FUNCIONES ELEMENTALES

1.- FUNCIÓN POTENCIAL.

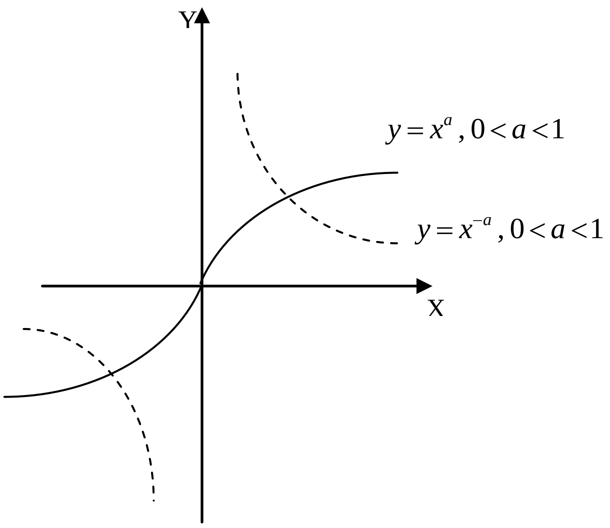
Distinguiremos dos casos a la hora de señalar las características de la función potencial $y = x^a$.

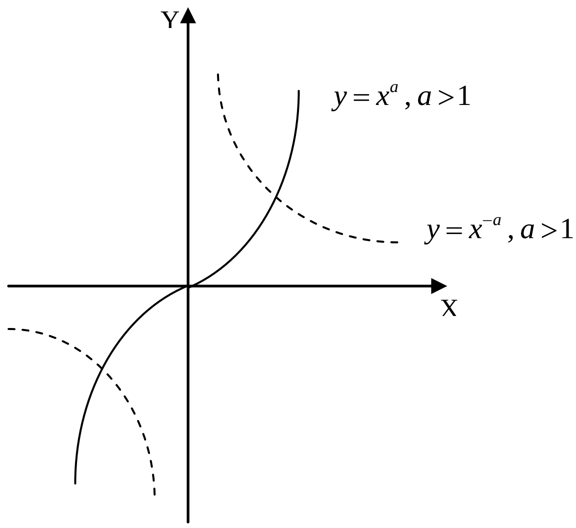
1.1. <u>Funciones potenciales con exponente racional.</u>

$y = x^a$ con $a = \dfrac{p}{q}$ irreducible, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$.

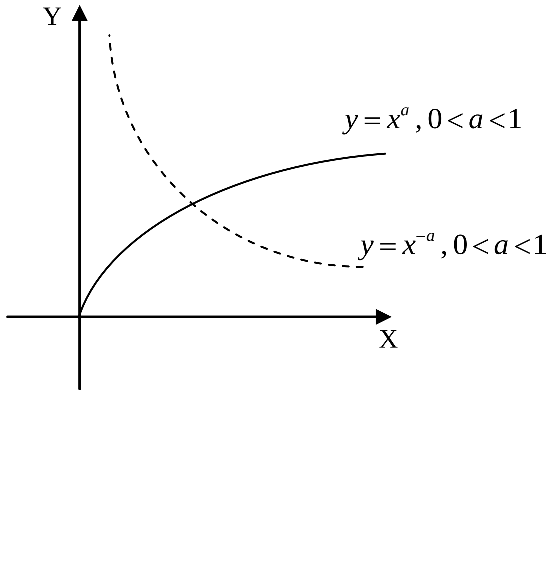
Según si p y q son impar o par, el dominio de definición de esta función así como los valores que tome varían. Así, tendremos los siguientes casos:

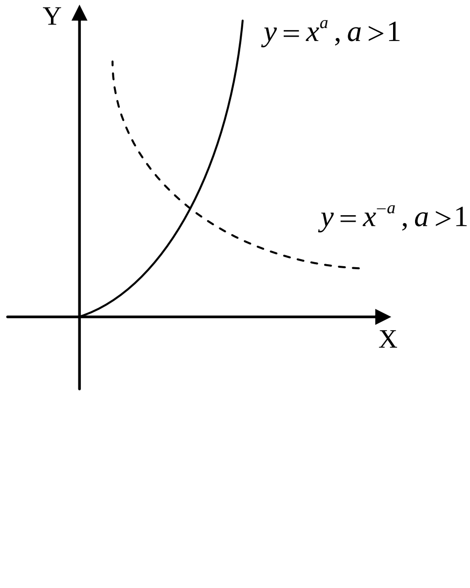
Si p y q impares $\Rightarrow$ $D = \mathbb{R}$ $(a < 0 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{0\})$ e $y \in \mathbb{R}$



