8 – Projeções Geométricas

A transformação do espaço 3D para o plano 2D é estudada desde o século XIX, quando Gaspard Monge conceituou a geometria descritiva. Hoje, essa transformação é facilmente realizada por alguns softwares gráficos. Parâmetros como distância e altura podem se determinados pelo usuário; o ângulo de visão (ou de tomada de cena) é preestabelecido pelo software.

Projeção é a conversão genérica de entidades de uma dada dimensão para outra de menor ordem. Então, a finalidade do algoritmo de projeção na Computação Gráfica é converter os modelos tridimensionais em imagens bidimensionais (3D$\Rightarrow$2D).

Sendo a projeção de um objeto sua representação gráfica em um plano, e tendo o objeto três dimensões, para sua representação em um plano bidirecional, devem ser considerados os elementos básicos:

- **plano de projeção**: é a superfície onde será projetado o objeto, ou seja, onde ele será representado em 2D;
- **raios de projeção (ou projetoras)**: são as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção. Na figura 9.1 um raio de projeção é representado pela reta que une o ponto P à origem do sistema de eixos.
- **centro de projeção**: é o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.

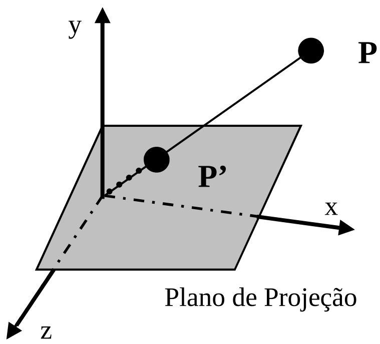
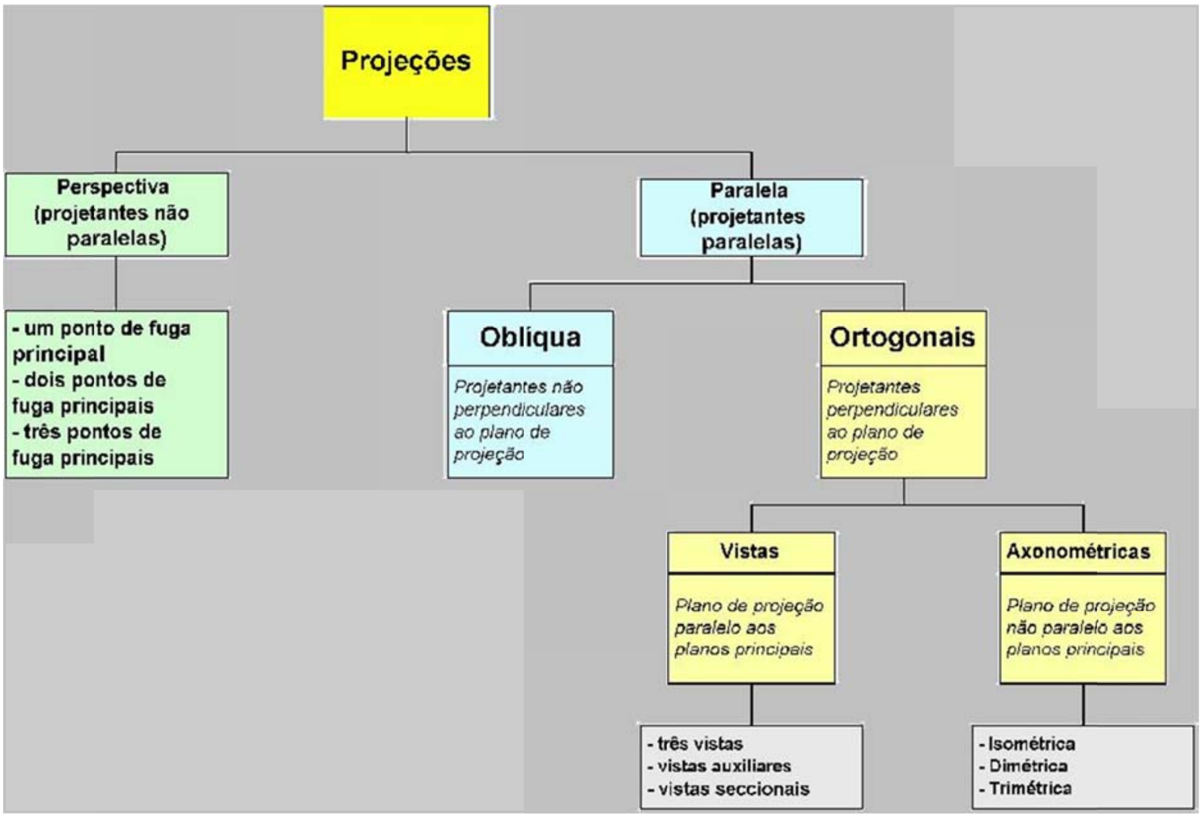


