FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.
LÍMITE

1.- FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL.

A la función *f* definida de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se le denomina *función real de una variable real*. El conjunto *D* es el *dominio de definición*:

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

1.1.- Operaciones con funciones.

Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable real. Entonces la suma, resta, producto y cociente de *f* y *g* se define de forma natural en términos de la suma, resta, producto y cociente de números reales. Estas combinaciones algebraicas de *f* y *g* se definen de la forma siguiente:

Suma $\quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Resta $\quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

Producto: $\quad (fg)(x) = f(x)g(x)$

Cociente: $\quad (f/g)(x) = f(x)/g(x)$

De acuerdo con las definiciones, $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ *y* $(fg)(x)$ solo existen cuando $f(x)$ y $g(x)$ existen. Por tanto $f+g, f-g$ y fg cada una tiene como dominio: dom(f)$\cap$dom(g). La definición de f/g requiere la condición adicional de que $g(x) \neq 0$.

Con $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto por un escalar: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

Es claro que dom (λf) = dom *f*.

Composición de funciones: Dadas las funciones *f* y *g* se define la función compuesta $f \circ g$ mediante la relación: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

$$\text{dom}(f \circ g) = \{x \in \text{dom}\, g \,/\, g(x) \in \text{dom}\, f\}$$

1.2.- Función acotada superior e inferiormente. Función acotada.

Una función *f* definida en *D* se dice *acotada superiormente* si:

$$\exists K \in \mathbb{R} /\ \forall x \in D \qquad f(x) \leq K \qquad (K \quad \text{cota superior})$$

Si *f* está acotada superiormente sobre *D*, entonces se llama *supremo* de *f* sobre *D* a la menor de las cotas superiores.

Una función *f* definida en *D* se dice *acotada inferiormente* si:

$$\exists H \in \mathbb{R} /\ \forall x \in D \qquad f(x) \geq H \qquad (H \quad \text{cota inferior})$$

Si *f* está acotada inferiormente sobre *D*, entonces se llama *ínfimo* de *f* sobre *D* a la mayor de las cotas inferiores.

Se dice que *f* está *acotada* sobre *D* si lo está superior e inferiormente, es decir:

$$\exists K,H\in\mathbb{R}\,/\ \forall x\in D \qquad \mathrm{H}\le f(x)\le K$$

que equivale a que exista un número real M tal que $|f(x)|\le M \quad \forall x\in D$.

Si el supremo y el ínfimo pertenecen al conjunto $f(D)$ se llaman *máximo* y *mínimo* respectivamente.

1.3.- Función recíproca o inversa.

Dada una función *f*, se llama *función recíproca o inversa* a aquélla que aplica a cada elemento del conjunto imagen su original, se denota f^{-1}. Si *f* es biyectiva, tiene función recíproca o inversa y se tiene $(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$.

2.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

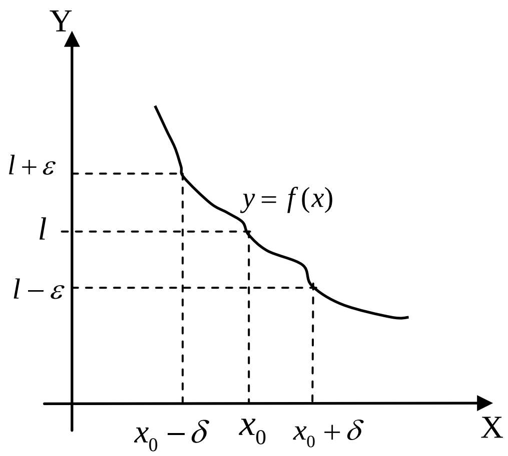
Definición: Sea *f* una función real definida en el conjunto $D\subseteq\mathbb{R}$, y consideremos el punto $x_0\in\mathbb{R}$, punto de acumulación del conjunto *D* (es decir, en la intersección entre cualquier intervalo que incluya a x_0 y el conjunto *D* hay infinitos puntos). El número real ℓ es el *límite de f* cuando *x* tiende a x_0, y se expresa como:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$$

si se verifica que:

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ /\ \ \forall x\in D,\ \ 0<|x-x_0|<\delta \ \ \Rightarrow\ \ |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ /\ \ \forall x\in D,\ \ x_0-\delta<x<x_0+\delta \quad x\ne x_0 \ \ \Rightarrow\ \ \ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$$



Hay diferentes formas de escribir la misma idea de límite. Algunas veces una de estas formulaciones es más conveniente que las otras, en otros casos no. En cualquier caso, es útil reconocer que las siguientes formulaciones son equivalentes:

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell$ (ii) $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\ell$

(iii) $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)-\ell\big)=0$ (iv) $\lim_{x\to x_0}|f(x)-\ell|=0$

Nota: Se exige que x_0 sea un punto de acumulación de *D* para asegurar que la intersección de cualquier entorno reducido de x_0 con el conjunto *D* sea un conjunto infinito. Un entorno reducido de x_0 es un intervalo abierto de puntos cercanos a él del que se excluye x_0. Por ejemplo, dado $\varepsilon > 0$, si $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ es un entorno de x_0, $U^* = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) - \{x_0\}$ será un entorno reducido de ese punto.

