LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1.- FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES.

<u>*Definición:*</u> A la función *f* definida en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y que toma valores en $\mathbb{R}$ se le denomina *función real de n variables reales*:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

El conjunto *D* es el *dominio de definición*.

Si $n = 2$, obtenemos el caso particular de una función real de dos variables reales:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow f(x, y)$$

<u>*Nota*</u>*:* Como en el caso de funciones reales de una variable real, las funciones reales de varias variables reales se combinan mediante sumas, restas, productos y cocientes para definir nuevas funciones. El concepto de función acotada también coincide con el visto para funciones de una variable real.

Representación gráfica de funciones de dos variables. Curvas de nivel.

Sea la función *f* definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$. A cada punto $(x, y) \in D$ le asigna el valor $f(x, y) \in \mathbb{R}$. Al conjunto de puntos de la forma $(x, y, f(x, y))$, donde $(x, y) \in D$, se le denomina *gráfica* de la función *f* y describe una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Representar gráficamente la función $z = f(x, y)$ siguiendo el mismo procedimiento empleado para funciones de una variable resulta bastante complicado. En su lugar, para representar $z = f(x, y)$ se puede hacer uso de las curvas de nivel.

<u>*Definición:*</u> Se denomina *curva de nivel* de la función *f* correspondiente al valor *k* al conjunto de puntos de la superficie $z = f(x, y)$ que verifican la ecuación $f(x, y) = k$. Las curvas de nivel representan el lugar geométrico de los puntos de la superficie que se encuentran en el plano $z = k$. Por lo tanto, la ecuación de dicha curva de nivel será:

$$C \equiv \begin{cases} f(x, y) = k \\ z = k \end{cases}$$

2.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE DOS VARIABLES REALES.

2.1.- <u>Límite doble.</u>

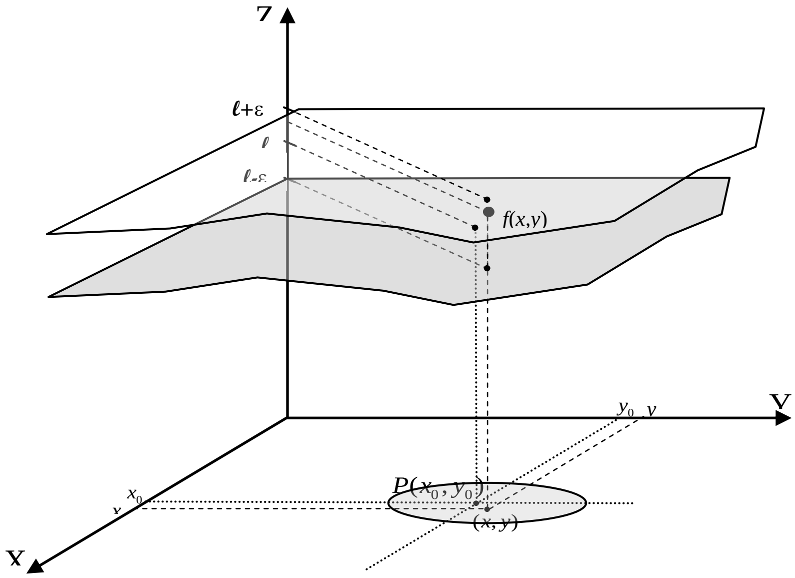
<u>*Definición*</u>: Consideremos la función real *f* definida en $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de *D*. El número real ℓ es el límite de *f* cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), y se representa:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$$

si se verifica:

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ /\ \ \forall(x,y)\in D,\ \ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$$

El límite definido de esta forma se denomina también *límite doble*.

