# EJERCICIOS TEMA 3

**1.-** Determinar el dominio de definición de las siguientes funciones:

1.1.- $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

1.2.- $f(x)=\ln(x^2-x)$

1.3.- $f(x)=e^{\frac{1}{x+3}}$

1.4.- $f(x)=arcsen\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$

1.5.- $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$

1.6.- $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$

1.7.- $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1.8.- $f(x)=arcsen\left(\dfrac{x+1}{x^2}\right)$

**2.-** Demostrar que

2.1.- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=3$

2.2.- $\lim\limits_{x\to 4^+}10^{\frac{1}{x-4}}=0$

2.3.- $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$

2.4.- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^2}=+\infty$

2.5.- $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-6x+3)=-2$

2.6.- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x}=\dfrac{1}{2}$

2.7.- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)}{sen(x)} = 0$

**3.-** Probar que no existen los siguientes límites:

3.1.- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$

3.2.- $\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{1}{x}\right)$

**4.-** Calcular los siguientes límites:

4.1.- $\lim_{x\to 0}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

4.2.- $\lim_{x\to 7^-} \frac{x-7}{|x-7|}$, $\lim_{x\to 7^+} \frac{x-7}{|x-7|}$

4.3.- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+4x^2}{3+4x^2}\right)^{\frac{1+x^3}{x}}$

4.4.- $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

4.5.- $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)-sen(x)}{x^3}$

4.6.- $\lim_{x\to 1} \frac{sen(x-1)}{x^2-1}$

4.7.- $\lim_{x\to 0^+}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

4.8.- $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

4.9.- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos(x)-\cos(3x)}$

4.10.- $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{3-\ln(x)}}$

4.11.- $\lim_{x\to 0} \frac{1+x^3}{sen(x)-tg(x)}$

4.12.- $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{|x|}{x}}$ , $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{|x|}{x}}$

4.13.- $\lim_{x\to\infty} \dfrac{sen\left(\dfrac{x+1}{x^2+3}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x+3}{x^2+7}\right)}$

4.14.- $\lim_{x\to\pi^+} \dfrac{sen(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}$

**5.-** Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

5.1.- $f(x)=x-|x|$

5.2.- $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

5.3.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & si \;\; x\neq 0 \\ 1 & si \;\; x=0 \end{cases}$

5.4.- $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$

5.5.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1} & si \;\; x\neq 1 \\ 0 & si \;\; x=1 \end{cases}$

5.6.- $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}} & si \;\; x\neq 0 \\ 1 & si \;\; x=0 \end{cases}$

**6.-** Utilizar el concepto de derivada de una función en un punto determinar las siguientes derivadas:

6.1.- $f^{'}(2)$ para $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}$

6.2.- $f^{'}(1)$ para $f(x)=\sqrt{1+3x}$

6.3.- $f^{'}(-1)$ para $f(x)=\dfrac{1}{x}$

6.4.- $f^{'}(0)$ para $f(x)=(1+x)^3$

**7.-** Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

7.1.- $f(x)=\left|x^2+x-2\right|$

7.2.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & si\ \ x\le 1\\ \dfrac{1}{x} & si\ \ x>1\end{cases}$

7.3.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cdot\left(1+e^{1/x}\right)}{\cos(1/x)} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$

7.4.- $f(x)=|x|\cdot\sqrt{x+1}$

7.5.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3^{1/x}-1} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$

7.6.- $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ \ x\neq 0\\ 0 & si\ \ x=0\end{cases}$

**8.-** Determinar $\alpha$ y $\beta$ de forma que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}2x+\alpha & si\ \ x<-1\\ \alpha x+\beta & si\ \ -1\le x<0\\ 3x^2+2 & si\ \ x\ge 0\end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$. Estudiar la derivabilidad de la función obtenida.

**9.-** Determinar $\alpha$ y $\beta$ de forma que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}x^2-5x+\alpha & si\ \ x\le 1\\ -x^2+\beta x & si\ \ x>1\end{cases}$$

sea derivable en $\mathbb{R}$.

**10.-** Sea la función *f(x)* definida en $\mathbb{R}$ por $f(x)=x^2-\mathrm{x}+1$. Demostrar que dicha función verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,1] y calcular el punto $x_0 \in (0,1)$ en el que $f'(x_0)=0$.

**11.-** Sea la función *f(x)* definida en $\mathbb{R}$ por $f(x)=x^2(\mathrm{x}^2-1)$. Demostrar que dicha función verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0,1] y calcular el punto $x_0 \in (0,1)$ en el que $f'(x_0)=0$.

