eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA ORDINARIA

27 de mayo de 2021

Apellidos y nombre:	***Grupo:***

PRIMER PARCIAL

EJERCICIO 1:

Calcula el valor del siguiente determinante por el método de los adjuntos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

(2 puntos)

Solución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{<F_3 \to F_3+2F_1> \\ <F_4 \to F_4-2F_1>}}{\overset{<F_2 \to F_2+F_1>}{=}} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & -4 & -7 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \\ -4 & -7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{<F_3 \to F_3+(4/3)F_1>}{\overset{<F_2 \to F_2-F_1>}{=}} \begin{vmatrix} \boxed{3} & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1/3 & 19/3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1/3 & 19/3 \end{vmatrix} \underset{<F_2 \to F_2+(1/3)F_1>}{=}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot [(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot 7] = 21$$

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

EJERCICIO 2:

Sean A y B dos matrices del espacio vectorial $\mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$:

a) Estudiar si $A\cdot A^T$ es una matriz simétrica.

b) Estudiar si $A^T\cdot A\cdot A^T$ es una matriz simétrica.

c) Comprobar si es cierto que $(A\cdot B)^2 = A^2\cdot B^2$.

(0.5 + 0.5 + 0.25 = 1.25 puntos)

Solución:

a) Una matriz es simétrica si y solo si $A^t = A$

Estudiemos la matriz transpuesta

$$\left(A\cdot A^t\right)^t = \left(A^t\right)^t\cdot(A)^t = A\cdot A^t$$

con lo que la matriz $A\cdot A^t$ SÍ es una matriz simétrica.

b) De forma análoga al aparatado anterior, estudiemos la matriz transpuesta

$$\left(A^t\cdot A\cdot A^t\right)^t = \left(A^t\right)^t\cdot(A)^t\cdot\left(A^t\right)^t = A\cdot A^t\cdot A \neq A^t\cdot A\cdot A^t$$

salvo que se de el caso, por ejemplo, de que A sea una matriz simétrica. En el caso general $A^t\cdot A\cdot A^t$ NO es una matriz simétrica.

c) Desarrollando el producto

$$(A\cdot B)^2 = (A\cdot B)\cdot(A\cdot B) = A\cdot B\cdot A\cdot B \neq A^2\cdot B^2$$

ya que, salvo casos concretos, $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Por lo tanto NO se verifica que $(A\cdot B)^2 = A^2\cdot B^2$

EJERCICIO 3:

Aplicando el método de Gauss, clasificar, en función del parámetro *a*, el siguiente sistema de ecuaciones lineales, resolviéndolo en los casos que sea compatible:

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-y+(a+2)z=-3a-5 \\ 4x+2y+(a+6)z=-3a^2-8 \end{cases}.$$

(3 puntos)

Solución:

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos convertir la matriz ampliada asociada al sistema anterior en una matriz triangular superior:

$$A^*=\left(A\middle|\vec{b}\right)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{array}\right)\xrightarrow[\langle F_3\to F_3-4F_1\rangle]{\langle F_2\to F_2-F_1\rangle}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & -6 & a+2 & -3a^2-12 \end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow[\langle F_3\to F_3-2F_2\rangle]{}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & 0 & -a & -3a^2+6a \end{array}\right)$$

Casos posibles:

$a=0$: $\to$ *rg(A)=2=rg(A*)<n=3* con lo que se trata de un <u>sistema compatible indeterminado</u>

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -3y+z=-6 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3-5z/3 \\ 2+z/3 \\ z \end{pmatrix} \quad z\in\mathbb{R}}$$

$a\neq 0$: $\to$ *rg(A)=3=rg(A*)=n* con lo que se trata de un <u>sistema compatible determinado</u>

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -3y+(a+1)z=-3a-6 \\ -a\cdot z=-3a^2+6a \end{cases}$$

sistema que resolveremos mediante sustitución regresiva, "de abajo hacia arriba",

$\to\ z=3a-6$

$\to\ y=-\dfrac{1}{3}[-3a-6-(a+1)(3a-6)]=-\dfrac{1}{3}(\cancel{-3a}\cancel{-6}-3a^2\cancel{-3a}+\cancel{6a}\cancel{+6})=a^2$

$\to\ x=1-2a^2-(3a-6)=-2a^2-3a+7$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2a^2-3a+7 \\ a^2 \\ 3a-6 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4:

Sean los siguientes subespacios de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

$$V = span\{S\} \quad \text{donde} \quad S = \left\{(2-a)x + a,\ -ax^2 + x,\ ax^2 + 2ax + (2+a)\right\}$$

$$T = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_2(x) \,/\, p(0) = 0 \right\}$$

a) ¿Para qué valores de *a* el sistema *S* es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$?

b) Calcular las ecuaciones implícitas de *V* para $a = 1$.

