MAT4230 – Oppsummering

Jon-Magnus

Contents

Kapittel 1

Picard-gruppen

La S være en glatt varietet. Picard-gruppen Pic$S$ betegner gruppen av isomorfiklasser av invertible knipper på S. Effektive divisorer gir oss invertible knipper. Vi kan også trekke tilbake knipper gitt en morfi $f\colon S \to X$, som gir oss en morfi $f^*\colon \mathrm{Pic}X \to \mathrm{Pic}S$ for glatte skjemaer X. Om f er surjektiv kan vi også trekke tilbake divisorer, på en måte som er kompatibel med korrespondansen av invertible knipper og divisorer, altså $f^*\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_S(f^*D)$.

Vi definerer snittet til to divisorer $L, L' \in \mathrm{Pic}S$ ved

$$L.L' = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(-L) - \chi(-L') + \chi(-L-L')$$

.

hvor $\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \sum(-1)^i h^i(D)$ er Euler-Poincaré karakteristikken for knipper $\mathcal{O}_S(D)$.

Riemann-Roch

Teorem 1 (Riemann-Roch for flater)**.** *La $L \in PicS$.*

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(L^2 - L.\omega_s)$$

.

Bevis. Ved definisjon av snittproduktet får vi

$$(L^{-1}.L \otimes \omega_s^{-1}) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L) - \chi(\omega_s \otimes L^{-1}) + \chi(\omega_s)$$

Med mer fornuftig notasjon ville vi skrevet $L^{-1} = -L$ og $L \otimes \omega_s^{-1} = L - \omega_s$. Ved Serre-dualitet får vi $\chi(L') = \chi(\omega_s - L')$, som gir oss

$$((-L).(L - \omega_s) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(L))$$

Ved bilinearitet kan vi skrive om til uttrykket i påstanden. □

Noethers formel

Noethers formel forteller oss om sammenhengen mellom algebraisk eulerkarakteristikk og topologisk eulerkarakteristikk, hvor førstnevnte er definert som den alternerende summen av dimensjonen til de globale seksjonene av det spesifikke knippet, mens sistnevnte er definert som den alternerende summen av betti-tallene, altså den alternerende summen den reelle dimensjonen til de globale seksjonene til det konstante knippet med verdier i $\mathbb{R}$.

Teorem 2 (Noethers formel)**.**

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{12}(K_S^2 + \chi_{\mathrm{top}}(S))$$

hvor $\chi_{\mathrm{top}}(S) = \sum(-1)^i b_i$ og $b_i = \dim_{\mathbb{R}} H^i(S, \mathbb{R})$.

Genusformelen

Teorem 3 (Genusformelen)**.** *For en irredusibel kurve C har vi $g(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K)$. Kanskje mer kjent kan den skrives*

$$C^2 + C.K = 2g(C) - 2$$

Bevis. Vi har følgende eksakte sekvens

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

som ved linearitet av eulerkarakteristikken gir oss $\chi(O_C) := 1 - g(C) = \chi(O_S) - \chi(O_S(-C))$. Omformulerer vi Riemann-Roch står vi igjen med

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) &:= -(\chi(C) - \chi(O_S)) \\ &= -\frac{1}{2}(C^2 + C.K)\end{aligned}$$

□

Kapittel 2 – Birationale avbildninger

En birasjonal avbildning er en isomorfi mellom to åpne underrom av varietetene den avbilder imellom, og muligens udefinert utenfor. For flater dekomponeres avbildninger gjennom serier med oppblåsninger og nedblåsninger.

Lemma 1. *Om en divisor C går igjennom oppblåsningspunktet p med multiplisitet vil pullback av divisoren i oppblåsningen bli $\epsilon^* C = \tilde{C} + mE$ hvor $\tilde{C}$ er den strikte transformen og E den eksepsjonelle divisoren.*

Add proof: analytic

Lemma 2. *La $\epsilon \colon \tilde{S} \to S$ være en oppbåsning. Da har vi*

1. *Vi har en isomorfi $PicS \oplus \mathbb{Z} \to Pic\tilde{S}$ gitt ved $(D, n) \mapsto \epsilon^* D + nE$.*
2. *$(\epsilon^* D).(\epsilon^* D') = D.D''$*
3. *$K_{\tilde{S}} = \epsilon^* K_S + E$.*

Bevis.
1. Den er tydelig surjektiv siden ϵ er en isomorfi utenfor p. Ved snittallet kan vi se at kjernen også er null.
2. Om vi velger to lineært ekvivalente divisorer som går utenom p blir resultatet åpenbart.
3. Bruker genusformelen.

