GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA DE GESTIÓN

Y SISTEMAS DE INFORMACIÓN

ÁLGEBRA

Apellidos:………………………………………………………………………Nombre:………..………..

DNI:………………………

Ejercicio 1: Utilizando el método de Gauss, calcula la inversa de la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2.5 puntos)

Solución:

$$\left(A|I\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3\to F_3-2F_1\rangle]{\langle F_2\to F_2-3F_1\rangle} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3\to F_3-(4/7)F_2\rangle]{\langle F_1\to F_1+(3/7)F_2\rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 13/7 & -2/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/7 & -2/7 & -4/7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_2\to F_2+(7/4)F_3\rangle]{\langle F_1\to F_1+(13/8)F_3\rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & -1/2 & 13/8 \\ 0 & -7 & 0 & -7/2 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & -8/7 & -2/7 & -4/7 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\langle F_3/(-8/7)\rangle]{\langle F_2/(-7)\rangle}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/4 & -1/2 & 13/8 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/2 & -7/8 \end{array}\right) = \left(I|A^{-1}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -3/4 & -1/2 & 13/8 \\ 1/2 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & 1/2 & -7/8 \end{pmatrix}}$$

Nota: Durante el proceso de eliminación gaussiana se ha comprobado que el determinante de la matriz a invertir es -8, no nulo y por tanto la matriz *A* es invertible (el determinante de la matriz de partida coincide con el determinante de la matriz diagonal obtenida).

Ejercicio 2: Sean las matrices A,B,C $\in M_{3x3}$, donde A es una matriz involutiva, B es una matriz ortogonal y C es una matriz cuyo determinante |C|=4. Calcula $|2\cdot A^3\cdot C^{-1}\cdot B^4|$.

(1.5 puntos)

Solución:

En primer lugar interpretamos los datos del enunciado:

- A es una matriz involutiva lo cual significa que $A^2 = I$; en consecuencia

$$\left|A^2\right| = |A|^2 = |I| = 1 \implies |A| = \pm 1$$

y

$$A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

- B es una matriz ortogonal lo cual significa que $B^{-1} = B^t$; en consecuencia

$$B \cdot B^{-1} = B \cdot B^t = I \implies \left|B \cdot B^t\right| = |B|\left|B^t\right| = |B||B| = |B|^2 = |I| = 1 \implies |B| = \pm 1 \implies |B|^4 = 1$$

- si C verifica $|C| = 4$ entonces $\left|C^{-1}\right| = |C|^{-1} = 1/4$

Por último, teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes de las matrices y que son matrices cuadradas de orden 3 resulta que

$$\left|2A^3 \cdot C^{-1} \cdot B^4\right| = 2^3\left|A^3\right| \cdot \left|C^{-1}\right| \cdot \left|B^4\right| = 2^3|A| \cdot |C|^{-1} \cdot |B|^4 = 2^3|A| \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = 2|A| = \pm 2$$

Ejercicio 3: Sean los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

$$S = span\left\{ 1+x^3,\, x+x^2+x^3 \right\} \quad \text{y} \quad T = \left\{ a+bx+cx^2+dx^3 \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \,/\, a=0,\ b=\lambda,\ c=\beta,\ d=\lambda \right\}$$

a) Obtén las ecuaciones implícitas de S (1.5 puntos)

b) Obtén una base y la dimensión de T (1.5 puntos)

c) Obtén el espacio vectorial $S \cap T$ (1.5 puntos)

d) Obtén el espacio vectorial $S + T$ (1.5 puntos)

Solución:

Algunas observaciones antes de resolver cada uno de los apartados: la dimensión del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 es 4

$$\dim\left(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\right) = 4$$

y la base usual de este espacio vectorial es

$$\mathrm{B}_{\mathbb{P}_3(\mathbb{R})} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

a) $S = span\left\{ 1+x^3,\, x+x^2+x^3 \right\} = \left\{ \alpha\left(1+x^3\right) + \beta\left(x+x^2+x^3\right) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},\ \dim(S) = 2$

$$\Longrightarrow \quad \dim(S) = 2 = \dim\left(\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\right) - r = 4 - r \quad \Longrightarrow \quad r = 2$$

de forma que S estará definido por dos ecuaciones implícitas o características.