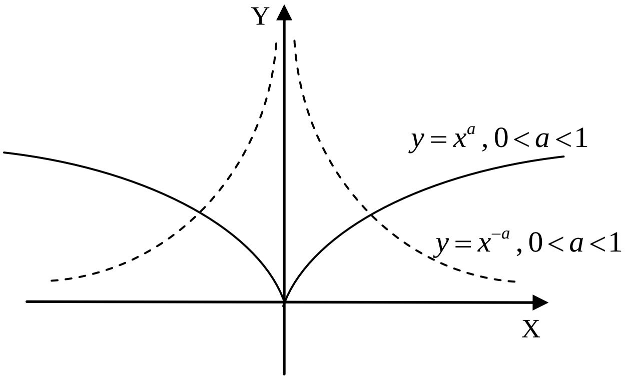


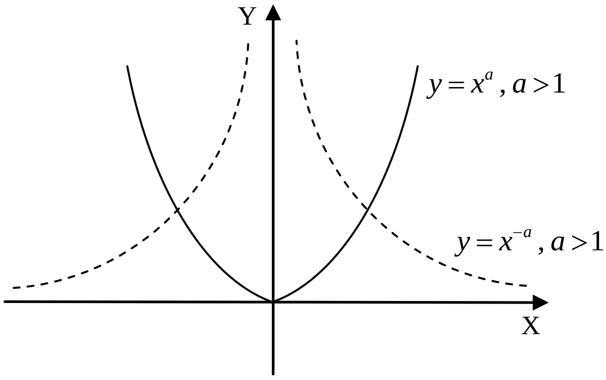
Si p impar y q par $\Rightarrow$ $D = [0, \infty)$ $(a < 0 \Rightarrow D = (0, \infty))$ e $y \geq 0$





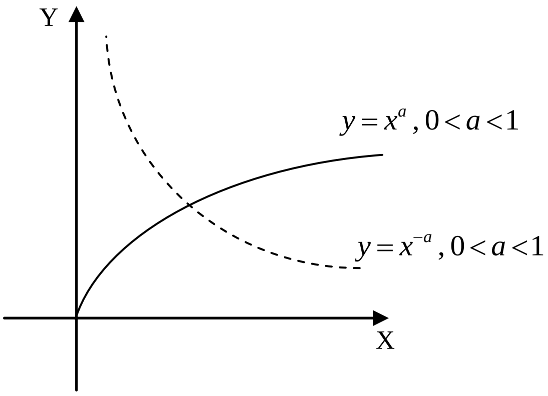
Si p par y q impar $\Rightarrow$ $D=\mathbb{R}$ $(a<0 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{0\})$ e $y\in[0,\infty)$

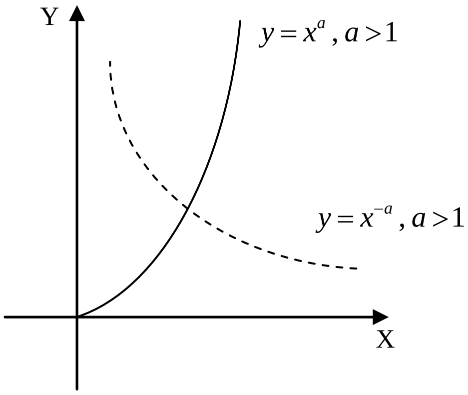




1.2.- <u>Funciones potenciales con exponente irracional.</u>

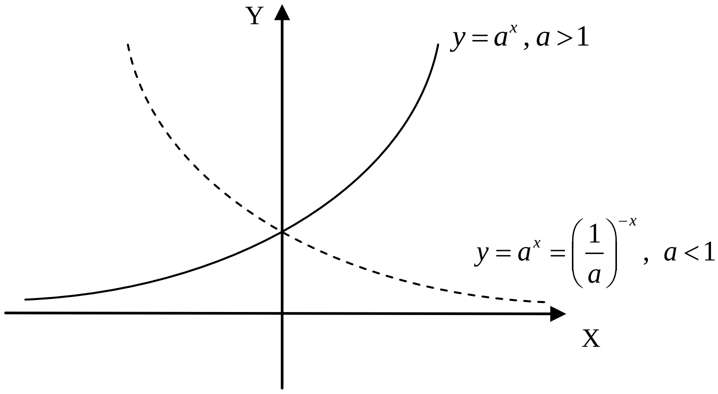
$y=x^a$ con a irracional. En este caso, si $a>0 \Rightarrow D=[0,\infty)$ y si $a<0 \Rightarrow D=(0,\infty)$.