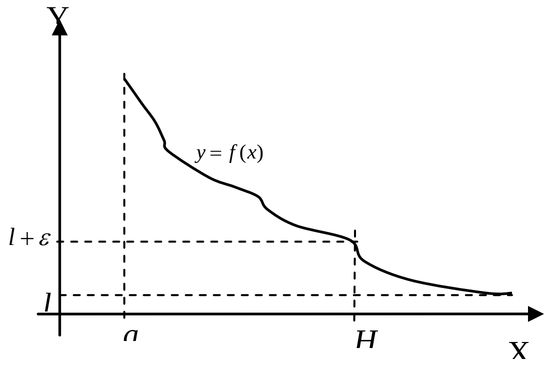
Teorema (*Unicidad del límite*). Si una función tiene límite en un punto, este límite es único.

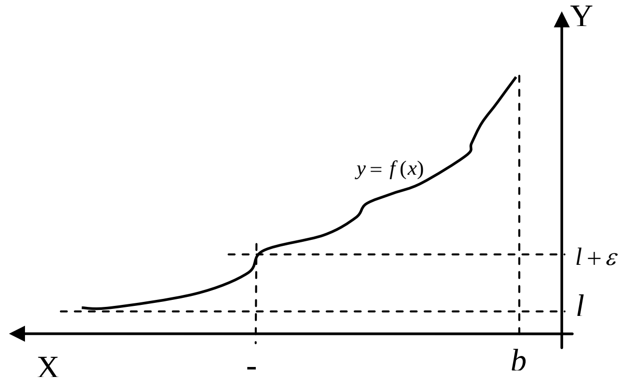
2.1.- Generalización del concepto de límite: límites en el infinito. Límites infinitos.

Límites en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow \left[\forall\varepsilon > 0,\ \exists H(\varepsilon) > 0 \,/\, \forall x \in D,\ x > H \Rightarrow \left| f(x) - \ell \right| < \varepsilon\right]$$

En los límites en el infinito podemos distinguir entre $+\infty$ y $-\infty$.

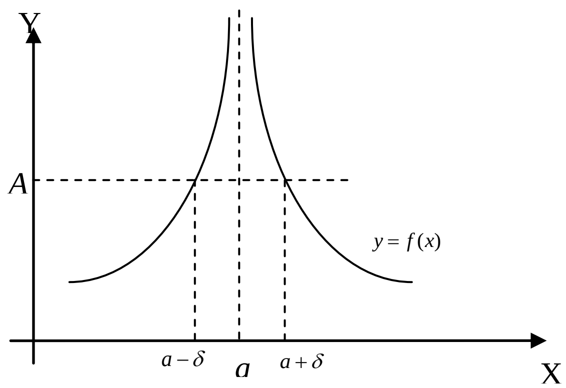


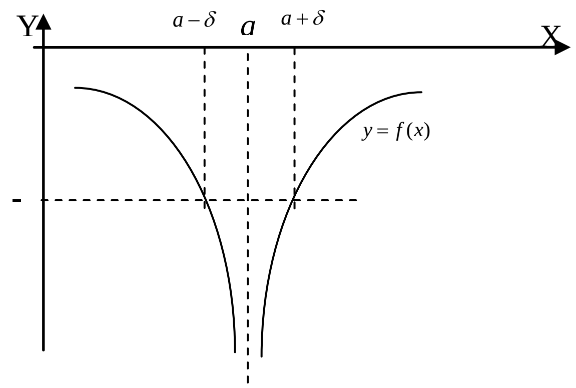


Límites infinitos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \left[\forall A > 0,\ \exists\delta(A) > 0 \,/\, \forall x \in D,\ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow f(x) > A\right]$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left[\forall A > 0,\ \exists\delta(A) > 0 \,/\, \forall x \in D,\ 0 < \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow f(x) < -A\right]$$





Teorema: Si una función tiene límite finito en un punto, entonces está acotada en un entorno reducido del punto.

2.2.- Propiedades de los límites.

