MAT1120 - Oblig 1

Jon-Magnus Rosenblad

September 2018

Oppgave 1

Bruk Matlab til å regne P^k for $k \in \{2, 3, 4, 50, 100\}$. Angi deretter sannsynligheten for at systemet går fra tilstand s_4 til tilstand s_2 i løpet av henholdsvis $2, 3, 4, 50$ og 100 tidsskritt.

Vi setter opp en enkel loop som går igjennom hver verdi av k:

```
k = [2;3;4;50;100];
P = [1, .7, 0,  0,  0;
     0, 0,  .5, 0,  0;
     0, .3, 0,  .6, 0;
     0, 0,  .5, 0,  0;
     0, 0,  0,  .4, 1];

 for i = 1:5
     disp("Sansynlighet for overganger ved " + k(i) + " steg.");
     disp("P^k =");
     A = P^k(i);
     disp(A);
     disp("Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom " + ...
         k(i) + " steg er " + A(2,4) + newline);
 end
```

Programmet skriver ut:

```
Sansynlighet for overganger ved 2 steg.
P^k =
1.0000    0.7000    0.3500         0         0
0    0.1500         0    0.3000         0
0         0    0.4500         0         0
0    0.1500         0    0.3000         0
0         0    0.2000    0.4000    1.0000
Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom 2 steg er
0.3
```

Sansynlighet for overganger ved 3 steg.
P^k =

1.0000	0.8050	0.3500	0.2100	0
0	0	0.2250	0	0
0	0.1350	0	0.2700	0
0	0	0.2250	0	0
0	0.0600	0.2000	0.5200	1.0000

Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom 3 steg er
0

Sansynlighet for overganger ved 4 steg.
P^k =

1.0000	0.8050	0.5075	0.2100	0
0	0.0675	0	0.1350	0
0	0	0.2025	0	0
0	0.0675	0	0.1350	0
0	0.0600	0.2900	0.5200	1.0000

Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom 4 steg er
0.135

Sansynlighet for overganger ved 50 steg.
P^k =

1.0000	0.8909	0.6364	0.3818	0
0	0.0000	0	0.0000	0
0	0	0.0000	0	0
0	0.0000	0	0.0000	0
0	0.1091	0.3636	0.6182	1.0000

Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom 50 steg er
1.4263e-09

Sansynlighet for overganger ved 100 steg.
P^k =

1.0000	0.8909	0.6364	0.3818	0
0	0.0000	0	0.0000	0
0	0	0.0000	0	0
0	0.0000	0	0.0000	0
0	0.1091	0.3636	0.6182	1.0000

Sannsynligheten for en overgang fra s4 til s2 gjennom 100 steg er
3.0516e-18

Oppgave 2

Bestem en basis for $\mathrm{Nul}(P - I_5)$*. Begrunn deretter at* P *ikke er regulær. Kunne du ha konkludert med at* P *ikke er regulær på grunnlag av beregningene du utførte i Oppgave 1*

Vi skriver inn

```
P = [1,  .7,      0,      0,   0;
     0,  0,   .5,  0,   0;
     0,  .3,  0,  .6,   0;
     0,  0,   .5,  0,   0;
     0,  0,   0,  .4,   1];

A = null(P - eye(5));
disp(A);
```

i matlab og får at basisen for $\text{Nul}(P - I_5)$ er:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi ser at likevektsvektoren ikke er entydig (f.eks. begge i basen er mulige likevektsvektorer) så ved teorem 18 fra boka er ikke P regulær.

I oppgave 1 observerte vi for hver $k \in \{2, 3, 4, 50, 100\}$ fantes det et element i P^k som ikke var strengt positivt, noe som intuitivt tyder på at ingen potens av P har bare strengt positive elementer. Denne teorien støttes av tolkningen av P^k som overgansmatrisen der hver overgang tar k steg, ettersom vi ser at i P er alle elementene i kolonne 1 null, bortsett fra p_{11}, dvs. det er umulig å bevege seg fra tilstand s_1 til noen annen tilstand, så da uavhengig av hvor mange steg du prøver å ta forblir det umulig å komme seg fra s_1 til noen annen tilstand, så den kolonnen forblir det samme for alle eksponenter.

Oppgave 3

a) *Bestem klassene for systemet beskrevet i Eksempel 1. Angi hvilke klasser som er lukket, og hvilke tilstander som er absorberende.*

Klassene for systemet er $\{s_1\}, \{s_2, s_3, s_4\}, \{s_5\}$. Bare $\{s_1\}$ og $\{s_5\}$ er lukket, og s_1 og s_5 er absorberende tilstander.

b) *Betrakt et system der overgangsmatrisen P er regulær. Begrunn at det fins da bare én klasse, med andre ord at alle tilstander kommuniserer med hverandre.*

Om en overgangsmatrise er regulær må det, fra definisjonen av en regulær matrise, finnes en potens av matrisen hvor alle elementene er strengt positive, dvs. gjennom et bestemt antall steg er det mulig å bevege seg fra en hvilken som helst tilstand til en hvilken som helst annen tilstand, dermed er alle tilstandene i den samme lukkede klassen.

