En verden av polynomer

Jon-Magnus Rosenblad

13. Mars, 2024

Polynomer

Nullpunkter og røtter

Rasjonale røtter

Polynomer i flere variable

Hva er et polynom?

Hva er et polynom?

Definisjon

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

hvor $a_0, a_1, \ldots, a_n$ er skalarer (varierer ikke med x).

- $a_0, \ldots, a_n \rightsquigarrow$ *koeffisienter*. Kan til eksempel være i $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- $x \rightsquigarrow$ *indeterminant* eller *variabel*.
- største n slik at $a_n \neq 0 \rightsquigarrow$ *graden* $n = \deg p$.

Et polynom kalles *monisk* om $a_n = 1$.
Mengden av polynomer med Reelle koeffisienter med indeterminant x benevnes $\mathbb{R}[x]$.

Eksempler

Eksempel

- $p(x) = x^2 + 3x + 2$ er et polynom i $\mathbb{R}[x]$. Det er også et polynom i $\mathbb{Z}[x]$. Det er monisk.
- $p(x) = (x+1)(x+2)$ er et polynom.
- $q(t) = \frac{t^2+3t+2}{t+1}$ er et polynom av grad 1, $\rightsquigarrow$ det kan skrives som $t+2$. Det ligger i $\mathbb{Z}[t]$.

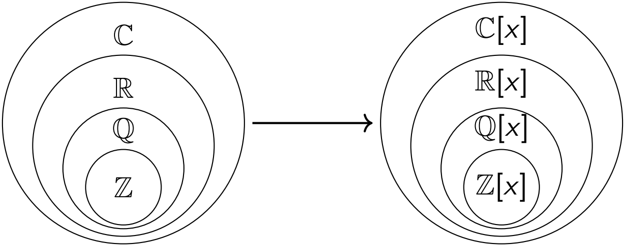
Eksempel (Ikke-polynomer)

- $p(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-1}$ er ikke et polynom, $\rightsquigarrow$ polynomdivisjon gir

$$\frac{x^2+3x+2}{x-1} = x + 4 + \frac{6}{x-1}$$

- $p(x) = 3^x$ er ikke et polynom.

Koeffisienter



Algebraens fundamentalteorem

Definisjon

Et tall x_0 kalles en *rot* til polynomet $p(x)$ om $p(x_0) = 0$.

Teorem (Algebraens fundamentalteorem 1)

Et polynom p av grad n har ikke flere enn n røtter.

Algebraens fundamentalteorem

Definisjon

Et tall x_0 kalles en *rot* til polynomet $p(x)$ om $p(x_0) = 0$.

Teorem (Algebraens fundamentalteorem 1)

Et polynom p av grad n har ikke flere enn n røtter.

Eksempel

- $p(x) = x^2 + 4x - 5$ har to røtter: $1, -5$.

Algebraens fundamentalteorem

Definisjon

Et tall x_0 kalles en *rot* til polynomet $p(x)$ om $p(x_0) = 0$.

Teorem (Algebraens fundamentalteorem 1)

Et polynom p av grad n har ikke flere enn n røtter.

Eksempel

- $p(x) = x^2 + 4x - 5$ har to røtter: $1, -5$.
- $p(x) = x^2 + 4x + 5$ har ingen reelle røtter.

Faktorisering av polynomer

Lemma

Om $p(x_0) = 0$, *så kan vi faktorisere* p *som* $p(x) = (x - x_0)q(x)$ *for et polynom* q.

Faktorisering av polynomer

Lemma

Om $p(x_0) = 0$, så kan vi faktorisere p som $p(x) = (x - x_0)q(x)$ for et polynom q.

Eksempel

La $p(x) = x^3 + 6x^2 + 7x + 6$ har rot -2, så $(x + 2)|p(x)$.

$$q(x) = \frac{p(x)}{x + 2} = x^2 + 2x + 3$$

Irredusible polynomer

Definisjon

Et polynom p kalles *irredusibel* om det går an å faktorisere i (ikke-konstante) polynomer.

Bemerkning

Her er det viktig at vi skiller mellom om polynomet er over $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$!

Irredusible polynomer

Definisjon

Et polynom p kalles *irredusibel* om det går an å faktorisere i (ikke-konstante) polynomer.