Undersøk dette nærmere

□

Teorem 4 (Eliminasjon av ubestemmelser)**.** *Om vi har en rasjonal avbildning $\phi \colon S \dashrightarrow X$ fra en glatt flate til en projektiv varietet, kan vi blåse opp S endelig mange ganger til flate $\eta \colon S' \to S$ slik at vi får en morfi $f \colon S' \to X$ og $\phi\eta = f$.*

Bevis. Vi kan erstatte X med det minste projektive rommet som ínneholder X. Deretter kan vi identifisere avbildnignen med et lineært system. Om systemet har basispunkter blåser vi opp det punktet, og om vi ikke har flere basispunkter har vi en morfi. Om vi passer på å fjerne den eksepsjonelle divisoren i hvert steg vil ikke systemene ha noen fiks komponent, så sekvensen vil til slutt terminere når vi ikke lenger har basispunkter. □

Proposisjon 1 (Universalegenskapen ved oppbåsninger)**.** *Om vi har en birational morfi $f \colon X \to S$ slik at inversavbildningen er udefinert i et punkt $p \in S$ faktoriseres f gjennom en oppblåsning $\epsilon \colon \tilde{S} \to S$*

$$f = \epsilon g \colon X \to \tilde{S} \to S$$

Teorem 5. *La $f \colon S \to S_0$ være en birasjonal morfi av flater. Da kan vi gjøre en serie oppblåsninger slik at vi vår en isomorfi $u \colon S \to S_n$ og $f = (\prod \epsilon_i)u$.*

Bevis. Vi gjør induksjon hvor induksjonssteget følger fra universalegenskapen til oppblåsningen. At sekvensen terminerer følger av at en birasjonal morfi av flater alltid kontakterer endelig mange irredusible kurver og oppblåsningen kontakterer bare den eksepsjonelle divisoren. □

Korollar 1. *En birasjonal avbildning mellom flater kan skrives som en serie oppblåsninger og nedblåsninger.*

Bevis. Dette følger umiddelbart fra forrige teorem og teorem 4. □

Teorem 6 (Castelnuovos kontraksjonskriterium)**.** *En kurve $E \subset S$ er eksepsjonell hvis og bare hvis $E^2 = -1$ og $E \simeq \mathbb{P}^1$.*

Bevis. Tanken er å finne et hyperplansnitt på S slik at vi kan embedde flaten likt i projektivt rom utenfor kurven og slik at kurven kontrakteres til et punkt. □

Undersøk dette lange bviset

Kapittel 3 – Regerte flater

En kurve er reglert om den er birasjonal til $C \times \mathbb{P}^1$ for en glatt kurve C. $P^1 \times \mathbb{P}^1$ er birasjonal til P^2, så om $C = \mathbb{P}^1$ er flaten rasjonal.

En geometrisk reglert flate er en flate med en glatt $\mathbb{P}^1$-reglering over en glatt kurve C.

Teorem 7 (Noether-Enriques)**.** *La $p\colon S \to C$ være en morfi fra en flate til en glatt kurve. Om det finnes et $\mathbb{P}^1$-fiber hvor p er glatt kan vi lage et omegn $U \subset C$ og en isomorfi $p^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{P}^1$. Spesielt er da flaten reglert.*

Bevis. □ fullfør bevis

Lemma 3. *De geometrisk reglerte flatene over over en irrasjonal kurve er minimale.*

Bevis. Anta for motsigelse at det finnes en kurve $E \simeq \mathbb{P}^1$. Siden den har negativt selvsnitt, spesielt ikke-null, kan den ikke være et fiber, så $p(E) = C$, men dette gir oss at C er rasjonal, en motsigelse. □

Teorem 8. *La C være en glatt irrasjonal kurve. De minimale modellene for $C \times \mathbb{P}^1$ er de geometriske reglerte over C, altså de projektive buntene $\mathbb{P}_C(E)$ for divisorer E.*

Bevis. Det gjenstår å vise at minimale modeller er isomorfe til en geometrisk reglert flate. La S være en reglert flate over C slik at vi har en birasjonal avbildning $\phi\colon S \dashrightarrow C \times \mathbb{P}^1$. Videre har vi en projeksjon $p\colon C \times \mathbb{P}^1 \to C$ som gir opphav til en rasjonal avbildning $p\phi\colon S \dashrightarrow C$.