2.- FUNCIÓN EXPONENCIAL

$y=a^x$, con $a>0$. El dominio de estas funciones es $D=\mathbb{R}$ y sus imágenes $y\in(0,\infty)$.



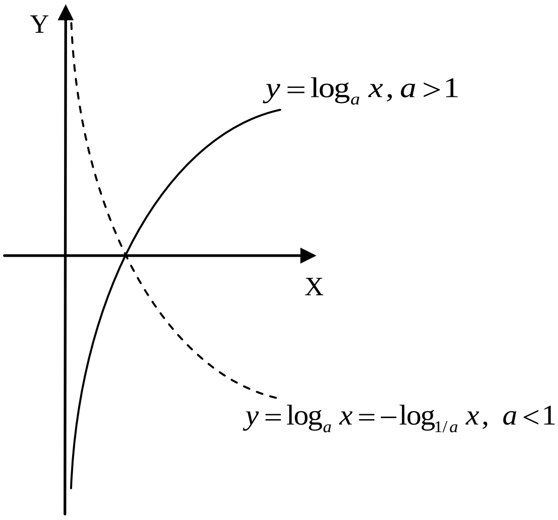
Las propiedades fundamentales de esta función son las siguientes:

- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^0 = 1$
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$

3.- FUNCIÓN LOGARÍTMICA

$y = \log_a x \quad \Leftrightarrow \quad x = a^y \quad$ con $a > 0$ y $a \neq 1$.

Estas funciones están definidas en el dominio $D = (0, \infty)$ y $y \in \mathbb{R}$.



Si $a = e \quad \Rightarrow \quad y = \log_e x = \mathrm{L}x$ es el logaritmo neperiano (o natural).

Y $\forall a > 0, a \neq 1, \quad y = \log_a x = \dfrac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}a} \quad \forall x > 0$

Las propiedades fundamentales del logaritmo neperiano son las siguientes:

- $\mathrm{L}1 = 0$
- $\mathrm{L}(a \cdot b) = \mathrm{L}(a) + \mathrm{L}(b) \quad \forall a, b > 0$
- $\mathrm{L}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \mathrm{L}(a) - \mathrm{L}(b) \quad \forall a, b > 0$
- $\mathrm{L}\left(a^b\right) = b \cdot \mathrm{L}(a) \quad \forall a > 0$

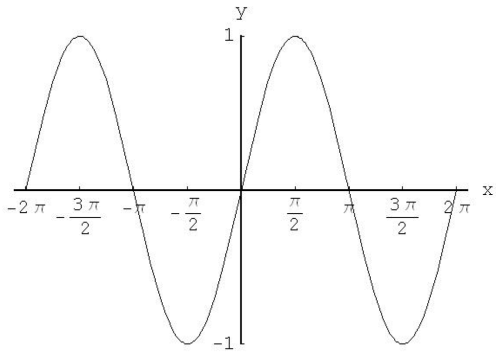
4.- FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Estas funciones son seno, coseno y tangente, y asignan al número real x la razón trigonométrica correspondiente al ángulo de x radianes.

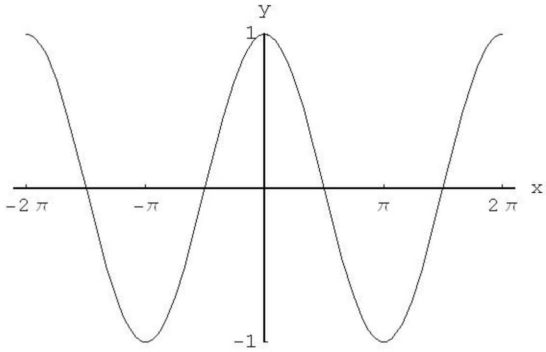
Los datos fundamentales son los siguientes:

$y = \sin x$ e $y = \cos x$ son periódicas de periodo 2π, están definidas en $D = \mathbb{R}$ y sus imágenes $y \in [-1,1]$.