Figura 8.1 – Exemplo de projeção de um ponto em um plano.

Um ponto se projeta no plano de projeção quando o raio de projeção intercepta o plano de projeção, como mostra a figura 9.1. Todos os pontos visíveis do objeto devem ser projetados no plano de projeção.

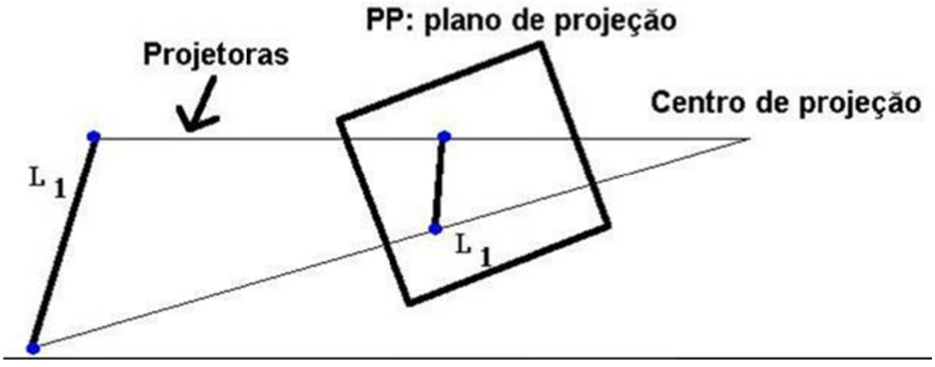
Classificação das Projeções Geométricas

As projeções geométricas são classificadas conforme o organograma da figura 9.2. As classificações dependem das relações entre o centro de projeção, o plano de projeção (onde o objeto aparece como 2D) e as direções das linhas ou raios de projeção.



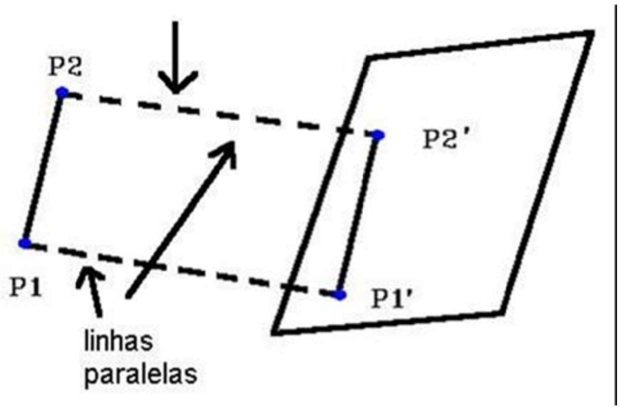
tricas.

Nas projeções Perspectivas ou Cônicas, o centro de projeção é um ponto próprio, em coordenadas finitas no sistema tridimensional. Os feixes da projetora cortam o plano de projeção quando convergem seus feixes para o centro de projeção. Esta projeção deforma a figura, diminuindo os objetos mais distantes e distorcendo os ângulos.



tiva.

Já as projeções Paralelas ou Cilíndricas, têm um ponto impróprio como centro de projeção, isto é, as linhas visuais encontram-se no infinito, e todas as linhas de projeção são paralelas entre si. Mantém a proporcionalidade da figura.



la.