Vi kan utvide denne avbildningen til en morfi fra en oppblåsning av S ned på C. Siden C ikke er rasjonal må de eksepsjonelle divisorene kontrakteres til punkter på C, men om de eksepsjonelle divisorene kontrakteres til punkter på C hadde vi utgangspunktet ingen grunn til å blåse opp, så $p\phi$ er en morfi og S var geometrisk reglert til å begynne med. □

Teorem 9 (Riemann-Roch for vektorbunter av rang 2)**.**

$$\chi(E) = \deg(E) + 2 - 2g(C)$$

Projektive bunter

Proposisjon 2. *La $p\colon \mathbb{P}_C(E) = S \to C$ være en geometrisk reglert flate, og la $h \in PicS$ være divisorklassen til $\mathcal{O}_S(1)$.*

1. $PicS = p^* PicC \oplus \mathbb{Z}h$.
2. $H^2(S, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, *hvor f er divisorklassen til en fiber.*
3. $h^2 = \deg(E)$.
4. $[K] = -2h + (\deg(E) + 2g(C) - 2)f$ *i* $H^2(S, \mathbb{Z})$.

Bevis. 1. $F.h = 1$ for alle fibre F, så alle divisorer kan skrives på formen $D + mh$ slik at $D.F = 0$.

La $D_n = D + nF$. Det følger at

- $D_n^2 = D^2$
- $D_n.K = D.K - 2n$
- $h^0(K - D_n) = 0$ for tilstrekkelige store n.

Det følger at $|D_n|$ er ikketom for tilstrekkelig store n, og for $E \in |D_n|$ snitter det ingen fibre, så hver komponent må være et fiber og E pulback av en divisor på C.

2.

$\square$

Vurder å gjennomføre bevis for de andre punktene

Numeriske invarianter

Vi betegner plurigeneraene til en flate S ved

$$P_n(S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK))$$

for $n \geq 1$ og irregulariteten

$$q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S)$$

.

Spesielt har vi ved Serre-dualitet $p_g(S) = P_1(S) = h^2(S, \mathcal{O}_S)$. Hodge-teori forteller oss også at $q(S) = h^0(S, \Omega_S^1) = \frac{1}{2}b_1(S)$, hvor b_i betegner betti-tallene. Ved Poincaré-dualitet får vi $b_0 = b_4 = 1$ og $b_1 = b_3$, så topologisk eulerkarakteristikk blir $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1 + b_2$.

Proposisjon 3. *q og $P_n(S)$ er numeriske invarianter.*

Proposisjon 4. *For reglerte flater S over C har vi*

- $q(S) = g(C)$
- $P_n(S) = 0$

Hvis S er geometrisk reglert har vi $K_S^2 = 8(1 - g(C))$ og $b_2(S) = 2$.

Bevis. Siden plurigenera og irrasjonalitet er birasjonale invarianter kan vi anta at $S = C \times \mathbb{P}_1$. Plurigenera for flaten blir produktet av plurigeneraene til faktorene i produktet, så siden $P_n(\mathbb{P}^1) = 0$ gjelder det samme for flaten. Irrasjonalitet blir summen av genusene, så tilsvarende får vi $q(S) = g(C)$. $\square$

Kapittel 4 – Rasjonale flater

Lemma 4. *En projeksjon er en morfi hvis og bare hvis linjene gjennom punktet snitter flaten i ett punkt talt med multiplisitet.*

Proposisjon 5. *Alle flater er isomorfe til en glatt flate i $\mathbb{P}^5$.*

Bevis. Vi kan vise at rommet utspent av alle bisekanter er en undervarietet av dimensjon mindre enn 5. Resultatet følger umiddelbart fra lemmaet over. $\square$

Teorem 10. *Alle tredjegradsflater i $\mathbb{P}^3$ er oppblåsningen av P^2 i 6 punkter.*

Kapittel 5 – Castelnuovo

Teorem 11 (Castelnuovos rasjonalitetskriterium)**.** *S er rasjonal om $q = P_2 = 0$. En følgelig og tilstrekkelig erstatning for kriteriet $P_2 = 0$ er $g = 0$.*

En flate er rasjonal om det finnes en dominant rasjonal avbildning fra et projektivt rom ned på flaten. En flate er rasjonal om det finnes en birasjonal avbildning mellom flaten og et projektivt rom.