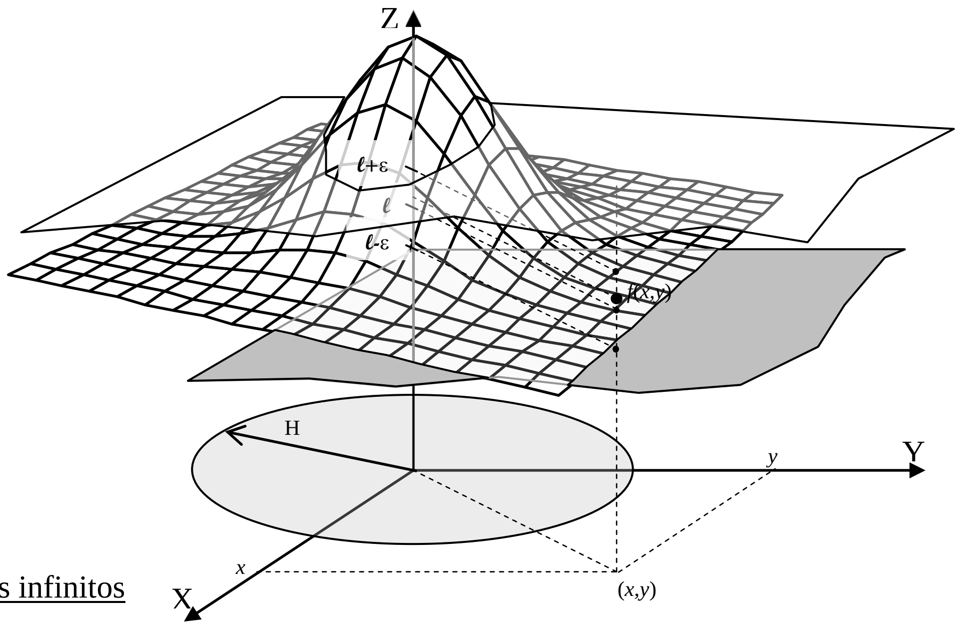


2.1.1.- Generalización del concepto de límite.

<u>Límites en el infinito</u>

Sea *f* una función real definida en un conjunto no acotado $D\subseteq\mathbb{R}^2$. Queremos calcular el límite de *f* cuando nos alejamos infinitamente del origen. Para ello, podemos aplicar la idea de límite dada anteriormente para el caso en el que el punto (x_0,y_0) se encuentre en el infinito. Como entorno del infinito será suficiente con considerar el exterior de un entorno del origen, por ejemplo el exterior de un círculo centrado en el origen. Así:

$$\lim_{(x,y)\to P_\infty} f(x,y)=\ell \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists H(\varepsilon)>0\ /\ \forall(x,y)\in D,\ \sqrt{x^2+y^2}>H \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$$



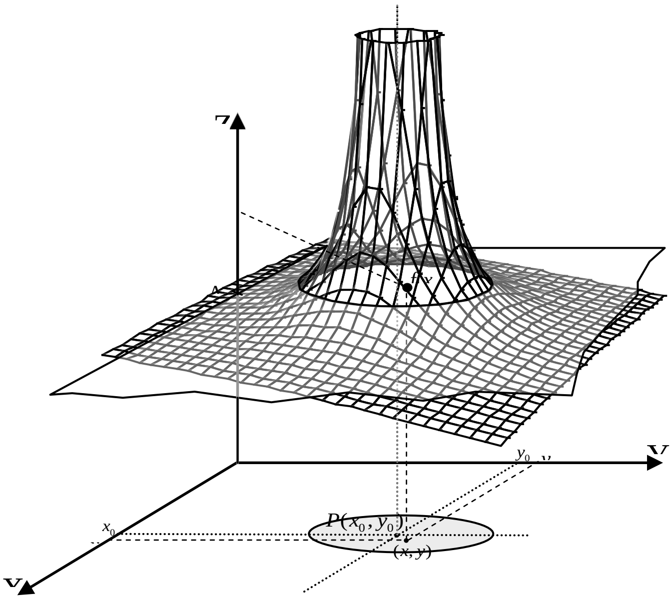
<u>Límites infinitos</u>

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=+\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A>0, \exists\delta(A)>0\ /\ \forall(x,y)\in D,\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow f(x,y)>A$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = -\infty \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists \delta(A) > 0 \;/\; \forall (x,y) \in D, 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) < -A$$



2.2.-Propiedades de los límites.

Teorema. (*Unicidad del límite*). Si una función real tiene límite en un punto, este límite es único.

Teorema. Si una función tiene límite finito en un punto, entonces está acotada en un entorno reducido del punto.

Propiedades: Sean f y g dos funciones reales de dos variables reales, cuyos límites respectivos en el punto (x_0, y_0) son y m. Entonces:

1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k(f(x,y)) = k \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \forall k \text{ constante real}$

2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l + m$

3. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = l \cdot m$

4. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} = \dfrac{l}{m} \quad (m \neq 0)$

5. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} log_b f(x,y) = log_b(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)) \quad (l > 0)$

6. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} b^{f(x,y)} = b^{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)} \quad (b > 0)$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)^{g(x,y)} = \left(\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right)^{\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} = l^m \quad (l>0)$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = \left|\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right| = |l|$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0 \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$

ℓ, m y (x_0, y_0) pueden ser finitos o infinitos. Las propiedades anteriores son válidas en aquellos casos en los cuales las operaciones con los límites ℓ y m estén definidas o tengan sentido.