Bemerkning

Her er det viktig at vi skiller mellom om polynomet er over $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$!

Eksempel

- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ er irredusibel over $\mathbb{Q}$, men ikke over $\mathbb{R}$.
- $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$ er irredusibel over $\mathbb{R}$, men ikke over $\mathbb{C}$. ("Tallet" i er definert som $\sqrt{-1}$.)
- $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = (x - \sqrt{2})^2$ er irredusibelt over $\mathbb{Q}$, men det er ikke heller et polynom over $\mathbb{Q}$.

Polynomer over $\mathbb{C}$

Definisjon

De *komplekse tallene* $\mathbb{C}$ er mengden av alle mulige røtter av polynomer med koeffisienter i de reelle tallene $\mathbb{R}$.

Faktum

Det holder å legge til tallet $i = \sqrt{-1}$ til $\mathbb{R}$ for å få tak i alle røtter!

Algebraens fundamentalteorem over $\mathbb{C}$

Teorem (Algebraens fundamentalteorem)

Et polynom p av grad n med komplekse koeffisienter kan faktoriseres på formen

$$a_n(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

En slik faktorisering er unik opp til permutasjon av faktorene.

Algebraens fundamentalteorem over $\mathbb{C}$

Teorem (Algebraens fundamentalteorem)

Et polynom p av grad n med komplekse koeffisienter kan faktoriseres på formen

$$a_n(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

En slik faktorisering er unik opp til permutasjon av faktorene.

Korollar

Et polynom p av grad n med reelle koeffisienter kan faktoriseres på formen

$$p = p_1 \dots p_m$$

hvor $p_1, \dots, p_m$ er polynomer av grad høyst 2.

Algebraens fundamentalteorem over $\mathbb{C}$

Teorem (Algebraens fundamentalteorem)

Et polynom p av grad n med komplekse koeffisienter kan faktoriseres på formen

$$a_n(x - x_1)\dots(x - x_n).$$

En slik faktorisering er unik opp til permutasjon av faktorene.

Korollar

Et polynom p av grad n med reelle koeffisienter kan faktoriseres på formen

$$p = p_1 \dots p_m$$

hvor $p_1, \dots, p_m$ er polynomer av grad høyst 2.

Bemerkning

Vi kan ikke alltid finne alle røttene til et polynom. Det beste vi kan håpe på er en faktorisering i irredusible polynomer.

Faktorisering av reelle polynomer

Eksempel

- $$\begin{aligned} x^3 - 1 &= (x-1)(x^2+x+1) \\ &= (x-1)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Faktorisering av reelle polynomer

Eksempel

- $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
$$= (x-1)\left(x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$
- $x^4 + 1 = (x^2 + 2\sqrt{2} + 1)(x^2 - 2\sqrt{2} + 1)$
$$= \left(x - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$\left(x + \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Kompleks-konjugering

Definisjon

La $z = a + ib$ være et komplekst tall, med $i = \sqrt{-1}$. Definer den *kompleksskonjugerte av* z som $\overline{z} = a - ib$.

La $z = a + ib$ og $w = c + id$.

- $$\begin{aligned} \overline{(z+w)} &= (a+c) - i(b+d). \\ &= \overline{z} + \overline{w} \end{aligned}$$

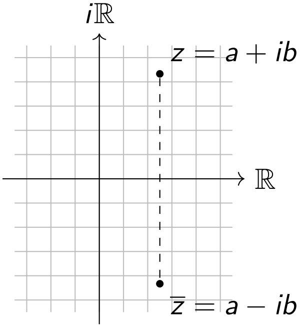
Kompleks-konjugering

Definisjon

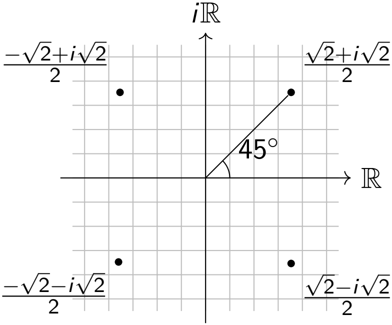
La $z = a + ib$ være et komplekst tall, med $i = \sqrt{-1}$. Definer den *komplekskonjugerte av* z som $\overline{z} = a - ib$.

