Lineære systemer av kvadrikker i $\mathbb{P}^2$

Jon-Magnus Rosenblad

Veronese

Kvadrikkene i $\mathbb{P}^2$ beskrives som nullpunktmengden til polynomer på formen $ax^2 + by^2 + cz^2 + dyz + exz + fyz$ parametrisert med koeffisienter $[a, \dots, f] \in \mathbb{P}^5$. Gitt et punkt $[x, y, z] \in \mathbb{P}^2$ avbilder vi det gjennom Veronese-avbildningen $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$. Gitt dette punktet i $\mathbb{P}^5$ er det en linear begrensning at koeffisientene sender punktet til 0, så det finnes et hyperplan av koeffisienter som sender punktet på 0. Dette hyperplanet korresponderer til kvadrikkene gjennom det opprinnelige punktet i $\mathbb{P}^2$. Vi definerer dette hyperplanet i dualrommet $\check{\mathbb{P}}^5$ som bildet av punktet $[x, y, z] \in \mathbb{P}^2$.

Proposisjon 1. *Det lineære systemet av kvadrikker i $\mathbb{P}^2$ definerer Veronese-embeddingen $j \colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ av grad $d = 2$. Bildet av j danner en flate $V \subset \mathbb{P}^5$ av grad $H^2 = d^2 = 4$ hvor H er et hyperplan i $\mathbb{P}^5$.*

Ved en enkel observasjon ser vi at flaten V ikke inneholder noen linjer C siden C linje $\Rightarrow C \cdot H = C \cdot 2L = 1$.

Generisk projeksjon

Proposisjon 2. *Projiseringen vekk fra et generisk punkt i $\mathbb{P}^5$ avbilder V isomorft på sitt bilde $V' \subset \mathbb{P}^4$.*

Bevis. Vi konstruerer rommet av plan som inneholder kvadrikkene på flaten. Dette er et rom av dimensjon ≤ 4 ettersom det en et underrom av en $\mathbb{P}^2$-fibrasjon over rommet av linjer i $\mathbb{P}^2$, som er $\mathbb{P}^2$. Alle bisekanter gjennom flaten vil være inneholdt i et av disse planene. Siden rommet har dimensjon ≤ 4 kan vi velge et generisk punkt utenfor rommet slik at det ikke ligger på noen bisekant. Dermed vil projiseringen vekk fra punktet være injektiv på bildet. $\square$

Bemerkning 1. *Den generiske projeksjonen av V' ned i $\mathbb{P}^3$ definerer en 4-grads flate med tre dobbel-linjer som møtes i et trippel-punkt. Denne flaten er kjent som Steiner-flaten, eller Steiners Romerske flate.* Bevis dette

Det lineære systemet gjennom et punkt

Ser vi heller på alle kvadrikker gjennom et punkt får vi et lineært system med et åpenbart basispunkt. Dette tilsvarer å projiserer V fra et punkt $p \in V$. Om vi blåser opp avbildningen får vi det lineære systemet av kvadrikker gjennom punktet $|2h - E|$ beskrevet ved generatorene vi er best kjent med, eller $|h + f|$ beskrevet ved generatorene for $\mathbb{F}_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ slik det står i Bouville. Her er h den pullbacken av en linje i $\mathbb{P}^2$, E den eksepsjonelle divisoren og f et fiber i fibreringen $\mathbb{F}_1 \to \mathbb{P}^1$. Likheten av de to representasjonene følger av $E = h - f$.

Bemerkning 2. *Picardgruppen $\operatorname{Pic} F_n$ til de geometrisk reglerte flatene er generert av h og f, hvor $hf = 1$, $h^2 = n$ og $f^2 = 0$.*

Vi benevner flaten i bildet S. Vi får at graden til S blir $H^2 = (2h - E)^2 = d^2 - 1$.

