DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

0.- INTRODUCCION.

Sea E_2 el espacio vectorial de los vectores geométricos libres de dimensión 2, en él se considera el producto escalar:

$$\begin{array}{ccc} E_2 x E_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \rightarrow & \langle \vec{u},\vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\,\theta, \quad \theta = ang(\vec{u},\vec{v}) \end{array},$$

Tomando en E_2 la base $B = \vec{i},\vec{j}$ ($\vec{i}$ vector unitario dirección OX^+, $\vec{j}$ vector unitario dirección OY^+), la matriz del producto escalar es $G = \begin{pmatrix} \langle \vec{i},\vec{i} \rangle & \langle \vec{i},\vec{j} \rangle \\ \langle \vec{j},\vec{i} \rangle & \langle \vec{j},\vec{j} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, en la base *B* la expresión matricial del producto escalar $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\,\theta, \quad \theta = ang(\vec{u},\vec{v})$ es

$$\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \; u_1 \quad u_2 \; \mathrm{I} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2, \text{ siendo } \vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}\,,\ \vec{v} = v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j}\,.$$

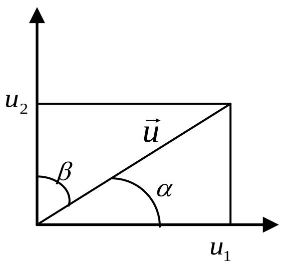
Por comodidad/simplicidad si $\vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j}$, escribiremos $\vec{u} = (u_1, u_2)$, sobrentendiéndose que se trabaja en la base $B = \vec{i},\vec{j}$.

La norma inducida por el producto escalar es

$$\begin{array}{ccc} E_2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \vec{u} = (u_1,u_2) & \rightarrow & \|\vec{u}\| = |\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2} \end{array}.$$

Un vector $\vec{u} = (u_1,u_2) \in E_2$ es unitario si su norma es 1, es decir si $(u_1)^2 + (u_2)^2 = 1$.

Si el vector unitario $\vec{u} = (u_1,u_2)$ forma con los ejes OX y OY los ángulos α y β, respectivamente,



entonces:

$$\begin{cases} u_1 = |\vec{u}| \cos\alpha = \cos\alpha \\ u_2 = |\vec{u}| \sin\alpha = \cos\beta = \sin\alpha \end{cases}$$

1.- DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES.

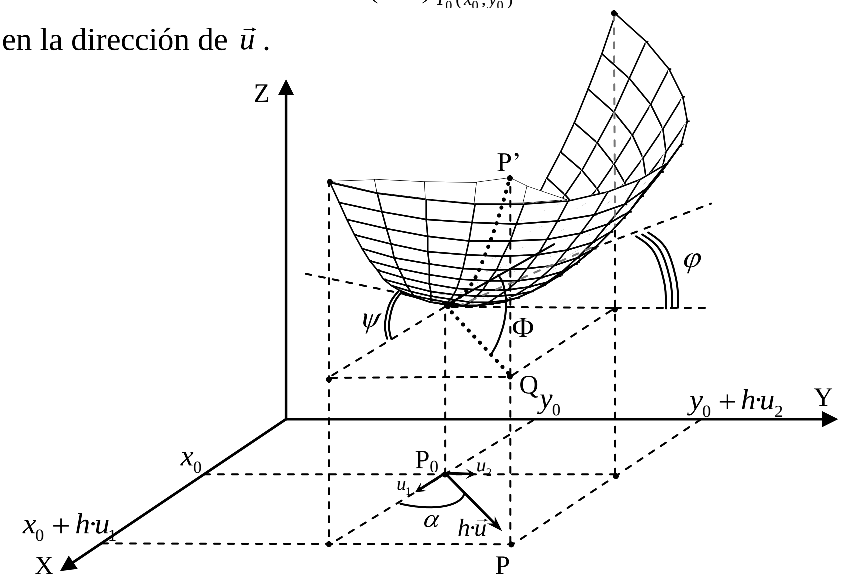
1.1.- Derivada direccional.

Como ya se ha visto, las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$ representan la variación de dicha función en las direcciones de los ejes coordenados. En este capítulo estudiaremos esa variación en cualquier dirección dada.