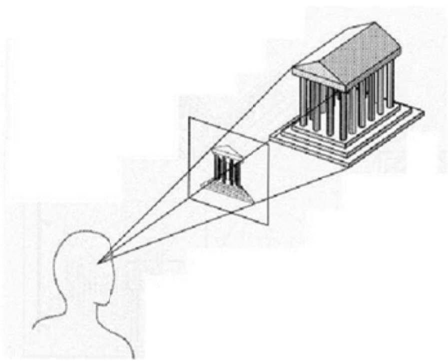
A projeção de um objeto pode ser formulada como uma transformação geométrica. Ela pode ser representada por uma matriz 4x4 que, aplicada à um ponto do espaço obtenham o ponto no plano equivalente. Para obter as matrizes de transformação, é importante que:

- o objeto a ser projetado esteja descrito de tal forma que suas principais direções coincidam com os eixos do sistema;
- o plano de projeção, que é um plano vertical, esteja colocado perpendicularmente ao eixo z do sistema de coordenadas do objeto;
- o objeto esteja modelado por um conjunto de pontos convenientemente.

Havendo mais de um objeto em cena, é necessária uma conversão entre os sistemas de coordenadas do objeto e da cena. Os pontos de cada objeto devem ser convertidos para o sistema global por uma transformação de mudança de base, antes de se efetuar as transformações de projeção.

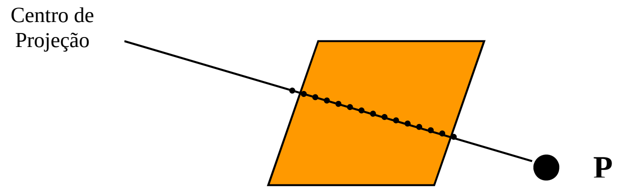
Projeções Perspectiva

A projeção perspectiva produz uma imagem realista, porém não pode reproduzir suas verdadeiras medidas e não preserva a mesma angulação. A projeção perspectiva é uma transformação dentro do espaço tridimensional e suas projeções representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita, similar as câmeras de vídeo e ao olho humano. Nela, o centro de projeção está a uma certa distância da cena, enquanto nas projeções paralelas ele está no infinito.

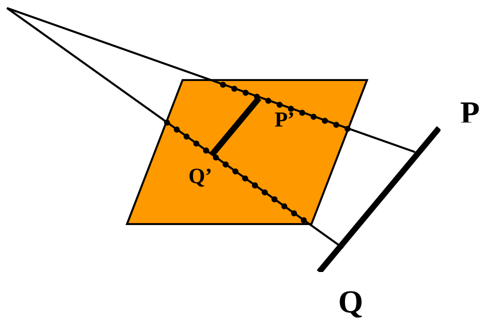


Para obter a projeção perspectiva:

i) **de um ponto**: basta ligá-lo ao centro de projeção e obter a interseção da reta com o plano de projeção.



ii) **de uma reta:** idem ao anterior para dois pontos da reta.



Se for suposto que o centro de projeção coincida com a origem do sistema de eixo, e se desejar a projeção de um ponto qualquer do espaço de coordenadas (x,y,z), no plano z = d, teremos as coordenadas do ponto projetado (x',y') como mostra a figura 9.5. Estes pontos são obtidos pelo cálculo de semelhança de triângulos.

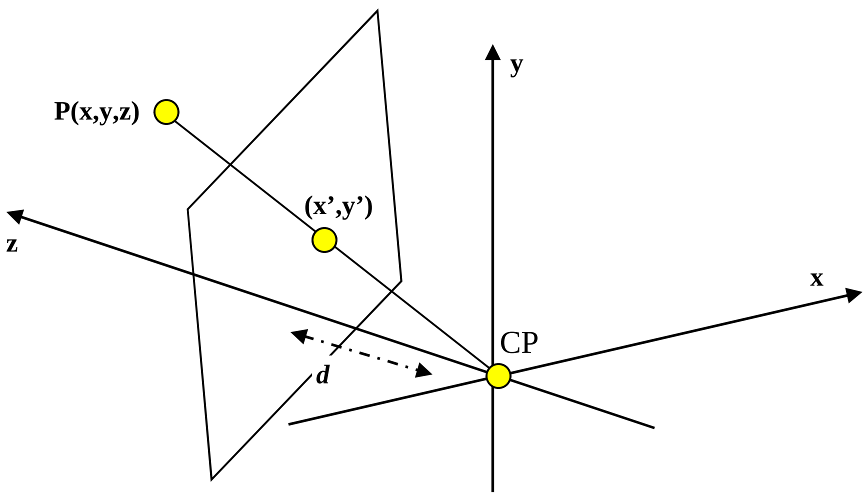


Figura 8.5 – As coordenadas dos pontos projetados em perspectivas são obtidas pela interseção dos raios projetores com o plano de projeção.

