MAT4230 – Oppsummering

Jon-Magnus

Contents

Kapittel 1

Picard-gruppen

La S være en glatt varietet. Picard-gruppen Pic$S$ betegner gruppen av isomorfiklasser av invertible knipper på S. Effektive divisorer gir oss invertible knipper. Vi kan også trekke tilbake knipper gitt en morfi $f\colon S \to X$, som gir oss en morfi $f^*\colon \mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}S$ for glatte skjemaer X. Om f er surjektiv kan vi også trekke tilbake divisorer, på en måte som er kompatibel med korrespondansen av invertible knipper og divisorer, altså $f^*\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_S(f^*D)$.

Riemann-Roch

Theorem 1 (Riemann-Roch for flater)**.** *La* $L \in PicS$*.*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L.\omega_s)$$

.

Proof. Ved definisjon av snittproduktet får vi

$$(L^{-1}.L \otimes \omega_s^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_s \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_s)$$

Med mer fornuftig notasjon ville vi skrevet $L^{-1} = -L$ og $L \otimes \omega_s^{-1} = L - \omega_s$. Ved Serre-dualitet får vi $\chi(L') = \chi(\omega_s - L')$, som gir oss

$$((-L).(L - \omega_s) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L))$$

Ved bilinearitet kan vi skrive om til uttrykket i påstanden. □

Noethers formel

Noethers formel fortelleross om sammenhengen mellom algebraisk eulerkarakteristikk og topologisk eulerkarakteristikk, hvor førstnevnte er definert som den alternerende summen av dimensjonen til de globale seksjonene av det spesifikke knippet, mens sistnevnte er definert som den alternerende summen av betti-tallene, altså den alternerende summen den reelle dimensjonen til de globale seksjonene til det konstante knippet med verdier i $\mathbb{R}$.

Theorem 2 (Noethers formel)**.**

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S))$$

hvor $\chi_{\text{top}}(S) = \sum(-1)^i b_i$ *og* $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$*.*

Genusformelen

Theorem 3 (Genusformelen)**.** *For en irredusibel kurve* C *har vi* $g(c) := h^1(C, \mathcal{O}_C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$*.*

Proof. Vi har følgende eksakte sekvens

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

som ved linearitet av eulerkarakteristikken gir oss $\chi(O_C) := 1 - g(C) = \chi(O_S) - \chi(O_S(-C))$. Omformulerer vi Riemann-Roch står vi igjen med

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &:= -(\chi(C) - \chi(O_S)) \\ &= -\frac{1}{2}(C^2 + C.K)\end{aligned}$$

□

Kapittel 2 – Birationale avbildninger

Kapittel 3 – Regerte flater

Kapittel 4 – Rasjonale flater

Kapittel 5 – Castelnuovo

Kapittel 6

Kapittel 7 – Kodaira dimensjon

Kapittel 8 – Kodaira dimensjon null

Kapittel 9 – Elliptiske flater

Kapittel 10 – Generell type

Temaer

Snitt-produkt og RR for flater

Lineære systemer for kjeglesnitt i planet

En glatt tredjegradsflate er P^2 blåst opp i 6 punkter

Reglerte flater: Picard gruppe, RR og numeriske invarianter

Snitt-produktet på sammenhengende kurver som blir kontraktert ved en morfi

Minimale flater, eksistens og entydighet

K3-flater: RR og projektive modeler av grad mindre enn 10

Elliptiske flater