Teorema. Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ y $g(x,y)$ es una función acotada en un entorno reducido de (x_0, y_0) (finito o infinito), entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y) = 0$.

2.3.- Límites direccionales.

En la definición del límite doble no se establece relación entre las variables x e y. Si suponemos que el punto (x,y) se aproxima al punto (x_0,y_0) a través de un camino o conjunto de puntos concreto, se establece una relación que en algunos casos puede expresarse mediante $y=\varphi(x)$.

Se dice que el número ℓ es el límite de f cuando (x,y) tiende a (x_0,y_0) siguiendo la dirección $y=\varphi(x)$, y se representa:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=\varphi(x)}} f(x,y) = \ell$$

si se verifica:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(\varepsilon)>0 \,/\, \forall(x,y)\in D,\ y=\varphi(x),\ 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-\ell|<\varepsilon$$

Para que exista el límite doble de la función $z=f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) es necesario y suficiente que, en dicho punto, existan y tengan el mismo valor los límites direccionales calculados a través de todas las direcciones pertenecientes al dominio de definición.

2.4.- Cálculo del límite doble.

Consideremos la función real f definida en el conjunto $D\subseteq\mathbb{R}^2$ y $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ punto de acumulación de D. Si efectuamos el cambio de variable $\begin{cases} x = x_0+\rho\cos\theta \\ y = y_0+\rho\sin\theta \end{cases}$, entonces:

$$(x,y)\to(x_0,y_0) \quad\Leftrightarrow\quad \rho\to 0^+,\ \forall\theta\in[0,2\pi)$$

Y, por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \forall\theta\in[0,2\pi)}} f(x_0+\rho\cos\theta,\, y_0+\rho\sin\theta)$$

3.- CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE DOS VARIABLES REALES.

Definición: Consideremos la función real *f* definida en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y el punto $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que *f* es *continua* en dicho punto, si:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Es decir, si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall (x,y) \in D, \ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| f(x,y) - f(x_0,y_0) \right| < \varepsilon$$

Si la función es continua en todos los puntos del conjunto *D*, se dice que es *continua en D*.

Propiedades: Las vistas para funciones reales de una variable real

Prolongación por continuidad

Definición: Como para funciones de una variable, se dice que la función *f* tiene una *discontinuidad evitable* en el punto (x_0, y_0) si existe y es finito el límite de *f* en (x_0, y_0), pero, o bien la función no está definida en (x_0, y_0) o bien el valor del límite no coincide $f(x_0, y_0)$.

Esta discontinuidad se evita redefiniendo adecuadamente la función en el punto (x_0, y_0). Se obtiene de esta forma la función *g* a la que se denomina función *prolongación por continuidad* de *f* en el punto (x_0, y_0):

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \forall (x,y) \neq (x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) & (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

En caso de no existir o no ser finito el límite de la función en el punto, diremos que hay una *discontinuidad inevitable*.

Continuidad respecto de cada variable

Consideremos la función *f* definida en el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Si *f* es continua en el punto (x_0, y_0), entonces las funciones de una variable $f(x, y_0)$ y $f(x_0, y)$ son continuas, respectivamente, en los puntos $x = x_0$ e $y = y_0$. El recíproco no es cierto. Puede ser que $f(x, y_0)$ sea continua en $x = x_0$ y $f(x_0, y)$ continua en $y = y_0$, sin que $f(x,y)$ sea continua en el punto (x_0, y_0).

4.- GENERALIZACIÓN DE LOS CONCEPTOS DE LIMITE Y CONTINUIDAD PARA EL CASO DE FUNCIONES REALES DE MÁS DE DOS VARIABLES REALES.

Los conceptos vistos en los apartados anteriores se generalizan de forma sencilla para funciones reales de $n \geq 3$ variables reales. Así, dada *f* función real de *n* variables reales:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \longrightarrow f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$\lim\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\to(x_1^0,\ldots,x_n^0)} f(x_1,\ldots,x_n)$ nos da el límite de *f* en $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, punto de acumulación del dominio *D*.