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{d}{Z} \quad \Rightarrow \quad Y' = \frac{Y.d}{Z}$$
$$\frac{X'}{X} = \frac{d}{Z} \quad \Rightarrow \quad X' = \frac{X.d}{Z}$$

Assim sendo, as coordenadas do ponto projetado dependem da sua própria distância z, ao plano de projeção. Repare que a relação(*d/Z*) anterior representa um fator de escala para as transformações entre as coordenadas. Isso explica porque cada ponto do objeto em perspectiva parece reduzido por um fator de escala próprio.

A partir destas relações, podemos obter a matriz de transformação da perspectiva cônica (ainda considerando que o centro de projeção seja (0,0,0)):

$$P_{con} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$[X\ Y\ Z\ 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [X'\ Y'\ Z'\ 1]$$

As matrizes de projeção em perspectiva são obtidas usando a coluna da matriz genérica 4x4 correspondente às coordenadas homogêneas. Quando um dos elementos dessa submatriz 3x1 for diferente de zero, o objeto transformado sofre uma transformação perspectiva. Considerando que o centro de projeção está sobre o eixo z, apenas um desses elementos deve ter valor diferente de zero. Exatamente o correspondente à coordenada z. Se o centro de projeção for localizado ao longo do eixo x, e o plano de projeção for o plano x = 0, a matriz de projeção de um ponto será:

$$[X\ \ Y\ \ Z\ \ 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [X'\ Y'\ Z'\ 1]$$

Para obter as matrizes de perspectivas de dois ou três pontos, podemos definir adequadamente os elementos da matriz 4x4 e depois multiplicá-los adequadamente por uma matriz de projeção ortográfica. Assim, matriz de projeção perspectiva em dois pontos localizado nos eixos x e z, e de três pontos são definidas como:

$$\text{Pontos de projecao}\begin{cases} x = r_1 \\ z = r_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pontos de projecao}\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{r}_1 \\ y = r_2 \\ z = r_3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/r_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/r_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pontos de fuga

Os desenhos em perspectiva são caracterizados pela mudança do comprimento e pelos pontos de fuga. O primeiro é uma ilusão que nos mostra objetos cada vez menores à medida que sua distância do centro de projeção aumenta. Pontos de fuga também são uma ilusão; neste caso de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto, denominado de fuga.

O número de pontos de fuga principais é determinado pelo número de eixos principais interceptados pelo plano de projeção. Assim, se o plano de projeção intercepta apenas o eixo z, somente o eixo z possui um ponto de fuga principal, pois linhas paralelas aos eixos x e y são também paralelas ao plano de projeção, e dessa forma não ocorre a ilusão de convergência.

Anomalias da perspectiva

A projeção em perspectiva gera anomalias que aumentam o realismo em termos de profundidade, mas alteram as medidas e formas reais dos objetos projetados. São elas:

- Encurtamento perspectivo: aumentando a distância do objeto ao centro de projeção, o objeto parece ser menor;

- Pontos de fuga: as projeções são categorizadas pelo número de pontos de fuga principais (n° de eixos que o plano de projeção corta). Se a projeção é com 1 ponto de fuga principal então o plano de projeção corta o eixo z e linhas paralelas aos eixos x e y não convergem.
- Confusão visual: objetos situados atrás do centro de projeção são projetados no plano de projeção de cima para baixo e de trás para frente.
- Distorção topológica: Fenômeno pela qual um segmento de reta que une um ponto situado à frente do observador com um ponto situado à sua retaguarda é efetivamente projetado segundo uma linha quebrada de comprimento infinito. A causa é o fato de que pontos do plano que contem o ponto central da projeção são projetados no infinito pela transformação perspectiva.

