

Radiosidade

# Modelos Locais de Iluminação

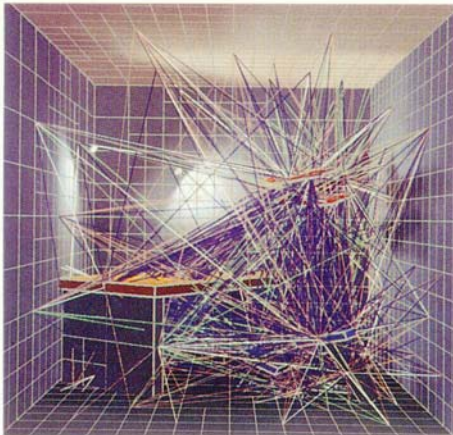
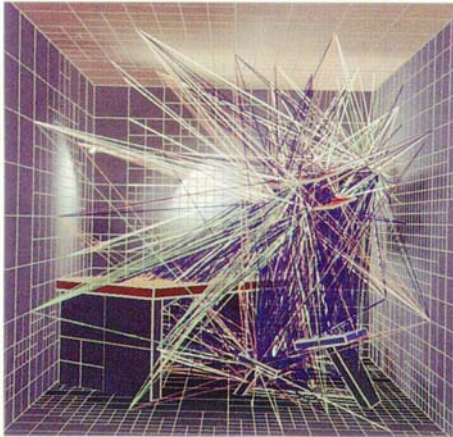
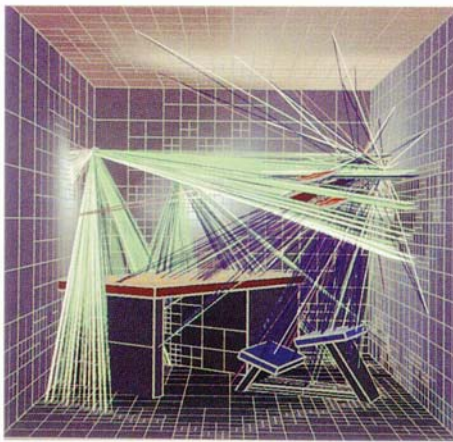
- Somente a luz direta ou a primeira reflexão numa superfície são consideradas (modelos de primeira ordem).
  - Modelo de Phong.
    - Completamente empírico.
  - Modelo de Cook e Torrance.
    - Esquema híbrido que usa um modelo físico baseado na rugosidade das superfícies para calcular a intensidade da reflexão e um modelo de ondas para certos efeitos de cor.
  - Modelo de Cabral.
    - Baseado completamente numa simulação física da rugosidade de superfícies.
  - Modelo de Kajiya.
    - Completamente baseado na teoria de ondas (*the rendering equation*).

# Modelos Globais de Iluminação

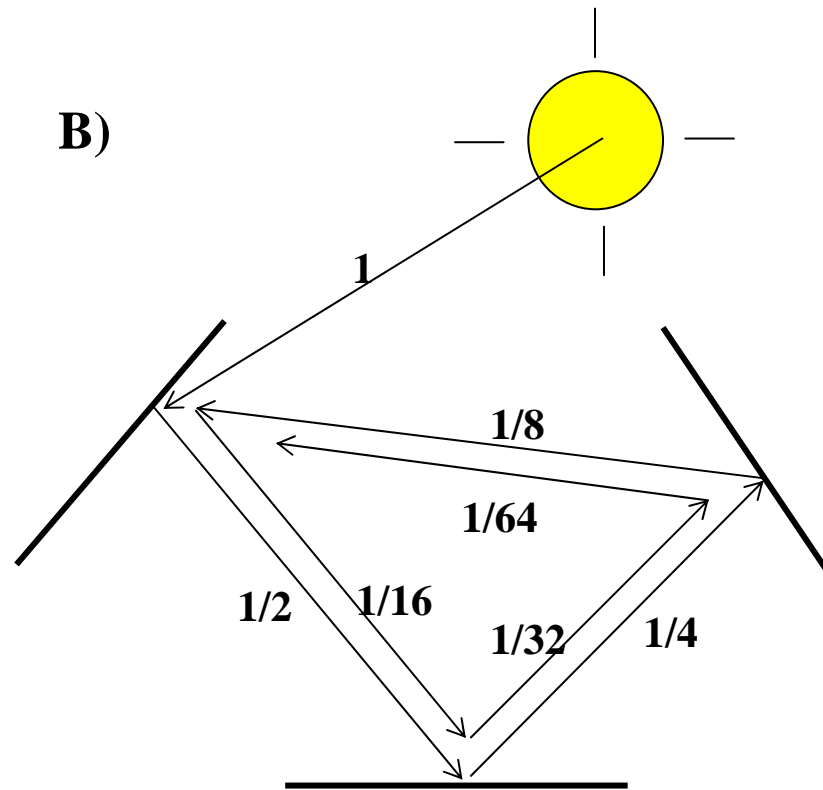
- Traçado de raios.
  - Usa um aspecto particular da interação luz-objeto: reflexão especular.
- Radiosidade.
  - Favorece a interação de superfícies difusas em detrimento da reflexão especular.
  - Baseado na teoria de transmissão de calor (Engenharia Mecânica).

# Problemas com o Ray-tracing

A)



B)

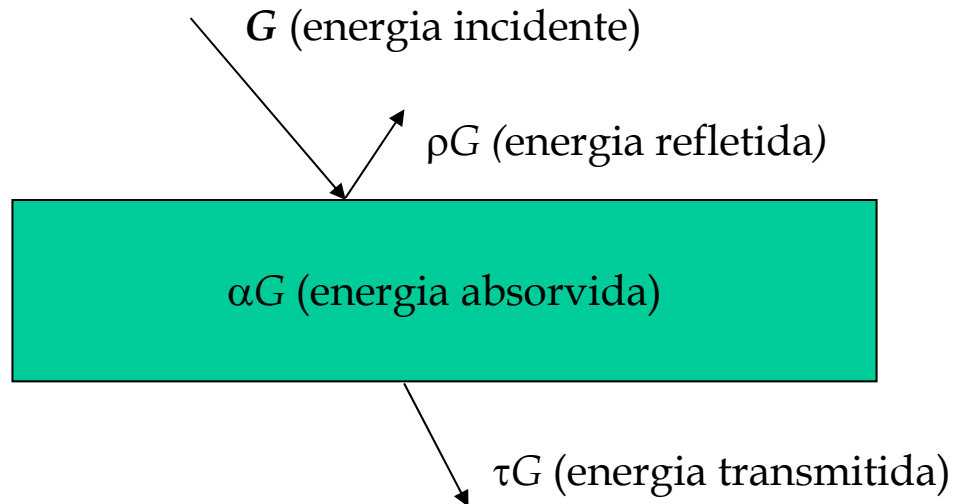


# Definições e Propriedades

- Considere-se um raio ou um feixe de energia incidente num corpo:
  - $\alpha \equiv$  fração de energia incidente absorvida:  
**absorção.**
  - $\rho \equiv$  fração de energia incidente refletida:  
**reflectância.**
  - $\tau \equiv$  fração de energia incidente transmitida:  
**transmissão.**

# Balanço de Energia

- $G = \alpha G + \rho G + \tau G \Rightarrow 1 = \alpha + \rho + \tau.$



# Materiais

- Para maioria dos sólidos em engenharia  $\tau = 0$ .
- Para líquidos a mesma suposição pode ser feita (mas depende da espessura).
- Para gases a reflexão é muito pequena e considera-se  $\rho = 0$ .

# Modelos de Reflexão

- A reflexão da energia radiante por uma superfície é descrita em termos de dois modelos ideais: refletores **difusos** e **especulares**.
- **Rugosidade** da superfície tem uma grande influência sobre as propriedades térmicas dos materiais.



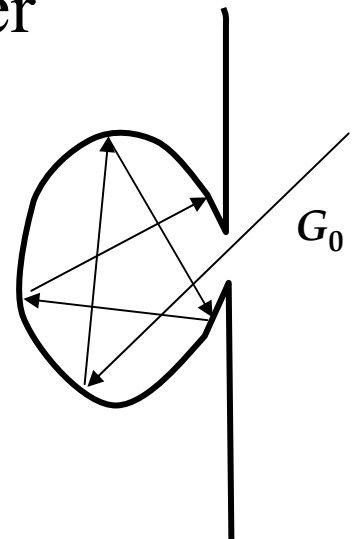
# Comportamento em função da rugosidade.

- Se os elementos de rugosidade da superfície são muito pequenos comparados ao comprimento de onda da radiação a superfície é especular.
- Se os elementos de rugosidade da superfície são muito grandes comparados ao comprimento de onda da radiação a superfície é difusa.

# Corpos Negros

- A superfície ideal para o estudo da radiação térmica é o **corpo negro**.
  - absorve toda a energia incidente em todos os comprimentos de onda (reflectância = 0).
- Corpo negro é uma idealização que pode ser imaginado como uma cavidade numa superfície com  $0 < \alpha < 1$  (buraco de fechadura).

$$G_n = (1 - \alpha)^n G_0.$$



# Emissividade

- A energia total emitida por um corpo por unidade de área por unidade de tempo é chamada de **irradiância** (potência emissiva).
- Toda superfície não negra terá uma irradiância  $E$  menor do que a de um corpo negro à mesma temperatura.