Oppgave 4

Betrakt igjen systemet beskrevet i Eksempel 1. Beregn x_2^K og x_3^K for hver av de lukkede klassene du fant i Oppgave 3 a).

Fra definisjonen av absorpsjonssansynligheten av en bestemt klasse ser vi

$$\begin{aligned} x_j^K &= \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, x_i^K \\ &= \text{col}_j(P) \cdot \vec{x}^K \\ &= \text{row}_j(P^T)\vec{x}^K \end{aligned}$$

hvor P^T er den transponerte til P og $\vec{x}^K = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Denne skrivemåten stemmer med definisjonen om vi bare manipulerer svarvektoren slik at de trivielle absorpsjonssansynlighetene blir riktige. Regner vi for alle x_i samtidig får vi

$$\vec{x}^K = P^T \vec{x}^K$$

For at dette skal oppfylles løser vi likningen $(P^T - I_n)\vec{x}^K = 0$. Vi får da en løsning med to frie variable, men om vi sertter $K = \{s_1\}$ har vi fra definisjonen at $x_1^K = 1$, og vi kan observere at $x_5^K = 0$ (s_5 er absorberende, så det er umulig å gå fra denne tilstanden til noen annen). Omvendt gjelder om vi setter $K = \{s_5\}$.

Et matlab-program som løser dette er:

```
P = [1,  .7,  0,   0,   0;
     0,  0,   .5,  0,   0;
     0,  .3,  0,   .6,  0;
     0,  0,   .5,  0,   0;
     0,  0,   0,   .4,  1];
P = transpose(P);

x = null(P - eye(5));

A = [x(1,1),x(1,2);
     x(5,1),x(5,2)];
b = [1;0];
c = A^(-1)*b;
sol = x*c;

disp("sol = ");
disp(sol);

b = [0;1];
c = A^(-1)*b;
sol = x*c;
```

```
disp(" sol = ");
disp(sol);
```

Programmet skriver ut:

```
sol =
1.0000
0.8909
0.6364
0.3818
0.0000
sol =
0
0.1091
0.3636
0.6182
1.0000
```

Vi ser at løsningene er:

$$x_2^{\{s_1\}} = 0.8909 \quad x_3^{\{s_1\}} = 0.6364$$
$$x_2^{\{s_5\}} = 0.1091 \quad x_3^{\{s_5\}} = 0.3636$$

Oppgave 5

a) *Begrunn at s_1 er en absorberende tilstand. Finnes det andre absorberende tilstander?*

Siden alle verdiene i kolonne 1 utenom det på diagonalen er 0 er det umulig å bevege seg fra tilstand s_1 til noen annen, så $\{s_1\}$ er en lukket klasse, og dermed er s_1 en absorberende tilstand. Samme argument gjelder for s_5.

b) *Forklar ut fra*

$$\begin{aligned} x_j^K &= 1 && \text{for hver } s_j \in K \\ x_j^K &= \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, x_i^K && \text{for hver } s_j \notin K \end{aligned}$$

at vektoren $\vec{y} = (x_2, x_3, x_3)$ (som består av de "ikke-trivielle"absorpsjonssannsynlighetene) er en løsning av systemet $A\,\vec{y} = \vec{b}$ for en viss vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ som du skal bestemme.

Setter vi $P' = \begin{bmatrix} 0 & p_3 & 0 \\ q_2 & 0 & p_4 \\ 0 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$, dvs. P uten radene og kolonene for de trivielle absorpsjonssansynlighetene ser vi at $A = I_3 - P'$. Så $A\vec{y} = (I_3 - P')\vec{y} = \vec{b}$. Men dette kjenner vi igjen fra forrige oppgave. Eneste forskjell er at overgangen fra s_2 til s_1 ikke blir tatt hensyn til (s_5 kan vi ignorere siden $x_5^{\{s_1\}} = 0$ uansett), men dette kan fikses ved å bare legge den til i summen. Vi får at

$$
\begin{aligned}
x_2^{\{s_1\}} &= p_2\, x_1^{\{s_1\}} + q_2\, x_3^{\{s_1\}} \\
x_3^{\{s_1\}} &= p_3\, x_2^{\{s_1\}} + q_3\, x_4^{\{s_1\}} \\
x_4^{\{s_1\}} &= p_4\, x_3^{\{s_1\}}
\end{aligned}
$$

så

$$
\vec{y} = P'\vec{y} + \begin{bmatrix} p_2\, x_1^{\{s_1\}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = P'\vec{y} + \begin{bmatrix} p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

omformulerer vi får vi $\vec{y} - P'\vec{y} = (I_3 - P')\vec{y} = A\vec{y} = \begin{bmatrix} p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, så $\vec{b} = \begin{bmatrix} p_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

c) *Begrunn at A kan omformes ved hjelp av to elementære radoperasjoner til en øvre triangulær matrise. Forklar deretter hvorfor A er invertibel. Hva kan du si om løsningen til systemet $A\,\vec{y} = \vec{b}$?*