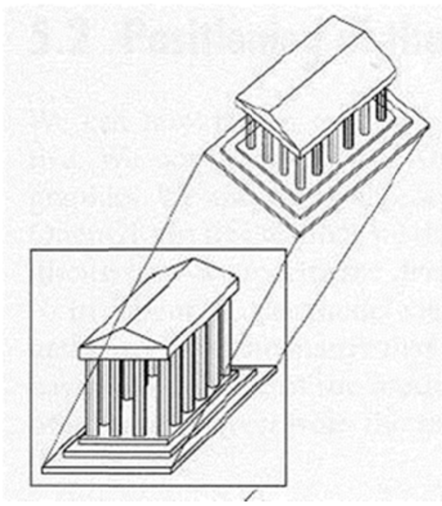
Projeções Paralelas

Nas projeções paralelas, o centro de projeção é localizado no infinito, e todas as linhas de projeção são paralelas entre si. Existem 2 tipos de projeções paralelas, baseadas na relação entre a direção da projetora e a normal ao plano de projeção:

- Proj. Ortográfica: a direção da projetora é a mesma direção da normal ao plano de projeção, ou seja, as linhas de projeção são perpendiculares ao plano de projeção.
- Proj. Oblíqua: as linhas projetoras são inclinadas em relação ao plano de projeção, formando um ângulo com a normal do plano.

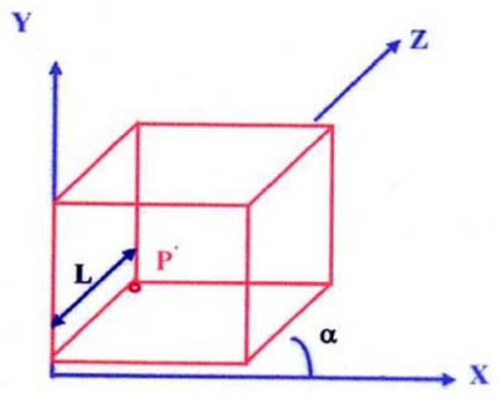
Projeções Oblíquas

As projeções oblíquas são caracterizadas por fornecer uma sensação espacial e permitir medidas nos objetos projetados. Além disso, a direção de projeção não forma 90° com o plano de projeção, mas o plano de projeção é paralelo a um dos 3 eixos.



Geralmente, na projeção oblíqua faz-se uma face paralela ao plano de projeção, normalmente a que contém mais detalhes. Esta face projeta-se em sua verdadeira grandeza, de forma a evitar a deformação das formas circulares desta face.

Seja um cubo unitário da Figura 8.6, deseja-se projetá-lo no plano XY.



A forma geral de definição de matrizes de projeção oblíquas usa um vetor unitário e sua projeção. As projeções oblíquas podem ser produzidas com ângulos de linhas de projeções diferentes em relação ao plano de projeção.

Note que o ponto (0, 0, 1) pode ser projetado em xy como:

$$(\mathrm{l}.\cos\alpha, \mathrm{l}.\sin\alpha),$$

levando a outro ponto no espaço dado por :

$$\mathrm{P}'(l.\cos\alpha, \mathrm{l}.\sin\alpha, \theta)$$

Como a linha projetora deve passar por P e P', e sendo as demais linhas paralelas à ela, temos que (considerando a equação simétrica da reta):

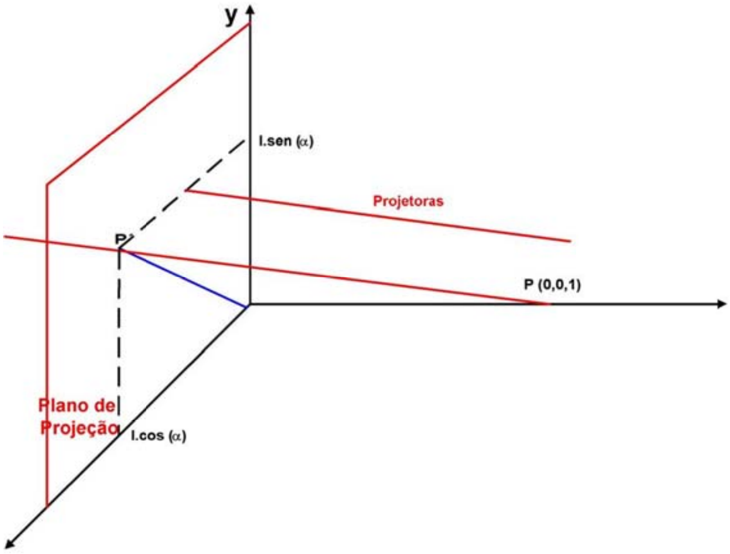
$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = \frac{y - y_p}{l.\sin\alpha} = \frac{z}{-1};$$

destas relacoes, temos :

$$\frac{x - x_p}{l.\cos\alpha} = -z \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x_p} = x + z.l\cos\alpha \ \text{ e } \ \mathrm{y_p} = y + z.l\sin\alpha$$