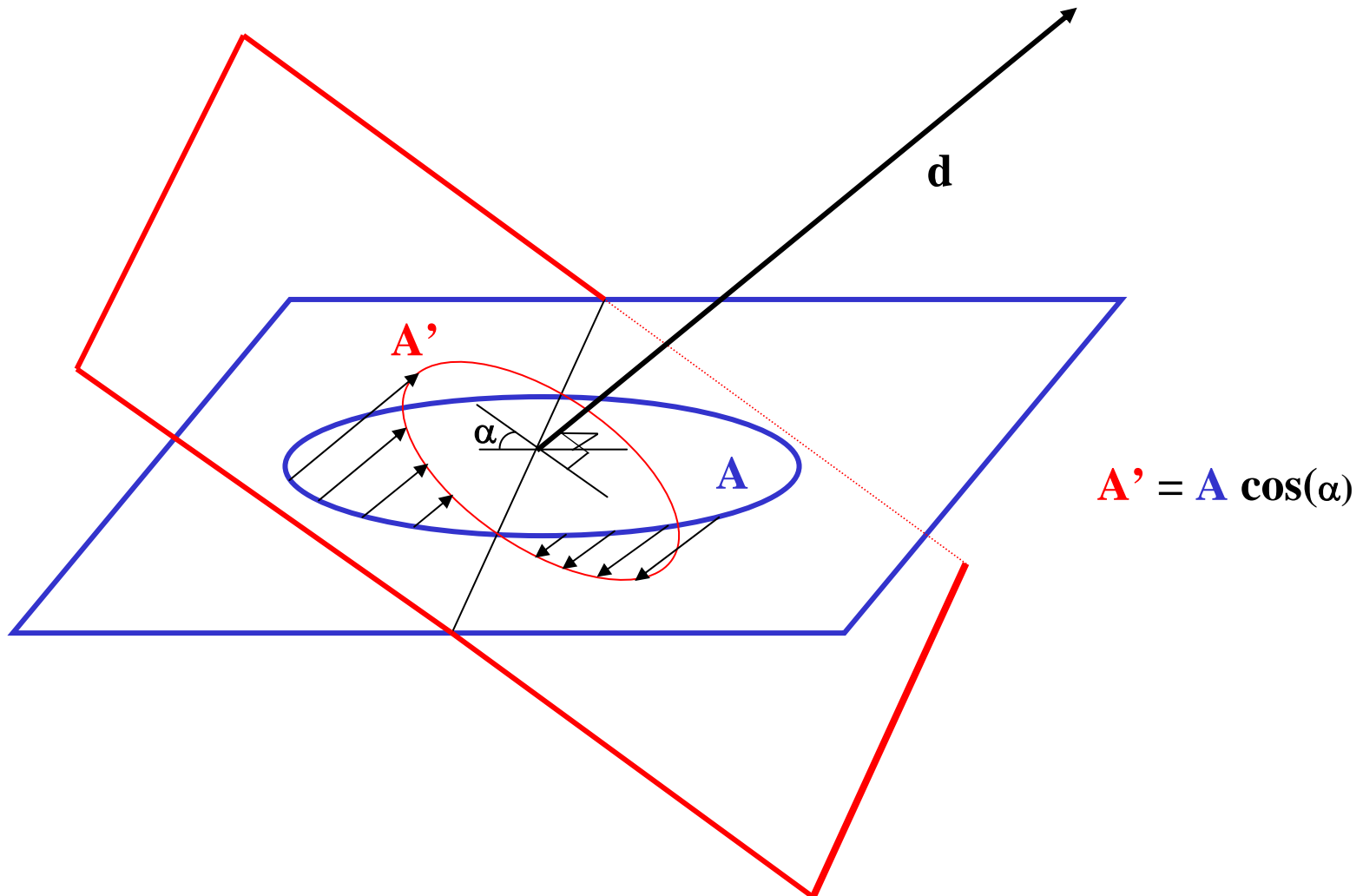
$$\varepsilon = E/E_b \text{ (emissividade).}$$

# Emissividade x Temperatura

- Para condutores, emissividades altas correspondem a altas temperaturas.
- O mesmo não é válido para **não** condutores.
- Pela lei de Kirchhoff,  $\alpha = \varepsilon$ .

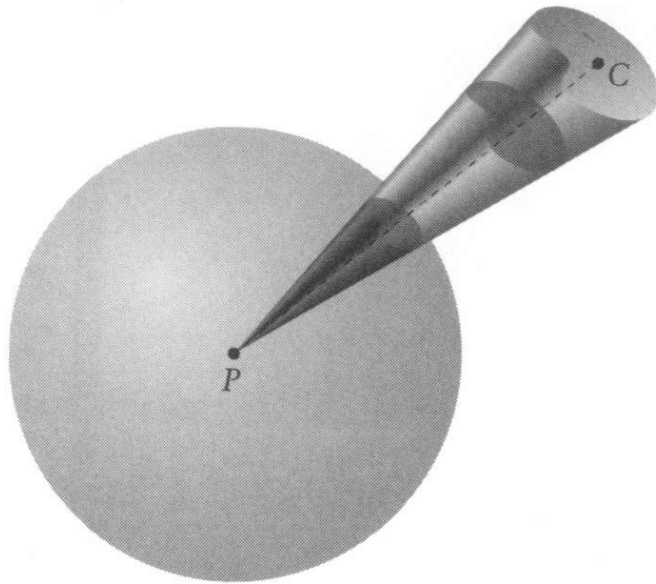
# Área Aparente

(Vista de uma dada direção  $\mathbf{d}$ )

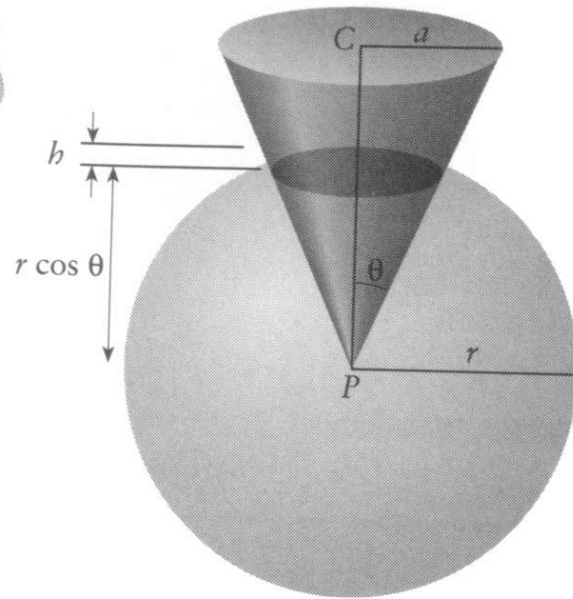


# Ângulo Sólido

É a área determinada pela interseção de um cone com a esfera unitária.

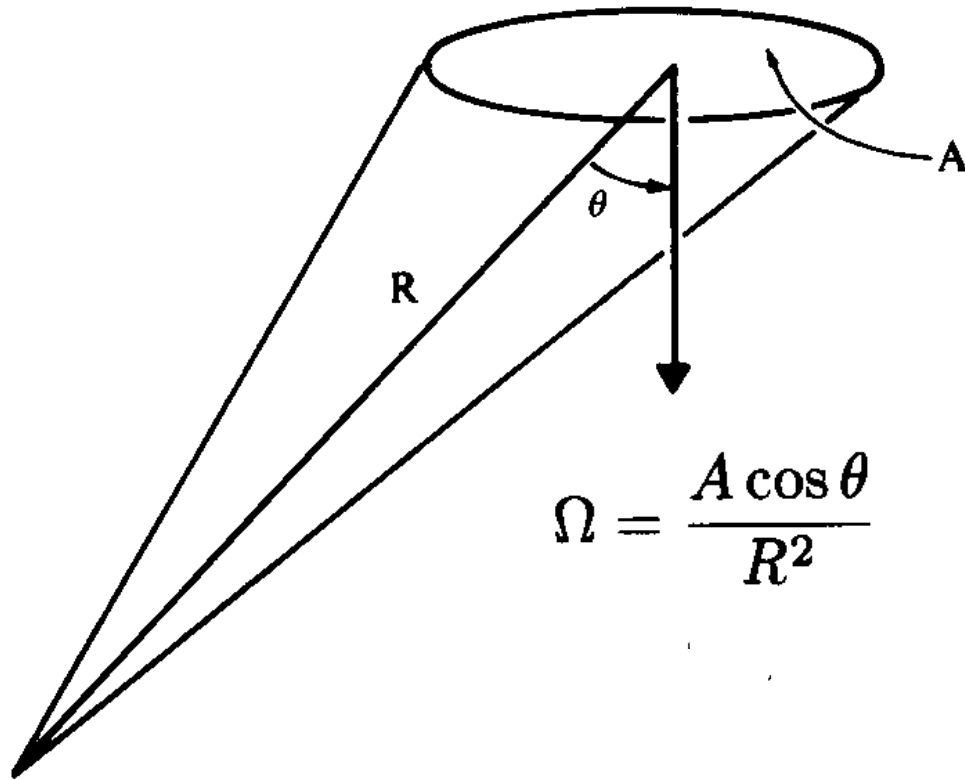


(a)



(b)

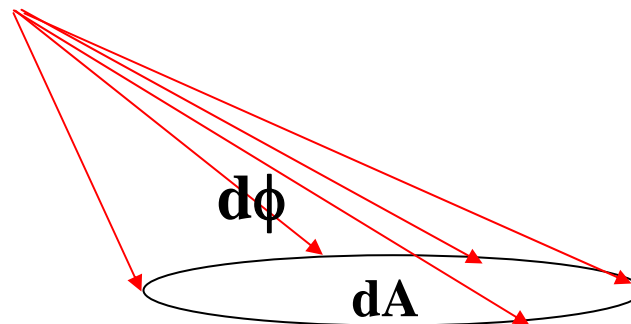
# Ângulos Sólidos Elementares



# Grandezas Radiométricas

Radiant term	Symbol	Definition	Unit
Energy	$Q$	—	$J$
Energy density	$w$	$dQ/dV$	$J/m^3$
Power (flux)	$\Phi$	$dQ/dt$	$W$
Flux area density	$u$	$d\Phi/dA$	$W/m^2$
Intensity	$I$	$d\Phi/d\vec{\omega}$	$W/sr$
Exitance (radiosity)	$M$	$d\Phi/dA$	$W/m^2$
Irradiance	$E$	$d\Phi/dA$	$W/m^2$
Radiance	$L$	$d^2\Phi/(dA d\vec{\omega} \cos \theta)$ $= dI/dA^\Phi$ $= dE/d\vec{\omega}^\Phi$	$W/(m^2 \cdot sr)$

