

## DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

Dada la función

$$z = y^2 + 2 \cdot f\left(\frac{1}{x} + Ly\right)$$

hallar el valor de la expresión:

$$E \equiv z'_y + \frac{x^2}{y} \cdot z'_x.$$

Solución:

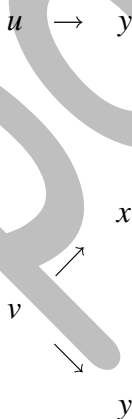
Adaptaremos en primer lugar la notación a utilizar con el objetivo de visualizar fácilmente las variables que participan en el problema y las dependencias existentes.

- 1) En primer lugar  $z$  es una función de dos variables,  $x$  e  $y$ :  $z = z(x, y)$
- 2) Ahora bien, las variables  $x$  e  $y$  son “variables finales” en el sentido de que antes interviene, por ejemplo, una función  $f$  función de una única variable

Si llamamos

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y) = y^2 \\ v &= v(x, y) = \frac{1}{x} + Ly \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y) = u(x, y) + 2f(v(x, y))$$

de forma que el diagrama o árbol de dependencias quedaría de la siguiente forma



Teniendo en cuenta que cada camino posible hasta una “variable final” representará un sumando mientras que en cada desplazamiento en horizontal se considerará la regla de la cadena resulta que

$$z'_x = z'_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 2 \frac{df}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \cdot 0 + 2f'(v) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$z'_y = z'_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{df}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \cdot 2y + 2f'(v) \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\Rightarrow E \equiv z'_y(x, y) + \frac{x^2}{y} \cdot z'_x(x, y) = 2y + \frac{2}{y} f'(v) + \frac{x^2}{y} \cdot \frac{-2}{x^2} f'(v) = 2y + \frac{2}{y} f'(v) - \frac{2}{y} f'(v) = 2y$$

Sea  $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida de la siguiente forma

$$f(x, y, z) = L[g(x + y \cdot z)]$$

donde  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y \neq 0\}$

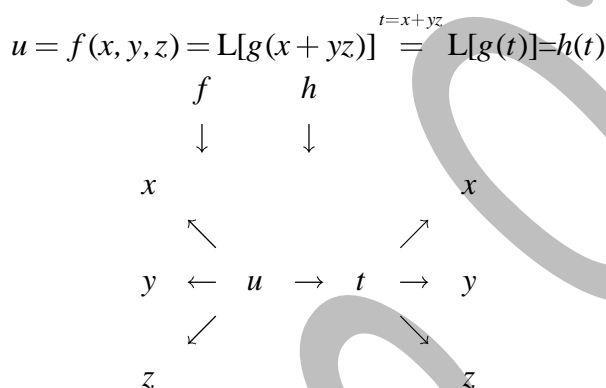
y  $g(u)$  es una función infinitamente derivable tal que  $g(u) > 0 \quad \forall u$ .

Obtener el valor de la expresión

$$E = z^2 \cdot f''_{x^2} - f''_{y^2} + \frac{1}{y} \cdot f'_z.$$

Solución:

Observamos en primer lugar que la función  $g$  es una función de una única variable,  $t$ , la cual a su vez depende de tres ( $x$ ,  $y$  y  $z$ ): para organizar al árbol o diagrama de dependencias haremos uso de esta variable auxiliar  $t$ .



Según el esquema anterior, derivamos una primera vez para obtener las parciales de primer orden

$$f'_x = f'_x(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot 1 = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$f'_y = f'_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot z = z \frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$f'_z = f'_z(x, y) = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot y = y \frac{g'(t)}{g(t)}$$

y derivaremos una segunda vez pero solo en los casos en los que precisamos derivada parcial segunda

$$f''_{x^2} = f''_{x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial \left( \frac{g'(t)}{g(t)} \right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{g''(t) \cdot g(t) - g'(t) \cdot g'(t)}{[g(t)]^2} \cdot 1 = \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}$$

$$f''_{y^2} = f''_{y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial \left( z \frac{g'(t)}{g(t)} \right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = z \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2} \cdot z = z^2 \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}$$