La $z = a + ib$ og $w = c + id$.

- $$\begin{aligned}\overline{(z+w)} &= (a+c) - i(b+d).\\ &= \overline{z} + \overline{w}\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\overline{zw} &= (ac - bd) - i(ad + bc).\\ &= \overline{z} \cdot \overline{w}\end{aligned}$$



- $\rightsquigarrow$ $\overline{(x^n)} = \overline{x} \cdot \overline{(x^{n-1})} = \overline{x}^n$ ved induksjon.
- $\rightsquigarrow$ $\overline{p(x)} = p(\overline{x})$.



Bevis av korollar.

Om $p(x_0) = 0$ for et komplekst tall $x_0 = a + ib$, så må $p(\overline{x_0}) = \overline{0} = 0$, så $(x - x_0)(x - \overline{x_0}) | p(x)$.

$$\begin{aligned}(x - x_0)(x - \overline{x_0}) &= x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + x_0\overline{x_0} \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2).\end{aligned}$$

$\square$

Hvordan finne polynomrøtter?

Lemma

Et polynom på formen $ax^2 + bx + c$ *har røtter gitt ved*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvordan finne polynomrøtter?

Lemma

Et polynom på formen $ax^2 + bx + c$ *har røtter gitt ved*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faktum

Det finnes en tilsvarende formel for polynomer av grad 3 *og* 4*.*

Hvordan finne polynomrøtter?

Lemma

Et polynom på formen $ax^2 + bx + c$ har røtter gitt ved

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Faktum

Det finnes en tilsvarende formel for polynomer av grad 3 *og* 4*.*

Teorem (Niels Henrik Abel – en nordmann)

Det finnes ingen formel for å finne røttene til et generelt polynom av grad 5 *eller høyere.*

Telle antall røtter

Algebraens fundamentalteorem forteller oss at vi kan skrive

$$p = p_1 \dots p_m$$

hvor $\deg p_i$ er 1 eller 2, og $\deg p = \deg p_1 + \dots + \deg p_m$.

Telle antall røtter

Algebraens fundamentalteorem forteller oss at vi kan skrive

$$p = p_1 \dots p_m$$

hvor $\deg p_i$ er 1 eller 2, og $\deg p = \deg p_1 + \cdots + \deg p_m$.

Korollar

Et polynom av odd grad har minst én reell rot.

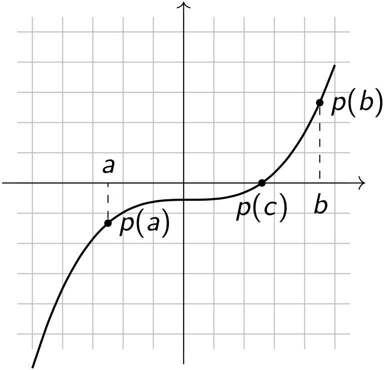
Bevis 1.

Minst ett av polynomene $p_1, \dots, p_m$ må være lineært. $\square$

Skjæringssetningen

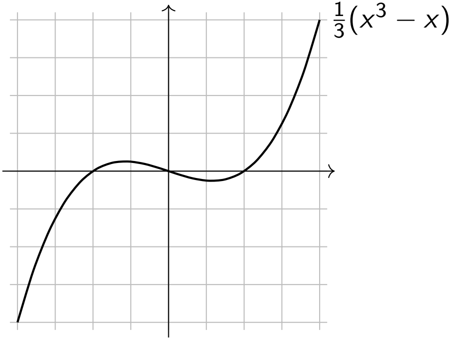
Lemma

La $p(x)$ være et polynom. Om det finnes reelle tall a og b slik at $a < b$, $p(a) < 0$ og $p(b) > 0$, så finnes et tall c slik at $a < c < b$ og $p(c) = 0$.



Bevis 2.

Anta p er et monisk odd polynom. Da finnes det $a < b$ slik at $p(a) < 0$ og $p(b) > 0$, så ved skjæringssetningen må det finnes en rot mellom a og b. $\square$



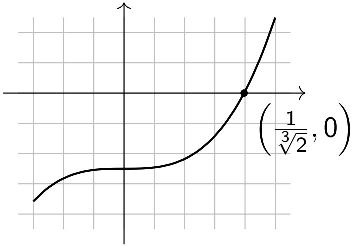
Skjæringssetningen for rasjonale polynomer

Bemerkning

Skjæringssetningen holder ikke over de rasjonale tallene!

