EJERCICIOS TEMA 1

1.- Hallar el módulo y el argumento de los siguientes números complejos:

1.1.- $(1+\sqrt{3}\,i)^2$

1.2.- $\dfrac{1+i}{1-i}$

1.3.- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

1.4.- $(2+3i)\cdot(1-2i)$

2.- Calcular:

2.1.- $1-i^{200}$

2.2.- $(1-i)^{200}$

2.3.- $\dfrac{8}{(1-i)^5}$

2.4.- $\dfrac{1+i^{100}}{(1+i)^{100}}$

2.5.- $\dfrac{1-i^{257}}{(1-\sqrt{3}\,i)^{12}}$

2.6.- $(1-i)^i$

2.7.- $\sqrt{1-i}$

2.8.- $(1+\sqrt{3}\,i)^{3/4}$

2.9.- i^i

2.10.- $\ln(1-i)$

2.11.- $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}\,i}$

2.12.- $(1-i)^{2/3}$

2.13.- $\left[\cos(2\pi/7)+i\cdot \mathrm{sen}(2\pi/7)\right]^7$

2.14.- $\sqrt{3+4i}$

2.15.- $\sqrt[4]{-3+3\sqrt{3}\,i}$

3.- Hallar las soluciones de las siguientes ecuaciones algebraicas:

3.1.- $x^7 + 1 = 0$

3.2.- $3x^5 - 13x^4 + 22x^3 - 18x^2 - 41x + 15 = 0$

3.3.- $2x^4 - (5 - 8i)x^3 - (2 + 18i)x^2 + (8 + 13i)x - (3 + 3i) = 0$

3.4.- $x^3 + i = 0$

3.5.- $x^6 + 2x^3 + 2 = 0$

3.6.- $x^5 - 1 = 0$

3.7.- $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 8x + 6 = 0$

3.8.- $x^7 - 9x^4 + 8x = 0$

3.9.- $x^4 - i = 0$

3.10.- $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$

SOLUCIONES - EJERCICIOS TEMA 1

1.-

1.1.- $-2+2\sqrt{3}\,i = 4_{2\pi/3}$

1.2.- $i = 1_{\pi/2}$

1.3.- $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{2\pi/3}$

1.4.- $8-i = \sqrt{65}_{-\mathrm{arctg}(1/8)}$

2.-

2.1.- 0

2.2.- 2^{100}

2.3.- $-1-i$

2.4.- -2^{-49}

2.5.- $\dfrac{1-i}{2^{12}}$

2.6.- $e^{(\pi/4)-2k\pi}\cdot\left[\cos(\ln\sqrt{2})+i\,\mathrm{sen}(\ln\sqrt{2})\right]$ con $k\in\mathbb{Z}$

2.7.- $\sqrt[4]{2}\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{8}+k\cdot\pi\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\dfrac{\pi}{8}+k\cdot\pi\right)\right]$ con $k=0,1$

2.8.- $\sqrt[4]{2^3}\cdot\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\cdot\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\cdot\pi}{2}\right)\right]$ con $k=0,1,2,3$

$\sqrt[4]{2}\cdot(1+i)$, $\sqrt[4]{2}\cdot(-1+i)$, $\sqrt[4]{2}\cdot(-1-i)$, $\sqrt[4]{2}\cdot(1-i)$

2.9.- $e^{-[(\pi/2)+2k\pi]}$ con $k\in\mathbb{Z}$

2.10.- $\ln\sqrt{2}+i\cdot\left(-\dfrac{\pi}{4}+2k\cdot\pi\right)$ con $k\in\mathbb{Z}$

2.11.- $\sqrt[3]{2}\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2k\cdot\pi}{3}\right)\right]$ con $k=0,1,2$

2.12.- $\sqrt[3]{2}\cdot\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\cdot\pi}{3}\right)\right]$ con $k=0,1,2$

$2^{-2/3}\cdot(\sqrt{3}-i)$, $2^{1/3}i$, $2^{-2/3}\cdot(-\sqrt{3}-i)$

2.13.- 1

2.14.- $2+i, \quad -2-i$

2.15.- $\sqrt[4]{6}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\cdot\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\cdot\pi}{2}\right)\right]$ con $k=0,1,2,3$

$$\sqrt[4]{6}\cdot(\sqrt{3}+i)/2, \quad \sqrt[4]{6}\cdot(-1+\sqrt{3}i)/2, \quad \sqrt[4]{6}\cdot(-\sqrt{3}-i)/2, \quad \sqrt[4]{6}\cdot(1-\sqrt{3}i)/2$$

3.-

3.1.- $x^7+1=(x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$1_{\frac{\pi+2k\pi}{7}} \quad \text{con } k=0,1,2,3,4,5,6$$

3.2.- $3x^5-13x^4+22x^3-18x^2-41x+15=3(x+1)(x-3)(x-1/3)(x^2-2x+5)$

$$-1, \quad 3, \quad 1/3, \quad 1+2i, \quad 1-2i$$

3.3.- $2x^4-(5-8i)x^3-(2+18i)x^2+(8+13i)x-(3+3i)=$

$$=2(x-1)(x-1/2)(x+3i)[x+(-1+i)]$$

$$1, \quad 1/2, \quad -3i, \quad -1+i$$

3.4.- $x^3+i=(x-i)(x^2+i\cdot x-1)$

$$1\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)\right] \quad \text{con } k=0,1,2$$

$$(\sqrt{3}-i)/2, \quad i, \quad (-\sqrt{3}-i)/2$$

3.5.- $x^6+2x^3+2=0$

$$\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)\right] \quad \text{con } k=0,1,2$$

y

$$\sqrt[6]{2}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{2k\cdot\pi}{3}\right)\right] \quad \text{con } k=0,1,2$$

3.6.- $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$1_{\frac{2k\pi}{5}} \quad \text{con } k=0,1,2,3,4$$

3.7.- $2x^4-3x^3-7x^2-8x+6=2(x-3)(x-1/2)(x^2+2x+2)$

$$3, \quad 1/2, \quad -1+i, \quad -1-i$$

3.8.- $x^7-9x^4+8x=x(x^6-9x^3+8)=x(x-1)(x-2)(x^2+x+1)(x^2+2x+4)$

$$0$$

$$2_{\frac{2k\pi}{3}} \qquad \text{con } k=0,1,2: \quad 2, \quad -1+\sqrt{3}\,i, \quad -1-\sqrt{3}\,i$$

$$1_{\frac{2k\pi}{3}} \qquad \text{con } k=0,1,2: \quad 1, \quad (-1+\sqrt{3}\,i)/2, \quad (-1-\sqrt{3}\,i)/2$$

3.9.- $x^4 - i = 0$

$$1_{\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}} \qquad \text{con } k=0,1,2,3$$

3.10.- $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$

$$\sqrt{2}_{\frac{\pi}{6}+k\pi} \qquad \text{con } k=0,1: \quad (\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}, \quad -(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}_{-\frac{\pi}{6}+k\pi} \qquad \text{con } k=0,1: \quad (\sqrt{3}-i)/\sqrt{2}, \quad -(\sqrt{3}-i)/\sqrt{2}$$