$y = \sin x$

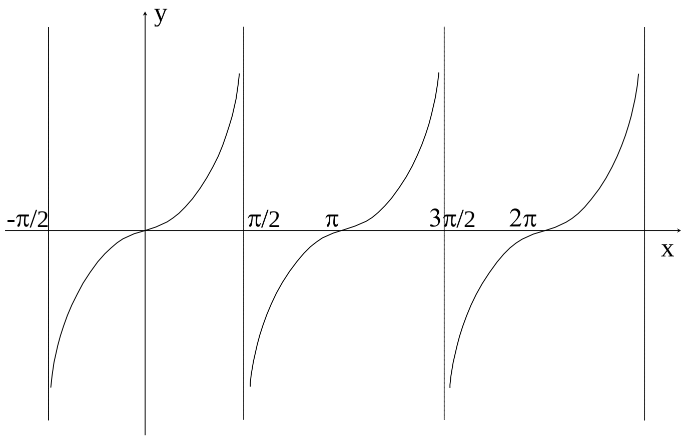


$y = \cos x$



Por su parte, $y = \tan x$ es periódica con periodo π, está definida en $D = \mathbb{R} - \left\{ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$ y su conjunto imagen es todo $\mathbb{R}$.

$y = \tan x$



Algunas fórmulas que verifican estas funciones son:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

Y de ellas se deducen:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$$

$$2\sin x \cdot \cos x = \sin(2x)$$

También tenemos las inversas de las funciones que acabamos de definir, cosecante (csc), secante (sec) y cotangente (cot):

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \qquad y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{eta} \qquad y = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

4.1.- Funciones trigonométricas recíprocas. Gráficas.

Como las funciones trigonométricas no son biyectivas, para definir sus recíprocas se tiene en cuenta las siguientes restricciones:

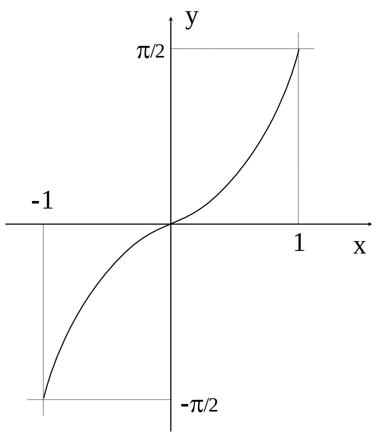
$y = \arcsin x \quad (\Leftrightarrow x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$

(arco seno)

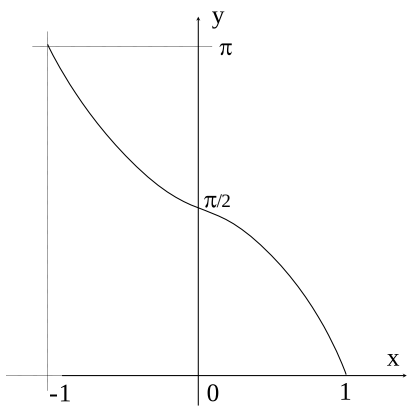
$y = \arccos x \quad (\Leftrightarrow x = \cos y, 0 \le y \le \pi)$

(arco coseno)

$y = \arcsin x$



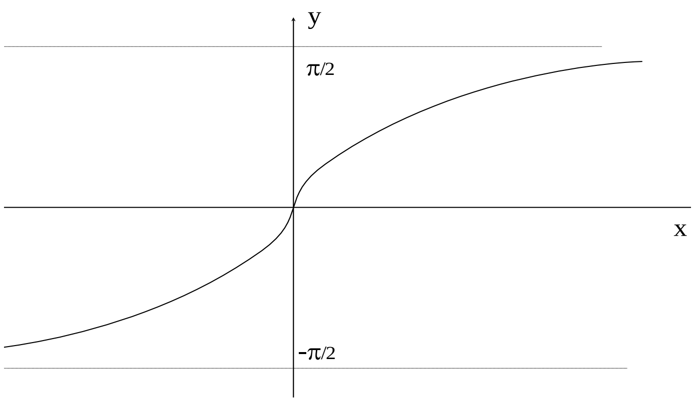
$y = \arccos x$



$y = \arctan x \quad (\Leftrightarrow x = \tan y, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2})$

