

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

30 de junio de 2021

Apellidos:

Nombre:

PRIMER PARCIAL - TIEMPO: 1 hora

EJERCICIO 1:

Calcular el valor de la siguiente expresión, siendo A y B matrices ortogonales:

$$(A^2 - B)^T - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^T.$$

(1 punto)

Solución:

Atendiendo a la definición de matriz ortogonal,

$$A^{-1} = A^T, \quad B^{-1} = B^T$$

y, consecuentemente,

$$\begin{aligned} & (A^2 - B)^T - (A \cdot B)^{-1} + B^{-1} - (A^{-1})^2 + (A \cdot B)^T = \\ & = (A^2)^T - B^T - B^{-1} \cdot A^{-1} + B^T - (A^T)^2 + B^T \cdot A^T = \\ & = \cancel{(A^T)^2} - \cancel{B^T \cdot A^T} - \cancel{(A^T)^2} + \cancel{B^T \cdot A^T} = (0). \end{aligned}$$

Otras propiedades utilizadas:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

EJERCICIO 2:

Obtener el rango de la siguiente matriz en función de los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

(1.75 puntos)

Solución:

Mediante transformaciones elementales de filas intentaremos escalar la matriz del enunciado

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle F_2 \rightarrow F_2 + \alpha \cdot F_1 \rangle \\ \langle F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \rangle \\ \langle F_4 \rightarrow F_4 - F_1 \rangle \\ \langle F_5 \rightarrow F_5 - F_1 \rangle \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle F_2 \leftrightarrow F_3 \rangle \\ \sim \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle F_3 \rightarrow F_3 + F_2 \rangle \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle F_4 \rightarrow F_4 + F_3 \rangle \\ \sim \end{matrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \langle F_5 \rightarrow F_5 + F_4 \rangle \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(\alpha+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las matrices A y B tienen el mismo rango, se presentan dos casos:

$\alpha \neq -1$: $rg(A) = rg(B) = 4$

$\alpha = -1$: $rg(A) = rg(B) = 1$

EJERCICIO 3:

Calcular, utilizando el método de Gauss, la inversa de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3.25 puntos)

Solución:

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\langle F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \rangle \\ \langle F_4 \rightarrow F_4 - 2F_1 \rangle}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\langle F_3 \rightarrow F_3 - (1/2)F_2 \rangle} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1/2} & -2 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\langle F_2 \rightarrow F_2 + 2F_3 \rangle \\ \langle F_4 \rightarrow F_4 + 2F_3 \rangle}} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -2 & -2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\langle F_1 \rightarrow F_1 + (1/2)F_4 \rangle \\ \langle F_2 \rightarrow F_2 - F_4 \rangle \\ \langle F_3 \rightarrow F_3 - F_4 \rangle}} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 4 & 1/2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\langle F_2/2 \rangle \\ \langle F_3/(-1/2) \rangle \\ \langle F_4/(-2) \rangle}} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1/2 & -1 & -1/2 \end{array} \right) = (I|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ -8 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: Durante el proceso de eliminación gaussiana se ha comprobado que el determinante de la matriz a invertir es 2, no nulo y por tanto la matriz A es invertible (el determinante de la matriz de partida coincide con el determinante de la matriz diagonal obtenida).

EJERCICIO 4:

A) Calcular una base del subespacio vectorial

$$T = \{(x+z+t \quad 2x+y+3z+t \quad -x+y-2t) / x, y, z, t \in \mathbb{R}\}.$$

(1.75 puntos)

B) Sea $B = \{(1 \ 2 \ -1), (1 \ 3 \ 0)\}$ una base de un subespacio vectorial U .

i. Calcular los valores de α para los cuales $(1 \ 1 \ \alpha) \in U$.

ii. Sea $V = \{(x \ 0 \ x) / x \in \mathbb{R}\}$, ¿está $V \subseteq U$? Razonar la respuesta.

(1.5 + 0.75 = 2.25 puntos)

Solución:

A) Estamos trabajando en el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , espacio vectorial de dimensión 3

$$T = \{(x+z+t \quad 2x+y+3z+t \quad -x+y-2t) / x, y, z, t \in \mathbb{R}\} = \\ = \{x \cdot (1 \ 2 \ -1) + y \cdot (0 \ 1 \ 1) + z \cdot (1 \ 3 \ 0) + t \cdot (1 \ 1 \ -2) / x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

con lo que tendremos que estudiar el rango de la matriz formada por los 4 vectores anteriores