**Irradiância:**

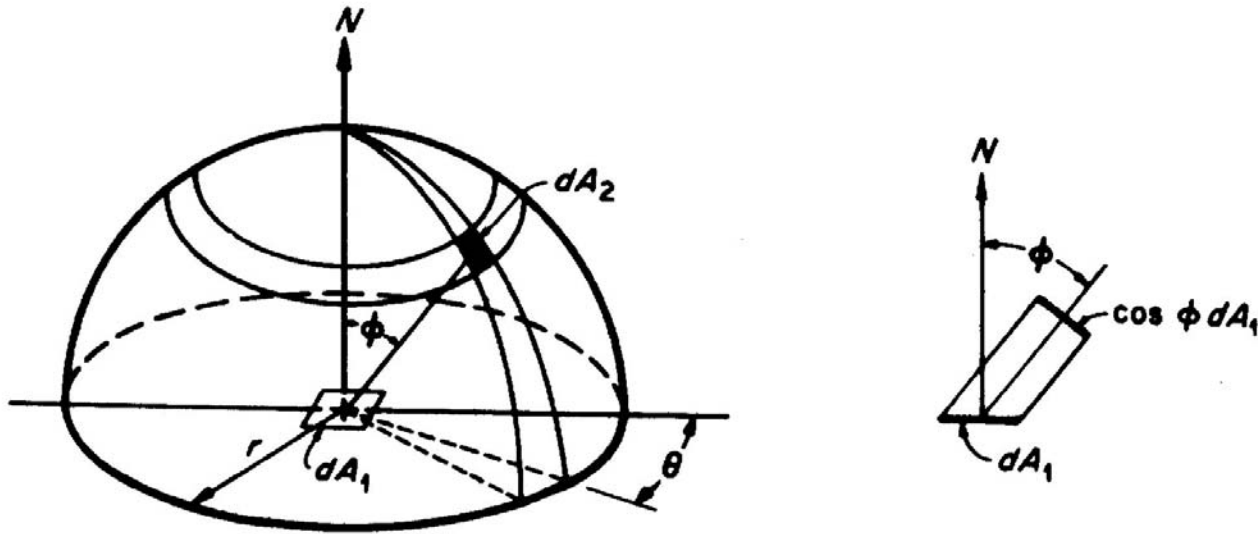




# Energia Total Irradiada

- A energia total irradiada por um elemento de superfície  $dA_1$  é interceptada por um hemisfério imaginário centrado no elemento emissor.
- Seja  $q_{1-2}$  a energia que sai do emissor e atinge o sensor e  $I$  a radiância do emissor
- Então:  $dq_{1-2} = I \cos(\phi) dA_1 d\omega$ 
  - O ângulo sólido unitário  $\omega$  é definido por:  
$$d\omega = dA_2/r^2.$$

# Irradiância



- Integrando sobre todo o hemisfério:

$$dA_2 = r d\phi (r \sin(\phi) d\theta). \text{ Logo,}$$

$$d\omega = \frac{rd\phi(r \sin(\phi)d\theta)}{r^2} = \sin(\phi) d\phi d\theta$$

# Irradiância

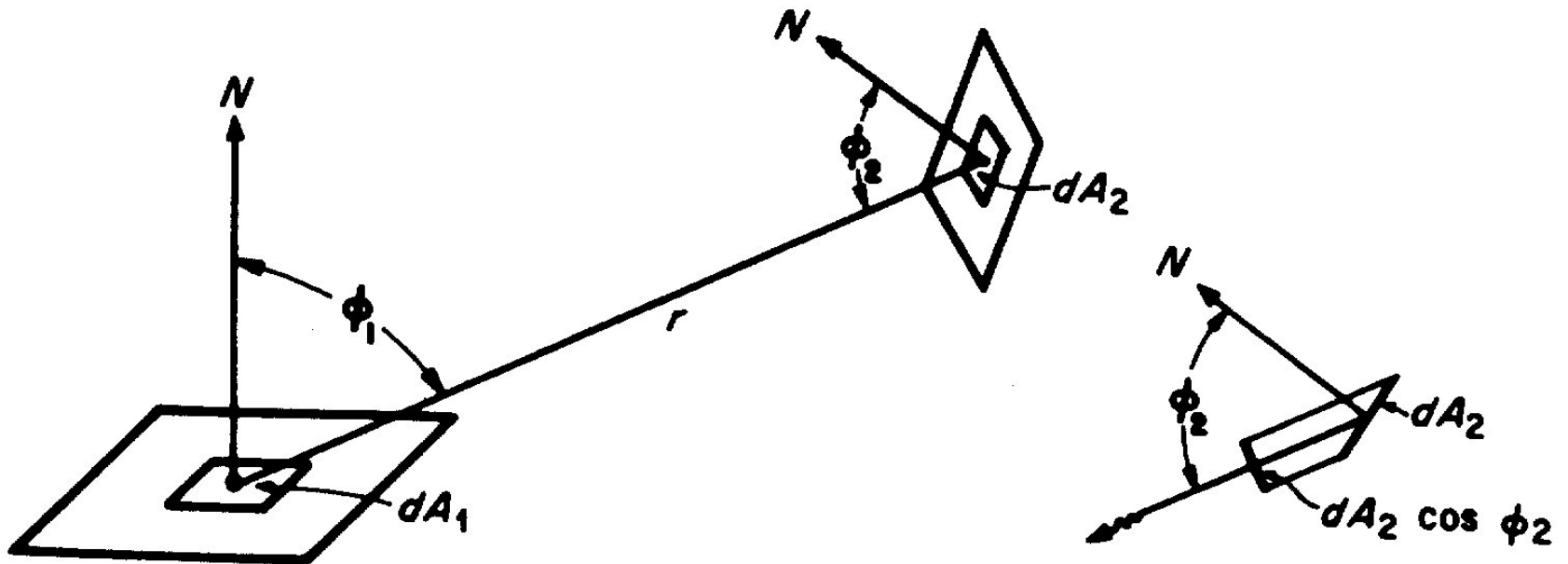
$$q_{1-2} = dA_1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi d\theta$$

que para um emissor difuso perfeito (corpo negro)  
 $I=c^{\text{te}}$  resulta em:

$$\frac{q_{1-2}}{dA_1} = E = \pi I$$

- Potência emissiva (irradiância) de um corpo negro é igual a  $\pi$  vezes a intensidade da radiação (radiância).

# Interação entre Dois Elementos de Superfície



# Fator de Forma

- **Fator de Forma** é a parcela de energia que deixa um elemento de superfície e atinge um outro elemento.

$$F_{A_i-A_j} = \frac{\text{energia radiante atingindo } A_j \text{ vindo de } A_i}{\text{energia radiante total deixando } A_i \text{ em todas as direções}}$$

# Troca de Energia

- A energia irradiada por  $dA_1$  que incide em  $dA_2$  é:

$$dq_{1-2} = I \cos(\phi_1) dA_1 d\omega_{1-2}$$

onde  $d\omega_{1-2}$  é a área de  $dA_2$  vista por  $dA_1$ .

$$d\omega_{1-2} = \cos(\phi_2) dA_2 / r^2$$

- A energia total irradiada por  $dA_1$  é:  $dq = I \pi dA_1$
- Assim, a troca de energia entre dois elementos infinitesimais é dependente somente da geometria:

$$F_{dA_1-dA_2} = \frac{dq_{1-2}}{dq} = \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2) dA_2}{\pi r^2}$$

# Fator de Forma

- Supondo que um emissor infinitesimal transmite energia para uma superfície finita:

$$F_{dA_1-A_2} = \frac{\int_{A_2} I_1 \cos(\phi_1) dA_1 \cos(\phi_2) dA_2 / r^2}{\pi I_1 dA_1}$$

- Como  $I_1$  e  $dA_1$  são independentes de  $dA_2$

$$F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_2$$

# Fator de Forma

- No caso da troca de energia entre duas superfícies Lambertianas finitas:

$$F_{A_1-A_2} = \frac{\int_{A_1} \int_{A_2} I_1 \cos(\phi_1) dA_1 \cos(\phi_2) dA_2 / r^2}{\int_{A_1} \pi I_1 dA_1}$$

$$F_{A_1-A_2} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{r^2} dA_1 dA_2$$



# Teorema da Reciprocidade

- Soma dos fatores de forma num ambiente fechado é 1.

$$\sum_{j=1}^n F_{A_i-A_j} = 1.0$$

- Teorema da reciprocidade ( $A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1}$ ).

$$A_1 F_{1-2} = \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_1 dA_2$$

# Propriedades de Subdivisão

- Natureza aditiva (quando o receptor é dividido):

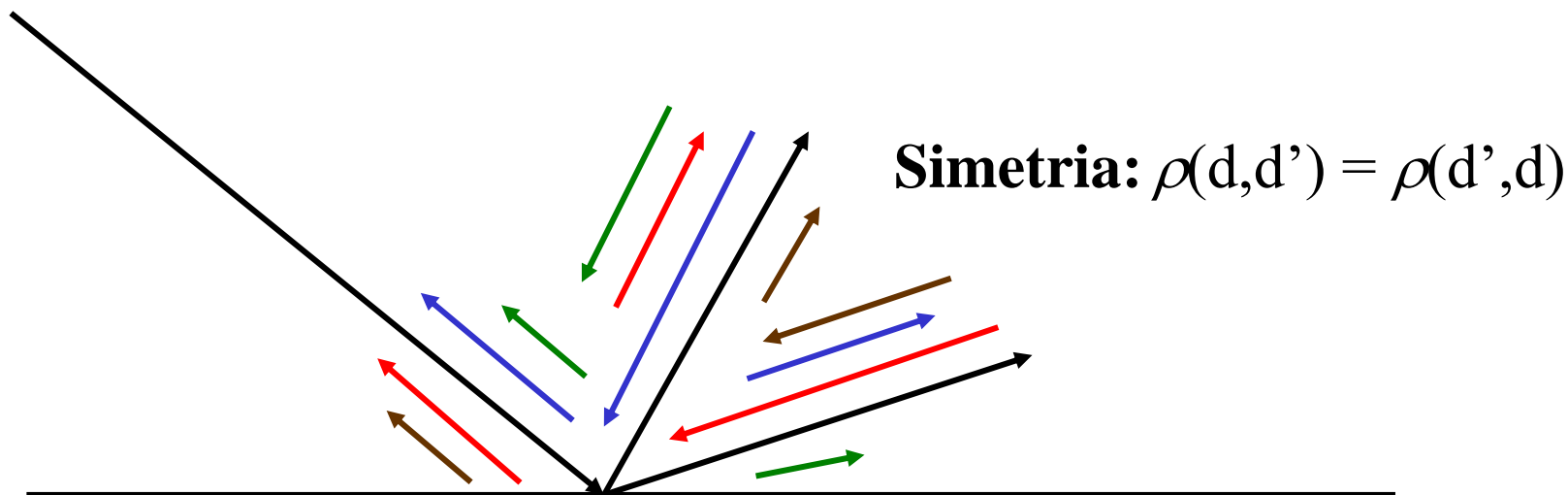
$$F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} (F_{dA_1-dA_2}) dA_2$$