c) Calcular $V \cap T$ para $a = 1$.

d) Calcular $V + T$ para $a = 1$.

e) Completar la base *S*, para $a = 1$, hasta obtener una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

(0.75 x 5 = 3.75 puntos)

Solución:

a) Teniendo en cuenta que $\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) = 3$ y que la familia *S* está compuesta por tres elementos será suficiente con demostrar que son linealmente independientes. Identificando los polinomios con vectores de $\mathbb{R}^3$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

estudiaremos el rango de la matriz formada por los tres vectores

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & a \\ 2-a & 1 & 2a \\ a & 0 & 2+a \end{vmatrix} = -2a^3 - a^2 + a(2-a)(2+a) = -3a^3 - a^2 + 4a = -3a(a-1)(a+4/3)$$

Casos posibles:

- si $a = 0, 1, -4/3$ el rango de la matriz anterior es inferior a 3 lo cual significa que los tres vectores NO son linealmente independientes
- si $a \neq 0, 1, -4/3$ el rango de la matriz anterior es 3 con lo que que los tres vectores SÍ son linealmente independientes y consecuentemente constituyen una base de $P_2(\mathbb{R})$.

b) Para el caso $a = 1$ uno al menos de los vectores de S depende de los demás

$$S = \left\{ x+1, -x^2 + x, x^2 + 2x + 3 \right\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$V = span\{S\} = span\left\{ x+1, -x^2 + x \right\} \implies B_V = \left\{ x+1, -x^2 + x \right\} \quad \text{y} \quad \dim(V) = 2$$

de forma que

$$\dim(V) = 2 = \dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R})) - r = 3 - r \quad \rightarrow \quad r = 1.$$

Para obtener esta ecuación implícita

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix} = -b-a+c=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{c=a+b}$$

siendo $\quad p(x)=ax^2+bx+c\in V$

c) En primer lugar estudiaremos el subespacio T

$$T=\left\{p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_3(\mathbb{R})\,/\,p(0)=0\right\} \quad \rightarrow \quad \boxed{c=0}$$

$$\Longrightarrow \quad T=\left\{ax^2+bx\,/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{x^2,x\right\} \quad \Longrightarrow \quad B_T=\left\{x^2,x\right\} \quad \text{y} \quad \dim(T)=2$$

cumpliéndose que $\quad \dim(T)=2=\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))-r=3-1.$

Conociendo las ecuaciones que deben verificar los dos subespacios por separado

$$V\cap T=\left\{p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(x)\,/\,p(x)\in V\wedge p(x)\in T\right\}=$$

$$=\left\{ax^2+bx+c\,/\,c=a+b\wedge c=0\right\}=\left\{ax^2+bx+c\,/\,c=0\wedge b=-a\right\}=$$

$$=\left\{ax^2-ax\,/\,a\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{x^2-x\right\} \quad \Longrightarrow \quad B_{V\cap T}=\left\{x^2-x\right\} \quad \text{y} \quad \dim(V\cap T)=1.$$

d) Teniendo en cuenta que

$$\dim(V+T)=\dim(V)+\dim(T)-\dim(V\cap T)=2+2-1=3=\dim(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$$

$$\Longrightarrow \quad V+T=\mathbb{P}_2(\mathbb{R}).$$

e) A la vista del apartado anterior, consideramos como punto de partida la unión de las bases de cada uno de los subespacios por separado, así "completamos" la base de V

$$B_V\cup B_T=\left\{x+1,-x^2+x,x^2,x\right\}$$

Observamos que de los 4 elementos podemos eliminar el cuarto ya que se puede conseguir sumando el segundo con el tercero

$$rg\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3 \qquad \text{ya que} \qquad \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Consecuentemente

$$B_{V+T}=\left\{x+1,-x^2+x,x^2\right\}=B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}.$$

<u>Nota:</u> también cumplen los requisitos del enunciado las bases

$$B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}=\left\{x+1,-x^2+x,1\right\} \quad \text{y} \quad B_{\mathbb{P}_2(\mathbb{R})}=\left\{x+1,-x^2+x,x\right\}.$$

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ÁLGEBRA

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

CONVOCATORIA ORDINARIA

27 de mayo de 2021

Apellidos y nombre:	***Grupo:***

SEGUNDO PARCIAL

EJERCICIO 1:

Estudiar si la siguiente aplicación define un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$:

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \left\langle (x_1,x_2,x_3)^t,(y_1,y_2,y_3)^t \right\rangle = x_1y_1+2x_2y_2+x_3y_3+2x_1y_2$$

(1 punto)

Solución:

Estudiemos si se verifican los cuatro axiomas de un producto escalar:

i. ¿$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \langle \vec{y},\vec{x}\rangle \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$?

