eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

DERIVACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

Dada la función

$$z = y^2 + 2\cdot f\left(\frac{1}{x} + \mathrm{L}y\right)$$

hallar el valor de la expresión:

$$E \equiv z'_y + \frac{x^2}{y}\cdot z'_x\,.$$

Solución:

Adaptaremos en primer lugar la notación a utilizar con el objetivo de visualizar fácilmente las variables que participan en el problema y las dependencias existentes.

1) En primer lugar z es una función de dos variables, x e y: $z = z(x, y)$
2) Ahora bien, las variables x e y son "variables finales" en el sentido de que antes interviene, por ejemplo, una función f función de una única variable

Si llamamos

$$\left.\begin{aligned} u = u(x,y) = y^2 \\ v = v(x,y) = \frac{1}{x} + Ly \end{aligned}\right\} \implies \quad z = z(u,v) = z(u(x,y),v(x,y)) = z(x,y) = u(x,y) + 2f(v(x,y))$$

de forma que el diagrama o árbol de dependencias quedaría de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[r] & y \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\
 & v \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta que cada camino posible hasta una "variable final" representará un sumando mientras que en cada desplazamiento en horizontal se considerará la regla de la cadena resulta que

$$z'_x = z'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{df}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 1\cdot 0 + 2f'(v)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$z'_y = z'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{df}{dv}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 1\cdot 2y + 2f'(v)\cdot\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$\implies \quad E \equiv z'_y(x,y) + \frac{x^2}{y}\cdot z'_x(x,y) = 2y + \frac{2}{y}f'(v) + \frac{\cancel{x^2}}{y}\cdot\frac{-2}{\cancel{x^2}}f'(v) = 2y + \cancel{\frac{2}{y}f'(v)} - \cancel{\frac{2}{y}f'(v)} = 2y$$

Grupo 01

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f(x,y,z) = L[g(x + y \cdot z)]$$

donde $\qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y \neq 0\right\}$

y *g(u)* es una función infinitamente derivable tal que $g(u) > 0 \quad \forall u$.

Obtener el valor de la expresión

$$E = z^2 \cdot f''_{x^2} - f''_{y^2} + \frac{1}{y} \cdot f'_z \,.$$

<u>Solución:</u>

Observamos en primer lugar que la función *g* es una función de una única variable, *t*, la cual a su ver depende de tres (*x*, *y* y *z*): para organizar al árbol o diagrama de dependencias haremos uso de esta variable auxiliar *t*.

$$u = f(x,y,z) = \mathrm{L}[g(x+yz)] \overset{t=x+yz}{=} \mathrm{L}[g(t)] = h(t)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & f & & h & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
x & & & & & & x \\
 & \nwarrow & & & & \nearrow & \\
y & \leftarrow & u & \rightarrow & t & \rightarrow & y \\
 & \swarrow & & & & \searrow & \\
z & & & & & & z
\end{array}$$

Según el esquema anterior, derivamos una primera vez para obtener las parciales de primer orden

$$f'_x = f'_x(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot 1 = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$f'_y = f'_y(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot z = z\,\frac{g'(t)}{g(t)}$$

$$f'_z = f'_z(x,y) = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{g'(t)}{g(t)} \cdot y = y\,\frac{g'(t)}{g(t)}$$

y derivaremos una segunda vez pero solo en los casos en los que precisamos derivada parcial segunda

$$f''_{x^2} = f''_{x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\dfrac{g'(t)}{g(t)}\right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{g''(t) \cdot g(t) - g'(t) \cdot g'(t)}{[g(t)]^2} \cdot 1 = \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}$$

$$f''_{y^2} = f''_{y^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(z\,\dfrac{g'(t)}{g(t)}\right)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = z\,\frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2} \cdot z = z^2\,\frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}$$

Sustituyendo en la expresión del enunciado

$$E = \underbrace{\cancel{z^2 \cdot \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}}}_{f''_{x^2}(x,y)} - \underbrace{\cancel{z^2 \cdot \frac{g''(t) \cdot g(t) - [g'(t)]^2}{[g(t)]^2}}}_{f''_{y^2}(x,y)} + \frac{1}{\cancel{y}} \cdot \underbrace{\cancel{y}\,\frac{g'(t)}{g(t)}}_{f'_z(x,y)} = \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{g'(x+yz)}{g(x+yz)}\,.$$

Grupo 01

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Se define la siguiente función

$$z = f(y) + e^x \cdot g(y-x) + e^{2y} \cdot h(x),$$

donde las funciones *f*, *g* y *h* son funciones tres veces derivables. Calcular el valor de la expresión

$$E = z'''_{xxy} + z'''_{xyy} - 2z''_{xx} - 3z''_{xy} + 2z'_x .$$

Solución:

Para la resolución del problema tendremos en cuenta que la función g es una función compuesta

$$g(u) \quad \text{donde} \quad u = u(x,y) = y - x$$

de forma que

$$u'_x = u'_x(x,y) = -1 \quad \text{y} \quad u'_y = u'_y(x,y) = 1 .$$

Derivando según los términos que aparecen en la expresión

$$z'_x = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = \frac{df(y)}{dx} + \frac{d(e^x)}{dx} \cdot g(u) + e^x \cdot \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{d(e^{2y})}{dx} \cdot h(x) + e^{2y} \cdot \frac{dh(x)}{dx} =$$

$$= 0 + e^x \cdot g(u) + e^x \cdot g'(u) \cdot (-1) + 0 \cdot h(x) + e^{2y} \cdot h'(x) = e^x g(u) - e^x g'(u) + e^{2y} h'(x)$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} = e^x g(u) - 2e^x g'(u) + e^x g''(u) + e^{2y} h''(x)$$

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = e^x g'(u) - 2e^x g''(u) + e^x g'''(u) + 2e^{2y} h''(x)$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y} = e^x g'(u) - e^x g''(u) + 2e^{2y} h'(x)$$

$$z'''_{xyy} = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y^2} = e^x g''(u) - e^x g'''(u) + 4e^{2y} h'(x)$$

Sustituyendo finalmente en la expresión *E*

$$E = \left[e^x g'(u) - 2e^x g''(u) \cancel{+ e^x g'''(u)} + 2e^{2y} h''(x) \right] + \left[e^x g''(u) \cancel{- e^x g'''(u)} + 4e^{2y} h'(x) \right] -$$

$$-2\left[\cancel{e^x g(u)} - 2e^x g'(u) + e^x g''(u) + e^{2y} h''(x) \right] - 3\left[e^x g'(u) - e^x g''(u) + 2e^{2y} h'(x) \right] +$$

$$+2\left[\cancel{e^x g(u)} - e^x g'(u) + e^{2y} h'(x) \right] =$$

$$= e^x g'(u)(1 + 4 - 3 - 2) + e^x g''(u)(-2 + 1 - 2 + 3) + e^{2y} h''(x)(2 + 4 - 2 - 6 + 2) = 0 .$$

Grupo 01

Considérese la función

$$\varphi(x,y,z) = x^2 + f(xy, -xz, g(xz,xy))$$

donde φ, f y g son funciones diferenciables. Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E \equiv \varphi'_x(1,1,1) - \varphi'_y(1,1,1) - \varphi'_z(1,1,1)\,.$$

Solución:

Consideremos las variables auxiliares

$$u = u(x,y,z) = x\cdot y\,,\qquad v = v(x,y,z) = -x\cdot z\,,\qquad w = w(x,y,z) = x\cdot z \qquad \text{y} \qquad t = g(w,u)$$

de forma que

$$f = f(u,v,t)$$

$$f\ :\ \begin{array}{l} u \begin{array}{l} \nearrow x \\ \searrow y \end{array} \\ v \begin{array}{l} \nearrow x \\ \searrow z \end{array} \\ t \begin{array}{l} \nearrow w \begin{array}{l} \nearrow x \\ \to z \end{array} \\ \searrow u \begin{array}{l} \to x \\ \searrow y \end{array} \end{array} \end{array}$$

Según el esquema anterior

$$\varphi'_x(x,y,z) = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{\partial f(u,v,t)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v,t)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial x} +$$

$$+\frac{\partial f(u,v,t)}{\partial t}\left[\frac{\partial t(w,u)}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial t(w,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\right] = 2x + y\cdot f'_u - z\cdot f'_v + f'_t\cdot\left(z\cdot g'_w + y\cdot g'_u\right)$$

$$\varphi'_y(x,y,z) = \frac{d(x^2)}{dy} + \frac{\partial f(u,v,t)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v,t)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial y} +$$

$$+\frac{\partial f(u,v,t)}{\partial t}\left[\frac{\partial t(w,u)}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial t(w,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\right] = 0 + x\cdot f'_u + 0\cdot f'_v + f'_t\cdot\left(0\cdot g'_w + x\cdot g'_u\right)$$

Grupo 01

$$\varphi'_z(x,y,z)=\frac{d(x^2)}{dz}+\frac{\partial f(u,v,t)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial f(u,v,t)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}+$$

$$+\frac{\partial f(u,v,t)}{\partial t}\left[\frac{\partial t(w,u)}{\partial w}\cdot\frac{\partial w(x,y,z)}{\partial z}+\frac{\partial t(w,u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right]=0+0\cdot f'_u-x\cdot f'_v+f'_t\cdot\left(x\cdot g'_w+0\cdot g'_u\right)$$