- Subdivisão do emissor.

$$F_{A_1-A_2} = \frac{1}{A_1} \int_{A_1} (F_{dA_1-A_2}) dA_1$$

# Reflectância Bi-direcional BRDF

$$\rho(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i) = \frac{\text{Radiância que sai em uma direção}}{\text{Irradiância que chega de outra direção}}$$
$$= \frac{I_{\lambda,r}(\lambda, \theta_r, \phi_r, \theta_i, \phi_i)}{I_{\lambda,i}(\lambda, \theta_i, \phi_i) \cos(\theta_i) d\omega_i}$$

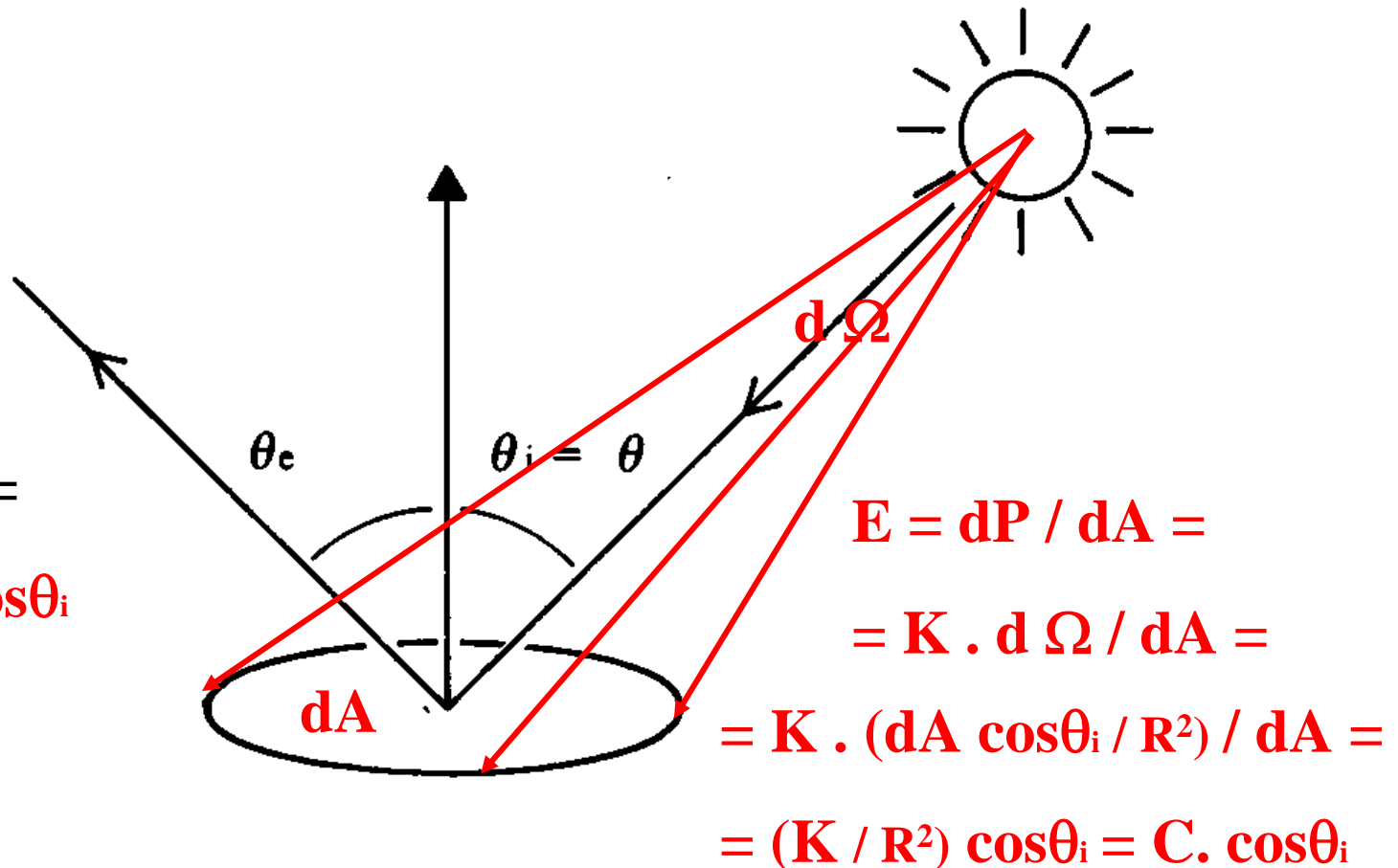


# Superfícies Lambertianas

Reflexão é idêntica em todas as direções

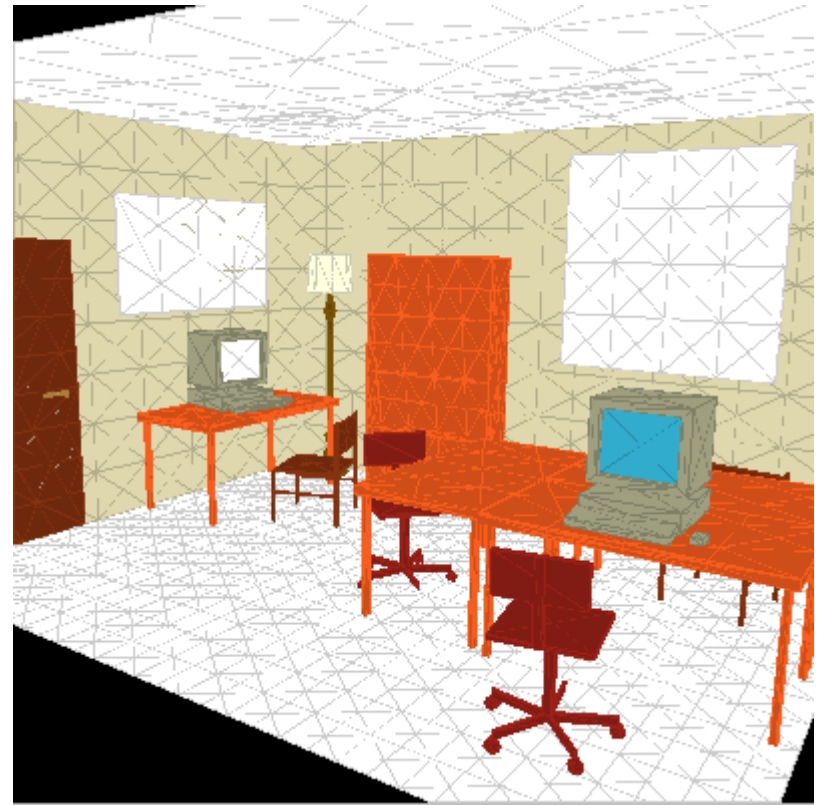
BRDF:  $\rho(d, d') = \text{constante} = 1/\pi$

$$\mathbf{L} = (1/\pi) \cdot \mathbf{E} = \\ = (1/\pi) \cdot \mathbf{C} \cdot \cos\theta_i$$



# Radiosidade Clássica

- Todas as superfícies são opacas.
- Todas as superfícies são refletores difusos perfeitos ( $\rho = c^{te}$ ).
- Superfícies são discretizadas em retalhos pequenos (*patches*).
- Radiosidade constante nos retalhos.
- Irradiância constante nos retalhos.



