MAT1120 - Oblig 2

Jon-Magnus Rosenblad

October 2018

Oppgave 1

Anta polynomet p er definert ved $p(t) = a_0 + a_1\,t + t^2$. Definer matrisen C ved

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet til C kan kan utledes som

$$\begin{aligned} \det(C - t\,I) &= (-t)(-a_1 - t) + a_0 \\ &= a_0 + a_1\,t + t^2 \\ &= p(t) \end{aligned}$$

Anta så at $p(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + t^3$ og

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

Igjen kan vi utlede det karakteristiske polynomet:

$$\begin{aligned} \det(C - t\,I) &= -t\det\begin{bmatrix} -t & 1 \\ -a_1 & -a_2 - t \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_2 - t \end{bmatrix} \\ &= (-t)\left((-t)(-a_2 - t) + a_1\right) - a_0 \\ &= (-t)(a_1 + a_2\,t + t^2) - a_0 \\ &= -\left(a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + t^3\right) \\ &= -p(t) \end{aligned}$$

Oppgave 2

Likningen

$$f'''(t) - 2\,f''(t) - f'(t) + 2\,f(t) = 0 \tag{1}$$

kan skrives om til

$$f'''(t) = 2\,f''(t) + f(t) - 2\,f(t) \tag{2}$$

Videre definerer vi

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

og $p(t) = 2 - t - 2\,t^2 + t^3$.

(i) Anta at $f(t)$ er en løsning for likning (1) og sett $\vec{x} = (f(t), f'(t), f''(t))$. Vi ønsker å vise at $\vec{x}$ er en løsning av likningen

$$\vec{x}\,'(t) = C\,\vec{x}(t) \tag{3}$$

Vi observerer at

$$\begin{aligned} \vec{x}\,'(t) &= (f'(t), f''(t), f'''(t)) \\ &= (f'(t), f''(t), 2f''(t) + f(t) - 2f(t)) \quad \text{(ved (2))} \\ &= C\,\vec{x}(t) \end{aligned}$$

så $\vec{x}$ er en løsning av (3).

(ii) Vi antar $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ er en løsning av (3). Vider får vi fra (3) at

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ 2\,x_3(t) + x_2(t) - 2\,x_1(t) \end{bmatrix}$$

Substituerer vi for $f = x_1$ får vi $f'''(t) = 2\,f''(t) + f'(t) - 2\,f(t)$, så f er en løsning for (1).

(iii) Vi ser at egenverdiene for C er 2,1,-1 med henholdsvis $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ som korresponderende egenvektorer. (Dette kommer vi fram til ved å prøve divisorer av konstantleddet i det karakteristiske polynomet for å se om det er en rot, for så å gjøre polynomdivisjon og løse annengradslikningen som framkommer. Vektorene kan utledes ved å velge v_λ for hver av egenverdiene slik beskrevet i oppgave $3(i)$). Vi får så at den generelle løsningen for (3) er

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2\,t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Ønsker vi å finne å løse med initialbetingelse $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ tilsvarer det å finne $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ s.a.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette kan gjøres ved radreduksjon og gir at $\vec{c} = (1, -1, -1)$.

(*iv*) For å finne en f som tilfredsstiller (1) følger det fra oppgave (*i*) og (*ii*) at denne f-en alltid vil være det første elementet av $\vec{x}$ for en $\vec{x}$ som tilfredsstiller (3). Dermed ser vi fra forrige oppgave at dette er akkurat de f-ene s.a. $f(t) = c_1\, e^{2\,t} + c_2\, e^t + c_3\, e^{-t}$. Om vi ønsker å tilfredstille initialbetingelsene at

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f'(0) &= 2 \\ f''(0) &= 2 \end{aligned}$$

følger det også fra forrige oppgave at $f(t) = -e^{2\,t} + 2\,e^t + 2\,e^{-t}$.

Oppgave 3

La p være polynomet gitt ved $p(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, t^i$ og la C være den korresponderende kompanion-matrisen. Vi antar at λ er en reell rot for p, så $p(t) = 0$. Vi definerer $E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, C\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}\}$.

(*i*) La $\vec{v}_\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$. Videre har vi

$$\begin{aligned} C\,\lambda &= \left(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^{n-1}, \sum_{i=0}^{n-1} \left(-a_i\,\lambda^i\right)\right) \\ &= \left(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n - p(\lambda)\right) \\ &= \left(\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots, \lambda^n\right) \\ &= \lambda\,\vec{v}_\lambda \end{aligned}$$

så $\vec{v}_\lambda$ er en egenvektor for C.