Sustituyendo en la expresión E y evaluando en el punto (1,1,1)

$$E\equiv\varphi'_x(1,1,1)-\varphi'_y(1,1,1)-\varphi'_z(1,1,1)=$$

$$=\left\{2\cdot 1+1\cdot f'_u(1,-1,g(1,1))-1\cdot f'_v(1,-1,g(1,1))+f'_t(1,-1,g(1,1))\cdot\left[1\cdot g'_w(1,1)+1\cdot g'_u(1,1)\right]\right\}+$$

$$-\left\{1\cdot f'_u(1,-1,\mathrm{g}(1,1))+f'_t(1,-1,\mathrm{g}(1,1))\cdot\left[1\cdot g'_u(1,1)\right]\right\}-\left\{-1\cdot f'_v(1,-1,g(1,1))+f'_t(1,-1,g(1,1))\cdot\left[1\cdot g'_w(1,1)\right]\right\}=$$

$$=2+f'_u(1,-1,g(1,1))\cdot\left(1-1\right)+f'_v(1,-1,g(1,1))\cdot\left(-1+1\right)+f'_t(1,-1,g(1,1))\cdot\left[g'_w(1,1)\cdot(1-1)+g'_u(1,1)\cdot(1-1)\right]=2$$

Grupo 01

Calcular las derivadas parciales de primer orden de la siguiente función

$$w(x,y,z)=\cos(x\cdot z)+f\left(x^2+2x\cdot y,y^2\cdot\cos(2y\cdot z)\right).$$

Solución:

Considerando las "variables intermedias" o "variables de paso"

$$\begin{cases} u=u(x,y,z)=x^2+2x\cdot y \\ v=v(x,y,z)=y^2\cdot\cos\ 2y\cdot z \end{cases}$$

la función *f*, función de dos variables iniciales y tres variables finales, quedaría en la forma

$$f=f\left(u,v\right)=f\left(u(x,y,z),v(x,y,z)\right)=f\left(x^2+2x\cdot y\ ,\ y^2\cdot\cos(2y\cdot z)\right)=f(x,y,z)$$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & x \\ & & & \nearrow & \\ & & u & \rightarrow & y \\ & \nearrow & & \searrow & \\ & & & & z \\ f & & & & \\ & & & & x \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & v & \rightarrow & y \\ & & & \searrow & \\ & & & & z \end{array}$$

Teniendo en cuenta las expresiones de *u* y *v* se calculan sus derivadas parciales

$$\begin{cases} u'_x=u'_x(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}=2x+2y \\ u'_y=u'_y(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=2x \\ u'_z=u'_z(x,y,z)=\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_x=v'_x(x,y)=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial x}=0 \\ v'_y=v'_y(x,y)=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial y}=2y\cdot cos(2yz)-y^2\cdot 2z\cdot sen(2yz) \\ v'_z=v'_z(x,y)=\dfrac{\partial v(x,y,z)}{\partial z}=-y^2\cdot 2y\cdot sen(2yz) \end{cases}$$

y, por último, cada camino posible hasta una "variable final" representará un sumando mientras que en cada desplazamiento en horizontal se considerará la regla de la cadena, resulta que

$$\begin{aligned} w'_x=w'_x(x,y,z)&=-z\cdot sen(xz)+f'_u(u,v)\cdot u'_x(x,y,z)+f'_v(u,v)\cdot v'_x(x,y,z)= \\ &=-z\cdot sen(xz)+f'_u(u,v)\cdot(2x+2y)+f'_v(u,v)\cdot 0= \\ &=-z\cdot sen(xz)+2(x+y)\cdot f'_u(u,v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w'_y=w'_y(x,y,z)&=0+f'_u(u,v)\cdot u'_y(x,y,z)+f'_v(u,v)\cdot v'_y(x,y,z)= \\ &=f'_u(u,v)\cdot 2x+f'_v(u,v)\cdot\left[2y\cdot cos(2yz)-y^2\cdot 2z\cdot sen(2yz)\right]= \end{aligned}$$

Grupo 01

$$= 2x \cdot f'_u(u,v) + 2y \cdot \cos(2yz) - yz \cdot \mathrm{sen}(2yz) \cdot f'_v(u,v)$$

$$w'_z = w'_z(x,y,z) = -x \cdot \mathrm{sen}(xz) + f'_u(u,v) \cdot u'_z(x,y,z) + f'_v(u,v) \cdot v'_z(x,y,z) =$$

$$= -x \cdot \mathrm{sen}(xz) + f'_u(u,v) \cdot 0 + f'_v(u,v) \cdot \left[-y^2 \cdot 2y \cdot \mathrm{sen}(2yz)\right] =$$

$$= -x \cdot \mathrm{sen}(xz) - 2y^3 \cdot \mathrm{sen}(2yz) \cdot f'_v(u,v)$$

Grupo 01

eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

ANÁLISIS MATEMÁTICO

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Calcular el valor de la siguiente expresión

$$E = x \cdot w'_x - y \cdot w'_y + \frac{1}{2} z \cdot w'_z$$

en el caso

$$w(x,\ y,\ z) = z^m \cdot f\left(y \cdot x, \frac{x}{z^2}\right).$$

Solución:

Mientras que w es una función real de tres variables reales, para definirla se utiliza una función f de dos variables reales, u y v, las cuales a su vez dependen de tres, x, y y z. Gráficamente el esquema de dependencias que tenemos en este problema es del tipo

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & z & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
w & & & & & \nearrow & x \\
 & & & & u & \rightarrow & y \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & z \\
 & & f & & & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & x \\
 & & & & v & \rightarrow & y \\
 & & & & & \searrow & z
\end{array},$$

y analíticamente

$$w = w(x, y, z) = z^m \cdot f(u, v) = z^m \cdot f\left(u(x, y, z), v(x, y, z)\right) = \phi(x, y, z)$$

donde

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) = y \cdot x \\ v = v(x,y,z) = \dfrac{x}{z^2} \end{cases}.$$

Consecuentemente

$$w'_x = w'_x(x,y,z) = \frac{d(z^m)}{dx} \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot u'_x(x,y,z) + f'_v(u,v) \cdot v'_x(x,y,z) \right] =$$

$$= 0 \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot y + f'_v(u,v) \cdot \frac{1}{z^2} \right] = yz^m \cdot f'_u(u,v) + z^{m-2} \cdot f'_v(u,v)$$

$$w'_y = w'_y(x,y,z) = \frac{d(z^m)}{dy} \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot u'_y(x,y,z) + f'_v(u,v) \cdot v'_y(x,y,z) \right] =$$

$$= 0 \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot x + f'_v(u,v) \cdot 0 \right] = xz^m \cdot f'_u(u,v)$$

$$w'_z = w'_z(x,y,z) = \frac{d(z^m)}{dz} \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot u'_z(x,y,z) + f'_v(u,v) \cdot v'_z(x,y,z) \right] =$$

$$= mz^{m-1} \cdot f(u,v) + z^m \cdot \left[f'_u(u,v) \cdot 0 + f'_v(u,v) \cdot \frac{-2x}{z^3} \right] = mz^{m-1} \cdot f(u,v) - 2xz^{m-3} \cdot f'_v(u,v)$$

Solo falta sustituir estas derivadas en la expresión E y simplificar

$$E = x\left[\cancel{yz^m f'_u(u,v)} + \cancel{z^{m-2} f'_v(u,v)} \right] - y\left[\cancel{xz^m f'_u(u,v)} \right] + \frac{1}{2} z \left[mz^{m-1} f(u,v) - \cancel{2xz^{m-3} f'_v(u,v)} \right] = \frac{1}{2} mz^m f(u,v)$$

Grupo 01

Calcular las derivadas parciales de primer orden de la siguiente función

$$w(x,y,z) = \mathrm{L}(z)\cdot f\left(2z, \mathrm{sen}(y^2)\right) + \frac{\mathrm{sen}^2(y)}{g\left(\mathrm{arctg}(x)\right)} .$$

Solución:

En la definición de la función que *w*, función real de tres variables reales, aparecen referenciadas dos funciones *f* y *g*: la función *f* es una función real de dos variables reales mientras que la función *g* es una función real de una variable real

$$w = w(x,y,z) = \mathrm{L}(z)\cdot f(u,v) + \frac{\mathrm{sen}^2(y)}{g(t)} = \mathrm{L}(z)\cdot f\left(u(x,y,z), v(x,y,z)\right) + \frac{\mathrm{sen}^2(y)}{g\left(t(x,y,z)\right)}$$

donde

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) = 2z \\ v = v(x,y,z) = \mathrm{sen}(y^2) \end{cases}, \qquad t = t(x,y,z) = arctg(x) .$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores

$$w'_x = w'_x(x,y,z) = -\frac{g'(t)}{[g(t)]^2}\cdot \mathrm{sen}^2(y)\cdot t'(x) = -\frac{\mathrm{sen}^2(y)}{1+x^2}\frac{g'(t)}{[g(t)]^2}$$

$$w'_y = w'_y(x,y,z) = L(z)\cdot f'_v(u,v)\cdot v'_y(x,y,z) + \frac{2\mathrm{sen}(y)\cdot \cos(y)}{g(t)} = 2y\cdot\cos(y^2)\cdot L(z)\cdot f'_v(u,v) + \frac{\mathrm{sen}(2y)}{g(t)}$$

$$w'_z = w'_z(x,y,z) = \frac{1}{z}\cdot f(u,v) + L(z)\cdot 2\cdot f'_u(u,v) = \frac{f(u,v)}{z} + 2L(z)\cdot f'_u(u,v)$$

Grupo01