Eksempel

Polynomet $p(x) = x^3 - \frac{1}{2}$ skjærer ikke x-aksen i et rasjonalt punkt.



Heltallige og rasjonale polynomer

Lemma

La $p(x)$ være et rasjonalt polynom. Om p er redusibel over $\mathbb{Q}$, så finnes det et heltall $m \gg 0$ slik at $mp(x)$ er redusibel over $\mathbb{Z}$.

Eksempel

- $x^2 - \frac{1}{4}$ kan faktoriseres som $\frac{1}{4}\underbrace{(2x-1)(2x+1)}_{4x^2-1}$.

Heltallige og rasjonale polynomer

Lemma

La $p(x)$ være et rasjonalt polynom. Om p er redusibel over $\mathbb{Q}$, så finnes det et heltall $m \gg 0$ slik at $mp(x)$ er redusibel over $\mathbb{Z}$.

Eksempel

- $x^2 - \frac{1}{4}$ kan faktoriseres som $\frac{1}{4}\underbrace{(2x-1)(2x+1)}_{4x^2-1}$.

Teorem

La $p(x)$ være et monisk polynom med heltallige koeffisienter. Om det finnes et rasjonalt tall x_0 slik at $p(x_0) = 0$, så må x_0 være et heltall.

Eisensteins kriterium

Teorem (Eisensteins kriterium [Bar, Oppgave 3.12])

La $h(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *være et polynom over* $\mathbb{Z}$*. Om det finnes et primtall* p *slikt at*

- $p \nmid a_n$,
- $p | a_0, \ldots, a_{n-1}$,
- $p^2 \nmid a_0$,

da er h *irredusibel over* $\mathbb{Z}$*.*

Eksempel

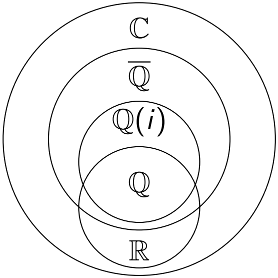
Polynomet $x^n - p$ er irredusibel over $\mathbb{Z}$ (og $\mathbb{Q}$ for alle heltall n og primtall p. Over $\mathbb{R}$ kan det faktoriseres som

$$x^n - p = (x - \sqrt[n]{p})(x^{n-1} + \sqrt[n]{p} x^{n-1} + \cdots + \sqrt[n]{p}^{n-1}).$$

Mengden av røtter

Hvilke tall trenger vi å ha med for å dele opp alle rasjonale polynomer i lineære polynomer? $\rightsquigarrow \overline{\mathbb{Q}}$

- $x^2 - 2 \rightsquigarrow \sqrt{2}$ er i $\overline{\mathbb{Q}}$, men ikke i $\mathbb{Q}(i)$.
- $x^2 + 1 \rightsquigarrow i = \sqrt{-1}$ er i $\overline{\mathbb{Q}}$, men ikke i $\mathbb{R}$.
- Det er ingen rasjonale polynomer med π som rot, så π er ikke i $\overline{\mathbb{Q}}$.



Bemerkning

Det finnes ingen endelig mengde elementer vi kan legge til for å få alle røtter av rasjonale polynomer.

Polynomer i 2 variable

Definisjon

Et polynom i to variable $p(x, y)$ er et polynom i én variabel x hvor koeffisientene er polynomer i en annen variabel y

$$p(x, y) = p_n(y)x^n + \cdots + p_1(y)x + p_1(y).$$

Graden til polynomet er den største summen av grader $i + \deg p_i$.

Eksempel

- $x^2 + y^2 - 9$
- $x_1^2 + x_2^2 - 9$ er det samme polynomet, men indeterminantene er gitt ved andre symboler.

