MAT1110: Obligatorisk oppgave 2

Jon-Magnus Rosenblad

Oppgave 1

a)

Om vi lar x', y' og z' være antall biler i henholdsvis A, B og C etter en dag, dvs. om vi setter

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ser vi at når vi ganger ut får vi

$$\begin{aligned} x' &= .4x + .3y + .3z \\ y' &= .3x + .5y + .2z \\ z' &= .3x + .2y + .5z \end{aligned}$$

altså beholder A 40% av bilene, B får 30% av hva A hadde og C får 30% av hva A hadde, og tilsvarende for de andre byene, akkurat slik oppgaven beskrev.

b)

Om vi først antar at $\lambda = 1$ er en egenvektor løser vi likningen $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ for å finne den korresponderende egenvektoren $\mathbf{v}$. Ved litt manipulasjoner ser vi

$$
\begin{bmatrix} .4-1 & .3 & .3 \\ .3 & .5-1 & .2 \\ .3 & .2 & .5-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -7 \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Vi får altså at vektoren $\mathbf{v} = (x, y, z)$ må oppfylle likningene $x-z = 0$ og $y-z = 0$, så $x = y = z$ og $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Får å vise at $\lambda = 1$ faktisk er en egenverdi med korresponderende vektor $\mathbf{v}$ må vi sjekke om likningen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ er oppfylt:

$$
A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .4 + .3 + .3 \\ .3 + .5 + .2 \\ .3 + .2 + .5 \end{bmatrix}
$$

$$
= 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

altså er $\lambda = 1$ en egenverdi med $(1, 1, 1)$ som korresponderende egenvektor.

c)

Skriver vi inn kommandoen `eig` i matlab får vi følgende resultat:

```
>> [V,D] = eig(A)
V =

  -8.1650e-01  -1.1926e-17   5.7735e-01
   4.0825e-01  -7.0711e-01   5.7735e-01
   4.0825e-01   7.0711e-01   5.7735e-01

D =

Diagonal Matrix

   0.10000         0         0
         0   0.30000         0
```

```
        0            0    1.00000
```

Dette forteller oss at utenom 1 er de to andre egenverdiene for A $\lambda = .1$ og $\lambda = .3$. Vi finner at de korresponderende egenvektorene til $\lambda = .1$ og $\lambda = .3$ er henholdsvis $\mathbf{v} = (-2, 1, 1)$ og $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$. Vi kan verifisere at de to egenvektorene stemmer ved å teste

$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.8 + .3 + .3 \\ -.6 + .5 + .2 \\ -.6 + .2 + .5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.2 \\ .1 \\ .1 \end{bmatrix}$$

og

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.3 + .3 \\ -.5 + .2 \\ -.2 + .5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -.3 \\ .3 \end{bmatrix}$$

så egenvektorene stemmer.

d)

Vi setter $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, 1)$ og $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$, og tilsvarende $\lambda_1 = .1$, $\lambda_2 = .3$ og $\lambda_3 = 1$. Vi ønsker å finne en vekting $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ slik at $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \mathbf{c} = (30, 60, 30)$. Dette kan gjøres ved radredusering for hånd, men vi velger å bruke matlab ettersom det er raskere:

```
>> rref([-2,0,1,30;1,-1,1,60;1,1,1,30])
ans =

     1    -0     0     5
     0     1     0   -15
     0     0     1    40
```

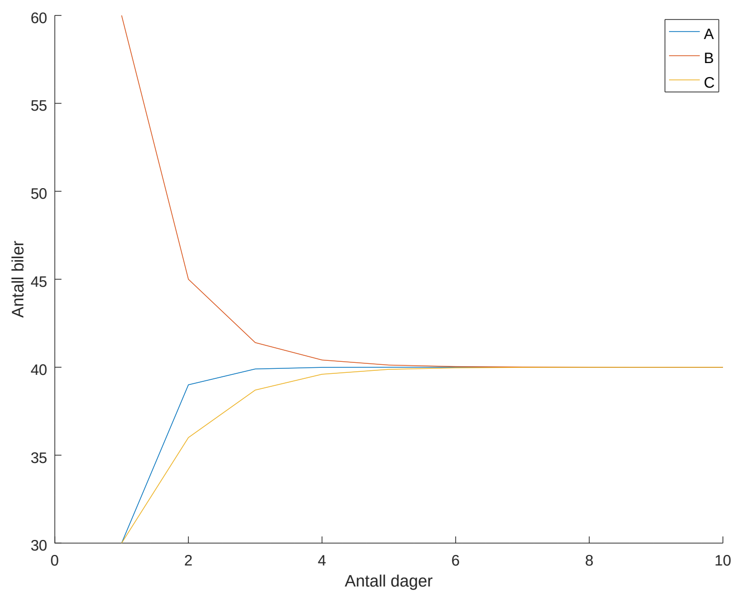
Vi ser at vektingen $\mathbf{c} = (5, -15, 40)$ er den unike løsningen.

Vi har altså $(30, 60, 30) = 5\mathbf{v}_1 - 15\mathbf{v}_2 + 40\mathbf{v}_3$, så

$$\begin{aligned} A^n(30, 60, 30) &= \lambda_1^n 5\mathbf{v}_1 - \lambda_2^n 15\mathbf{v}_2 + \lambda_3^n 40\mathbf{v}_3 \\ &= .1^n\, 5\mathbf{v}_1 - .3^n\, 15\mathbf{v}_2 + 1^n\, 40\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Når n går mot uendelig ser vi at siden $\lambda_1, \lambda_2 < 1$ vil de to første leddene gå mot 0 og vi vil stå igjen med $A^n(30, 60, 30) = \lim_{n \to \infty} 1^n\, 40\mathbf{v}_3 = 40\mathbf{v}_3 = (40, 40, 40)$.

e)



Figuren viser antall biler i hver by for hver dag #1 til dag #10.

Oppgave 2

a)

Vi har at Jacobideterminanten blir

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -w \sin u \cos v & -(R + w\cos u)\sin v & \cos u \cos v \\ -w \sin u \sin v & (R + w\cos u)\cos v & \cos u \sin v \\ w \cos u & 0 & \sin u \end{vmatrix} \\
&= w \cos u \begin{vmatrix} -(R + w\cos u)\sin v & \cos u \cos v \\ (R + w\cos u)\cos v & \cos u \sin v \end{vmatrix} + \sin u \begin{vmatrix} -w \sin u \cos v & -(R + w\cos u)\sin v \\ -w \sin u \sin v & (R + w\cos u)\cos v \end{vmatrix} \\
&= -w \cos^2 u (R + w\cos u)(\sin^2 v + cos^2 v) - w \sin^2 u (R + w\cos u)(\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= -w(\cos^2 u + \sin^2 v)(R + w\cos u)(\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= -w(R + w\cos u)
\end{aligned}
$$

Dermed får vi at absoluttverdien av Jacobideterminanten blir $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| =$ $|-w(R + w\cos u)| = w(R + w\cos u)$.

b)

Om vi lar A være rommet begrenset av torusen. Vi kan da regne ut volumet til torusen som

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_A 1\, dxdydz \\
&= \iiint_A \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw \\
&= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} w(R + w\cos u) dv \right) du \right) dw \\
&= 2\pi \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} w(R + w\cos u) du \right) dw \\
&= 2\pi \int_0^r 2\pi w R\, dw \\
&= 4\pi^2 R \int_0^r w\, dw \\
&= 2\pi^2 R r^2
\end{aligned}
$$