eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA ORDINARIA

23 de mayo de 2022

Apellidos:	***Nombre:***

PRIMER PARCIAL - TIEMPO: 1hora

EJERCICIO 1:

Demostrar que si la matriz $\frac{I+A}{2}$ es idempotente entonces la matriz A es involutiva.

(1.5 puntos)

Solución:

Atendiendo a la definición de matriz idempotente

$$\left(\frac{I+A}{2}\right)^2 = \frac{I^2 + I\cdot A + A\cdot I + A^2}{4} = \frac{I+2A+A^2}{4} = \frac{I+A}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow I + \cancel{2A} + A^2 = 2I + \cancel{2A} \Longrightarrow \boxed{A^2 = I}$$

de forma que la matriz A es involutiva.

EJERCICIO 2:

Simplificar la siguiente expresión matricial teniendo en cuenta que las matrices A y B son simétricas

$$A\cdot\left(B^{-1}CA\right)^{-1}B^{-1}C-A^{T}\left(C^{-1}A\right)^{-1}-\left(B^{T}B^{-1}\right)^{2}+\left(AC^{T}\right)^{T}A^{-1}$$

(1.5 puntos)

Solución:

Teniendo en cuenta que una matriz simétrica verifica $A^{T}=A$

$$A\cdot\left(B^{-1}CA\right)^{-1}B^{-1}C-A^{T}\left(C^{-1}A\right)^{-1}-\left(B^{T}B^{-1}\right)^{2}+\left(AC^{T}\right)^{T}A^{-1}=$$

$$=A\cdot\left(A^{-1}C^{-1}B\right)B^{-1}C-A\left(A^{-1}C\right)-\left(BB^{-1}\right)^{2}+\left(CA^{T}\right)A^{-1}=$$

$$=\left(AA^{-1}\right)\cdot C^{-1}\cdot\left(BB^{-1}\right)\cdot C-\left(AA^{-1}\right)\cdot C-I^{2}+\left(CA\right)A^{-1}=$$

$$=I\cdot C^{-1}\cdot I\cdot C-I\cdot C-I^{2}+C\cdot\left(AA^{-1}\right)=C^{-1}C-C-I+C\cdot I=\cancel{I}-\cancel{C}-\cancel{I}+\cancel{C}=\left(0\right)=\left(0\right)_{nxn}.$$

EJERCICIO 3:

Aplicando el método de Gauss, clasificar, en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, resolviéndolo en el caso *a=0* supuesto que sea compatible:

$$\begin{cases} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}.$$

(3.5 puntos)

Solución:

En primer lugar reordenamos las ecuaciones para que el parámetro no esté en el primer pivote y realizar el menor número de transformaciones posibles

$$\begin{cases} x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \\ ax+7y+5z=0 \end{cases}$$

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz escalonada:

$$A^*=\left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ a & 7 & 5 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[\langle F_3\to F_3-aF_1\rangle]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 7-a^2 & 5-a & -3a \end{array}\right)\xrightarrow[\langle F_3\to F_3-(7-a^2)F_2\rangle]{}$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & -2a^2-3a+14 \end{array}\right).$$

Teniendo en cuenta que $a^2-a-2=(a+1)(a-2)$ y $2a^2-3a-14=-2(a+7/2)(a-2)$

se obtienen los siguientes casos:

$a\neq-1,2$: *rg(A)=3=rg(A*)=3=n* con lo que se trata de un <u>sistema compatible y determinado</u>

$a=-1$: *rg(A)=2<rg(A*)=3* con lo que se trata de un <u>sistema incompatible</u>

$a=2$: *rg(A)=2=rg(A*)<3=n* con lo que se trata de un <u>sistema compatible indeterminado</u>

En el supuesto *a=0*, ya que se trata de un sistema compatible determinado, lo resolvemos mediante sustitución regresiva

$$\begin{cases} x \quad + \quad z = 3 & \to \quad x=3+7=10 \\ y \quad + \quad z = -2 & \to \quad y=-2+7=5 \\ -\ 2z = 14 \quad \to \quad z=-7 & \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4:

Sean *S* el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 tales que la suma de los elementos de sus columnas es cero y *T* el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2 tales que la suma de los elementos de sus filas es cero.

a) Obtener las ecuaciones implícitas de *S* y *T*.

b) Obtener una base y la dimensión de *S* y *T*.

c) Obtener $S \bigcap T$.

d) Obtener $S+T$. ¿Son subespacios complementarios?