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\right\rangle = x_1\cdot y_1+2x_2\cdot y_2+x_3\cdot y_3+2x_1\cdot y_2 \neq$$

$$\neq \langle \vec{y},\vec{x}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\right\rangle = y_1\cdot x_1+2y_2\cdot x_2+y_3\cdot x_3+2y_1\cdot x_2$$

ya que, en general, $x_1\cdot y_2 \neq y_1\cdot x_2$.

Consecuentemente la aplicación dada no define un producto escalar.

Nota: si consideramos, por ejemplo, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\langle \vec{x},\vec{y}\rangle = 1\cdot 0+2\cdot 0\cdot 1+0\cdot 0+2\cdot 1\cdot 1 = 2 \neq \langle \vec{y},\vec{x}\rangle = 0\cdot 1+2\cdot 1\cdot 0+0\cdot 0+2\cdot 0\cdot 0 = 0$$

EJERCICIO 2:

Definir el concepto de norma en un espacio vectorial euclídeo

(1 punto)

Solución:

Dado un espacio vectorial *V*, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, se dice que una aplicación

$$\begin{array}{cccc} \|\ \| & : & V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \rightarrow & \|\vec{x}\| \end{array}$$

es una **NORMA** si cumple las siguientes propiedades:

i. $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in V$

ii. $\|\vec{x}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}$

iii. $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

iv. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ (propiedad conocida como desigualdad triangular)

En un espacio vectorial euclídeo $\left(V, \langle\ ,\ \rangle\right)$, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \|\ \| & : & \left(V, \langle\ ,\ \rangle\right) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \vec{x} & \rightarrow & \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{array}$$

verifica las propiedades descritas anteriormente y por lo tanto es una **NORMA.**

EJERCICIO 3:

Resuelve el siguiente sistema incompatible utilizando el método de mínimos cuadrados:

$$\begin{cases} -6x+y=-1 \\ -2x+y=2 \\ x+y=1 \\ 7x+y=6 \end{cases}.$$

(3 puntos)

Solución:

Teniendo en cuenta que se trata de un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas y que el enunciado dice que es un sistema incompatible, trabajaremos en $V=\mathbb{R}^4$ como espacio euclídeo y buscaremos la mejor aproximación en el subespacio

$$S=span\left\{\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subset V.$$

La base $B_S=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\}=\left\{\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es ortogonal, puesto que $\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=-6-2+1+7=0$,

con lo que bastará con hallar la mejor aproximación de $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\6\end{pmatrix}\notin S$ en S

$$\vec{b}'=\frac{\langle\vec{b},\vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\cdot\vec{u}_1+\frac{\langle\vec{b},\vec{u}_2\rangle}{\|\vec{u}_2\|^2}\cdot\vec{u}_2=\frac{45}{90}\cdot\vec{u}_1+\frac{8}{4}\cdot\vec{u}_2=\frac{1}{2}\cdot\vec{u}_1+2\cdot\vec{u}_2=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\5/2\\11/2\end{pmatrix}$$

ya que

$$\langle\vec{b},\vec{u}_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix}\right\rangle=6-4+1+42=45,\quad \langle\vec{b},\vec{u}_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=-1+2+1+6=8$$

$$\|\vec{u}_1\|^2=\langle\vec{u}_1,\vec{u}_1\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\\7\end{pmatrix}\right\rangle=90,\quad \|\vec{u}_2\|^2=\langle\vec{u}_2,\vec{u}_2\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=4.$$

Ahora solo falta resolver el sistema

$$\begin{cases} -6x+y=-1 \\ -2x+y=1 \\ x+y=5/2 \\ 7x+y=11/2 \end{cases},$$

sistema compatible y determinado, cuya solución es

$$\begin{cases} x=1/2 \\ y=2 \end{cases}.$$

EJERCICIO 4:

Sean la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$.

a) ¿Para qué valores de *a* y *b* es diagonalizable? Diagonalizar la matriz cuando sea posible.

b) ¿Es ortogonalmente diagonalizable? Razonar la respuesta.

c) Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton, calcular A^{-1}.

(3 + 1 + 1 = 5 puntos)

Solución:

a) Obtención del polinomio característico

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)$$

Casos posibles:

- si $a \neq \pm 1 \;\rightarrow\; \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = a$
- si $a = -1 \;\rightarrow\; \lambda_1 = -1$ doble, $\lambda_2 = 1$ simple
- si $a = 1 \;\rightarrow\; \lambda_1 = -1$ simple, $\lambda_2 = 1$ doble

Estudio de los subespacios propios en cada uno de los casos

Caso $a = -1$ Estudiemos el autovalor doble ya que para el autovalor simple la multiplicidad geométrica coincide con la multiplicidad algebraica

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_1 = 2$

$$(A - \lambda_1 \cdot I)\cdot \vec{x} = (A + I)\cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccll} by & + & bz & = & 0 & \rightarrow\; z = 0 \;\; ya\,que\, b \neq 0 \\ 2y & & & = & 0 & \rightarrow\; y = 0 \\ 0 & & & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \quad V(\lambda_1 = -1) = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1 = 1$.