(arco tangente)

$y = \arctan x$



5.- FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Se denominan *funciones hiperbólicas* a las funciones definidas en el campo real en la forma siguiente:

Seno hiperbólico de *x*: $\mathrm{Sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Coseno hiperbólico de *x*: $\mathrm{Ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Tangente hiperbólica de *x*: $\mathrm{Th}x = \dfrac{\mathrm{Sh}x}{\mathrm{Ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Cosecante hiperbólica de *x*: $\mathrm{Csch}x = \dfrac{1}{\mathrm{Sh}x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Secante hiperbólica de *x*: $\mathrm{Sch}x = \dfrac{1}{\mathrm{Ch}x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

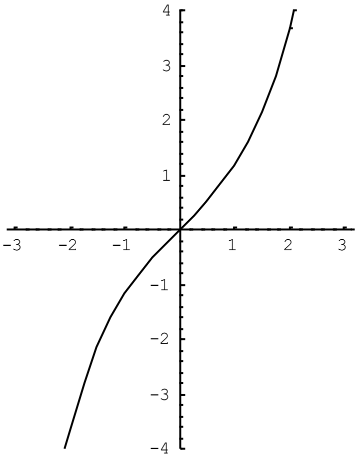
Cotangente hiperbólica de *x*: $\mathrm{Cth}x = \dfrac{1}{\mathrm{Th}x} = \dfrac{\mathrm{Ch}x}{\mathrm{Sh}x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Al igual que las funciones trigonométricas, las funciones hiperbólicas verifican algunas fórmulas fundamentales:

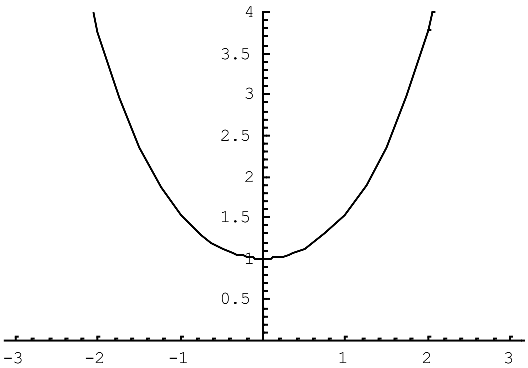
$$\mathrm{Ch}^2 x - \mathrm{Sh}^2 x = 1$$
$$\mathrm{Sh}(-x) = -\mathrm{Sh}x$$
$$\mathrm{Ch}(-x) = \mathrm{Ch}x$$
$$\mathrm{Th}(-x) = -\mathrm{Th}x$$
$$\mathrm{Sh}(x \pm y) = \mathrm{Sh}x \cdot \mathrm{Ch}y \pm \mathrm{Ch}x \cdot \mathrm{Sh}y$$
$$\mathrm{Ch}(x \pm y) = \mathrm{Ch}x \cdot \mathrm{Ch}y \pm \mathrm{Sh}x \cdot \mathrm{Sh}y$$

Gráficas de las funciones hiperbólicas

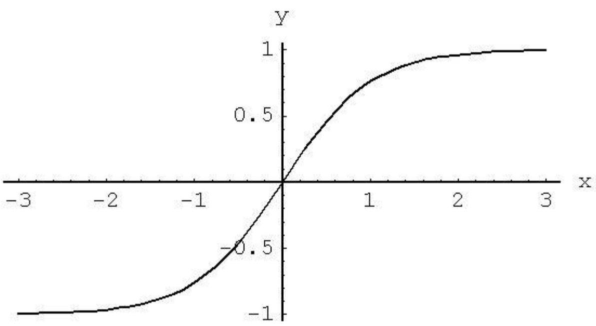
$y = \mathrm{Sh}x$



$y = \mathrm{Ch}x$ (Catenaria)