(1+1+1+0.5 = 3.5 puntos)

Solución:

Algunas observaciones antes de resolver cada uno de los apartados: la dimensión del espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 es 4

$$\dim\left(\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})\right)=4$$

y la base usual de este espacio vectorial es

$$\mathrm{B}_{\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})}=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Según dice el enunciado

$$S=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,a+c=0\wedge b+d=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,c=-a\wedge d=-b\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-a&-b\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$$

$$T=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,a+b=0\wedge c+d=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,b=-a\wedge d=-c\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&-a\\c&-c\end{pmatrix}/\,a,c\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=span\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$$

a) Ecuaciones implícitas: $S:\begin{cases}a+c=0\\b+d=0\end{cases},\quad r_S=2\quad$ y $\quad T:\begin{cases}a+b=0\\c+d=0\end{cases},\quad r_T=2$

b) $B_S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(S)=2=\dim\left(\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})\right)-r_S=4-2$

$B_T=\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\},\quad \dim(T)=2=\dim\left(\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})\right)-r_T=4-2$

c) $S\cap T=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,a+c=0\wedge a+b=0\wedge c+d=0\wedge b+d=0\right\}=$

$$=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}/\,c=-a\wedge b=-a\wedge d=-c=a\wedge d=-d=a\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&-a\\-a&a\end{pmatrix}/\,a\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$$

de forma que $\dim(S\cap T)=1$

d) Si tenemos en cuenta que

$$\dim\left(S+T\right)=\dim(S)+\dim(T)-\dim(S\cap T)=2+2-1=3\neq\dim\left(\mathbb{M}_{2x2}\left(\mathbb{R}\right)\right)=4$$

y que $S\cap T\neq\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

podemos decir que no son subespacios complementarios.

Al juntar las bases de los dos subespacios por separado

$$S+T=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}\right\}$$

observamos inmediatamente que el cuarto elemento es combinación lineal de los tres primeros

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},$$

y en consecuencia

$$S+T=span\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA ORDINARIA

23 de mayo de 2022

Apellidos:	***Nombre:***

SEGUNDO PARCIAL - TIEMPO: 1hora

EJERCICIO 1:

Indicar si las siguientes afirmaciones son ciertas o no **razonando la respuestas**

a) Si $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son dos vectores propios de una matriz A ligados al valor propio λ_1 entonces $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes.

b) La siguiente matriz es una matriz asociada a un producto escalar

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

estudiando todas las condiciones que debería cumplir.

(1+1 = 2 puntos)

Solución:

a) Con la información del enunciado no se pude asegurar nada ya que
   - puede ocurrir que la multiplicidad algebraica de λ_1 sea 2 (o mayor) y la multiplicidad geométrica también de forma que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ sean dos vectores independientes
   - y puede ocurrir que la multiplicidad aritmética sea 1 y $\vec{u}_2 = \gamma\vec{u}_1$ que es otro autovector asociado a λ_1, distinto de $\vec{u}_1$ y no son linealmente independientes.

b) Si bien la matriz G tiene todos los elementos de la diagonal estrictamente positivos

$$g_{ii} = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle > 0 \quad \text{(propiedad del producto escalar: } \forall \vec{x} \neq 0 \quad \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0\text{).}$$

NO puede ser la matriz de Gram para ningún producto escalar debido a que:

- la matriz asociada a un producto escalar debe ser simétrica y en este caso

$$g_{23} = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 1 \neq g_{32} = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_2 \rangle = 2 \quad \text{(propiedad del producto escalar: } \forall \vec{x}, \vec{y} \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle\text{).}$$

- la matriz asociada a un producto escalar debe ser definida positiva y en este caso

$$G_1 = |3| = 3 > 0$$

$$G_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$G_3 = |G| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6+2+4) - (2+6+4) = 0 \not> 0$$

resultando además que la matriz no es regular.