Sustituyendo en la expresión del enunciado

$$E = z^2 \cdot \underbrace{\frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}}_{f''_{x^2}(x, y)} - z^2 \cdot \underbrace{\frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}}_{f''_{y^2}(x, y)} + \frac{1}{y} \cdot \underbrace{\frac{g'(t)}{g(t)}}_{f'_z(x, y)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{g'(x + yz)}{g(x + yz)}.$$

Se define la siguiente función

$$z = f(y) + e^x \cdot g(y-x) + e^{2y} \cdot h(x),$$

donde las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  son funciones tres veces derivables. Calcular el valor de la expresión

$$E = z'''_{xxy} + z'''_{xyy} - 2z''_{xx} - 3z''_{xy} + 2z'_x.$$

Solución:

Para la resolución del problema tendremos en cuenta que la función  $g$  es una función compuesta

$$g(u) \quad \text{donde} \quad u = u(x, y) = y - x$$

de forma que

$$u'_x = u'_x(x, y) = -1 \quad \text{y} \quad u'_y = u'_y(x, y) = 1.$$

Derivando según los términos que aparecen en la expresión

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = \frac{df(y)}{dx} + \frac{d(e^x)}{dx} \cdot g(u) + e^x \cdot \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d(e^{2y})}{dx} \cdot h(x) + e^{2y} \cdot \frac{dh(x)}{dx} = \\ &= 0 + e^x \cdot g(u) + e^x \cdot g'(u) \cdot (-1) + 0 \cdot h(x) + e^{2y} \cdot h'(x) = e^x g(u) - e^x g'(u) + e^{2y} h'(x) \end{aligned}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2} = e^x g(u) - 2e^x g'(u) + e^x g''(u) + e^{2y} h''(x)$$

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = e^x g'(u) - 2e^x g''(u) + e^x g'''(u) + 2e^{2y} h''(x)$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x \partial y} = e^x g'(u) - e^x g''(u) + 2e^{2y} h'(x)$$

$$z'''_{xyy} = \frac{\partial^3 z(x, y)}{\partial x \partial y^2} = e^x g''(u) - e^x g'''(u) + 4e^{2y} h'(x)$$

Sustituyendo finalmente en la expresión  $E$

$$\begin{aligned} E &= \left[ e^x g'(u) - 2e^x g''(u) + e^x g'''(u) + 2e^{2y} h''(x) \right] + \left[ e^x g''(u) - e^x g'''(u) + 4e^{2y} h'(x) \right] - \\ &\quad - 2 \left[ e^x g(u) - 2e^x g'(u) + e^x g''(u) + e^{2y} h''(x) \right] - 3 \left[ e^x g'(u) - e^x g''(u) + 2e^{2y} h'(x) \right] + \\ &\quad + 2 \left[ e^x g(u) - e^x g'(u) + e^{2y} h'(x) \right] = \\ &= e^x g'(u) (1 + 4 - 3 - 2) + e^x g''(u) (-2 + 1 - 2 + 3) + e^{2y} h''(x) (2 + 4 - 2 - 6 + 2) = 0. \end{aligned}$$

Considérese la función

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + f(xy, -xz, g(xz, xy))$$

donde  $\varphi$ ,  $f$  y  $g$  son funciones diferenciables. Calcular el valor de la siguiente expresión:

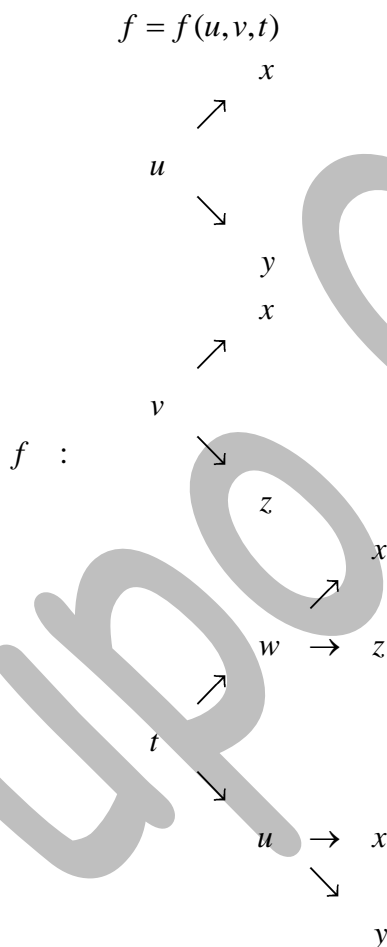
$$E \equiv \varphi'_x(1, 1, 1) - \varphi'_y(1, 1, 1) - \varphi'_z(1, 1, 1).$$

