

MAT4230 – Oppsummering

Jon-Magnus

Contents

Kapittel 1	1
Picard-gruppen	1
Riemann-Roch	2
Noethers formel	2
Genusformelen	2
Kapittel 2 – Birationale avbildninger	3
Kapittel 3 – Regerte flater	4
Projektive bunter	4
Numeriske invarianter	5
Kapittel 4 – Rasjonale flater	6
Kapittel 5 – Castelnuovo	6
Kapittel 6	6
Kapittel 7 – Kodaira dimensjon	6
Kapittel 8 – Kodaira dimensjon null	6
Kapittel 9 – Elliptiske flater	6
Kapittel 10 – Generell type	6
Temaer	6
Snitt-produkt og RR for flater	6
Lineære systemer for kjeglesnitt i planet	6
En glatt tredjegradsflate er P^2 blåst opp i 6 punkter	6
Reglerte flater: Picard gruppe, RR og numeriske invarianter	6
Snitt-produktet på sammenhengende kurver som blir kontraktet ved en morfi	6
Minimale flater, eksistens og entydighet	6
K3-flater: RR og projektive modeller av grad mindre enn 10	6
Elliptiske flater	6

Kapittel 1

Picard-gruppen

La S være en glatt varietet. Picard-gruppen $\text{Pic}S$ betegner gruppen av isomorfiklasser av invertible knipper på S . Effektive divisorer gir oss invertible knipper. Vi kan også trekke tilbake knipper gitt en morfi $f: S \rightarrow X$, som gir oss en morfi $f^*: \text{Pic}X \rightarrow \text{Pic}S$ for glatte skjemaer X . Om f er surjektiv kan vi også trekke tilbake

divisorer, på en måte som er kompatibel med korrespondansen av invertible knipper og divisorer, altså $f^*\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_S(f^*D)$.

Riemann-Roch

Teorem 1 (Riemann-Roch for flater). *La $L \in \text{Pic}S$.*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L \cdot \omega_s)$$

.

Proof. Ved definisjon av snittproduktet får vi

$$(L^{-1} \cdot L \otimes \omega_s^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_s \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_s)$$

Med mer fornuftig notasjon ville vi skrevet $L^{-1} = -L$ og $L \otimes \omega_s^{-1} = L - \omega_s$. Ved Serre-dualitet får vi $\chi(L') = \chi(\omega_s - L')$, som gir oss

$$((-L) \cdot (L - \omega_s) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L))$$

Ved bilinearitet kan vi skrive om til uttrykket i påstanden. □

Noethers formel

Noethers formel forteller oss om sammenhengen mellom algebraisk eulerkarakteristikk og topologisk eulerkarakteristikk, hvor førstnevnte er definert som den alternerende summen av dimensjonen til de globale seksjonene av det spesifikke knippet, mens sistnevnte er definert som den alternerende summen av betti-tallene, altså den alternerende summen den reelle dimensjonen til de globale seksjonene til det konstante knippet med verdier i \mathbb{R} .

Teorem 2 (Noethers formel).

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S))$$

hvor $\chi_{\text{top}}(S) = \sum (-1)^i b_i$ og $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$.

Genusformelen

Teorem 3 (Genusformelen). *For en irreduibel kurve C har vi $g(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K)$.*

Proof. Vi har følgende eksakte sekvens

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

som ved linearitet av eulerkarakteristikken gir oss $\chi(\mathcal{O}_C) := 1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$. Omformulerer vi Riemann-Roch står vi igjen med

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &:= -(\chi(C) - \chi(\mathcal{O}_S)) \\ &= -\frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K) \end{aligned}$$

□

Kapittel 2 – Birationale avbildninger

En birasjonal avbildning er en isomorfi mellom to åpne underrom av varietetene den avbilder imellom, og muligens udefinert utenfor. For flater dekomponeres avbildninger gjennom serier med oppblåsninger og nedblåsninger.

