EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Dada la función real de dos variables reales $z = f\left(x,y\right) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$

a) Hallar los extremos relativos en $\mathbb{R}^2$.

b) Determinar los extremos relativos de *f* en la región $x^2 + y^2 < 4$.

c) Determinar los extremos relativos de *f* en la región $x^2 + y^2 < 16$.

Solución:

Se trata de una función polinómica y por lo tanto es continua y admite derivadas parciales de cualquier orden todas ellas continuas.

a)

Condición necesaria de extremos: $\begin{cases} f'_x\left(x,y\right)=0 \\ f'_y\left(x,y\right)=0 \end{cases}$

En este problema

$$\begin{cases} f'_x\left(x,y\right)=8x-2xy^2 \\ f'_y\left(x,y\right)=18y-2x^2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x(4-y^2)=0 & \rightarrow & x=0 & \vee & y^2=4 \\ 2y(9-x^2)=0 & \rightarrow & y=0 & \vee & x^2=9 \end{cases}$$

Considerando los casos que se presentan al trabajar con la primera ecuación

- ✓ si $x=0$: sustituyendo en la segunda $y=0$
- ✓ la otra posibilidad es que $y^2=4$:
  - ➢ si $y=2$ entonces de la segunda ecuación $x^2=9$ de forma que $x=3$ o $x=-3$
  - ➢ si $y=-2$ la segunda ecuación también nos conduce a $x^2=9$, con lo que $x=3$ o $x=-3$

(las conclusiones son las mismas si se empieza con la segunda ecuación y se llevan los resultados a la primera).

Los **puntos críticos** serán $O(0,0)$, $P_1(3,2)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(3,-2)$, $P_4(-3,-2)$.

Condición suficiente de extremos: estudio del hessiano

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-2y^2 & -4xy \\ -4xy & 18-2x^2 \end{pmatrix}$$

- $Hf\big|_O = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(O) & f''_{xy}(O) \\ f''_{yx}(O) & f''_{y^2}(O) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} H_1 = 8 > 0 \\ H_2 = \left|H\right| = 8\cdot 18 > 0 \end{cases}$

  de forma que en el punto $O(0,0)$ **la función presenta un mínimo relativo**

- $Hf\big|_{P_1} = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(P_1) & f''_{xy}(P_1) \\ f''_{yx}(P_1) & f''_{y^2}(P_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} = Hf\big|_{P_4} \Longrightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = \left|H\right| = 0-24^2 < 0 \end{cases}$

  de forma que en los puntos $P_1(3,2)$ y $P_4(-3,-2)$ **la función presenta un punto de silla**

- $Hf\big|_{P_2} = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(P_2) & f''_{xy}(P_2) \\ f''_{yx}(P_2) & f''_{y^2}(P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} = Hf\big|_{P_3} \Longrightarrow \begin{cases} H_1 = 0 \\ H_2 = \left|H\right| = 0-24^2 < 0 \end{cases}$

  de forma que en los puntos $P_2(-3,2)$ y $P_3(3,-2)$ **la función presenta un punto de silla**

Observación: la función *f(x,y)* es par tanto en la variable *x* como en la variable *y*

b) El planteamiento de la condición necesaria de extremos conlleva el mismo sistema de ecuaciones y por lo tanto las mismas soluciones que en el apartado anterior. Sin embargo, de los cinco puntos obtenidos solamente el origen está en el círculo $x^2 + y^2 < 4$ de forma que la función *f(x,y)* presenta un

Grupo 01

mínimo relativo en el origen $O(0,0)$, mínimo de valor $f(O) = f\left(0,0\right) = 0$

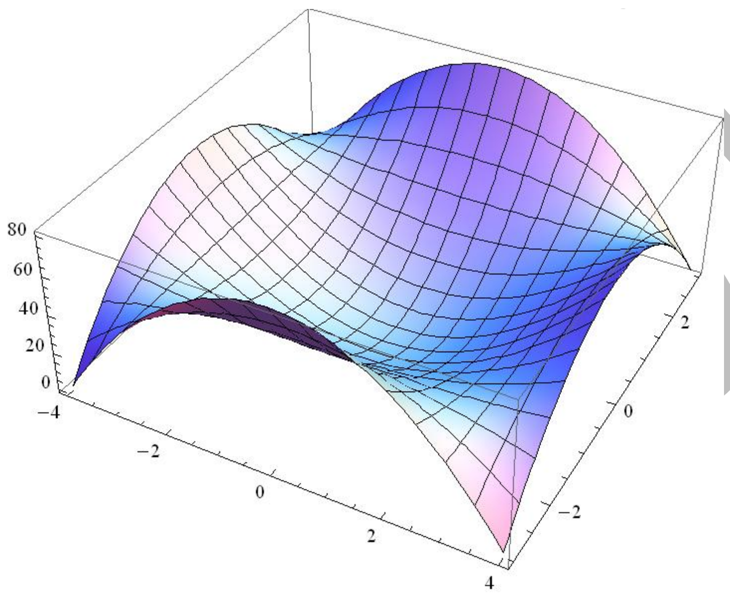
c) Se trataría de repetir el apartado b)

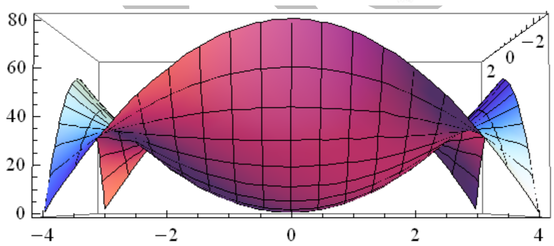
Para visualizar gráficamente los resultados anteriores se puede hacer uso del software Mathematica, mostrándose a continuación diferentes perspectivas de la superficie

$$z = f\left(x, y\right) = 4x^2 + 9y^2 - x^2 y^2$$

en el dominio

$$(x, y) \in D = [-4,4]\mathrm{x}[-3,3]$$





Obtener los extremos relativos, y clasificarlos, de la función

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y\,.$$

Solución:

Se trata de una función polinómica y por lo tanto no hay problemas con la regularidad de la misma (continuidad de la función y existencia y continuidad de las derivadas parciales de cualquier orden).

Condición necesaria de extremos: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$

En este problema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x - y - 1 \\ f'_y(x,y) = 2y - x - 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = 2x - 1 \\ 2y - x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x - 2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

de forma que la función tiene un único **punto crítico**: $P(1,1)$.

Condición suficiente de extremos: estudio del hessiano

$$Hf = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso el hessiano es constante.

$$Hf\big|_P = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(P) & f''_{xy}(P) \\ f''_{yx}(P) & f''_{y^2}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} H_1 = 2 > 0 \\ H_2 = |H| = 3 > 0 \end{cases}$$

Consecuentemente en el punto $P(1,1)$ **la función presenta un mínimo relativo**.

Grupo 01