Solución:

Consideremos las variables auxiliares

$$u = u(x, y, z) = x \cdot y, \quad v = v(x, y, z) = -x \cdot z, \quad w = w(x, y, z) = x \cdot z \quad y \quad t = g(w, u)$$

de forma que



Según el esquema anterior

$$\begin{aligned} \varphi'_x(x, y, z) &= \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial t} \left[ \frac{\partial t(w, u)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial t(w, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} \right] = 2x + y \cdot f'_u - z \cdot f'_v + f'_t \cdot (z \cdot g'_w + y \cdot g'_u) \\ \varphi'_y(x, y, z) &= \frac{d(x^2)}{dy} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial t} \left[ \frac{\partial t(w, u)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial t(w, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} \right] = 0 + x \cdot f'_u + 0 \cdot f'_v + f'_t \cdot (0 \cdot g'_w + x \cdot g'_u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi'_z(x, y, z) &= \frac{d(x^2)}{dz} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial f(u, v, t)}{\partial t} \left[ \frac{\partial t(w, u)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial t(w, u)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \right] = 0 + 0 \cdot f'_u - x \cdot f'_v + f'_t \cdot (x \cdot g'_w + 0 \cdot g'_u)\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión  $E$  y evaluando en el punto  $(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}E &\equiv \varphi'_x(1, 1, 1) - \varphi'_y(1, 1, 1) - \varphi'_z(1, 1, 1) = \\ &= \{2 \cdot 1 + 1 \cdot f'_u(1, -1, g(1, 1)) - 1 \cdot f'_v(1, -1, g(1, 1)) + f'_t(1, -1, g(1, 1)) \cdot [1 \cdot g'_w(1, 1) + 1 \cdot g'_u(1, 1)]\} + \\ &- \{1 \cdot f'_u(1, -1, g(1, 1)) + f'_t(1, -1, g(1, 1)) \cdot [1 \cdot g'_u(1, 1)]\} - \{-1 \cdot f'_v(1, -1, g(1, 1)) + f'_t(1, -1, g(1, 1)) \cdot [1 \cdot g'_w(1, 1)]\} = \\ &= 2 + f'_u(1, -1, g(1, 1)) \cdot (1 - 1) + f'_v(1, -1, g(1, 1)) \cdot (-1 + 1) + f'_t(1, -1, g(1, 1)) \cdot [g'_w(1, 1) \cdot (1 - 1) + g'_u(1, 1) \cdot (1 - 1)] = 2\end{aligned}$$

Calcular las derivadas parciales de primer orden de la siguiente función

$$w(x, y, z) = \cos(x \cdot z) + f(x^2 + 2x \cdot y, y^2 \cdot \cos(2y \cdot z)).$$

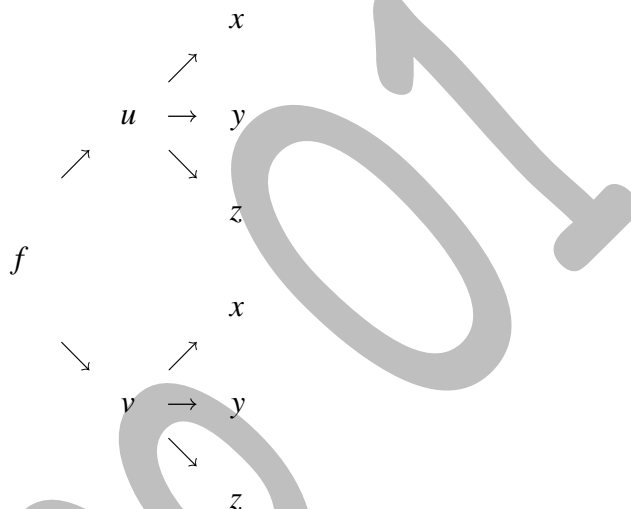
Solución:

Considerando las “variables intermedias” o “variables de paso”

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) = x^2 + 2x \cdot y \\ v = v(x, y, z) = y^2 \cdot \cos 2y \cdot z \end{cases}$$

la función  $f$ , función de dos variables iniciales y tres variables finales, quedaría en la forma

$$f = f(u, v) = f(u(x, y, z), v(x, y, z)) = f(x^2 + 2x \cdot y, y^2 \cdot \cos(2y \cdot z)) = f(x, y, z)$$



Teniendo en cuenta las expresiones de  $u$  y  $v$  se calculan sus derivadas parciales

$$\begin{cases} u'_x = u'_x(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 2x + 2y \\ u'_y = u'_y(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = 2x \\ u'_z = u'_z(x, y, z) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x = v'_x(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial x} = 0 \\ v'_y = v'_y(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial y} = 2y \cdot \cos(2yz) - y^2 \cdot 2z \cdot \sin(2yz) \\ v'_z = v'_z(x, y, z) = \frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} = -y^2 \cdot 2y \cdot \sin(2yz) \end{cases}$$

y, por último, cada camino posible hasta una “variable final” representará un sumando mientras que en cada desplazamiento en horizontal se considerará la regla de la cadena, resulta que

$$\begin{aligned} w'_x &= w'_x(x, y, z) = -z \cdot \sin(xz) + f'_u(u, v) \cdot u'_x(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_x(x, y, z) = \\ &= -z \cdot \sin(xz) + f'_u(u, v) \cdot (2x + 2y) + f'_v(u, v) \cdot 0 = \\ &= -z \cdot \sin(xz) + 2(x + y) \cdot f'_u(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_y &= w'_y(x, y, z) = 0 + f'_u(u, v) \cdot u'_y(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_y(x, y, z) = \\ &= f'_u(u, v) \cdot 2x + f'_v(u, v) \cdot [2y \cdot \cos(2yz) - y^2 \cdot 2z \cdot \sin(2yz)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2x \cdot f'_u(u, v) + 2y \cdot \cos(2yz) - yz \cdot \sin(2yz) \cdot f'_v(u, v) \\
 w'_z &= w'_z(x, y, z) = -x \cdot \sin(xz) + f'_u(u, v) \cdot u'_z(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_z(x, y, z) = \\
 &= -x \cdot \sin(xz) + f'_u(u, v) \cdot 0 + f'_v(u, v) \cdot [-y^2 \cdot 2y \cdot \sin(2yz)] = \\
 &= -x \cdot \sin(xz) - 2y^3 \cdot \sin(2yz) \cdot f'_v(u, v)
 \end{aligned}$$

Grupo 01

Calcular el valor de la siguiente expresión

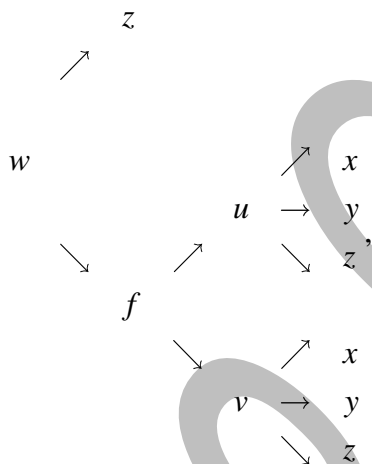
$$E = x \cdot w'_x - y \cdot w'_y + \frac{1}{2} z \cdot w'_z$$

en el caso

$$w(x, y, z) = z^m \cdot f\left(y \cdot x, \frac{x}{z^2}\right).$$

Solución:

Mientras que  $w$  es una función real de tres variables reales, para definirla se utiliza una función  $f$  de dos variables reales,  $u$  y  $v$ , las cuales a su vez dependen de tres,  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Gráficamente el esquema de dependencias que tenemos en este problema es del tipo



y analíticamente

$$w = w(x, y, z) = z^m \cdot f(u, v) = z^m \cdot f(u(x, y, z), v(x, y, z)) = \phi(x, y, z)$$

donde

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) = y \cdot x \\ v = v(x, y, z) = \frac{x}{z^2} \end{cases}.$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} w'_x &= w'_x(x, y, z) = \frac{d(z^m)}{dx} \cdot f(u, v) + z^m \cdot [f'_u(u, v) \cdot u'_x(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_x(x, y, z)] = \\ &= 0 \cdot f(u, v) + z^m \cdot \left[ f'_u(u, v) \cdot y + f'_v(u, v) \cdot \frac{1}{z^2} \right] = yz^m \cdot f'_u(u, v) + z^{m-2} \cdot f'_v(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_y &= w'_y(x, y, z) = \frac{d(z^m)}{dy} \cdot f(u, v) + z^m \cdot [f'_u(u, v) \cdot u'_y(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_y(x, y, z)] = \\ &= 0 \cdot f(u, v) + z^m \cdot [f'_u(u, v) \cdot x + f'_v(u, v) \cdot 0] = xz^m \cdot f'_u(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_z &= w'_z(x, y, z) = \frac{d(z^m)}{dz} \cdot f(u, v) + z^m \cdot [f'_u(u, v) \cdot u'_z(x, y, z) + f'_v(u, v) \cdot v'_z(x, y, z)] = \\ &= mz^{m-1} \cdot f(u, v) + z^m \cdot \left[ f'_u(u, v) \cdot 0 + f'_v(u, v) \cdot \frac{-2x}{z^3} \right] = mz^{m-1} \cdot f(u, v) - 2xz^{m-3} \cdot f'_v(u, v) \end{aligned}$$

Solo falta sustituir estas derivadas en la expresión  $E$  y simplificar

$$E = x \left[ \cancel{yz^m f'_u(u, v)} + \cancel{z^{m-2} f'_v(u, v)} \right] - y \left[ \cancel{xz^m f'_u(u, v)} \right] + \frac{1}{2} z \left[ \cancel{mz^{m-1} f(u, v)} - \cancel{2xz^{m-3} f'_v(u, v)} \right] = \frac{1}{2} mz^m f(u, v)$$



Calcular las derivadas parciales de primer orden de la siguiente función

$$w(x, y, z) = L(z) \cdot f(2z, \sin(y^2)) + \frac{\sin^2(y)}{g(\arctg(x))}.$$

Solución:

En la definición de la función que  $w$ , función real de tres variables reales, aparecen referenciadas dos funciones  $f$  y  $g$ : la función  $f$  es una función real de dos variables reales mientras que la función  $g$  es una función real de una variable real

$$w = w(x, y, z) = L(z) \cdot f(u, v) + \frac{\sin^2(y)}{g(t)} = L(z) \cdot f(u(x, y, z), v(x, y, z)) + \frac{\sin^2(y)}{g(t(x, y, z))}$$

donde

$$\begin{cases} u = u(x, y, z) = 2z \\ v = v(x, y, z) = \sin(y^2) \end{cases}, \quad t = t(x, y, z) = \arctg(x).$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores

$$w'_x = w'_x(x, y, z) = -\frac{g'(t)}{[g(t)]^2} \cdot \sin^2(y) \cdot t'(x) = -\frac{\sin^2(y)}{1+x^2} \frac{g'(t)}{[g(t)]^2}$$

$$w'_y = w'_y(x, y, z) = L(z) \cdot f'_v(u, v) \cdot v'_y(x, y, z) + \frac{2\sin(y) \cdot \cos(y)}{g(t)} = 2y \cdot \cos(y^2) \cdot L(z) \cdot f'_v(u, v) + \frac{\sin(2y)}{g(t)}$$

$$w'_z = w'_z(x, y, z) = \frac{1}{z} \cdot f(u, v) + L(z) \cdot 2 \cdot f'_u(u, v) = \frac{f(u, v)}{z} + 2L(z) \cdot f'_u(u, v)$$