(*ii*) Tydelig har vi at Span $\{\vec{v}_\lambda\} \subseteq E_\lambda$ for alle multipler av en egenvektor er en egenvektor med samme korresponderende egenverdi. Videre ser vi at for at $\vec{x} \in E_\lambda$ må vi ha $C\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x}$, mao.:

$$\begin{aligned} x_2 &= \lambda\,x_1 \\ x_3 &= \lambda\,x_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \lambda\,x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i-1}\,x_i\right) &= \lambda x_n \end{aligned}$$

Setter vi $c = x_1$ kan vi utlede at for alle $1 \leq i \leq n$ har vi $x_i = \lambda^{i-1}\, c$, så vi kan skrive om den siste likningen til

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(a_{i-1}\, \lambda^{i-1}\, c\right) = \lambda^n\, c$$
$$\Downarrow$$
$$0 = c\, p(\lambda)$$

Vi ser dermed at likningen er oppfylt for alle valg av c, men dette er akkurat mengden av vektorer slik at $\vec{v} = c\, \vec{v}_\lambda$, dvs. mengden Span $\{\vec{v}_\lambda\}$. Dermed har vi både $E_\lambda \subseteq \text{Span}\,\{\vec{v}_\lambda\}$ og $\text{Span}\,\{\vec{v}_\lambda\} \subseteq E_\lambda$, så $E_\lambda = \text{Span}\,\{\vec{v}_\lambda\}$.

(*iii*) Om p har n distinkte røtter har også C de samme distinkte egenvektorer. Dermed er summen av dimensjonene til egenrommene n og dermed er C diagonaliserbar. Konverst om C er diagonaliserbar vet vi at summen av dimensjonene til egenrommene er lik n, men fra forrige oppgave vet vi at dimensjonen til et vilkårlig egenrom er 1, så det må da være n distinkte egenverdier, og dermed n distinkte røtter av p.

Om vi har egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ og korresponderende egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vil den invertible matrisen $P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$ diagonalisere C. Fra deloppgave (i) ser vi at hver av disse egenvektorene kan skrives på formen $\vec{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ \lambda_i^n \end{bmatrix}$, så P kan kan skrives

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \ldots & \lambda_n^n \end{bmatrix}$$

Oppgave 4

Kildekoden for `sdrot` er som følger:

```
function rot = sdrot(p)

  p /= p(1);

  n = size(p)(2);
  n--; %Tilsvarer graden paa polynomet
  A = [zeros(n - 1,1),eye(n-1);-flip(p(1,2:n+1),2)];

  x = rand(n,1);
  tol = 1e-6;
```

```
  hit = 0;

  for j = 1:100

    x = A*x;

    [maxval,maxnr] = max(abs(x));
    rot = x(maxnr);
    x = (1/rot)*x;

    error = max(abs(A*x-rot*x));
    if error < tol
      hit = 1;
      break;
    end

  end

    if ~hit
      disp("ERROR: Fant ingen losning etter 100 ...
iterasjoner\n");
      rot = 0;
    end


endfunction
```

Testprogrammet

```
p1 = [1,3,-1,-3,-1,1];
p2 = [1,-2,4,-4];

disp("Rottene til p1 er ");
disp(roots(p1));
fprintf("sdrot(p1) gir %f som rot\n", sdrot(p1));

disp("\n");

disp("Rotten til p2 er ");
disp(roots(p2));
fprintf("sdrot(p2) gir %f som rot\n", sdrot(p2));
```

gir følgende output:

```
Rottene til p1 er
-3.05230 + 0.00000i
```

```
-0.69766 + 0.49516i
-0.69766 - 0.49516i
1.00000 + 0.00000i
0.44762 + 0.00000i
sdrot(p1) gir -3.052301 som rot
Rotten til p2 er
0.35220 + 1.72143i
0.35220 - 1.72143i
1.29560 + 0.00000i
ERROR: Fant ingen losning etter 100 iterasjoner
sdrot(p2) gir 0.000000 som rot
```

Vi ser at `sdrot` fant den største roten for det første polynomet, men for det andre polynomet mislykkes den. Det kommer av at det ikke er noen strengt dominant rot ettersom begge de komplekse røttene har lik og størst modulus.

Oppgave 5

Kjører vi testprogrammet

```
A = pascal(6);
p = poly(A);

disp("Egenverdiene til A er ");
disp(eig(A));
fprintf("sdrot gir %f som storste egenverdi\n", sdrot(p));
```

får vi som output

```
Egenverdiene til A er
0.0030044
0.0642943
0.4893388
2.0435738
15.5534733
332.8463154
sdrot gir 332.846316 som storste egenverdi
```

og vi ser at programmet fant den største egenvektoren til pascal-matrisen men høy presisjon.