Definición: Considérense la función $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D *abierto*, el punto $P_0(x_0, y_0) \in D$ y un vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Si existe este límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cdot u_1, y_0 + h\cdot u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y es finito, a su valor se le denomina *derivada direccional de f en el punto P_0 según la dirección del vector $\vec{u}$*, se escribe $\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)}$ y representa la variación de *f* en $P_0(x_0, y_0)$ en la dirección de $\vec{u}$.



Interpretación geométrica.

Considérese el plano perpendicular al plano *XY* y que pasa por los puntos $P_0(x_0, y_0)$ y $P(x_0 + h\cdot u_1, y_0 + h\cdot u_2)$. La pendiente de la recta tangente en el punto P_0' a la curva intersección entre dicho plano y la superficie dada por la ecuación $z = f(x,y)$ viene dada por la derivada direccional $\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)}$.

Definición: Se dice que *f* es derivable en P_0 si tiene derivada direccional finita en todas las direcciones en dicho punto.

Teorema: Si *f* es diferenciable en el punto $P_0(x_0, y_0)$, entonces *f* es derivable en dicho punto y su derivada en la dirección del vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1 + f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2$$

Demostración:

Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$ un vector unitario cualquiera. Como f es diferenciable en P_0 se verifica:

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = \Delta x\cdot f'_x(x_0,y_0) + \Delta y\cdot f'_y(x_0,y_0) + \Delta x\cdot\varepsilon_1 + \Delta y\cdot\varepsilon_2$, donde $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0$ y $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$.

Haciendo $\Delta x = h\cdot u_1$ y $\Delta y = h\cdot u_2$:

$$f(x_0+h\cdot u_1, y_0+h\cdot u_2) - f(x_0,y_0) = h\cdot u_1\cdot f'_x(x_0,y_0) + h\cdot u_2\cdot f'_y(x_0,y_0) + h\cdot u_1\cdot\varepsilon_1 + h\cdot u_2\cdot\varepsilon_2$$

donde $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_1 = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon_2 = 0$.

Entonces:

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h\cdot u_1, y_0+h\cdot u_2) - f(x_0,y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot u_1\cdot f'_x(x_0,y_0) + h\cdot u_2\cdot f'_y(x_0,y_0) + h\cdot u_1\cdot\varepsilon_1 + h\cdot u_2\cdot\varepsilon_2}{h} =$$

$$= u_1\cdot f'_x(x_0,y_0) + u_2\cdot f'_y(x_0,y_0).$$

Cuando f es diferenciable, la derivada direccional se puede expresar:

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1 + f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2 = f'_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cdot\sin\alpha\ .$$

Notas:

1.- El recíproco del teorema anterior no es cierto.

$$f \text{ derivable en } P_0 \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ diferenciable en } P_0$$

La función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ admite derivada en (0,0) según cualquier dirección (**es derivable** en (0,0)) y **no es diferenciable** en dicho punto.

Sea $\vec{u}=(u_1,u_2)$ un vector unitario cualquiera, entonces

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{(0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h\cdot u_1, 0+h\cdot u_2) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{(h\cdot u_2)^3}{(h\cdot u_1)^2+(h\cdot u_2)^2} - 0}{h} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(u_2)^3}{(u_1)^2+(u_2)^2}$$

$$= (u_2)^3 \Rightarrow \boldsymbol{f} \textbf{ derivable en (0,0)}.$$

Veámos que f no es diferenciable en (0,0):

c.n.: ¿f continua en (0,0)?

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{(mx)^3}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x\,m^3}{1+m^2}=0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{\rho\to0^+} f(\rho\cos\theta,\rho sen\theta)=\lim_{\rho\to0^+}\frac{(\rho sen\theta)^3}{\rho^2}=\lim_{\rho\to0^+}\rho(sen\theta)^3=0 \;\; \forall\theta\in[0,2\pi) \Rightarrow f \text{ continua } (0,0).$$

c.n. ¿derivadas parciales finitas en (0,0)?

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{k^3}{k^2}-0}{k}=1$$

c.n.y s.: $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot\Delta x-f'_y(0,0)\cdot\Delta y\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\,?$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot\Delta x-f'_y(0,0)\cdot\Delta y\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-\Delta y\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|-\Delta y(\Delta x)^2\right|}{((\Delta x)^2+(\Delta y^2))^{3/2}}\,.$$

Calculando los límites direccionales para este límite doble:

$$\lim_{\substack{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\\ \Delta y=m\Delta x}}\frac{\left|-\Delta y(\Delta x)^2\right|}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{3/2}}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\left|-m(\Delta x)^3\right|}{((1+m)^2\,(\Delta x^2))^{3/2}}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{|m|\left|(\Delta x)^3\right|}{((1+m)^2)^{\,3/2}\left|(\Delta x)^3\right|}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{|m|}{((1+m)^2)^{\,3/2}}=\varphi(m)\,,$$

de donde deducimos que

$$\nexists\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\left|f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\cdot\Delta x-f'_y(0,0)\cdot\Delta y\right|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{f} \textbf{ no es}$$

diferenciable en (0,0).