EJERCICIO 2:

Sea el siguiente subespacio vectorial euclídeo

$$T=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,p'(0)=p''(1)\right\}$$

a) Obtener una base ortogonal de T.

b) Obtener el subespacio $T^{\perp}$.

(4 puntos)

Solución:

a) Derivando dos veces el polinomio de referencia

$$p'(x)=3ax^2+2bx+c \quad\rightarrow\quad p'(0)=c$$

$$p''(x)=6ax+2b \quad\rightarrow\quad p''(1)=6a+2b$$

resulta que

$$T=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,c=6a+2b\right\}=\left\{ax^3+bx^2+(6a+2b)x+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,a,b,d\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=span\left\{x^3+6x,x^2+2x,1\right\}$$

$$\Longrightarrow\quad B_T=span\left\{x^3+6x,x^2+2x,1\right\}=span\left\{p_1(x),p_2(x),p_3(x)\right\},\quad \dim(T)=3$$

Consideremos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Paso 1: $q_1(x)=p_1(x)=x^3+6x\cong\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}$

Paso 2: $q_2(x)=p_2(x)-\alpha q_1(x)=\left(x^2+2x\right)-\alpha\cdot\left(x^3+6x\right)\cong\vec{v}_2-\alpha\cdot\vec{v}_1$

donde el valor de α lo calcularemos para que $q_2(x)$ sea ortogonal a $q_1(x)$

$$\langle q_2,q_1\rangle=\langle p_2-\alpha q_1,q_1\rangle=\langle p_2,q_1\rangle-\alpha\langle q_1,q_1\rangle=0\quad\Longrightarrow\quad \alpha=\frac{\langle p_2,q_1\rangle}{\langle q_1,q_1\rangle}=\frac{\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\rangle}=\frac{12}{37}$$

$$\Longrightarrow\quad q_2(x)=\left(x^2+2x\right)-\frac{12}{37}\left(x^3+6x\right)=-\frac{12}{37}x^3+x^2+\frac{2}{37}x\cong\vec{v}_2=\begin{pmatrix}-12/37\\1\\2/37\\0\end{pmatrix}$$

Paso 3: $q_3(x)=p_3(x)-\beta q_1(x)-\gamma q_2(x)=(1)-\beta\cdot\left(x^3+6x\right)-\gamma\cdot\left(-\frac{12}{37}x^3+x^2+\frac{2}{37}x\right)=1\cong\vec{v}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

ya que $\beta=0$ y $\gamma=0$ como consecuencia de que $p_3(x)$ ya era ortogonal a $p_1(x)$ y $p_2(x)$

$$\langle q_3,q_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0,\quad \langle q_3,q_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-12/37\\1\\2/37\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0.$$

La base ortogonal obtenida quedaría

$$\boxed{B_T^*=span\{q_1(x),q_2(x),q_3(x)\}=span\left\{x^3+6x,-\frac{12}{37}x^3+x^2+\frac{2}{37}x,1\right\}}$$

b) Por definición de subespacio ortogonal

$$T^{\perp}=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,p(x)\perp q(x)\quad\forall q(x)\in T\right\}$$

y por ser T un subespacio de dimensión finita se tratará de encontrar los vectores que sean ortogonales a los elementos de la base de T (bien de la primera base que hemos obtenido o bien de la base ortogonal)

$$p(x)\perp p_1(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle=d=0$$

$$p(x)\perp p_2(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}\right\rangle=b+2c=0\quad\rightarrow\quad b=-2c$$

$$p(x)\perp p_3(x)\quad\Leftrightarrow\quad\left\langle\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}\right\rangle=a+6c=0\quad\rightarrow\quad a=-6c$$