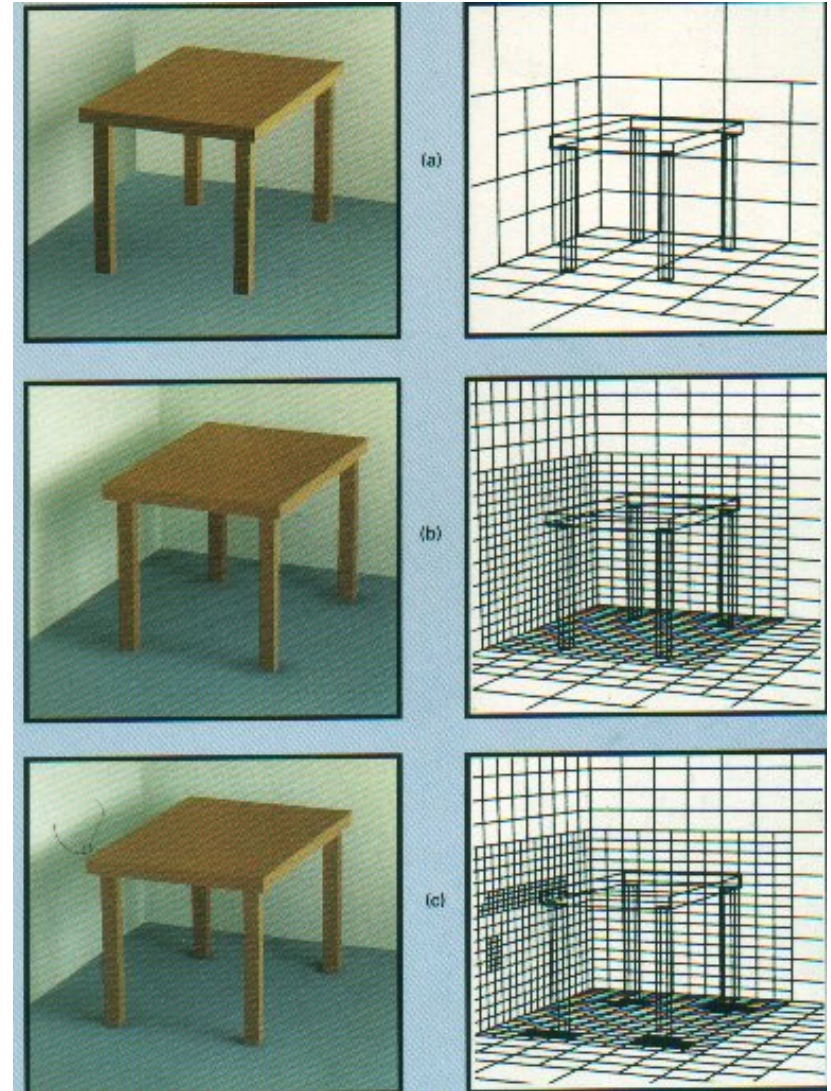
# Conceito

- Método de relaxação.
  - Trata a iluminação global como um sistema linear.
  - Requer BRDF constante (superfícies difusas).
  - Resolve equação de iluminação como um problema matricial.
- Processo
  - Subdivide em retalhos.
  - Calcula fatores de forma.
  - Resolve radiosidade.
  - Exibe retalhos.



# Hemicubo para Computar Fatores de Forma

- a) 145 retalhos
- b) 1021 retalhos
- c) refinamento de b) por subdivisão adaptativa com 1036 sub-retalhos



# Sistema Linear

$$B_i A_i = E_i A_i + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ji} B_j A_j$$
$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^n F_{ij} B_j$$

$$\begin{bmatrix} 1 - \rho_1 F_{11} & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 - \rho_2 F_{22} & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 - \rho_n F_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$



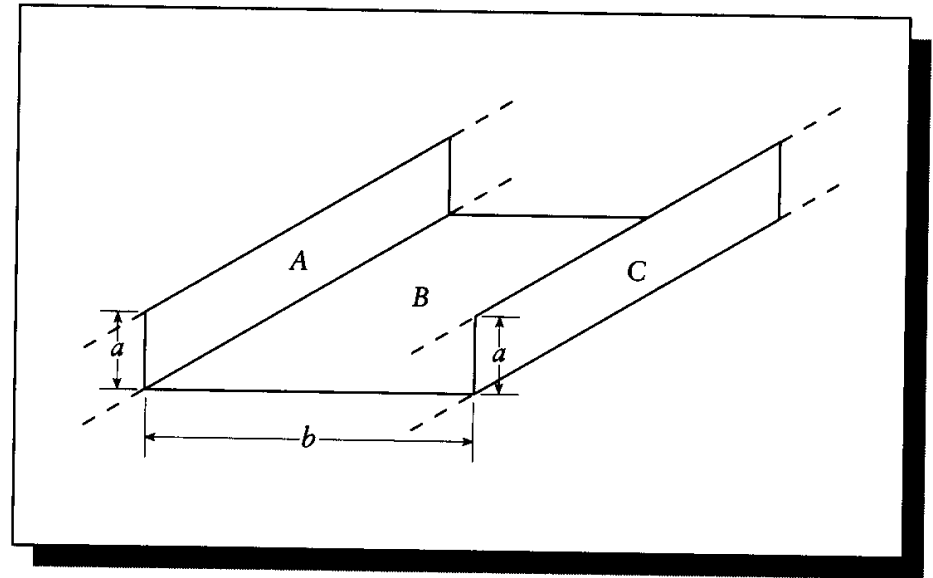
# Um Exemplo

Fatores de Forma:  $g = b/a$

$$F_{A,B} = \frac{1}{2} \left( 1 + g - \sqrt{1 + g^2} \right)$$

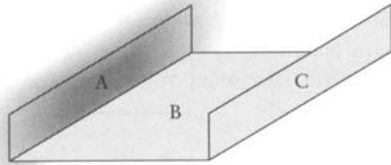
$$F_{A,C} = \sqrt{1 + g^2} - g$$

$$F_{B,C} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{g} - \sqrt{1 + \left( \frac{1}{g} \right)^2} \right)$$



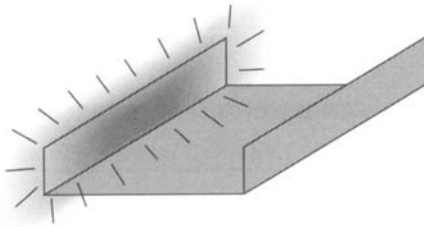
$$K = \begin{bmatrix} 1 & -\rho_A F_{A,B} & -\rho_A F_{A,C} \\ -\rho_B F_{B,A} & 1 & -\rho_B F_{B,C} \\ -\rho_C F_{C,A} & -\rho_C F_{C,B} & 1 \end{bmatrix}$$

# Prateleira Infinita



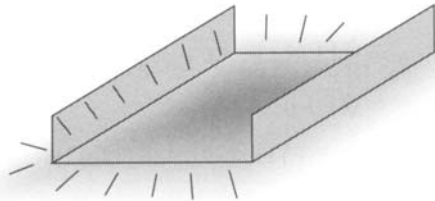
(a)

**Só A emite e não reflete.**



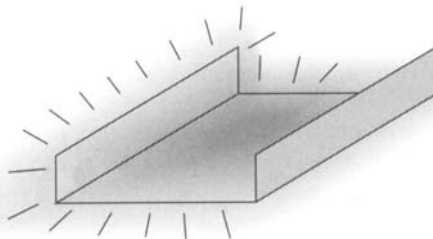
(b)

**A emite e reflete.**



(c)

**Só B emite e não reflete.**



(d)

**A e B emitem e refletem.**

Reflectivity	Emissivity	Radiosity
$\begin{bmatrix} \rho_A \\ \rho_B \\ \rho_C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} E_A \\ E_B \\ E_C \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_A \\ B_B \\ B_C \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0.11660 \\ 0.10354 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.00709 \\ 0.11743 \\ 0.10428 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.21133 \\ 1 \\ 0.21133 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 1/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1.04647 \\ 0.02906 \\ 0.32853 \end{bmatrix}$

# Cálculo dos Fatores de Forma

- Necessidade de avaliar uma integral de superfície dupla.
- Inviável computacionalmente para ambientes complexos.
- Ineficiente computacionalmente.

# Método Numérico

- Converte integral de superfície dupla numa integral de linha dupla (teorema de Stokes).
- Adequado para ambientes simples.
- Método empregado no paper de 1984 de Goral.

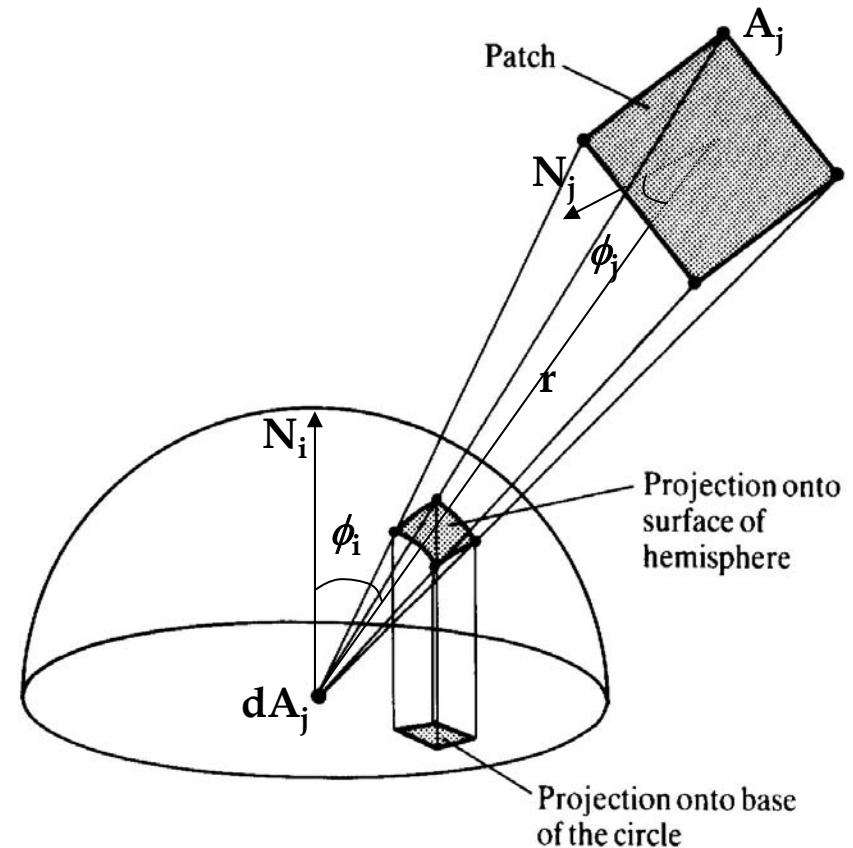
# Método do Hemicubo

- Introduzido em 1985 pelo grupo de Cornell.
- Distância entre dois retalhos é grande comparada a área do retalho.
  - Integral interna não varia muito em relação a integral externa.
  - Integral área-área é aproximada pela integral diferencial-área.

$$F_{A_1-A_2} \approx F_{dA_1-A_2} = \int_{A_2} \frac{\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)}{\pi r^2} dA_2$$

# Analogia de Nusselt

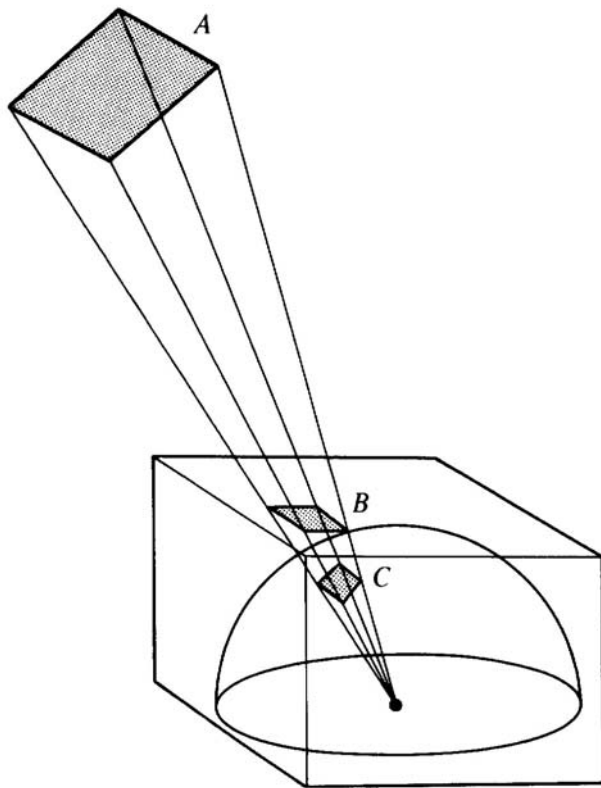
- Fator de forma é equivalente a fração do círculo unitário correspondente a projeção do retalho sobre o hemisfério, seguida pela projeção sobre a base do círculo.