Además, si calculáramos $\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{(0,0)}$ como $u_1 f'_x(0,0)+u_2 f'_y(0,0)=u_2$ obtendíamos una **solución incorrecta**, ya que hemos visto que $\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{(0,0)}=(u_2)^3$.

2.- Podemos hablar de otras relaciones vistas en el caso de funciones de una variable y que, sin embargo, no se verifican para funciones de dos variables:

$$f \text{ derivable en } P_0 \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ continua en } P_0$$

Por ejemplo,

$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{y} & \forall (x,y)\neq (x,0) \\ 0 & (x,y)=(x,0) \end{cases}$ es derivable en (0,0), ya que $\forall \vec{u}=(u_1,u_2)$ unitario:

$$\left.\begin{array}{l} si\ \ u_2\neq 0: \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h\cdot u_1,h\cdot u_2)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{h^3\cdot u_1^3}{h\cdot u_2}}{h} = \lim\limits_{\lambda\to 0} h\cdot\dfrac{u_1^3}{u_2} = 0 \\ si\ \ \vec{u}=(h_1,0) \quad\Rightarrow\quad \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(0,0)} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h\cdot u_1,h\cdot u_2)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h\cdot u_1,0)-f(0,0)}{h} = 0 \end{array}\right\}.$$

Pero no es continua en (0,0) ya que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^3}} \dfrac{x^3}{y} = 1 \neq f(0,0)=0$.

1.2.- Gradiente.

Sean $f: D\subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $P_0\in D$. El *vector gradiente* de la función *f* en el punto $P_0(x_0,y_0)$ se define del modo siguiente:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),\, f'_y(x_0,y_0)\right)$$

Como se ha visto, si *f* es diferenciable en P_0, entonces es derivable en dicho punto y, para cada vector unitario $\vec{u}=(u_1,u_2)$,

$$\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cdot u_1 + f'_y(x_0,y_0)\cdot u_2 =$$
$$= \langle \overrightarrow{\nabla f}(P_0),\vec{u}\rangle = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P_0)\right|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\theta = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P_0)\right|\cdot\cos\theta$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{\nabla f}(P_0)$ y $\vec{u}$.

Consecuencias: $\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = \left|\overrightarrow{\nabla f}(P_0)\right|\cdot\cos\theta$

a) Si $\cos\theta=1$ $(\Rightarrow\ \theta=0)$, entonces la derivada direccional toma el mayor valor que puede tomar. Por tanto, la derivada direccional es máxima, y su valor es el módulo del gradiente en dicho punto. Luego en esta dirección hay una mayor variación de la función *f* en P_0, variación aumentando, **luego la dirección de mayor aumento de la función *f* en P_0 es en la dirección del vector $\overrightarrow{\nabla f}(P_0)$ en el sentido del gradiente y vale $\left|\overrightarrow{\nabla f}(P_0)\right|$.**

Si $\cos\theta = -1$ $(\Rightarrow\ \theta = \pi)$, entonces la derivada direccional toma el valor más negativo que puede tomar. Por tanto, la derivada direccional es grande pero negativa, y su valor es el opuesto del módulo del gradiente en dicho punto. Luego en esta dirección hay una mayor variación de la función f en P_0, variación disminuyendo, **luego la dirección de mayor variación disminuyendo de la función f en P_0 es en la dirección del vector $\overrightarrow{\nabla f}(P_0)$ en el sentido opuesto del gradiente y vale -$\left|\overrightarrow{\nabla f}(P_0)\right|$.**

b) Si $\cos\theta = 0$ $(\Rightarrow\ \theta = \pi/2)$, entonces $\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0} = 0$. Por tanto, la derivada (en valor absoluto) es mínima en **la dirección perpendicular al gradiente**, esta es la dirección de variación nula (no variación) de f en P_0. **Es la dirección en la que f permanece constante en P_0.**

c) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta$.