Implisitte kurver og parametrisering

Definisjon

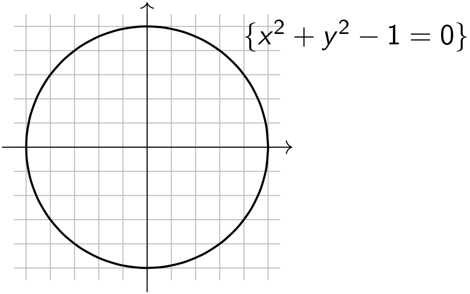
En *implisitt kurve C i planet* $\mathbb{R}^2$ er en mengde på formen

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p(x, y) = 0\},$$

hvor p er et polynom, dvs. C er mengden av løsninger til likningen $p(x, y) = 0$.

Bemerkning

En implisitt kurve er "nullpunktsmengden" til et polynom.



Irredusible polynomer i 2 variable

Definisjon

Et polynom $p(x, y)$ er irredusibel om det ikke kan skrives som et produkt av polynomer av lavere grad.

- $x^2 + y^2 - 1$ er irredusibel.
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Irredusible polynomer i 2 variable

Definisjon

Et polynom $p(x, y)$ er irredusibel om det ikke kan skrives som et produkt av polynomer av lavere grad.

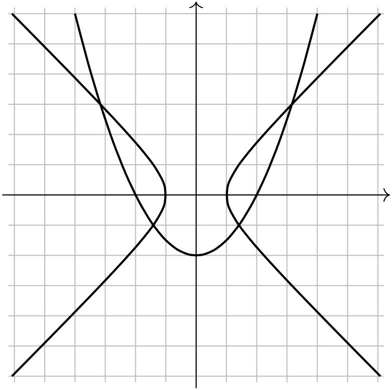
- $x^2 + y^2 - 1$ er irredusibel.
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
- $x^4 - x^2y^2 - x^2y + y^3 - \frac{3}{4}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$?

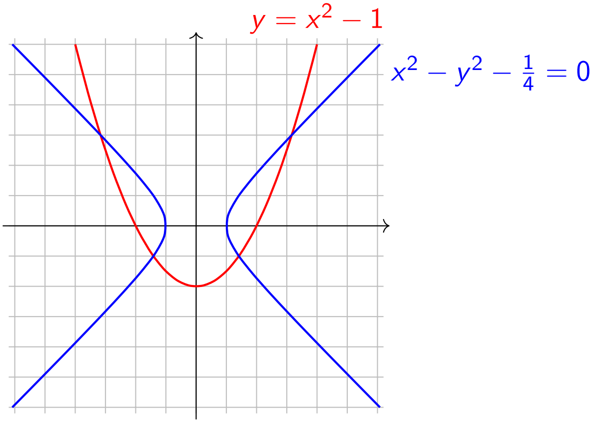
Irredusible polynomer i 2 variable

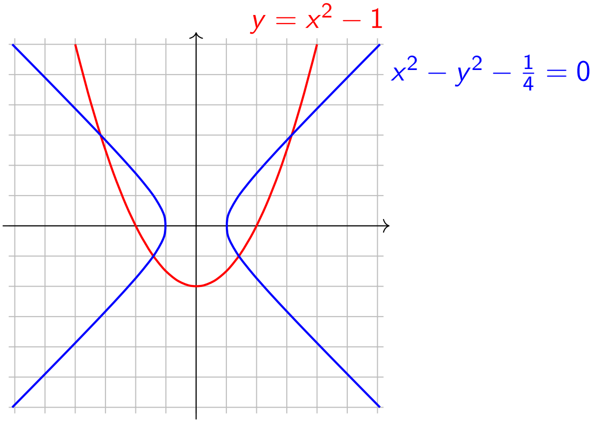
Definisjon

Et polynom $p(x, y)$ er irredusibel om det ikke kan skrives som et produkt av polynomer av lavere grad.

- $x^2 + y^2 - 1$ er irredusibel.
- $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
- $x^4 - x^2y^2 - x^2y + y^3 - \frac{3}{4}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$?




$y = x^2 - 1$
$x^2 - y^2 - \frac{1}{4} = 0$



$$x^4 - x^2y^2 - x^2y + y^3 - \frac{3}{4}x^2 + y^2 + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}$$
$$= \left(x^2 - y^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 1 - y).$$

[Bar] E. J. Barbeau. *Polynomials*. Problem books in mathematics. Springer. DOI: 10.1007/978-1-4612-4524-7.