Lemma 1. *Om en divisor C går igjennom oppblåsningspunktet p med multiplisitet vil pullback av divisoren i oppblåsningen bli $\epsilon^*C = \tilde{C} + mE$ hvor \tilde{C} er den strikte transformen og E den eksepsjonelle divisoren.*

Add proof:
analytic

Lemma 2. *La $\epsilon: \tilde{S} \rightarrow S$ være en oppblåsning. Da har vi*

1. *Vi har en isomorfi $\text{Pic}S \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic}\tilde{S}$ gitt ved $(D, n) \mapsto \epsilon^*D + nE$.*
2. *$(\epsilon^*D) \cdot (\epsilon^*D') = D \cdot D'$*
3. *$K_{\tilde{S}} = \epsilon^*K_S + E$.*

Proof. 1. Den er tydelig surjektiv siden ϵ er en isomorfi utenfor p . Ved snittallet kan vi se at kjernen også er null.

2. Om vi velger to lineært ekvivalente divisorer som går utenom p blir resultatet åpenbart.

3. Bruker genusformelen.

□

Undersøk
dette
nærmere

Teorem 4 (Eliminasjon av ubestemmelser). *Om vi har en rasjonal avbildning $\phi: S \dashrightarrow X$ fra en glatt flate til en projektiv varietet, kan vi blåse opp S endelig mange ganger til flate $\eta: S' \rightarrow S$ slik at vi får en morfi $f: S' \rightarrow X$ og $\phi\eta = f$.*

Proof. Vi kan erstatte X med det minste projektive rommet som inneholder X . Deretter kan vi identifisere avbildningen med et lineært system. Om systemet har basispunkter blåser vi opp det punktet, og om vi ikke har flere basispunkter har vi en morfi. Om vi passer på å fjerne den eksepsjonelle divisoren i hvert steg vil ikke systemene ha noen fiks komponent, så sekvensen vil til slutt terminere når vi ikke lenger har basispunkter. □

Proposisjon 1 (Universalegenskapen ved oppblåsninger). *Om vi har en birational morfi $f: X \rightarrow S$ slik at inversavbildningen er udefinert i et punkt $p \in S$ faktoriseres f gjennom en oppblåsning $\epsilon: \tilde{S} \rightarrow S$*

$$f = \epsilon g: X \rightarrow \tilde{S} \rightarrow S$$

Teorem 5. *La $f: S \rightarrow S_0$ være en birasjonal morfi av flater. Da kan vi gjøre en serie oppblåsninger slik at vi får en isomorfi $u: S \rightarrow S_n$ og $f = (\prod \epsilon_i)u$.*

Proof. Vi gjør induksjon hvor induksjonssteget følger fra universalegenskapen til oppblåsningen. At sekvensen terminerer følger av at en birasjonal morfi av flater alltid kontakterer endelig mange irreducible kurver og oppblåsningen kontakterer bare den eksepsjonelle divisoren. □

Korollar 1. *En birasjonal avbildning mellom flater kan skrives som en serie oppblåsninger og nedblåsninger.*

Proof. Dette følger umiddelbart fra forrige teorem og teorem 4. □

Teorem 6 (Castelnuovos kontraksjonskriterium). *En kurve $E \subset S$ er eksepsjonell hvis og bare hvis $E^2 = -1$ og $E \simeq \mathbb{P}^1$.*

Proof. Tanken er å finne et hyperplansnitt på S slik at vi kan embedde flaten likt i projektivt rom utenfor kurven og slik at kurven kontraheres til et punkt. □

Undersøk
dette lange
bviset

Kapittel 3 – Regerte flater

En kurve er reglert om den er birasjonal til $C \times \mathbb{P}^1$ for en glatt kurve C . $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ er birasjonal til \mathbb{P}^2 , så om $C = \mathbb{P}^1$ er flaten rasjonal.

En geometrisk reglert flate er en flate med en glatt \mathbb{P}^1 -reglering over en glatt kurve C .

Teorem 7 (Noether-Enriques). *La $p: S \rightarrow C$ være en morfi fra en flate til en glatt kurve. Om det finnes et \mathbb{P}^1 -fiber hvor p er glatt kan vi lage et omegn $U \subset C$ og en isomorfi $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{P}^1$. Spesielt er da flaten reglert.*

Proof.