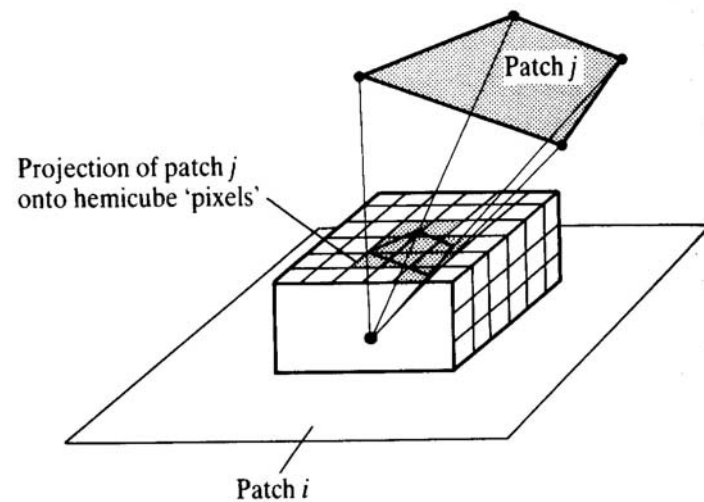
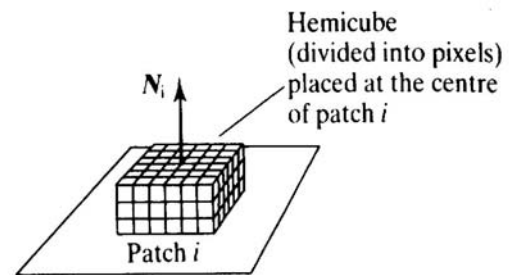
# Discretização do Hemicubo

- Qualquer retalho que tenha a mesma projeção sobre o hemisfério tem o mesmo fator de forma.
- Pode-se projetar sobre um **hemicubo** ao invés de um hemisfério.
- Faces do hemicubo são divididas em **pixels**.
  - Cada pixel é considerado um retalho.
  - Fatores diferencial-área são pré-calculados (fatores delta) e armazenados em uma tabela de busca.

# Hemicubo



**Figure 11.7** The justification for using a hemicube. Patches *A*, *B* and *C* have the same form factor.

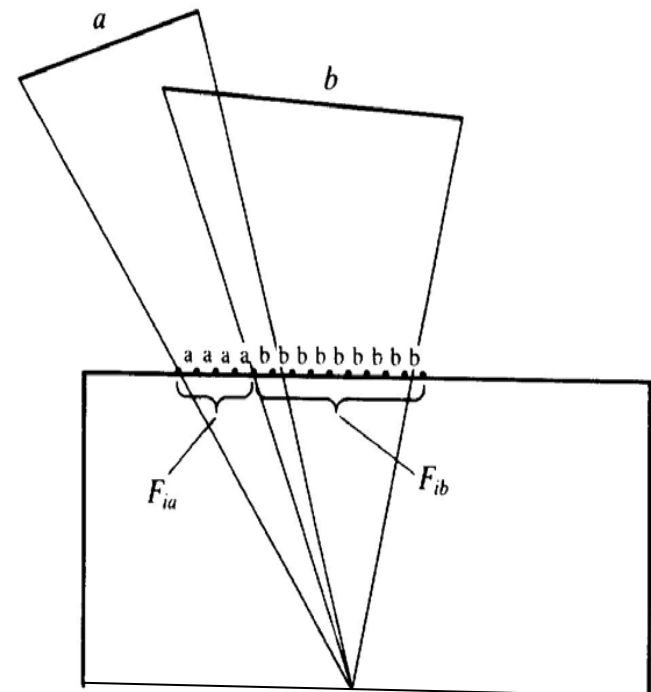
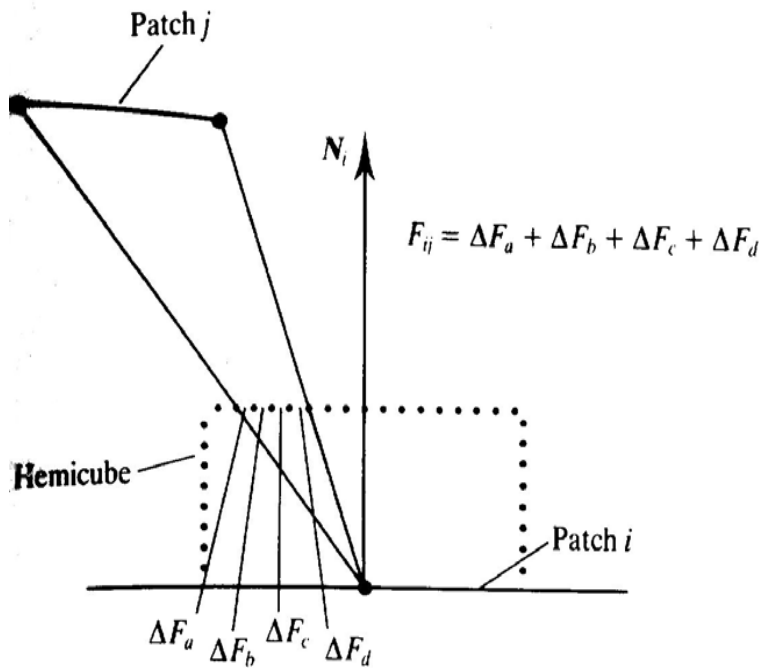




# Oclusão

- Todo retalho de superfície é projetado no hemicubo.
- Se o mesmo pixel contiver a projeção de dois retalhos, usa-se aquela correspondendo ao retalho mais próximo (análogo ao z-buffer).

# Soma dos Fatores Delta



# Integração dos Fatores Delta

- Por fim teremos conjuntos conexos de pixels que são projeções dos retalhos mais próximos.
- Executa-se então a soma para cada  $F_{ij}$  ( $q$  é o conjunto de pixels sobre o qual  $A_j$  se projeta).

$$F_{ij} = \sum_q \Delta F_q$$

# Pré-cálculo dos Fatores Delta

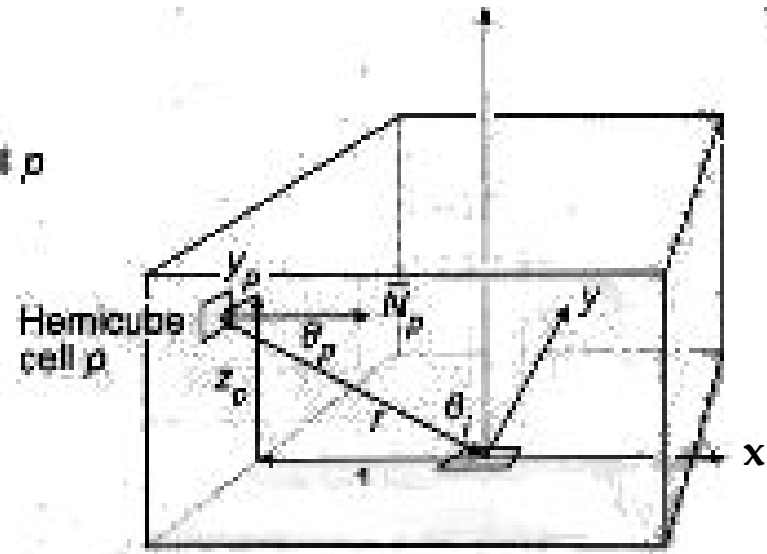
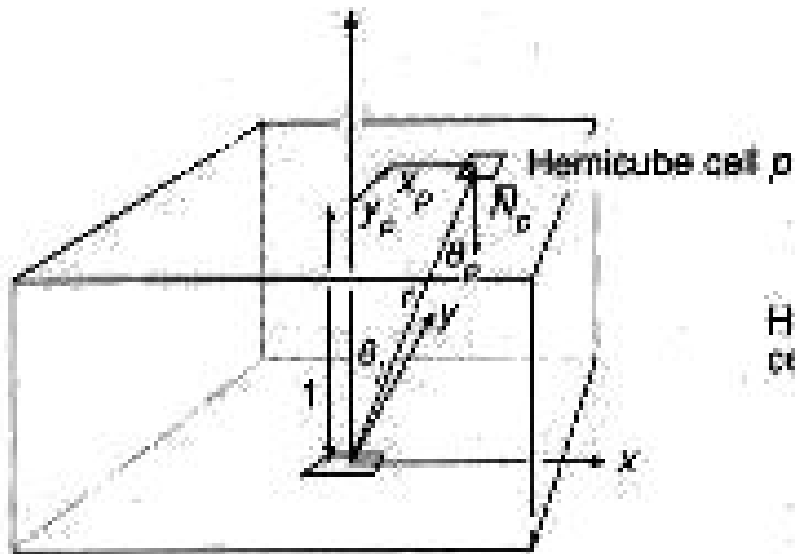
- Na superfície no topo do hemicubo:

$$\Delta F_q = \frac{\cos(\phi_i) \cos(\phi_j)}{\pi r^2} \Delta A = \frac{1}{\pi(x_q^2 + y_q^2 + 1)^2} \Delta A$$