Para hallarlas tendremos en cuenta que el subespacio vectorial S estará formado por los polinomios que se obtengan como combinación lineal de los dos planteados

$$a+bx+cx^2+dx^3 = \alpha\left(1+x^3\right) + \beta\left(x+x^2+x^3\right) = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot x + \beta\cdot x^2 + (\alpha+\beta)\cdot x^3$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \beta \\ d = \alpha+\beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta = c \\ d = \alpha+\beta \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} b = c \\ d = a+b \end{cases}}$$

Es decir, tendríamos un sistema de cuatro ecuaciones para dos incógnitas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

sistema que tendrá solución única lo cual conlleva que la matriz ampliada tenga rango 2

$$rg\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&1&c\\1&1&d\end{pmatrix}=2 \implies \begin{cases}\begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&1&c\end{vmatrix}=0 \iff c=b\\ \begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\1&1&d\end{vmatrix}=0 \iff d=a+b\end{cases}$$

b)

$$T=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\,/\,a=0,\ b=\lambda,\ c=\beta,\ d=\lambda\right\}=\left\{0+\lambda\cdot x+\beta\cdot x^2+\lambda\cdot x^3\,/\,\beta,\lambda\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{\lambda\cdot(x+x^3)+\beta\cdot x^2\,/\,\beta,\lambda\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{x+x^3,x^2\right\} \implies \mathrm{B}_T=\left\{x+x^3,x^2\right\} \implies \dim(T)=2$$

de tal forma que en este caso también el número de ecuaciones características es 2

$$\begin{cases}a=0\\d=b\end{cases}$$

y se verifica

$$\implies \dim(T)=2=\dim(\mathbb{P}_3(\mathbb{R}))-r=4-2 \implies r=2.$$

De forma similar al apartado anterior, para cualquier polinomio del espacio vectorial T sus coeficientes verificarían, para algunos valores α y β,

$$\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

y, dada la existencia y unicidad de solución, matriz ampliada tendrá rango 2

$$rg\begin{pmatrix}0&0&a\\1&0&b\\0&1&c\\1&0&d\end{pmatrix}=2 \implies \begin{cases}\begin{vmatrix}0&0&a\\1&0&b\\0&1&c\end{vmatrix}=0 \iff a=0\\ \begin{vmatrix}1&0&b\\0&1&c\\1&0&d\end{vmatrix}=0 \iff d-b=0\end{cases}.$$

c)

$$S\cap T=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\,/\,p\in S\wedge p\in T\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\,/\,b=c\wedge d=a+b\wedge a=0\wedge b=c\right\}=$$
$$=\left\{0+bx+bx^2+bx^3\,/\,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{b\cdot(x+x^2+x^3)\,/\,b\in\mathbb{R}\right\}$$
$$\implies \mathrm{B}_{S\cap T}=\left\{x+x^2+x^3\right\} \implies \dim(S\cap T)=1$$

d) Si tenemos en cuenta que

$$\dim(S+T)=\dim(S)+\dim(T)-\dim(S\cap T)=2+2-1=3$$

al juntar las bases de los dos subespacios por separado

$$S+T=span\left\{ 1+x^3,\, x+x^2+x^3, x+x^3, x^2 \right\}$$

observamos inmediatamente que el segundo elemento se puede conseguir como suma del tercero y el cuarto y por lo tanto podemos eliminarlo resultando los restantes linealmente independientes, y en consecuencia

$$S+T=span\left\{ 1+x^3, x+x^3, x^2 \right\}.$$

<u>Nota:</u> El problema también podría haberse resuelto identificando $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$ de forma que, por una parte

$$S=span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

cumpliéndose que

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2$$

y, puesto que cualquier vector del espacio vectorial es combinación lineal de esos dos

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{pmatrix}=2 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix}=0 & \Leftrightarrow \quad c=b \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix}=0 & \Leftrightarrow \quad d=a+b \end{cases};$$

por otra parte

$$T=span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

cumpliéndose que

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=2.$$

Al efectuar la unión

$$rg\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix}=3$$

puesto que las filas 2 y 4 coinciden ($\dim(S+T)=3$) y también se observa que la columna 2 se puede obtener sumando las columnas 3 y 4 (con lo que $\dim(S\cap T)=1$).