
- Critérios de parada são baseados numa tolerância t :
 - $\max(|r|) < t$
 - $|x_i^{(g)} - x_i^{(g+1)}| < t$

Iteração de Jacobi

for $i \leftarrow 0$ to n

$x_i \leftarrow 0$

Initialize the first guess.

endfor

while not converged

Update the unknown vector.

$\mathbf{r}^{(g)} = \mathbf{b} - \mathbf{Kx}^{(g)}$

for $i \leftarrow 0$ to n

$x_i^{(g+1)} \leftarrow x_i^{(g)} + r_i^{(g)}/K_{i,i}$

Update each element.

endfor

endwhile

FIGURE 18.5

Jacobi iteration.

Método de Gauss-Seidel

- Iteração de Gauss-Seidel é similar a de Jacobi.
- Jacobi calcula o resíduo a partir do $x^{(g)}$ corrente e os próximos elementos são computados a partir dele.
 - Não se usam os novos valores $x^{(g+1)}$ até que todos os elementos tenham sido computados.
- Gauss-Seidel atualiza os valores no local e calcula o resíduo de novo para cada elemento.

Iteração de Gauss-Seidel

for $i \leftarrow 0$ to n

$x_i \leftarrow 0$

endfor

while not converged

Initialize the first guess.

 for $i \leftarrow 0$ to n

$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{k=1, k \neq i}^n x_k K_{i,k}) / K_{i,i}$

Update the unknown vector.

 endfor

endwhile

FIGURE 18.6

Gauss-Seidel iteration.

Método de Southwell

- Gauss-Seidel atualiza os elementos em ordem.
 - Se o resíduo é grande para um elemento e pequeno para os outros, o elemento grande será processado uma única vez por iteração.
- Southwell usa uma **heurística gulosa** para relaxar os elementos de maior magnitude primeiro.
 - Um mesmo elemento pode ser ajustado repetidamente em detrimento dos outros de menor magnitude.

Iteração de Southwell

```
for  $i \leftarrow 0$  to  $n$ 
   $x_i \leftarrow 0$                                 Initialize the first guess and residual.
   $r_i \leftarrow b_i$ 
endfor

---


while not converged                         Improve estimate.
  select  $i$  so that  $r_i = \max(\mathbf{r})$           Update one element.
   $x_i \leftarrow x_i + r_i / K_{i,i}$ 
   $t \leftarrow r_i$                                 Get the residual just relaxed.
  for  $k \leftarrow 0$  to  $n$ 
     $r_k \leftarrow r_k - t(K_{j,i} / K_{i,i})$       Update the residual vector.
  endfor

---


endwhile
```

FIGURE 18.7

Southwell iteration.

Sobre-relaxação

- Pode ser usada com qualquer método.
- Ao invés de subtrair apenas a quantidade necessária de cada elemento para levar seu resíduo para zero, subtrai-se “a mais”.
- Esta é uma estratégia agressiva, que antecipa o futuro por um fator ω_i .

Iteração com Sobre-relaxação.

$$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + \Delta x_i^{(g)}, \text{ ao invés usa - se}$$

$$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + \omega_i \Delta x_i^{(g)}$$

$$r_i^{(g+1)} = (1 - \omega_i) r_i^{(g)}$$

Interpretação dos Diversos Métodos

- Emissão é a primeira estimativa para radiosidade dos retalhos.
- Resíduo mede a diferença entre a emissão e a radiosidade refletida.
- Duas parcelas: radiosidade emitida (disparada) e não distribuída (ainda).
 - Resíduo mede quanta radiosidade a mais deveria estar sendo emitida mas ainda não foi.

Jacobi

- Jacobi atualiza todos os elementos do vetor de uma vez.
 - A radiosidade de cada retalho é incrementada para representar a energia não distribuída.
 - Este método não é muito usado.
- Um número pequeno de retalhos influenciam a cena no início.
 - É um desperdício atualizar todos os retalhos a cada passo se eles não contribuem muito na luz da cena.