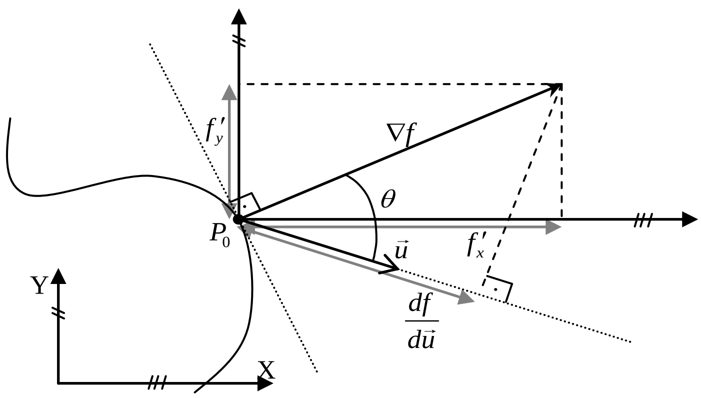
Si $|\vec{u}| = 1 \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{v}| \cdot \cos\theta = \left| proj_{\vec{u}} \vec{v} \right|$. Es decir, si $\vec{u}$ es unitario, el producto $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ representa la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$. Entonces, $\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0(x_0,y_0)} = \langle \overrightarrow{\nabla f}(P_0), \vec{u} \rangle$, es el módulo de la proyección de $\overrightarrow{\nabla f}(P_0)$ sobre $\vec{u}$.

Se observa, de nuevo, que la derivada máxima se obtiene en la dirección del gradiente, dado que la proyección del gradiente es máxima en esa dirección, y su valor coincide con el módulo del gradiente. La proyección es mínima (nula) en la dirección perpendicular al gradiente.

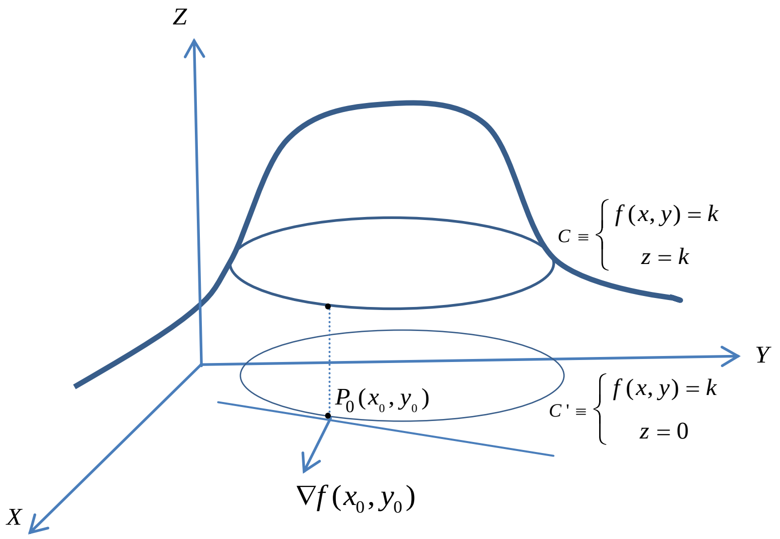
Además:

Si $\vec{u} = (1,0)$ (sentido positivo del eje X) $\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0(x_0,y_0)} = f'_x(x_0, y_0)$

Si $\vec{u} = (0,1)$ (sentido positivo del eje Y) $\Rightarrow \left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0(x_0,y_0)} = f'_y(x_0, y_0)$



d)



Para terminar, relacionaremos la dirección dada por el gradiente y la superficie que define la función $z = f(x,y)$. Recordemos (se vio en el tema 5), que la *curva de nivel* de la función f correspondiente al valor k viene dada por la expresión $C \equiv \begin{cases} f(x,y)=k \\ z=k \end{cases}$. Si proyectamos esta curva sobre el plano $z=0$ la ecuación de la curva obtenida será $\begin{cases} f(x,y)=k \\ z=0 \end{cases}$.

Así, dado el punto $P_0(x_0,y_0)$, si $f(x_0,y_0)=k$, entonces $C \equiv \begin{cases} f(x,y)=k \\ z=k \end{cases}$ es la curva de nivel que pasa por el punto $P(x_0,y_0,\underbrace{f(x_0,y_0)}_{k})$ y $C' \equiv \begin{cases} f(x,y)=k \\ z=0 \end{cases}$ es la proyección sobre el plano $z=0$ de la curva de nivel que corresponde al punto P_0.