Se dice que f es continua en el punto $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$ si y sólo si $\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1^0,\dots,x_n^0)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

DOMINIOS DE DEFINICIÓN

1.- Hallar analítica y gráficamente los dominios de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

b) $f(x,y)=\mathrm{L}(x+y-1)$

c) $f(x,y)=\sqrt{3-x^2}+\sqrt{3-y^2}$

d) $f(x,y)=\arcsin(x)+\arcsin(y)$

e) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$

f) $f(x,y)=\mathrm{L}(\sqrt{x-4}+\sqrt{6-y})$

g) $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{L}\left(|x|+|y|\right)}{|x|+|y|-1}$

2.- Hallar analítica y gráficamente los dominios de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\dfrac{2-\sqrt{2-|x|-|y|}}{1-\mathrm{L}[\sin(2\pi x)]}$

b) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y-x^2+1}}{\sqrt{2-y}}+\mathrm{L}\left[4(x^2+y^2)-1\right]$

c) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{\log_y(x)}}{\sqrt{4-x-y}}$

d) $f(x,y)=\mathrm{L}\left(\dfrac{1-\sqrt{x^2-y^2}}{x\cdot y}\right)$

e) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x-y\cdot(y+|y|)}}{\mathrm{L}\left[\dfrac{4-(x^2+y^2)}{3}\right]}$

f) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{\sin x}{xy}}+\mathrm{L}\left(3\pi-|x|-|y|\right)$

g) $f(x,y)=\sqrt{|x|-|y|-1}+\arcsin\left(x^2+4y^2-3\right)$

LÍMITES

1.- Dada la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

Estudiar los límites direccionales en el origen, a través de los siguientes caminos:

a) $y=0$ b) $x=0$ c) $y=x$ d) $y=mx$

2.- Estudiar en el punto (2,1) los límites direccionales (a través de rectas) de la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

3.- Estudiar en el punto (0,0) los límites direccionales (a través de rectas) y doble de la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x^2+2xy+y^2+y+x}{x+y}$$

4.- Estudiar en el punto (0,0) los límites direccionales (a través de rectas) y doble de la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

5.- Estudiar en el punto (0,0) los límites direccionales (a través de rectas) y doble de la siguiente función:

$$f(x,y)=(x+y)\cdot\sin(1/x)\cdot\sin(1/y)$$

6.- Estudiar en el punto (0,0) los límites direccionales (a través de rectas) y doble de la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{\sin(x^2+y^2)}$$

7.- Estudiar en el punto (0,0) los límites direccionales (a través de rectas) y doble de la siguiente función:

$$f(x,y)=\frac{x-y-xy}{x+y}$$

8.- Hallar, si existe, el límite doble de la siguiente función en el punto (0,0):

$$f(x,y)=xy\cdot\mathrm{L}(x^2+y^2)$$

CONTINUIDAD

1.- Estudiar en el origen la continuidad de esta función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2.- Estudiar en el origen la continuidad de esta función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3.- Sea la aplicación *f* definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2-y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Dibujar el conjunto de puntos donde la función no está definida.

b) Estudiar la continuidad de esta función en el origen.

4.- Sea la aplicación *f* definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de esta función en $\mathbb{R}^2$.

5.- Estudiar la continuidad de esta función en (0,0):

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\mathrm{L}(1+x)}{e^y-1} & \text{si } 1+x>0 \text{ e } y\neq 0 \\ 1 & \text{si } y=0 \end{cases}$$

6.- Estudiar la continuidad de esta función:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$$

7.- Estudiar la continuidad de la siguiente función:

$$f(x,y)=x\cdot\cos(y/x)+y\cdot\cos(x/y)$$

¿Cómo debería definirse en los puntos donde no existe para que fuera continua?

8.- Estudiar la continuidad de esta función en el origen:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \forall\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

9.- ¿Para qué valores del parámetro $n \in \mathbb{N}$ es continua en (0,0) la siguiente función?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^n}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Continua $\forall n > 1$

10.- Estudiar en el origen la continuidad de esta función según los valores del parámetro $\alpha \geq 0$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \cdot x^\alpha & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Continua $\forall \alpha > 0$

11.- Analizar si existe algún valor $a \in \mathbb{R}$ para el que la siguiente función es continua en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+2y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ a & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Continua $\Leftrightarrow a = 0$

12.- Analizar para todos los valores $a \in \mathbb{R}^+$ la continuidad de esta función en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^a} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Solución</u>: Continua $\Leftrightarrow a \in (0,1)$