Korollar 2 (Castelnuovos teorem)**.** *Enhver unirasjonal flate er rasjonal.*

Bevis. Vi kan blåse opp for unirasjonale avbildning til en morfi. Siden plurigenera og irrasjonalitet er birasjonale invarianter, får vi $P_2 = q = 0$, så flaten er rasjonal. $\square$

Teorem 12. *En minimal rasjonal flate er isomorf med en av de geometrisk reglerte flatene over $\mathbb{P}^1$ $\mathbb{F}_n$.*

Albanesen

Teorem 13. *For enhver glatt varietet X finnes en abelsk varietet A og en avbildning $\alpha\colon X \to A$ med følgende universalegenskap:*

for alle komplekse tori T og enhver morfi $f\colon X \to T$ finnes en unik faktorisering $\tilde{f}\colon A \to T$ gjennom α.

Denne varieteten er unik opp til isomorfi. alpha induserer en isomorfi $\alpha^*\colon H^0(A, \omega_A^1) \to H^0(X, \omega_X^1)$.

Vi kaller denne abelske varieteten for albanesen til X og betegner den $\mathrm{Alb}(X)$.

Lemma 5. *La S være en flate og $\alpha\colon S \to Alb(S)$ være albaneseavbildningen. Om $\alpha(S)$ er en kurve vil kurven ha genus q og fibrene vil være sammenhengende.*

Lemma 6. *Om S er en flate med $p_g = 0$ og $q \geq 1$ vil bildet av flatne under albaneseavbildningen være en kurve.*

Stein-faktorisering

Kapittel 6

Lemma 7. 1. *La S være en flate med $p_g = 0, q \geq 1$. Da har vi $K^2 \leq 0$, og $K^2 < 0$ med mindre $q = 1$ og $b_2 = 2$.*

2. *La S være en minimal flate. Om $K^2 < 0$ har vi $p_g = 0$ og $q \geq 1$.*

Bevis. Ved Noethers formel får vi

$$12 - 12q = K^2 + 2 - 4q + b_2$$
$$\Updownarrow$$
$$K^2 = 10 - 8q - b_2$$

1. La $\alpha\colon S \to B$ være albaneseavbildningen med $B = \mathrm{Alb}(S)$. Vi ser at B er en kurve ved lemma 6, og den er elliptisk ved lemma 5.

Mystisk argument i Beauville

2. Anta $p_g \neq 0$. Anta det finnes $D \in |K|$ slik at $D = \sum n_i C_i$ med $n_i > 0$. Siden $K.D < 0$ må det finnes i slik at $K.C_i < 0$, som igjen medfører at $C_i^2 < 0$, men da må C_i være eksepsjonell som motsier minimaliteten til S, så K har ikke seksjoner. Tilsvarende argument holder for andre plurigeneraene.

   Om $q = 0$ får vi at S er rasjonal, så $K^2 = 8$ eller 9.

Hvorfor må C_i være eksepsjonell? dvs hvorfor kan den ikke ha lavere selvsnitt?

□

Proposisjon 6. *Om S er minimal og $K^2 < 0$ så er S reglert.*

Spesielt er S reglert over albanesen.

Kapittel 7 – Kodaira dimensjon

Vi definerer kodaira-dimensjonen til en projektiv varietet med kanonisk divisor K som den største dimensjonen $\phi_{nK}(V)$ kan ha for $n \geq 1$, hvor ϕ_{nK} betegner avbildnignen definert av det lineære systemet $|nK|$. Det følger automatisk at kodaira-dimensjonen til en flate aldri er større enn 2.

Vi sier den tomme mengden har dimensjon $-\infty$.

$$\begin{aligned}\kappa(S) = -\infty &\Leftrightarrow P_n = 0\,\forall n \geq 0\\ &\Leftrightarrow \text{S er reglert}\end{aligned}$$

Kapittel 8 – Kodaira dimensjon null

Kapittel 9 – Elliptiske flater

En flate S er elliptisk dersom det finnes en projeksjon $p\colon S \to B$ for en glatt kurve B slik at den generiske fiberen er en elliptisk kurve.

Teorem 14. *Alle flater med $\kappa = 1$ er elliptiske.*

Bemerkning 1. *Motsatte påstand holder ikke, men $\kappa \leq 1$.*

Kapittel 10 – Generell type

Temaer

Snitt-produkt og RR for flater

Se kapittel 1.

Lineære systemer for kjeglesnitt i planet

Det lineære systemet av kvadrikker i $\mathbb{P}^2$ korresponderer til Veronese-avbildningen av grad 2 inn i $\mathbb{P}^5$.