Para poder hallar la recta tangente a la curva C', (como veremos en un tema posterior: *Funciones Implícitas*), cuando se verifican ciertas condiciones, en la ecuación $f(x,y)=k$ se va a poder "despejar" $y = y(x)$, para obtener la tangente a la curva en $P_0(x_0,y_0)$ se deriva $f(x,y)=k$ respecto de *x:*

$$f'_x + f'_y \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

Con lo cual la pendiente de la recta tangente a C'

en $P_0(x_0,y_0)$ es $m = y'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$, con lo cual el vector director de dicha recta es $(1,m) = \left(1, -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}\right) \equiv \left(f'_y(x_0,y_0), -f'_x(x_0,y_0)\right)$:

Que, como se ve fácilmente:

$$\left(-f'_y(x_0,y_0),\, f'_x(x_0,y_0)\right) \perp \left(f'_x(x_0,y_0),\, f'_y(x_0,y_0)\right) = \overrightarrow{\nabla f}(x_0,y_0) .$$

Resumiendo: El vector $\overrightarrow{\nabla f}(P_0)$ y la curva de nivel que pasa por el punto P_0 son perpendiculares. Es decir, la derivada direccional es máxima en la dirección normal a la curva de nivel, y nula en la dirección de la curva de nivel. Esto es lógico ya que la curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos donde la función es constante.

Además, por definición, se considera que el sentido del gradiente es el de crecimiento de la función.

2.- CASO DE FUNCIONES DE n VARIABLES.

Considérense la función $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y el punto $P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$. Sea $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ un vector **unitario**. Suponiendo que ***f* es diferenciable en** P_0**,** la derivada direccional de *f* según la dirección del vector $\vec{u}$, en ese punto, viene dada por la expresión:

$$\left.\frac{df}{d\vec{u}}\right|_{P_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)} = f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \cdot u_1 + ... + f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \cdot u_n$$

Y el gradiente en ese punto:

$$\overrightarrow{\nabla f}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = \left(f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0), ..., f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)\right)$$

Se verifican las mismas propiedades vistas para las funciones de dos variables.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Dada la función $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$:

a) Hallar el gradiente en el punto $P_0(-1,0)$.

b) Hallar la derivada direccional en ese punto en la dirección que forma un ángulo de 30º con el eje OX.

c) Hallar la derivada direccional en la dirección del eje OX.

d) Obtener la curva de nivel que pasa por el punto P_0.

2.- Un foco calorífico se encuentra en el origen de coordenadas de una placa metálica. La temperatura T en los puntos $P(x,y)$ viene dada por la siguiente expresión:

$$T = (x^2 + y^2)^{-1}$$

Calcular en los puntos $P_1(2,0)$ y $P_2(2,3)$:

a) la temperatura

b) el conjunto de los puntos isotérmicos

c) la dirección donde la variación de la temperatura es máxima

d) el sentido de crecimiento de la temperatura. Dibujar algunas curvas de nivel

e) la variación de la temperatura en la dirección que forma un ángulo de 30º con el eje OX.

3.- Dado el campo escalar definido por la función $f(x,y,z) = (x+y)^2 + z^2 - xy + 2z$, y partiendo del punto $P_0(-1,2,3)$, determinar la dirección donde la función varía más rápidamente. Hallar en el origen la derivada de la función en la dirección que forma un ángulo de 60º con el eje OZ, de 90º grados con el eje OX y de 30º grados con el eje OY.

4.- Calcular las constantes *a*, *b*, *c* para que el valor máximo de la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$ en el punto $P(1,2,-1)$ sea 64 y se obtenga en el sentido positivo del eje OZ.

5.- Calcular en el punto $P(1,1)$ la derivada de $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ en la dirección que forma un ángulo α con el sentido positivo del eje OX. ¿En qué dirección se verifica que

a) la derivada toma el valor máximo?

b) la derivada es cero?

Calcular en el mismo punto P la derivada direccional

a) en la dirección del vector $\vec{u} = 6\cdot\vec{i} + 8\cdot\vec{j}$.

b) en la dirección definida por la recta $3x - 2y + 5 = 0$.

6.- Hallar la derivada de $f(x,y) = \mathrm{L}(x^2 + y^2)$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$, en la dirección perpendicular a la curva de nivel que pasa por dicho punto.