**12.-** Determinar los valores $\alpha$ y $\beta$ de forma que la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} 5x+1 & si \;\; x<1 \\ \alpha x^2+\beta x-3 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0,\gamma]$ y calcular el punto $x_0 \in (0,\gamma)$ en el que $f'(x_0)=0$.

**13.-** Considérese la función *f(x)* definida en $[1,+\infty)$ por $f(x)=x+\log(x)$. Probar que dicha función verifica las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [1,10] y calcular el punto $x_0 \in (1,10)$ en el que

$$f'(x_0)=\frac{f(10)-f(1)}{10-1}=\frac{10}{9}.$$

**14.-** Considérese la función *f(x)* definida en $\mathbb{R}$ por $f(x)=1-x+e^x$. Probar que dicha función verifica las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [0,1] y calcular el punto $x_0 \in (0,1)$ en el que

$$f'(x_0)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-2.$$

**15.-** Determinar los valores $\alpha$ y $\beta$ de forma que la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x-3 & si \;\; x<4 \\ -x^2+10x-\beta & si \;\; x\geq 4 \end{cases}$$

verifique las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo [2,6] y calcular el punto $x_0 \in (2,6)$ en el que

$$f'(x_0) = \frac{f(6) - f(2)}{4}.$$

**16.-** Considérense las funciones *f(x)* y *g(x)* definidas en $\mathbb{R}$ por $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \cos(x)$. Aplicar a estas funciones el teorema del valor medio generalizado de Cauchy en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

**17.-** Resolver los siguientes límites mediante la regla de l´Hôpital:

17.1.- $\lim_{x \to 0} \left[x + \cos(x)\right]^{\frac{1}{x}}$

17.2.- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x} - 1}{x}$

17.3.- $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}\right]$

17.4.- $\lim_{x \to 0} \frac{sen(2x) + x}{sen(3x) - x}$

17.5.- $\lim_{x \to \pi/2} \left[sen^2(x)\right]^{tg^2(x)}$

17.6.- $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - sen(x)}$

17.7.- $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - x}{x - sen(x)}$

17.8.- $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$

**18.-** Sean las funciones *f(x)* y *g(x)* definidas en $\mathbb{R}$ por $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$ y $g(x) = \text{sen}(x)$.

**A)** Obtener el valor de $(g \circ f)'(1/2)$ sin hacer uso de la definición de $(g \circ f)$.

**B)** Hallar $(g \circ f)$ y comprobar el valor del apartado anterior haciendo uso de la definición de $(g \circ f)$.

**19.-** Sean las funciones *f(x)* y *g(x)* definidas en $\mathbb{R}$ por $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

**A)** Obtener el valor de $(g\circ f)'(1)$ sin hacer uso de la definición de $(g\circ f)$.

**B)** Hallar $(g\circ f)$ y comprobar el valor del apartado anterior haciendo uso de la definición de $(g\circ f)$.

**20.-** Considérese la función *f(x)* caracterizada por la aplicación biyectiva

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x)=\sqrt[5]{x+1} \end{array}$$

**A)** Determinar la derivada de $(f^{-1})'(f(x_0))$ para el punto interior $x_0=2$ sin recurrir a la definición de $f^{-1}$.

**B)** Hallar $f^{-1}$ y comprobar el resultado del apartado anterior haciendo uso de la definición de $f^{-1}$.

**21.-** Considérese la función *f(x)* caracterizada por la aplicación biyectiva

$$\begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \rightarrow & f(x)=x^3-1 \end{array}$$

**A)** Determinar la derivada de $(f^{-1})'(f(x_0))$ para el punto interior $x_0=-1/2$ sin recurrir a la definición de $f^{-1}$.

**B)** Hallar $f^{-1}$ y comprobar el resultado del apartado anterior haciendo uso de la definición de $f^{-1}$.

**22.-** Comprobar que la función *f(x)* definida en $(0,+\infty)$ por

$$y=f(x)=-x+x\cdot\ln(x)+x\cdot[\ln(x)]^2$$

verifica la ecuación diferencial

$$x^2\cdot y''-x\cdot y'+y=2x\,.$$

**23.-** Comprobar que la función *f(x)* definida en $\mathbb{R}$ por

$$y = f(x) = \frac{1}{5}e^{-x} + \frac{4}{5}e^{x} \cdot \cos(x) + \frac{7}{5}e^{x} \cdot sen(x)$$