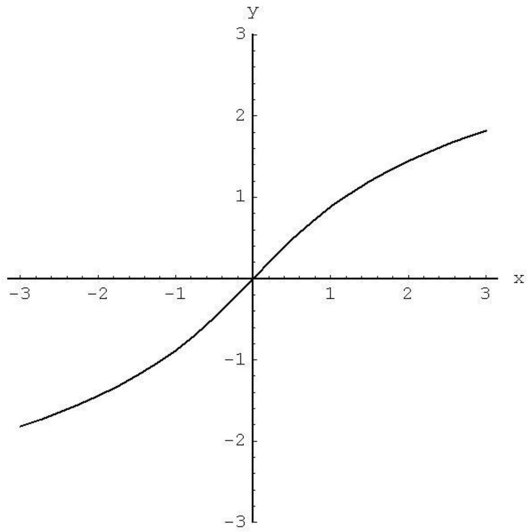


$y = \mathrm{Th}x$

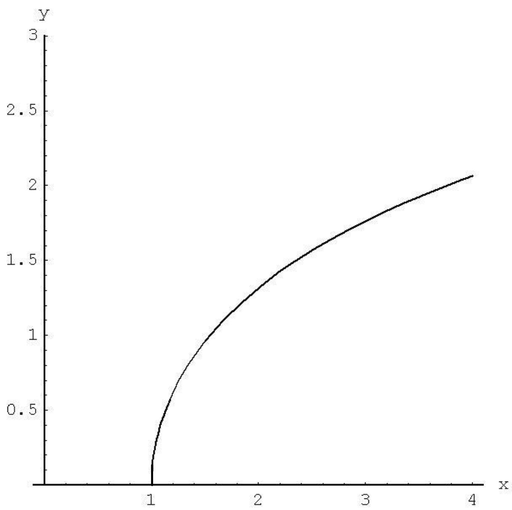


5.1.- Funciones hiperbólicas recíprocas. Gráficas.

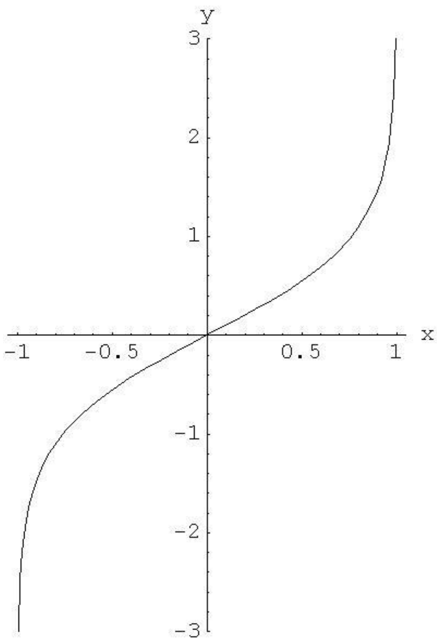
$$y = \text{ArgSh}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{Sh}y$$



$$y = \text{ArgCh}x \quad (y \geq 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = C\text{h}y$$



$$y = \text{ArgTh}x \quad \Leftrightarrow \quad x = \text{Th}y$$



6.- VALOR ABSOLUTO

Dado un número real *x*, se denomina *valor absoluto* de *x* al número dado por la expresión $|x|$ y definido como sigue:

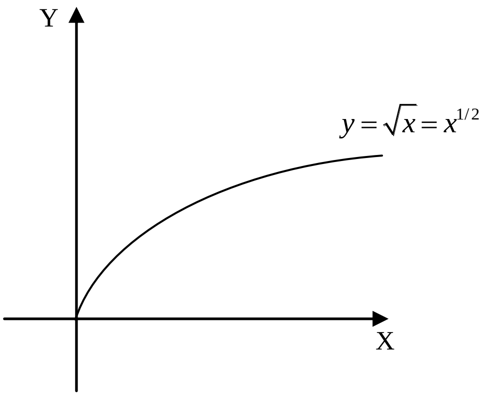
$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ -x & \forall x \leq 0 \end{cases} = \max\{x, -x\}$$

Esta función verifica las siguientes propiedades:

- $|x| > 0 \quad \forall x \neq 0$
- $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

- $|x| < a \quad \Leftrightarrow \quad -a < x < a \quad \forall a > 0$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Nota: Tal y como fácilmente se observa en su gráfica (que ya se representó al definir las funciones potenciales), $\sqrt{x} > 0 \quad \forall x > 0$.



Y esta idea coincide con la definición dada ahora. Debe quedar claro, por lo tanto, que $\sqrt{x^2} = x \quad \Leftrightarrow \quad x > 0$. Y, en general, $\sqrt{x^2} = |x|$.