7.- Calcular la derivada de $f(x,y,z)=xy^2z^3$ en el punto $M(3,2,1)$ y en la dirección $\overrightarrow{MN}$, siendo $N(5,4,2)$.

8.- Calcular la derivada de $f(x,y,z)=(1/2)x+(1/3)y+(1/6)z$ en el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ según la dirección del vector $\vec{v}=6\cdot\vec{i}+3\cdot\vec{j}-6\cdot\vec{k}$.

9.- Sea la función $f(x,y)=m\cdot x^2y^3+n\cdot x^4+4xy$.

Hallar *m* y *n*, para que el valor máximo de la derivada en el punto $P(1,-2)$ sea 40 y se obtenga en una dirección paralela al eje OY.

Solución: $m=3$ eta $n=14$

$m=-11/3$ eta $n=-38/3$

10.- La temperatura en un punto del plano está definida por la función:

$$T(x,y)=10+6\cos(x)\cos(y)-3\cos(2x)+4\cos(3y)$$

Hallar, en el punto $P(\pi/3,\pi/3)$, la dirección en la que se da el mayor incremento y la dirección donde la variación es nula.

Solución: variación máxima: $\alpha=-\pi/4$

variación nula: $\alpha=\pi/4$

11.- Dada la función $f(x,y)=y^3+x^2y+2x^2-2y^2-2y$:

a) Obtener en el punto $A(-2,1)$ la derivada direccional en la dirección de la recta $3x-y+5=0$.

b) Obtener la ecuación de la curva de nivel que pasa por ese punto.

c) Hallar el gradiente y calcular la derivada direccional máxima, así como la tangente del ángulo que forma el gradiente con el sentido positivo del eje OX.

d) ¿La ecuación $5y^3+5x^2y+10x^2-10y^2-10y-40=0$ es una curva de nivel? En caso afirmativo, expresarla en la forma $f(x,y)=k$.

Solución: a) $-9/\sqrt{10}$

b) $y^3+x^2y+2x^2-2y^2-2y=9$

c) $\vec{\nabla}f\big|_A=(-12,1),\ \sqrt{145},\ -1/12$

d) $k=8$

12.- Expresar la derivada direccional de la función $f(x,y)=\mathrm{L}(x^2+y^2)$ en el punto $P(a,b)$.

a) ¿En qué dirección tendremos la variación máxima? Calcular la magnitud de dicha variación.

b) ¿En qué dirección tendremos la variación mínima? Calcular la magnitud de dicha variación.

Solución: $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_P = \dfrac{2a}{a^2+b^2}\cdot\cos\alpha + \dfrac{2b}{a^2+b^2}\cdot\sin\alpha$

a) $\tan\alpha = b/a,\quad \dfrac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2}$

b) $\tan\alpha = -a/b,\quad 0$

13.- Dada la función $f(x,y)=\sqrt{7(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2-6}$,

a) Estudiar y dibujar su dominio de definición.

b) Calcular, si es posible, las curvas de nivel para los puntos *A*(1,1), *B*(2,2), *C*(3/2,3/2).

c) Hallar en el punto *A*(1,1) la dirección en la que la función varía con velocidad máxima.

c) Determinar la derivada en el punto A en la dirección del eje OX.

Solución: c) (3/2,3/2)

d) 3/2

14.- Hallar la derivada direccional máxima de la función $f(x,y,z)=x^{(z+2)^y}$ en el punto *P*(1,0,0).

Solución: 1

15.- Considérese la función $f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\dfrac{x^n\cdot y}{x^2+y^2}\right) & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \forall n\in\mathbb{N}$.

a) Analizar si *f* es diferenciable en el punto (0,0).

b) Estudiar si f es derivable en el punto (0,0) para los valores $n=2$ y $n=3$.

c) Para los valores $n=2$ y $n=3$, calcular en el punto (0,0) la derivada direccional de f según la dirección del vector $\vec{u}=(1,2)$.

16.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

a) Calcular la derivada direccional de f en los puntos (0,0) y (1,1) según la dirección del vector $\vec{u}=(2,-1)$.

b) ¿ $\exists\vec{u}$ vector unitario tal que $\left.\dfrac{df}{d\vec{u}}\right|_{(1,1)}=2$?

17.- Hallar el dominio de definición de las siguientes tres funciones y analizar su derivabilidad y diferenciabilidad en dicho dominio:

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

b) $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $f(x,y)=(x+y)\cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}$