Por fim, chegamos à matriz da projeção oblíqua:

$$\text{Pobl.} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l.\cos\alpha & l.\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Quando as linhas de projeção fazem um ângulo de 45º com o plano de projeção, os pontos projetados preservam sua medida original nas direções não-paralelas ao plano de projeção. Essa projeção oblíqua é chamada de cavaleira ou cavalier.

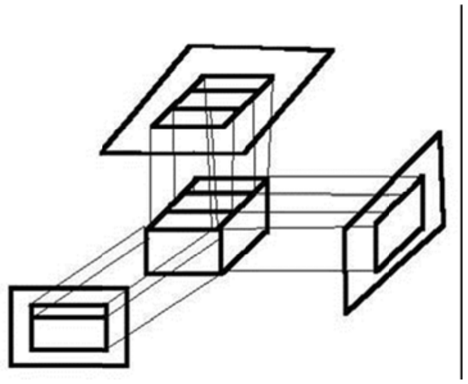
O outro tipo de projeção oblíqua é a paralela cabinet, que faz um ângulo específico com o plano de projeção, de modo a reproduzir objetos com uma dimensão de metade do tamanho original.

Em outras palavras:

- se $l = 1$ e $\alpha = 45°$ ($\beta = 45°$, também) $\Rightarrow$ projeção cavaleira (cavalier)
- se $l = 1/2$ e $\alpha = 45°$ [(β = arctg 2) (aprox: 63,4°)] $\Rightarrow$ a projeção gabinete (cabinet)

Projeções Ortográficas

A característica principal das classificações nas projeções ortográficas é a direção que o plano de projeção faz com as faces principais do objeto a ser projetado. Nas diversas vistas ortográficas, o plano de projeção aparece paralelo aos planos principais (que representam as faces do objeto). Nesse caso, se o objeto tiver faces a 90º como no caso de cubos ou paralelepípedos, uma das faces simplesmente deixará de ser vista. Essas projeções mostram assim o objeto visto de topo (planta baixa), de frente e de lado (elevação).



Se um objeto estiver posicionado no espaço com seus eixos principais paralelos aos eixos do sistema de coordenadas, e quisermos suas projeções ortográficas em relação ao plano xy (ou z = 0), a matriz em coordenadas homogêneas que produz o objeto projetado é:

$$[X'\ Y'\ Z'\ 1] = [X\ \ Y\ \ Z\ \ 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se em vez de projetá-lo no plano z = 0, for escolhido outro plano qualquer $z = T_z$, paralelo a este, a matriz de projeção pode ser obtida compondo uma matriz de translação com a matriz anterior, de modo que obteremos o objeto projetado após projetar cada um dos seus pontos, ou melhor multiplicá-los por:

$$[X'\ Y'\ Z'\ 1] = [X\ \ Y\ \ Z\ \ 1].\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

Nas projeções axométricas, os planos do objeto são inclinados com relação ao plano de projeção estabelecendo alguma relação entre as medidas dos diversos eixos na forma projetada do objeto. Dependendo de como as medidas do objeto aparecem no plano de projeção, recebem denominações especiais: isométrica, dimétrica ou trimétrica.

Na isométrica, o plano de projeção está posicionado em relação aos planos do objeto de maneira tal que os três eixos do objeto parecerão ter a mesma mudança nas métricas, como o próprio nome indica (iso = mesmo, métrica = medida). Assim, se o objeto for um cubo, seus três lados parecerão continuar tendo a mesma medida quando projetado.

Nas projeções dimétricas, em vez dos três eixos sofrerem as mesmas mudanças de escala, apenas dois eixos terão a mesma redução. Nesse caso, o posicionamento em relação ao plano de projeção não é único. E nas projeções trimétricas, cada eixo sofrerá uma transformação de escala própria.