Conclusión: puesto que $d_1 = 1 \neq \alpha_1 = 2$ **la matriz *A* NO es diagonalizable**.

Caso $a = 1$ De forma análoga al caso anterior estudiemos el autovalor doble

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_2 = 2$

$$\left(A-\lambda_2\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A-I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}0&b&b\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies\left\{\begin{array}{lllll} by & + & bz & = & 0 \qquad\qquad \rightarrow\; y=0\;\; ya\,que\, b\neq 0\\ 0 & & & = & 0\\ & - & 2z & = & 0 \;\rightarrow\; z=0\end{array}\right.$$

$$\implies\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\implies V(\lambda_2=1)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_2=1$.

Conclusión: puesto que $d_2=1\neq\alpha_2=2$ **la matriz *A* NO es diagonalizable**.

Caso $a\neq\pm 1$ en este supuesto **la matriz SÍ es diagonalizable** porque

$$d_1=\alpha_1=1,\quad d_2=\alpha_2=1,\quad d_3=\alpha_3=1$$

Nota: recordemos que $1\leq d_i\leq\alpha_i\;\;\forall i$

$\boxed{\lambda_1=-1}$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_1=1$

$$\left(A-\lambda_1\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A+I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}a+1&b&b\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies\left\{\begin{array}{lllllll}(a+1)x & + & by & + & bz & = & 0 \qquad\qquad \rightarrow\; z=-(a+1)x/b\;\; ya\,que\, b\neq 0\\ & & 2y & & 0 & = & 0 \;\rightarrow\; y=0\\ & & 0 & & & = & 0\end{array}\right.$$

$$\implies\vec{x}=\begin{pmatrix}x\\0\\-(a+1)x/b\end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-(a+1)/b\end{pmatrix}\implies V(\lambda_1=-1)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-(a+1)/b\end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_1=1$.

$\boxed{\lambda_2=1}$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_2=1$

$$\left(A-\lambda_2\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A-I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix}a-1&b&b\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies\left\{\begin{array}{lllllll}(a-1)x & + & by & + & bz & = & 0 \qquad\qquad \rightarrow\; y=-(a-1)x/b\;\; ya\,que\, b\neq 0\\ & & 0 & & & = & 0\\ & & & - & 2z & = & 0 \;\rightarrow\; z=0\end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ (1-a)x/b \\ 0 \end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ (1-a)/b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V(\lambda_2=1)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ (1-a)/b \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_2=1$.

$\boxed{\lambda_3=a}$ autovalor de multiplicidad algebraica $\alpha_3=1$

$$\left(A-\lambda_3\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\left(A-a\cdot I\right)\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -1-a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lllllll} & by & + & bz & = & 0 & \rightarrow \quad 0+0=0 \\ (1-a)y & & & & = & 0 & \rightarrow \quad y=0 \;\; ya\,que\,a\neq 1 \\ & & - & (1+a)z & = & 0 & \rightarrow \quad z=0 \;\; ya\,que\,a\neq -1 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad V(\lambda_3=a)=span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y por lo tanto la dimensión geométrica $d_3=1$.

Conclusión: en el caso $a\neq\pm 1$ y sea quien sea $b\neq 0$

$$\boxed{P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-a}{b} & 0 \\ -\frac{a+1}{b} & 0 & 0 \end{pmatrix}}\;,\quad \boxed{D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}}=P^{-1}\cdot A\cdot P\,.$$

b) Teniendo en cuenta que el enunciado dice $b\neq 0$ **la matriz *A*** no es simétrica en ningún caso y por lo tanto **NO es diagonalizable ortogonalmente**.

c) Teniendo en cuenta el teorema de Cayley-Hamilton el polinomio característico

$$p_A(\lambda)=(a-\lambda)\cdot(1-\lambda)\cdot(-1-\lambda)=-\lambda^3+a\cdot\lambda^2+\lambda-a$$

es el polinomio anulador de A

$$p(A)=-A^3+a\cdot A^2+A-a\cdot I_{3x3}=\left(0\right)_{3x3}$$

podemos concluir que

$$A\cdot(-A^2+a\cdot A+I_{3x3})=a\cdot I_{3x3}$$

y premultiplicando por A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{a}\cdot(-A^2+a\cdot A+I_{3x3})$$

siempre y cuando $a\neq 0$ ya que en caso contrario la matriz A es singular y no tiene inversa

$$A^{-1}=\frac{1}{a}\cdot\left[-\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\left[-\begin{pmatrix} a^2 & ab+b & ab-b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\boxed{\begin{pmatrix} 1/a & -b/a & b/a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=A^{-1}}$$