Proposisjon 3. *De eneste linjene på S er f og E.*

Bevis. Vi ser at $fH = f(f+h) = 1$, så fibrene avbilder på linjer på flaten. Vi har også $EH = (h-f)(f+h) = 2-1 = 1$, så den eksepsjonelle divisoren avbilder også på en linje. Generelt, anta vi har en linje $C = ah + bf$ for $a, b \geq e$. Da har vi $C(h+f) = 2a + b$, så $a = 0$ og $b = 1$, som gir oss fiberet. $\square$

Generell projeksjon av S

Lemma 1. *S er snittet av et todimensjonalt lineært system av kvadrikker i $\mathbb{P}^4$. For enhver pensel av kvadrikker $\{aQ_1 + bQ_2\}$ som inneholder S*

1. *vil snittet $Q_1 \cap Q_2 = S \cup P$, hvor P er et plan i $\mathbb{P}^4$, og*
2. *$S \cap P$ er et kjeglesnitt.*

Bevis. Kvadrikkene snitter S i de strikte transformene av kvartrikkene i $\mathbb{P}^2$ som går igjennom 0 med multiplisitet 2. Å snitte et punkt 2 ganger innfører tre lineære begrensninger på plane kurver, så rommet av kvintikker representert som snittet av en kvadrikk og S er et underrom av $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$ av kodimensjon 3. Vi har at $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(4)$ har samme dimensjon som $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)$, så vi har minst tre lineært uavhengige kvadrikker som ikke gir opphav til kvintikker på S, og må derfor inneholde hele S. Hvorfor det?

To slike kvadrikker Q_1, Q_2 må være irredusible, så de snitter i en fjerdegradflate som inneholder S av grad 3, og må derfor være på formen $S \cup P$ for et plan P, og (1) følger. Hvorfor det?

La $M = L = 0$ være likningene som beskriver planet P. Da finnes lineære former A_i, B_i slik at likningen $A_iM + B_iL = 0$ beskriver kvadrikken Q_i for $i = 1, 2$. Vi har at produktet $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$ forsvinner på snittet $Q_1 \cap Q_2$. Vektoren dreper planet, så matrisen står for å ta livet av S. Det medfølger at determinanten $A_1B_2 - A_2B_1$ forsvinner på alle punktene i $S \setminus P$, så $S \subset Q_3$ definert av likninga $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

Q_3 er en kvadrikk, så snittet $P \cap S = P \cap Q_3$ definerer et kjeglesnitt. $\square$

Proposisjon 4. *Den generelle projiseringen av S er en kubisk flate $S' \in \mathbb{P}^3$ som bare er singulær i en dobbel linje.*

Bevis. La Q_1, Q_2 være to kvadrikker som inneholder S og et punkt $p \in \mathbb{P}^4 \setminus S$. Vi har $Q_1 \cap Q_2 = S \cup P$ ved forrige proposisjon, hvor $p \in P$. Alle bisekanter i S gjennom p kutter kvadrikkene i tre punkter, så hele bisekanten er inneholdt i snittet, og dermed i P. Snittet $S \cap P$ er en kjegle, så snittet projiseres to til en, mens S ellers projiseres isomorft. $\square$

Det er en symmetri i om vi velger å projisere fra et generelt punkt først, og så fra et punkt på flaten, eller omvendt.

Det lineære systemet gjennom to punkter

Betrakter vi heller det lineære systemet av kvadrikker gjennom to punkter i $\mathbb{P}^2$ tilsvarer det å projisere S fra et punkt på flaten utenfor den eksepsjonelle divisoren. Blåser vi opp de to punktene får vi en avbildning $\tilde{P^2} \to \mathbb{P}^3$ definert av det lineære systemet $|2h - E - E'|$ hvor E, E' er de to uavhengige lineære systemene. Bildet definerer en flate Q av grad $H^2 = (2h - E - E')^2 = 4 - 2 = 2$.

Blåser vi opp den andre gangen i et punkt på den eksepsjonelle divisoren tilsvarer det å se på alle kvadrikker gjennom punktet med en bestemt retning.

Flatene ned til $\mathbb{P}^3$

Vi får følgende diagram av flater med projeksjoner imellom

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
V' \arrow[d] \arrow[dr] & S \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{Steiner} & S' & \text{Kvadrikk}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
V & & & & \\
\downarrow & \searrow & & & \\
V' & & S & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
\text{Steiner} & & S' & & \text{Kvadrikk}
\end{array}
$$

Vertikale piler representerer generiske projeksjoner, mens diagonale er projeksjoner fra punkter på flaten.

Kvadrikker gjennom flere punkter

Ravi Vakil sine notater fortsetter oppblåsningene til flere punkter. Det lineære systemet av kvadrikker gjennom tre punkter som ikke ligger på samme linje er beskrevet av $|2h - E - E' - E''|$. Bildet ligger nå i $\mathbb{P}^2$ og er nødvendigvis en flate av grad 1.