- Na superfície lateral perpendicular a x:

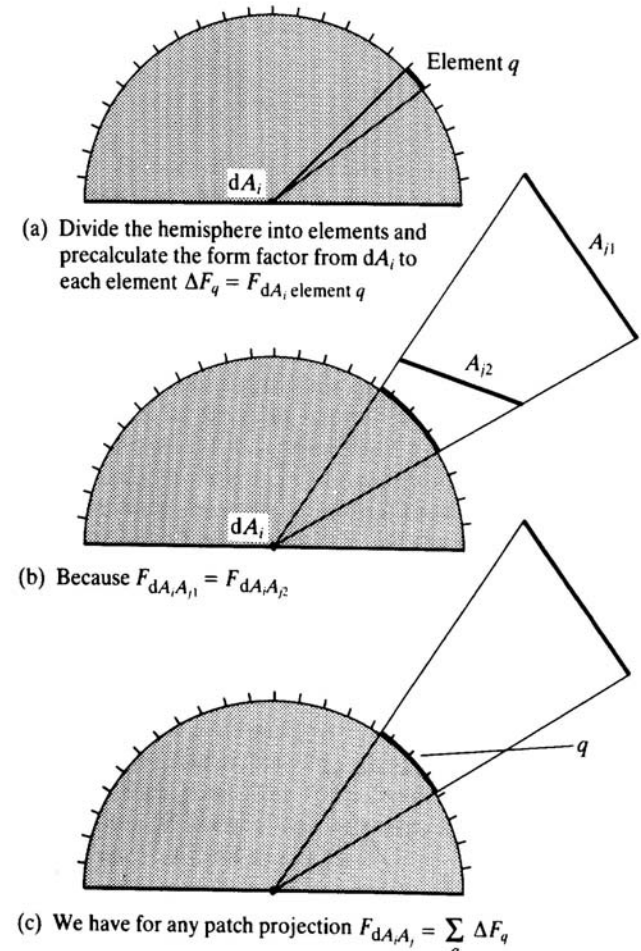
$$\Delta F_q = \frac{z_q}{\pi(y_q^2 + z_q^2 + 1)^2} \Delta A$$

# Geometria para Cálculo dos Fatores Delta



# Projeção dos Retalhos

- Centro de projeção é o centro do hemicubo.
- Cada face do hemicubo define um frustrum de visão.
- Arestas do hemicubo definem planos de recorte.
- Retalhos são projetados sobre cada face do hemicubo.



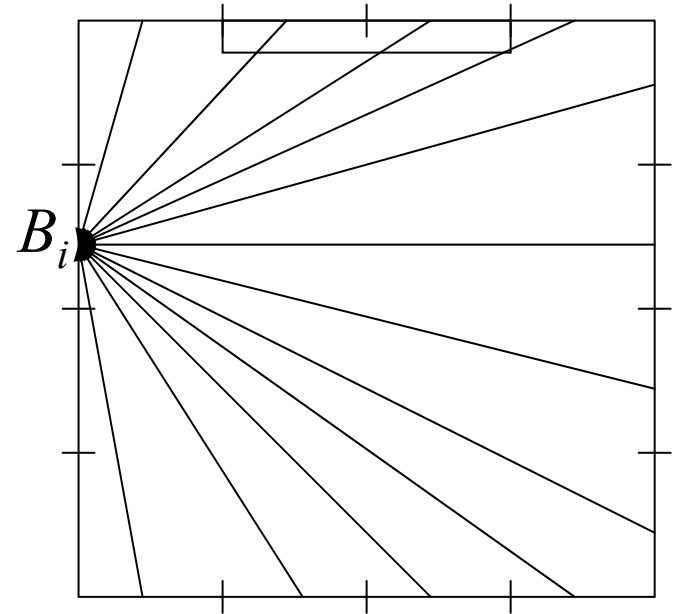
# Traçado de Raios

- Pode-se usar uma esfera discretizada em elementos de área com fatores delta pré-calculados.
- Raios são lançados através de cada elemento de área da esfera.
- Considera-se a interseção com um retalho mais próxima do centro da esfera.
- Troca-se a complexidade do código hemicubo pela do código de traçado de raios.

# Acumulação

- Resolve  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  como um sistema linear  $MB = E$
- Solução de uma linha provê a solução de um único retalho.
- Intensidade de cada retalho é atualizada de acordo com sua posição na matriz.
- Jacobi
 
$$B_i^{(k+1)} = E_i - \sum_{j \neq i} M_{ij} B_j^{(k)}$$
  - Radiosidade = Emissão mais outras radiosidades refletidas
- Gauss-Seidel
 
$$B_i = E_i - \sum_{j \neq i} M_{ij} B_j$$
  - Cálculo no local.
- Sobre-relaxação
 
$$B_i^{(k+1)} = 110\% B_j^{(k+1)} - 10\% B_j^{(k)}$$
  - Gauss-Seidel é muito conservativo

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 F_{12} & \cdots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 & \cdots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$





# Refinamento Progressivo

- A imagem inteira é atualizada a cada iteração, ao invés de um único retalho.

$$B_i \text{ devido a } B_j = \rho_i B_j F_{ij}, \forall j$$

- Invertendo a relação:

$$B_j \text{ devido a } B_i = \rho_j B_i F_{ij} \frac{A_i}{A_j}, \forall j$$

- Requer um único hemicubo centrado em  $i$ .
- Um único retalho atira luz na cena e as radiosidades de todos os retalhos são atualizadas simultaneamente.
- Fatores de forma são calculados *on the fly*.

# Algoritmo

- Um retalho é escolhido por vez para disparar luz.
- O retalho  $i$  dispara  $\Delta B_i$ , a radiosidade que recebeu desde a última iteração.
- Disparam primeiro os retalhos que influenciam mais a cena ( $\Delta B_i A_i$  maior).
- Inicialmente,  $B_i = \Delta B_i = E_i$ , para todo retalho.

# Pseudo-Código

Selecione retalho i;

Calcule  $F_{ij}$  para cada retalho j;

Para cada retalho j faça {

$$\Delta \text{Rad} = \rho_j \Delta B_i F_{ij} A_i / A_j;$$

$$\Delta B_j = \Delta B_j + \Delta \text{Rad};$$

$$B_j = B_j + \Delta \text{Rad};$$

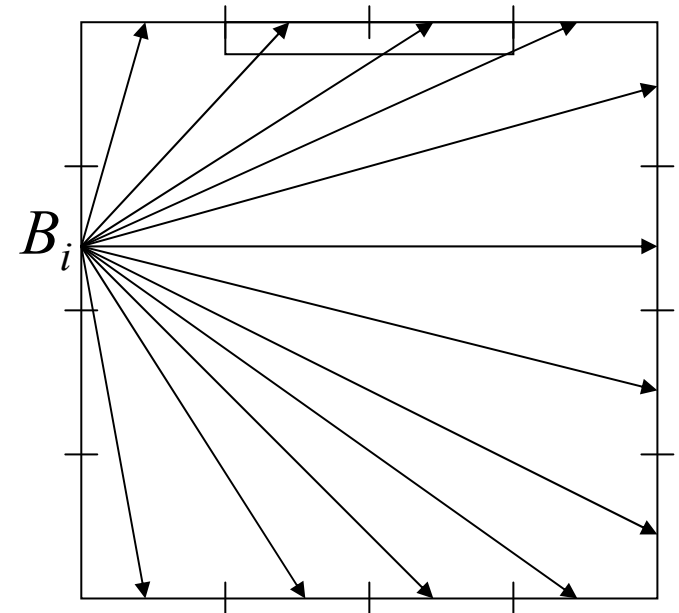
}

$$\Delta B_i = 0;$$

# Disparo

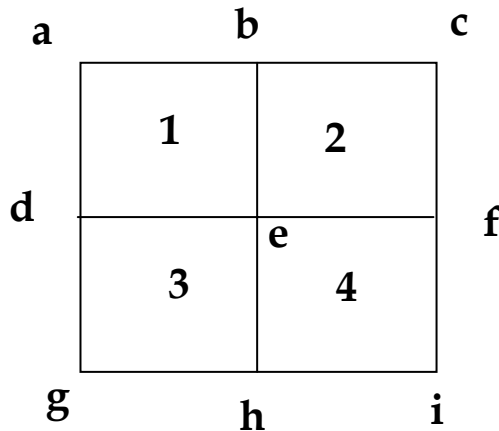
- Refinamento Progressivo
- Distribui radiosidade extra  $\Delta B_i$  pelos outros retalhos
 
$$B_j^{(k+1)} = B_j^{(k)} + \rho_j F_{ji} \Delta B_i$$
- Radiosidade extra “não disparada” é o que recebemos da última iteração
 
$$\Delta B_i = B_j^{(k)} - B_j^{(k-1)}$$
- Energia parte dos emissores
- Distribui “progressivamente” pela cena
- Pode usar um termo ambiente durante o processamento da cena, que é diminuído a medida que a radiosidade progressiva converge

$$\begin{bmatrix} 1 & -\rho_1 F_{12} & \dots & -\rho_1 F_{1n} \\ -\rho_2 F_{21} & 1 & \dots & -\rho_2 F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho_n F_{n1} & -\rho_n F_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$



# Calculando Radiosidade nos Vértices

- Uma vez obtidas as radiosidades nos retalhos, precisamos extrapolá-las para os vértices.
- Radiosidades nos vértices alimentam então um visualizador tipo Gouraud.



$$B_e = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$$

$$(B_b + B_e) / 2 = (B_1 + B_2) / 2$$

$$(B_a + B_e) / 2 = B_1$$

# Problemas da Solução por Inversão

- O sistema  $MB = E$  pode ser resolvido invertendo-se a matriz  $M$ .
- O tamanho de  $M$  é enorme e acarreta problemas de armazenamento e de inversão.
  - $M$  é quadrada ( $n \times n$ ,  $n$  número de retalhos.)
  - Dobrar  $n$  quadruplica o número de elementos de  $M$ .