En glatt tredjegradsflate er P^2 blåst opp i 6 punkter

Teorem 10 forteller oss at alle glatte tredjegradsflater $S \subset \mathbb{P}^3$ er oppblåsninger av $\mathbb{P}^2$ i 6 punkter. Beviset for denne påstanden bygger på følgende lemmaer

Lemma 8. *S inneholder en linje.*

Lemma 9. *La $l \subset S$ være en linja. Da finnes det 10 andre linjer på S som krysser l, og de danner disjunkte par av linjer som krysser l i samme punkt.*

Lemma 10. *Om tre linjer møtes i $p \in S$ er de koplane.*

Bevis. Om vi tar hyperplanet utspent av to av linjene får vi en kubikk, men siden vi allerede har to linjer som komponenter må den resterende komponenten være den siste linja. ☐

Lemma 11. *Det finnes to disjunkte linjer på S.*

Bevis. Om vi tar utgangspunkt i l og et par (d, d') har vi ikke plass til flere linjer i snittplanet, så en linje fra et annet par vil være disjunkt fra både d og d'. ☐

Bevis av teorem 10. La $l, l' \subset S$ være to disjunkte linjer. Vi kan definere en rasjonal avbildning $l \times l' \dashrightarrow S$ ved å sende (p, p') på punktet $q \in \langle p, p' \rangle \cap S$ forskjellig fra p, p'.

Tilsvarende kan vi definere en rasjonal avbildning $\psi\colon S \dashrightarrow l \times l'$ ved å sende $s \in S \setminus (l \cup l')$ på (p, p') hvor $p = l \cap \langle s, l' \rangle$ og $p' = l' \cap \langle s, l \rangle$.

Vi ser at ϕ og ψ er inverse avbildninger, så hver er en birasjonal avbildning.

Videre kan ψ utvides til hele S ved å bruke tangentplanet istedenfor $\langle s, l \rangle$ og $\langle s, l' \rangle$ på henholdsvis l og l'. Dermed blir ψ en birasjonal morfi.

Vi vet at det finnes fem par linjer (d_i, d_i') som skjærer l. Ser vi på planet gjennom tre linjer d_i, d_i' og l skjærer dette l' i ett punkt, som ligger på enten d_i eller d_i'. Vi kan anta punktet ligger på d_i. Det er ikke vanskelig å se at alle punktene på linja d_i vil sendes på $(d_i \cap l, d_i \cap l')$, så ψ kontrakterer de fem disjunkte linjene.

Dermed blir S isomorft med $l \times l' \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ blåst opp i 5 punkter. Vi vet at dette igjen er isomorft med $\mathbb{P}^2$ blåst opp i seks punkter. □

Reglerte flater: Picard gruppe, RR og numeriske invarianter

Snitt-produktet på sammenhengende kurver som blir kontraktert ved en morfi

Se på VIII-3 til 5.

Minimale flater, eksistens og entydighet

Minimale flater er entydige for ikke-reglerte flater.

K3-flater: RR og projektive modeller av grad mindre enn 10

En flate S er K3 dersom $K \cong 0$ og $q = 0$.

Lemma 12. *K3-flater er minimale.*

Bevis. Anta vi har en eksepsjonell kurve E. Ved genusformelen har vi $g(E) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C.K) = 1 + \frac{1}{2}C^2$, men da får vi $C^2 = -2$ som motsier at den er eksepsjonell. □

Formelen for Riemann-Roch kan forenkles når $K \cong 0$, siden alle snitt blir trivielle.

Lemma 13. *Om S er K3 får vi $C.K = 0$ for alle $C \in PicS$.*

Bevis. Dette følger fra definisjonen av snittproduktet:

$$\begin{aligned} C.K &= \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(-C) - \chi(-K) + \chi(-C-K) \\ &= \chi(0) - \chi(-C) - \chi(0) + \chi(-C) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Korollar 3. *Om S er K3 kan Riemann-Roch forenkles til*

$$C^2 = 2(\chi(C) - \chi(\mathcal{O}_S))$$

.

Proposisjon 7. *La S være en K3-flate, og $C \subset S$ en glatt kurve av genus g.*

1. *$C^2 = 2g - 2$, og $h^0(C) = g + 1$.*
2. *Hvis $g \geq 1$ så har ikke $|C|$ basispunkter, og definerer dermed en mnorfi $\phi\colon S \to \mathbb{P}^g$.*

Teorem 15. *For enhver grad partallig grad d finnes det en irredusibel 19-dimensjonal familie av K3-flater av grad d.*

Elliptiske flater