eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

PRIMER PARCIAL

31 de marzo de 2022

Apellidos:	***Nombre:***

TIEMPO: 1hora y 15 minutos

Observación: todos los resultados del examen deberán ser justificados razonadamente

EJERCICIO 1:

Calcular, mediante eliminación gaussiana, la inversa de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 \\ -a & 1-a & 1-a & 1-a & . & . & . & 1-a \\ -a & -a & 1-a & 1-a & . & . & . & 1-a \\ -a & -a & -a & 1-a & . & . & . & 1-a \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . \\ -a & -a & -a & -a & . & . & . & 1-a \end{pmatrix}.$$

(2.5 puntos)

Solución:

A partir de la matriz ampliada obtenida al considerar la matriz de partida y la matriz identidad intentaremos convertir la matriz de la izquierda, A, en la identidad y lo que resulte a la derecha será la inversa de la matriz A

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a & 1-a & 1-a & 1-a & . & . & . & 1-a & 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a & -a & 1-a & 1-a & . & . & . & 1-a & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -a & -a & -a & 1-a & . & . & . & 1-a & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ -a & -a & -a & -a & . & . & . & 1-a & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[<F_n\to F_n+aF_1>]{\substack{<F_2\to F_2+aF_1> \\ <F_3\to F_3+aF_1>}}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & . & . & . & 1 & a & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{<F_1\to F_1-F_2>}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1-a & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & a & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1
\end{array}\right)\xrightarrow{<F_2\to F_2-F_3>}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1-a & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1
\end{array}\right)\xrightarrow{<F_3\to F_3-F_4>}$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1-a & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1
\end{array}\right)\xrightarrow{<F_4\to F_4-F_5>}\dots$$

$$\dots\to\left(\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1-a & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & . & . & . & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
. & . & . & . & & & & . & . & . & . & . & & & & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1
\end{array}\right)=\left(I\middle|A^{-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ . & . & . & . & & & & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2:

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones lineales, donde $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=a \\ z+t=a^2 \\ x+t=a^3 \end{cases}.$$

Utilizando el método de Gauss, determínese el valor de *a* para que el sistema sea compatible obteniendo la solución en dicho caso.

(2 puntos)

Solución:

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz triangular superior:

$$A^* = \left(A|\vec{b}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a^3 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_4 \to F_4 - F_1 \rangle]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a^3-1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_4 \to F_4 + F_2 \rangle]{}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^3+a-1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_4 \to F_4 - F_3 \rangle]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^3-a^2+a-1 \end{array}\right).$$

Teniendo en cuenta que $a^3 - a^2 + a - 1 = (a-1)(a^2+1)$

se obtienen los siguientes casos:

$a \neq 1$: *rg(A)=3<rg(A*)=4* con lo que se trata de un <u>sistema incompatible</u>

$a = 1$: *rg(A)=3=rg(A*)<n=4* con lo que se trata de un <u>sistema compatible determinado</u>

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \quad y + z = 1 \\ \qquad z = 1-t \end{cases}$$

sistema que resolveremos mediante sustitución regresiva, "de abajo hacia arriba",

$\rightarrow \quad z = 1-t$

$\rightarrow \quad y = 1-z = 1-(1-t) = t$

$\rightarrow \quad x = 1-y = 1-t$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ 1-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad donde \;\; \lambda \in \mathbb{R}}$$

EJERCICIO 3:

Estudiar si el conjunto $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$

es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ comprobando todas las condiciones.

(1 punto)

Solución:

Propiedades

- $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in H$? SÍ porque que $0^2 + 0^2 = 0 \leq 1$
- siendo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H$, entonces $\vec{x} + \vec{y} \in H$? NO porque si por ejemplo consideramos $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$ y sin embargo $\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H$
- siendo $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot \vec{x} \in H$? NO porque si por ejemplo consideramos $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in H$, $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$ y sin embargo $\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H$

EJERCICIO 4:

Sean los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

$$S = span\left\{2x + x^2 + 3x^3, 1 + x^3, x^2 + 2x - 3\right\} \qquad \text{y} \qquad T = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \,/\, p'(0) = p''(0)\right\}$$

a) Obtener una base y la dimensión de *S*.

(1 punto)

b) Obtener una base y la dimensión de *T*.

(1 punto)

c) Calcular las ecuaciones características de *S* y *T*. Obtener el espacio vectorial $S \cap T$?