verifica la ecuación diferencial

$$y''' - y'' + 2y = 0..$$

**24.-** Hallar de forma aproximada el valor de $\ln(5/2)$ utilizando el concepto de diferencial.

**25.-** Hallar de forma aproximada el valor de $\sqrt[3]{28}$ utilizando el concepto de diferencial.

**26.-** Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones:

26.1.- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

26.2.- $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

**27.-** Hallar los intervalos de concavidad y convexidad de las funciones:

27.1.- $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

27.2.- $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

**28.-** Determinar los puntos de inflexión de las funciones:

28.1.- $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$

28.2.- $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$

28.3.- $f(x) = x^3 \cdot e^x$

28.4.- $f(x) = x^4 \cdot e^x$

**29.-** Estudiar los intervalos de crecimiento o decrecimiento y los máximos y mínimo relativos de las funciones:

29.1.- $f(x) = x^2 - |x| + 2$

29.2.- $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$

**30.-** Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad de las funciones:

30.1.- $f(x) = e^{x^2-1}$

30.2.- $f(x) = x \cdot e^x$

**31.-** Hallar los puntos críticos y los extremos locales de las funciones:

31.1.- $f(x) = (1-x)(1+x)^2$

31.2.- $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$

31.3.- $f(x) = x\sqrt{x} - 6\sqrt{x}$

31.4.- $f(x) = (1-2x)(x-1)^3$

31.5.- $f(x) = |x-1| \cdot |x+2|$

31.6.- $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

**32.-** Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de la función $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

**33.-** Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de la función $f(x) = sen(2x) - x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

**34.-** Hallar los puntos críticos y clasificar los valores extremos de la función $f(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2\right)$ en el intervalo $[-2, +\infty)$.

**35.-** Trazar la gráfica de una función contínua $f(x)$ verificando:

a) $f(0) = 0$

b) $-2 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x$

c) $f'(x) > 0$ cuando $x \to 0^-$

d) $f'(x) < 0$ cuando $x \to 0^+$

**36.-** Trazar la gráfica de una función $f(x)$ dos veces diferenciable que cumpla las siguientes condiciones:

| x | y | Derivadas |
|---|---|---|
| x < 2 | | y' < 0, y" > 0 |
| 2 | 1 | y' = 0, y" > 0 |
| 2 < x < 4 | | y' > 0, y" > 0 |
| 4 | 4 | y' > 0, y" = 0 |
| 4 < x < 6 | | y' > 0, y" < 0 |
| 6 | 7 | y' = 0, y" < 0 |
| 6 < x | | y' < 0, y" < 0 |

**37.-** Hallar los valores de *a* y *b* para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tenga:

I) un máximo local en el punto x=1 y un mínimo local en el punto x=3

II) un mínimo local en el punto x=4 y un punto de inflexión en el punto x=1

**38.-** Determinar la función del tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de forma que la curva C definida por $y = f(x)$ verifique las siguientes condiciones:

i) la curva C para por el punto de coordenadas (-1,1) y tienen en él un extremo local

ii) la curva C pasa por el punto de coordenadas (0,1) y la tangente a C en dicho punto tiene pendiente $1/2$.

**39.-** Con una cartulina de dimensiones 8 x 5 m se desea construir una caja sin tapa de volumen máximo. Hallar las dimensiones de dicha caja.

**40.-** Un espejo plano de dimensiones 80 x 90 cm se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan el menor tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 10 y 12 cm (correspondientes, respectivamente, a los lados de 80 y 90 cm). Calcular las dimensiones máximas del espejo rectangular que se puede conseguir con el mayor de los trozos.

**41.-** Considérese una ventana que tiene forma de semicírculo montado sobre un rectángulo. El rectángulo es de cristal transparente mientras que el semicírculo es de un cristal de color que transmite la mitad de luz por unidad de área que el transparente. El perímetro total es fijo. Hallar las proporciones de la ventana para obtener la mayor cantidad de luz (no considerar el grosor del marco).

**42.-** Se tiene un cable de 4 m de largo para construir un círculo y un cuadrado: distribuir el cable entre las dos figuras para minimizar la suma de las áreas generadas.

**43.-** Se quiere edificar un silo, sin incluir la base, en forma de cilindro rematado por una semiesfera. El costo de la construcción por unidad de superficie para la semiesfera es el doble del costo que para la pared del cilindro. Determinar las dimensiones que han de usarse para obtener un volumen de 72000 $m^3$ y con un costo mínimo.

**44.-** Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2, ¿cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo? ¿Cuáles son sus dimensiones?