□

fullfør bevis

Lemma 3. *De geometrisk reglerte flatene over over en irrasjonal kurve er minimale.*

Proof. Anta for motsigelse at det finnes en kurve $E \simeq \mathbb{P}^1$. Siden den har negativt selvsnitt, spesielt ikke-null, kan den ikke være et fiber, så $p(E) = C$, men dette gir oss at C er rasjonal, en motsigelse. □

Teorem 8. *La C være en glatt irrasjonal kurve. De minimale modellene for $C \times \mathbb{P}^1$ er de geometriske reglerte over C , altså de projektive buntene $\mathbb{P}_C(E)$ for divisorer E .*

Proof. Det gjenstår å vise at minimale modeller er isomorfe til en geometrisk reglert flate. La S være en reglert flate over C slik at vi har en birasjonal avbildning $\phi: S \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$. Videre har vi en projeksjon $p: C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ som gir opphav til en rasjonal avbildning $p\phi: S \dashrightarrow C$.

Vi kan utvide denne avbildningen til en morfi fra en oppblåsning av S ned på C . Siden C ikke er rasjonal må de eksepsjonelle divisorene kontraheres til punkter på C , men om de eksepsjonelle divisorene kontraheres til punkter på C hadde vi utgangspunktet ingen grunn til å blåse opp, så $p\phi$ er en morfi og S var geometrisk reglert til å begynne med. □

Teorem 9 (Riemann-Roch for vektorbunter av rang 2).

$$\chi(E) = \deg(E) + 2 - 2g(C)$$

Projektive bunter

Proposisjon 2. *La $p: \mathbb{P}_C(E) = S \rightarrow C$ være en geometrisk reglert flate, og la $h \in \text{Pic}S$ være divisorklassen til $\mathcal{O}_S(1)$.*

1. $\text{Pic}S = p^* \text{Pic}C \oplus \mathbb{Z}h$.
2. $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, hvor f er divisorklassen til en fiber.
3. $h^2 = \deg(E)$.
4. $[K] = -2h + (\deg(E) + 2g(C) - 2)f$ i $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Proof. 1. $F.h = 1$ for alle fibre F , så alle divisorer kan skrives på formen $D + mh$ slik at $D.F = 0$.

La $D_n = D + nF$. Det følger at

- $D_n^2 = D^2$
- $D_n.K = D.K - 2n$
- $h^0(K - D_n) = 0$ for tilstrekkelige store n .

Det følger at $|D_n|$ er ikke-tom for tilstrekkelig store n , og for $E \in |D_n|$ snitter det ingen fibre, så hver komponent må være et fiber og E pulback av en divisor på C .

Numeriske invarianter

Vi betegner plurigeneraene til en flate S ved

$$P_n(S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK))$$

for $n \geq 1$ og irregulariteten

$$q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S)$$

.

Spesielt har vi ved Serre-dualitet $p_g(S) = P_1(S) = h^2(S, \mathcal{O}_S)$. Hodge-teori forteller oss også at $q(S) = h^0(S, \Omega_S^1) = \frac{1}{2}b_1(S)$, hvor b_i betegner betti-tallene. Ved Poincaré-dualitet får vi $b_0 = b_4 = 1$ og $b_1 = b_3$, så topologisk eulerkarakteristikk blir $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1 + b_2$.

Proposisjon 3. q og $P_n(S)$ er numeriske invarianter.

Proposisjon 4. For reglerte flater S over C har vi

- $q(S) = g(C)$
- $P_n(S) = 0$

Hvis S er geometrisk reglert har vi $K_S^2 = 8(1 - g(C))$ og $b_2(S) = 2$.

Proof. Siden plurigenera og irrasjonalitet er birasjonale invarianter kan vi anta at $S = C \times \mathbb{P}_1$. Plurigenera for flaten blir produktet av plurigeneraene til faktorene i produktet, så siden $P_n(\mathbb{P}^1) = 0$ gjelder det samme for flaten. Irrasjonalitet blir summen av genusene, så tilsvarende får vi $q(S) = g(C)$. \square

Kapittel 4 – Rasjonale flater

Kapittel 5 – Castelnuovo

Kapittel 6

Kapittel 7 – Kodaira dimensjon

Kapittel 8 – Kodaira dimensjon null

Kapittel 9 – Elliptiske flater

Kapittel 10 – Generell type

Temaer

Snitt-produkt og RR for flater

Lineære systemer for kjeglesnitt i planet

En glatt tredjegradsflate er P^2 blåst opp i 6 punkter

Reglerte flater: Picard gruppe, RR og numeriske invarianter

Snitt-produktet på sammenhengende kurver som blir kontraktet ved en morfi

Minimale flater, eksistens og entydighet

K3-flater: RR og projektive modeller av grad mindre enn 10

Elliptiske flater