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\langle F_3 \rightarrow F_3 - F_2 \rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A la vista de los resultados, la matriz es de rango 2, de los 4 vectores solamente dos son linealmente independientes, por ejemplo, los dos primeros, concluyendo que $\dim(T) = 2$ y

$$B_T = \{(1 \ 2 \ -1), (0 \ 1 \ 1)\}.$$

B) $B_U = \{(1 \ 2 \ -1), (1 \ 3 \ 0)\}$ es base porque los dos vectores que la integran son linealmente independientes

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

de forma que $\dim(U) = 2$.

i. $(1 \ 1 \ \alpha) \in U \Leftrightarrow \exists \lambda, \gamma / \lambda \cdot (1 \ 2 \ -1) + \gamma \cdot (1 \ 3 \ 0) = (1 \ 1 \ \alpha)$

resultando un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} \lambda + \gamma = 1 \\ 2\lambda + 3\gamma = 1 \\ -\lambda = \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\gamma = 1 - \lambda && \rightarrow \gamma = -1 \\ &2\lambda + 3(-1) = 1 && \rightarrow 2\lambda - 3 = 1 \rightarrow \lambda = 2 \\ &-\lambda = \alpha && \rightarrow \boxed{\alpha = -2} \end{aligned}$$

ii. Para que $V \subseteq U$ se debe verificar que cualquiera que sea x

$$\exists \lambda, \gamma / \lambda \cdot (1 \ 2 \ -1) + \gamma \cdot (1 \ 3 \ 0) = (x \ 0 \ x)$$

$$\begin{cases} \lambda + \gamma = x \\ 2\lambda + 3\gamma = 0 \\ -\lambda = x \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} &\gamma = x - \lambda = 2x \\ &2\lambda + 3(2x) = 0 && \rightarrow -2x + 6x = 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ &-\lambda = x && \rightarrow \lambda = -x \end{aligned}$$

con lo que el único vector de V que está en U es el vector nulo. Consecuentemente $V \not\subseteq U$.

SEGUNDO PARCIAL - TIEMPO: 1 hora y 15 minutos

EJERCICIO 5:

- A) Obtener una base del subespacio vectorial S^\perp siendo S el subespacio vectorial propio de \mathbb{R}^3 generado por la familia $\{(2 \ -1 \ 1)\}$. (1 punto)
- B) Sea $B = \{(1 \ 2 \ -1), (1 \ 3 \ 0)\}$ una base de un subespacio vectorial U .
- Obtener una base ortonormal de U .
 - ¿Pertenece el vector $\vec{v} = (1 \ 1 \ 1)$ al subespacio U ? En caso negativo, calcular la mejor aproximación de v en el subespacio U . (2 + 3 = 5 puntos)

Solución:

A) Por definición

$$S^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 / \vec{v} \perp \vec{u} \ \forall \vec{u} \in S\}$$

y por ser S un subespacio de dimensión finita, $B_S = \{(2 \ -1 \ 1)\}$, se tratará de encontrar los vectores que sean ortogonales a los elementos de la base de S

$$\vec{v} \perp (2 \ -1 \ 1) \Leftrightarrow \langle \vec{v}, (2 \ -1 \ 1) \rangle = \langle (x \ y \ z), (2 \ -1 \ 1) \rangle = 2x - y + z = 0.$$

Observamos que S^\perp está caracterizado por una ecuación, $y = 2x + z$, con lo que

$$\dim(S^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - r = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{(x \ 2x+z \ z) \in \mathbb{R}^3 / x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1 \ 2 \ 0) + z(0 \ 1 \ 1) / x, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \text{span}\{(1 \ 2 \ 0), (0 \ 1 \ 1)\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los vectores anteriores son linealmente independientes entonces forman una base

$$B_{S^\perp} = \{(1 \ 2 \ 0), (0 \ 1 \ 1)\}.$$

- B)
- Apliquemos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base

$$B_U = \{(1 \ 2 \ -1), (1 \ 3 \ 0)\} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

Paso 1: $\vec{w}_1 = \vec{u}_1$

Paso 2: $\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \alpha \cdot \vec{w}_1$ eligiendo α para que este nuevo vector sea ortogonal al anterior

$$\alpha = \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \frac{\langle (1 \ 3 \ 0), (1 \ 2 \ -1) \rangle}{\langle (1 \ 2 \ -1), (1 \ 2 \ -1) \rangle} = \frac{1+6-0}{1+4+1} = \frac{7}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \frac{7}{6} \cdot \vec{w}_1 = (1 \ 3 \ 0) - \frac{7}{6}(1 \ 2 \ -1) = \left(-\frac{1}{6} \ \frac{4}{6} \ \frac{7}{6}\right).$$