(1.5 puntos)

d) Obtener el espacio vectorial $S + T$. ¿Es suma directa? ¿Son *S* y *T* complementarios?

(1 punto)

Solución:

Algunas observaciones antes de resolver cada uno de los apartados: la dimensión del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 es 4

$$\dim\left(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\right) = 4$$

y la base usual de este espacio vectorial es

$$\mathrm{B}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

a) De los tres polinomios que a priori generan el subespacio *S* estudiemos cuántos son linealmente independientes

$$S = span\left\{2x + x^2 + 3x^3, 1 + x^3, x^2 + 2x - 3\right\} = span\left\{1 + x^3, 2x + x^2 + 3x^3, -3 + 2x + x^2\right\}$$

Habida cuenta de que

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{<F_4 \to F_4 - F_1>}{=} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

El tercer polinomio es combinación lineal de los dos primeros con lo que S estará generado por dos vectores

$$S = span\left\{1 + x^3, 2x + x^2 + 3x^3\right\} \implies \boxed{B_S = \left\{1 + x^3, 2x + x^2 + 3x^3\right\}} \quad \text{y} \quad \boxed{\dim(S) = 2}$$

b) Teniendo en cuenta que

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad p'(x) = b + 2cx + 3dx^2, \quad p''(x) = 2c + 6dx \quad \longrightarrow \quad p'(0) = b = p''(0) = 2c$$

entonces

$$T = \left\{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \,/\, p'(0) = p''(0)\right\} = \left\{a + 2cx + cx^2 + dx^3 \,/\, a, c, d \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{a \cdot 1 + c \cdot (2x + x^2) + d \cdot x^3 \,/\, a, c, d \in \mathbb{R}\right\} = span\left\{1, 2x + x^2, x^3\right\} \implies \boxed{\mathrm{B}_T = span\left\{1, 2x + x^2, x^3\right\}} \quad \text{y} \quad \boxed{\dim(T) = 3}$$

c) Ecuaciones características:

En el caso de S son dos las ecuaciones características ya que

$$\dim(S) = 2 = \dim(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})) - r_S = 4 - r_S \quad \Longrightarrow \quad r_S = 2$$

y para conseguirlas, habida cuenta de que

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in S \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ / \ p(x) = \alpha \cdot (1 + x^3) + \beta \cdot (2x + x^2 + 3x^3) \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha + 2\beta x + \beta x^2 + (\alpha + 3\beta)x^3 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \alpha \\ b = 2\beta \\ c = \beta \\ d = \alpha + 3\beta \end{cases} \quad \to \quad b = 2c \quad \text{y} \quad d = a + 3c$$

Consecuentemente

$$\boxed{S = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ b = 2c \wedge d = a + 3c \right\}}\ .$$

En cuanto a T, tal y como se ha visto en el apartado anterior

$$\boxed{T = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ b = 2c \right\}}$$

verificándose que

$$\dim(T) = 3 = \dim(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})) - r_T = 4 - 1\ .$$

Con respecto a la intersección de los dos subespacios

$$S \cap T = \left\{ p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ p(x) \in S \wedge p(x) \in T \right\} =$$

$$= \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ b = 2c \wedge d = a + 3c \wedge b = 2c \right\} = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \ / \ b = 2c \wedge d = a + 3c \right\} = S$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{B}_{S \cap T} = B_S = \left\{ 1 + x^3, 2x + x^2 + 3x^3 \right\}} \quad \text{y} \quad \boxed{\dim(S \cap T) = \dim(S) = 2}$$

d) Si tenemos en cuenta que

$$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 3 - 2 = 3$$

al juntar las bases de los dos subespacios por separado

$$S + T = span\left\{ 1, 2x + x^2, x^3, 1 + x^3, 2x + x^2 + 3x^3 \right\}$$

observamos inmediatamente que el cuarto elemento es la suma del primero y del tercero y el quinto es una combinación lineal del segundo y el tercero, y por lo tanto podemos eliminarlos resultando los restantes linealmente independientes, y en consecuencia

$$\boxed{S + T = span\left\{ 1, 2x + x^2, x^3 \right\} = T}\ .$$

Con los resultados obtenidos concluimos que $S + T$ NO es suma directa porque

$$S \cap T \neq \left\{ \vec{0} \right\} = \left\{ 0(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 \right\}$$

y además S y T NO son complementarios porque

$$\dim(S + T) = 3 \quad \text{y} \quad \dim(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})) = 4\ .$$