Ahora tenemos tres ecuaciones de forma que

$$\dim\left(T^{\perp}\right)=\dim\left(\mathbb{P}_3(x)\right)-r=4-3=1$$

$$\boxed{T^{\perp}=\left\{-6cx^3-2cx^2+cx\,/\,c\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{-6x^3-2x^2+x\right\}}.$$

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

EJERCICIO 3:

Sean la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ a & b & 1 & 0 \\ c & d & e & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$.

a) Indicar las condiciones que deben cumplir *a*, *b*, *c*, *d* y *e* para que la matriz sea diagonalizable.

b) Para el caso $a=1$, $b=2$, $c=0$, $d=1$, $e=0$ diagonalizar A si es posible. ¿Es *A* una matriz ortogonalmente diagonalizable?

(4 puntos)

Solución:

a) Teniendo en cuenta que la matriz *A* es triangular inferior (independientemente de los valores de los parámetros)

$$p_A(\lambda)=\left|A-\lambda\cdot I\right|=(-1-\lambda)^2(1-\lambda)^2=(1+\lambda)^2(1-\lambda)^2$$

se obtienen dos autovalores y ambos de multiplicidad algebraica 2

$$\lambda_1=-1 \quad \text{con} \quad \alpha_1=2 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2=1 \quad \text{con} \quad \alpha_2=2.$$

La condición para que la matriz sea diagonalizable es que la suma de las multiplicidades aritméticas sea 4 (lo cual es cierto para cualesquiera valores de los parámetros) y las multiplicidades geométricas coincidan con las multiplicidades aritméticas (es decir, que también sean 2): estudiemos por lo tanto los subespacios propios

$\boxed{V\left(\lambda_1=-1\right)}$

$$\left(A-\lambda_1\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A+I\right)\cdot\vec{x}=A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & 2 & 0 \\ c & d & e & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ ax+by+2z & = & 0 \quad \rightarrow \quad z=-(ax+by)/2 \\ cx+dy+ez+2t & = & 0 \quad \rightarrow \quad t=-[cx+dy-e(ax+by)/2]/2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -ax/2 \\ -cx/2+aex/4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -by/2 \\ -dy/2+bey/4 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V(\lambda_1=-1)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/2 \\ -c/2+ae/4 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/2 \\ -d/2+be/4 \end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1=2$ independientemente de los valores que tomen los parámetros.

$\boxed{V\left(\lambda_2=1\right)}$

$$\left(A-\lambda_2\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A-I\right)\cdot\vec{x}=A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&-2&0&0\\a&b&0&0\\c&d&e&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies\begin{cases}-2x & & & = 0\\ & -\ 2y & & = 0\\ ax & +\ by & & = 0\\ cx & +\ dy & +\ ez & = 0\end{cases}$$

y ahora sí "entran en juego" los valores de los parámetros

- ✓ mientras que si $e\neq 0$ resulta que $V(\lambda_2=1)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de forma que $d_2=1\neq\alpha_2=2$
- ✓ por el contrario, si $e=0$ resulta que $V(\lambda_2=1)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ con lo cual $d_2=2=\alpha_2$.

Conclusión: ***la matriz A solamente es diagonalizable cuando e=0***.

b) Para los valores dados la matriz es diagonalizable pero no ortogonalmente ya que no es simétrica

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$$

Con los resultados del apartado anterior

$$V(\lambda_1=-1)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1/2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-1/2\end{pmatrix}\right\},\quad V(\lambda_2=1)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

de forma que

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=P^{-1}\cdot A\cdot P\quad\text{siendo}\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1/2&-1&1&0\\0&-1/2&0&1\end{pmatrix}.$$