Por otra parte

$$\|\vec{w}_1\| = \sqrt{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{w}_2\| = \sqrt{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{16}{36} + \frac{49}{36}} = \sqrt{\frac{66}{36}} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ \sqrt{66} & \sqrt{66} & \sqrt{66} \end{pmatrix}$$

Nueva base ortonormal:

$$B^* = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ \sqrt{66} & \sqrt{66} & \sqrt{66} \end{pmatrix} \right\}.$$

ii. $(1 \ 1 \ 1) \in U \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta / \alpha \cdot (1 \ 2 \ -1) + \beta \cdot (1 \ 3 \ 0) = (1 \ 1 \ 1)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 & \rightarrow \beta = 1 - \alpha = 2 \\ 2\alpha + 3\beta = 1 & \rightarrow 3\beta = 1 - 2\alpha = 3 \rightarrow \beta = 1 \text{ caso no posible} \Rightarrow \vec{v} \notin U. \\ -\alpha = 1 & \rightarrow \alpha = -1 \end{cases}$$

Proyectemos el vector $\vec{v} \notin U$ en U

$$\vec{v}^* = \text{proy}_U \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \cdot \vec{v}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} \cdot \vec{v}_2 = \frac{2/\sqrt{6}}{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix} + \frac{10/\sqrt{66}}{1} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ \sqrt{66} & \sqrt{66} & \sqrt{66} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-10}{66} & \frac{40}{66} & \frac{70}{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{66} & \frac{84}{66} & \frac{48}{66} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{14}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}} = \vec{v}^*$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle = \left\langle (1 \ 1 \ 1), \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1+2-1}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v}_2 \rangle = \left\langle (1 \ 1 \ 1), \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ \sqrt{66} & \sqrt{66} & \sqrt{66} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{-1+4+7}{\sqrt{66}} = \frac{10}{\sqrt{66}}$$

EJERCICIO 6:

Sean la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ b & -1 & a \end{pmatrix}$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Obtener los valores de a y b para los cuales $\lambda = 3$ es un autovalor de A . ¿Quién sería un autovector asociado a ese autovalor?

(1 punto)

b) Obtener los valores de a y b para los cuales $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es un autovector de A . ¿A qué autovalor estaría asociado?

(0.75 puntos)

c) Para $a = 3$, $b = 0$ ¿es diagonalizable la matriz A ?

(1.5 puntos)

d) Para $a = b = 0$ calcular todos los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 0$.

(0.75 puntos)

Observación: todos los resultados del examen deberán ser justificados razonadamente

Solución:

a) Si $\lambda = 3$ es un autovalor de A entonces $|A - 3I| = 0$

$$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ 2 & -a-3 & 0 \\ b & -1 & a-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -a-3 & 0 \\ b & -1 & a-3 \end{vmatrix} = (a-3) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -a-3 \end{vmatrix} = 2(a-3) \cdot (a+4) = 0$$

y por lo tanto, independientemente del valor de b , $a = 3$ o $a = -4$.

En el primero de los casos, $a = 3$, el autovector asociado al autovalor $\lambda = 3$ sería

$$(A - 3I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x - 6y = 0 \\ bx - y = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall b \in \mathbb{R},$$

mientras que en el segundo caso, $a = -4$, el autovector asociado al autovalor $\lambda = 3$ sería

$$(A - 3I) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ b & -1 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x - y = 0 \\ 2x + y = 0 \\ bx - y - 7z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2x \rightarrow z = (b+2) \cdot x / 7 \rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ (b+2)/7 \end{pmatrix}.$$

b) Si $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es un autovector existirá un λ verificando

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -a & 0 \\ b & -1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 - (-2) = 2\lambda \\ 4 - (-2)a = -2\lambda \\ 2b - (-2) + a = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ 4 + 2a = -4 \\ 2b + 2 + a = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda = 2 \\ a = -4 \\ b = 2 \end{matrix}}$$

c) En el supuesto $a = 3$, $b = 0$ calculemos el polinomio característico de la matriz resultante

$$|A - \lambda \cdot I| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0$$

polinomio cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{2}$ y $\lambda_3 = -1 - \sqrt{2}$

raíces todas ellas reales y distintas con lo que la multiplicidad algebraica y geométrica será 1 en todos los casos, pudiendo concluir que la matriz A es diagonalizable.

d) Considerando ahora $a = b = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0 \rightarrow \lambda = 0 \text{ es un autovalor}$$

$$(A - 0 \cdot I) \cdot \vec{x} = A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}$$

de forma que

$$V(\lambda = 0) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$