A kan reduseres til øvre triangulær form ved først å legge til p_3 ganger rad 1 til rad 2, for så å legge til $\frac{p_4}{1-q_2\,p_3}$ av rad 2 til rad 3. Utregningen er som følger:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & -q_2 & 0 \\ .p_3 & 1 & -q_3 \\ 0 & -p_4 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -q_2 & 0 \\ 0 & 1 - p_3\,q_2 & -q_3 \\ 0 & -p_4 & 1 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -q_2 & 0 \\ 0 & 1 - p_3\,q_2 & -q_3 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{p_4\,q_3}{1-p_3\,q_2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

For at A skal være invertibel trenger vi at hver kolonne er en pivot-kolonne, dvs. vi trenger at $1 - p_3\,q_2 \neq 0$ og at $1 - \frac{p_4\,q_3}{1-p_3\,q_2} \neq 0$. Begge disse ulikhetene kan bevises at holder ved et kontrapositivt bevis. Det første er enklest:

$$
\begin{aligned}
1 - p_3\, q_2 &= 0 \\
&\Downarrow \\
1 &= p_3\, q_2 \\
&\Downarrow \quad (q_2 \neq 0) \\
p_3 &= \frac{1}{q_2} \\
&\Downarrow \quad \text{(Ved begrensningene satt)} \\
1 &> \frac{1}{q_2} \\
&\Downarrow \quad (q_2 > 0) \\
q_2 &> 1
\end{aligned}
$$

Vi har kommet til et ugyldig utsagn, ettersom vi har satt begrensningen om at $0 < q_2 < 1$, så det opprinnelige utsagned må da også være ugyldig, dvs. vi må ha $1 - p_3\, q_2 \neq 0$. Så for å motbevise det neste utsagned:

$$
\begin{aligned}
1 - \frac{p_4\, q_3}{1 - p_3\, q_2} &= 0 \\
&\Downarrow \\
1 - p_3\, q_2 &= p_4\, q_3 \\
&= p_4\, (1 - p_3) \\
&\Downarrow \\
p_4 &= \frac{1 - p_3\, q_2}{1 - p_3} \\
&\Downarrow \\
\frac{1 - p_3\, q_2}{1 - p_3} &< 1 \\
&\Downarrow \\
1 - p_3\, q_2 &< 1 - p_3 \\
&\Downarrow \\
p_3\, q_2 &> p_3 \\
&\Downarrow \\
q_2 &> 1
\end{aligned}
$$

Dette stemmer ikke med begrensningene som er satt for verdiene i tabellen, nemlig at $0 < q_2 < 1$, så det opprinnelige utsagned må også være galt. Siden hver kolonne er en pivot-kolonne er A invertibel, så likningen $A\,\vec{y} = \vec{b}$ har en entydig løsning, nemlig $\vec{y} = A^{-1}\vec{b}$.

d) *Lag en Matlab-funksjon* **`Walk`** *som for en inputvektor* (p_2, p_3, p_4) *gjør følgende*

- *sjekker at* $0 < p_j < 1$ *og beregner* $q_j = 1 - p_j$ *for* $j = 2, 3, 4$,
- *setter opp matrisen* A *og vektoren* $\vec{b}$,
- *løser systemet* $A\,\vec{y} = \vec{b}$ *og returnerer vektoren* $\vec{y} = (x_2, x_3, x_4)$.

Kjør programmet med $(p_2, p_3, p_4) = (0.15, 0.5, 0.35)$ *som inputvektor og rapporter løsningen* (x_2, x_3, x_4). *Legg ved utskrift av koden.*

```
disp(Walk(.15,.5,.35));

function y = Walk(p2,p3,p4)
    if (p2 <= 0 || p2 >= 1 || ...
            p3 <= 0 || p2 >= 1 || ...
            p4 <= 0 || p4 >= 1)
        y = zeros(3,1);
    else
        q2 = 1 - p2;
        q3 = 1 - p3;
        A = [   1, -q2,    0;
              -q3,    1, -q3;
                0, -p4,    1];
        b = [p2;0;0];
        y = A^(-1)*b;
    end
end
```

Output:

```
0.3094
0.1875
0.0656
```