# Métodos de Relaxação

- Vários métodos iterativos foram desenvolvidos que iniciam o vetor  $B$  com uma solução inicial e então a refinam até que o erro esteja dentro de uma tolerância pré-definida.
- Radiosidade utiliza métodos de **relaxação**.

# Um Pouco de Teoria

- Seja um sistema linear  $Kx = b$ , onde  $K$  é uma matriz  $n \times n$ ,  $x$  e  $b$  são vetores coluna de dimensão  $n$ .
- Será gerada uma série de soluções aproximadas  $x$  que devem convergir para a solução real.
- $x^{(g)}$  é a aproximação no passo  $g$ .



# Erro da Aproximação

- $e^{(g)} = x - x^{(g)}$  é o **erro**.
- $r^{(g)} = b - K x^{(g)} = K e^{(g)}$  é o **resíduo**.
- Métodos de relaxação usam o resíduo para refinar a aproximação e gerar o sucessor  $x^{(g+1)}$ .
- A estratégia é olhar para um elemento  $r_i^{(g)}$  do vetor de resíduo e aplicar uma transformação ao elemento correspondente  $x_i^{(g)}$  de forma a que  $r_i^{(g)} \rightarrow 0$ .

# Convergência

- Outros elementos de  $r$  podem crescer, mas espera-se que a tendência geral seja na direção de valores menores para todos os elementos do resíduo.

$$\sum_{k=1}^n K_{i,k} x_k^{(g)} = b_i$$

$$K_{i,i} x_i^{(g)} = b_i - \sum_{\substack{k \neq i \\ k=1}}^n K_{i,k} x_k^{(g)} = r_i^{(g)} + K_{i,i} x_i^{(g)}$$

$$(\div K_{i,i})$$

$$x_i^{(g+1)} = \frac{r_i^{(g)}}{K_{i,i}} + x_i^{(g)}$$

# Parada

- Ajustar um elemento até que seu resíduo vá para zero é chamado de **relaxamento do elemento**.
- Critérios de parada são baseados numa tolerância  $t$ :
  - $\max(|r|) < t$
  - $|x_i^{(g)} - x_i^{(g+1)}| < t$

# Iteração de Jacobi

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$

$x_i \leftarrow 0$

*Initialize the first guess.*

endfor

---

while not converged

*Update the unknown vector.*

---

$\mathbf{r}^{(g)} = \mathbf{b} - \mathbf{K}\mathbf{x}^{(g)}$

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$

$x_i^{(g+1)} \leftarrow x_i^{(g)} + r_i^{(g)} / K_{i,i}$

*Update each element.*

endfor

---

endwhile

---

**FIGURE 18.5**

Jacobi iteration.

# Método de Gauss-Seidel

- Iteração de Gauss-Seidel é similar a de Jacobi.
- Jacobi calcula o resíduo a partir do  $x^{(g)}$  corrente e os próximos elementos são computados a partir dele.
  - Não se usam os novos valores  $x^{(g+1)}$  até que todos os elementos tenham sido computados.
- Gauss-Seidel atualiza os valores no local e calcula o resíduo de novo para cada elemento.

# Iteração de Gauss-Seidel

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$

$x_i \leftarrow 0$

endfor

*Initialize the first guess.*

---

while not converged

*Update the unknown vector.*

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$

$x_i \leftarrow (b_i - \sum_{k=1, k \neq i}^n x_k K_{i,k}) / K_{i,i}$

*Update each element.*

endfor

---

endwhile

---

**FIGURE 18.6**

Gauss-Seidel iteration.

# Método de Southwell

- Gauss-Seidel atualiza os elementos em ordem.
  - Se o resíduo é grande para um elemento e pequeno para os outros, o elemento grande será processado uma única vez por iteração.
- Southwell usa uma **heurística gulosa** para relaxar os elementos de maior magnitude primeiro.
  - Um mesmo elemento pode ser ajustado repetidamente em detrimento dos outros de menor magnitude.

# Iteração de Southwell

for  $i \leftarrow 0$  to  $n$

$x_i \leftarrow 0$

$r_i \leftarrow b_i$

endfor

*Initialize the first guess and residual.*

---

while not converged

*Improve estimate.*

select  $i$  so that  $r_i = \max(\mathbf{r})$

*Update one element.*

$x_i \leftarrow x_i + r_i / K_{i,i}$

---

$t \leftarrow r_i$

*Get the residual just relaxed.*

---

for  $k \leftarrow 0$  to  $n$

$r_k \leftarrow r_k - t(K_{j,i} / K_{i,i})$

*Update the residual vector.*

endfor

---

endwhile

---

**FIGURE 18.7**

Southwell iteration.



# Sobre-relaxação

- Pode ser usada com qualquer método.
- Ao invés de subtrair apenas a quantidade necessária de cada elemento para levar seu resíduo para zero, subtrai-se “a mais”.
- Esta é uma estratégia agressiva, que antecipa o futuro por um fator  $\omega_i$ .

# Iteração com Sobre-relaxação.

$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + \Delta x_i^{(g)}$ , ao invés usa - se

$$x_i^{(g+1)} = x_i^{(g)} + \omega_i \Delta x_i^{(g)}$$

$$r_i^{(g+1)} = (1 - \omega_i) r_i^{(g)}$$

# Interpretação dos Diversos Métodos

- Emissão é a primeira estimativa para radiosidade dos retalhos.
- Resíduo mede a diferença entre a emissão e a radiosidade refletida.
- Duas parcelas: radiosidade emitida (disparada) e não distribuída (ainda).
  - Resíduo mede quanta radiosidade a mais deveria estar sendo emitida mas ainda não foi.

# Jacobi

- Jacobi atualiza todos os elementos do vetor de uma vez.
  - A radiosidade de cada retalho é incrementada para representar a energia não distribuída.
  - Este método não é muito usado.
- Um número pequeno de retalhos influenciam a cena no início.
  - É um desperdício atualizar todos os retalhos a cada passo se eles não contribuem muito na luz da cena.

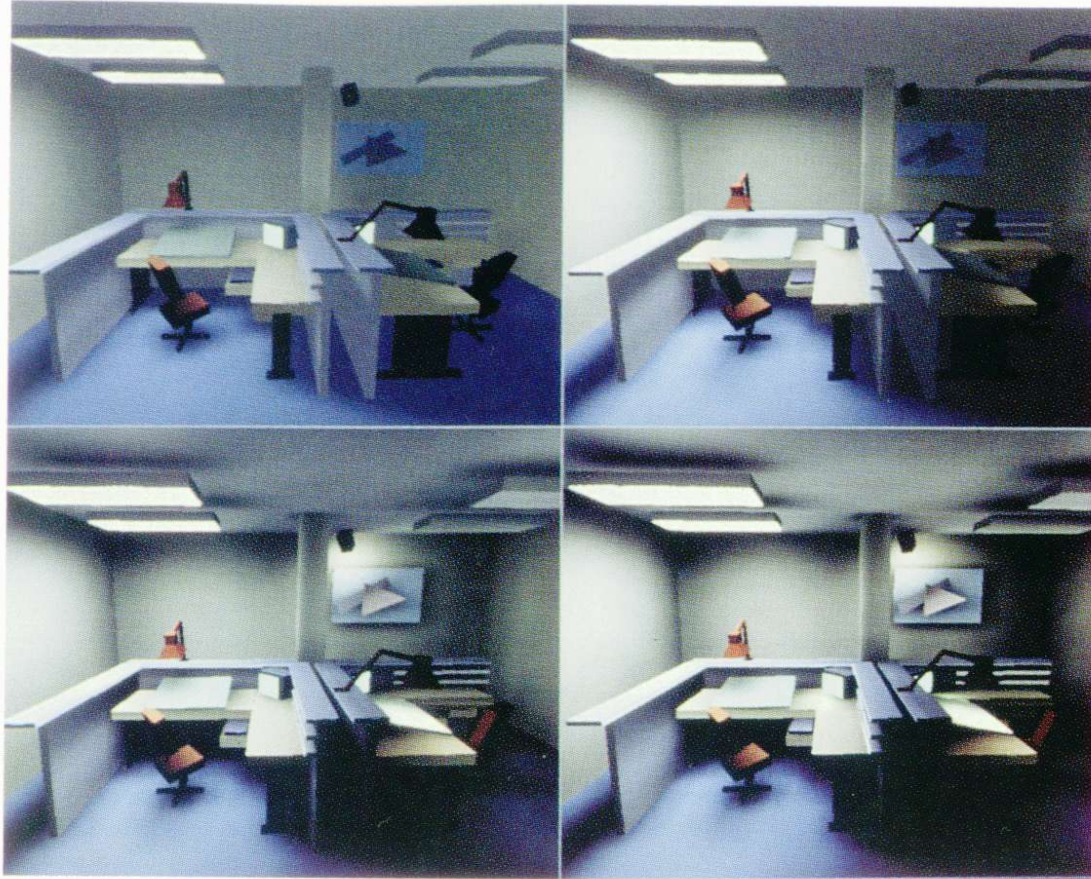
# Gauss-Seidel

- Atualiza a solução inteira a cada passo, mas usa os novos valores computados para ser mais eficiente.
- A equação de radiosidade é a soma da potência emitida e a refletida, **acumulada** de todos os outros retalhos da cena.

# Southwell

- Relaxa-se o elemento com o maior resíduo.
- Significa que se usa o retalho com a maior radiosidade não distribuída para **disparar** a sua energia na cena.
  - Começa com a maior fonte de luz e distribui a sua energia para as outras superfícies.
- Refinamento progressivo usado por Cohen em 1995 emprega uma variante deste método.

# Um Exemplo Real



- Refinamento progressivo depois de 1, 2, 24 e 100 passos.
- 500 retalhos, 7000 sub-retalhos.
- Radiosidade ambiente estimada foi adicionada.