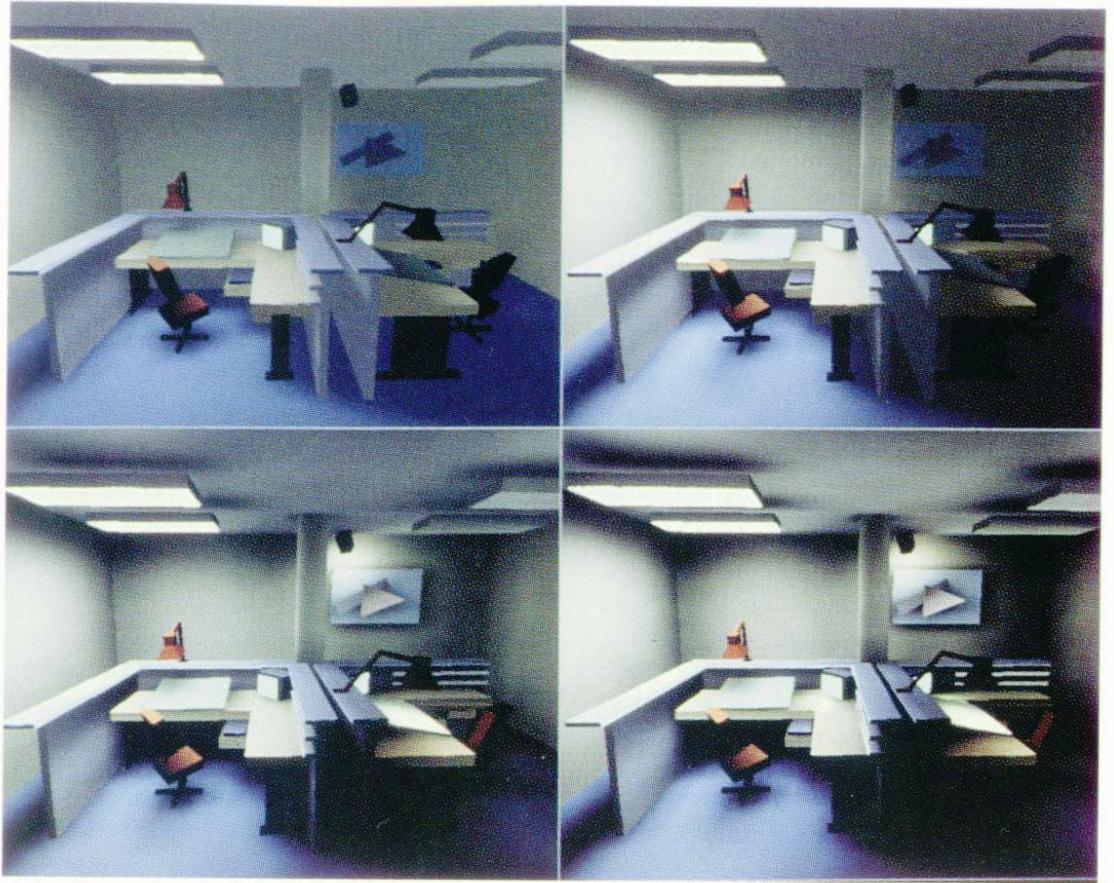
Gauss-Seidel

- Atualiza a solução inteira a cada passo, mas usa os novos valores computados para ser mais eficiente.
- A equação de radiosidade é a soma da potência emitida e a refletida, **acumulada** de todos os outros retalhos da cena.

Southwell

- Relaxa-se o elemento com o maior resíduo.
- Significa que se usa o retalho com a maior radiosidade não distribuída para **disparar** a sua energia na cena.
 - Começa com a maior fonte de luz e distribui a sua energia para as outras superfícies.
- Refinamento progressivo usado por Cohen em 1995 emprega uma variante deste método.

Um Exemplo Real



- Refinamento progressivo depois de 1, 2, 24 e 100 passos.
- 500 retalhos, 7000 sub-retalhos.
- Radiosidade ambiente estimada foi adicionada.