Sean *f* y *g* dos funciones reales de una variable real, cuyos límites respectivos en el punto x_0 son ℓ y *m*. Entonces:

1. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \ell \pm m$

2. $\lim_{x\to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \ell \cdot m$

3. $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{m} \qquad (m \neq 0)$

4. $\lim_{x\to x_0} \log_b f(x) = \log_b \ell \qquad (\ell > 0)$

5. $\lim_{x\to x_0} b^{f(x)} = b^{\ell} \qquad (b > 0)$

6. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell^{m} \qquad (\ell > 0)$

7. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$

8. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

ℓ, m y x_0 pueden ser finitos o infinitos. Las propiedades anteriores son válidas cuando las operaciones con los límites ℓ y m estén definidas o tengan sentido.

<u>*Teorema*</u>: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno reducido de x_0 (x_0 finito o infinito), entonces $\lim_{x\to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = 0$

Indeterminaciones.

Al operar algebraicamente con funciones que tienen límite, hay siete posibles indeterminaciones en las que el posible límite de la función resultante no queda determinado en función de los límites de las funciones de partida, sino que depende, también, de cómo tiendan éstas a sus límites, pudiendo incluso no existir. A continuación indicaremos los símbolos con los que se acostumbran a representar estas indeterminaciones:

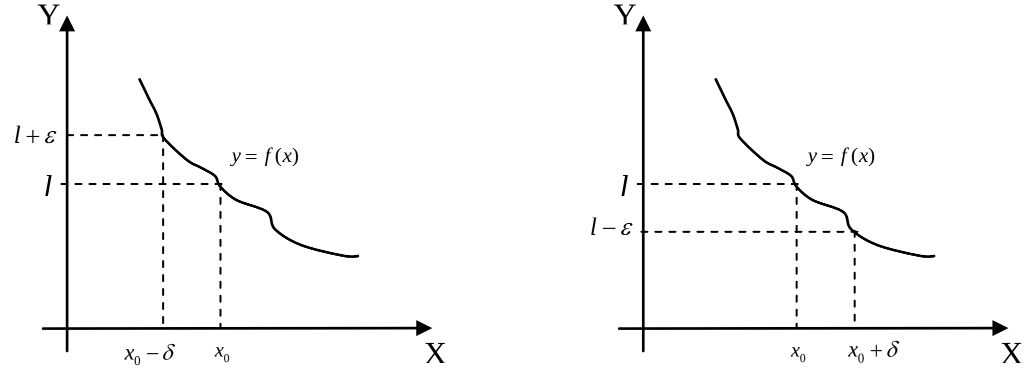
$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \ 0\cdot\infty,\ \ \infty-\infty,\ \ 1^{\infty},\ \ 0^{0},\ \ \infty^{0}$$

2.3.- <u>Límites laterales.</u>

Otro caso particularmente importante se presenta cuando en lugar de considerar entornos reducidos sólo se consideran semientornos reducidos (a la izquierda o a la derecha de $x_0 \in \mathbb{R}$); entonces, los correspondientes límites se llaman, de manera más específica, *límite a la izquierda* y *límite a la derecha en* x_0, teniéndose:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x \in D \ \ 0 < x - x_0 < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \right]$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \left[\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ / \ \forall x \in D \ \ 0 < x_0 - x < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \right]$$



El concepto de límite lateral es fácilmente generalizable al caso de límite infinito, sin más que considerar en las correspondientes expresiones que el entorno reducido pasa a ser un semientorno reducido.

Es claro que si existen los dos límites laterales, entonces el límite existe si y sólo si los límites laterales coinciden.

2.4.- Cálculo del límite.

Expondremos algunos métodos para resolver las indeterminaciones mencionadas anteriormente.

2.4.1.- Equivalencias

Se dice que dos funciones f y g son *equivalentes* en x_0, si su razón tiende hacia la unidad cuando x tiende a x_0. Se denota por $f \sim g$.

Principio de sustitución: Si $f \sim g$ y existen los límites de los siguientes segundos miembros, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)\cdot h(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{g(x)}$$

es decir, todo **factor** o **divisor**, puede sustituirse por otro equivalente, sin que se altere el límite de la expresión.

Las siguientes equivalencias son algunas de las más utilizadas:

Si $f(x)\to 0 \quad \Rightarrow$

$$\sin\big(f(x)\big) \sim \tan\big(f(x)\big) \sim \arcsin\big(f(x)\big) \sim \arctan\big(f(x)\big) \sim \mathrm{L}\big(1+f(x)\big) \sim f(x)$$

$$1-\cos\big(f(x)\big) \sim \frac{\big(f(x)\big)^2}{2}$$

Si $f(x)\to 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}\big(f(x)\big) \sim f(x)-1$

Si $f \sim g$ y $f(x)\not\to 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}\big(f(x)\big) \sim \mathrm{L}\big(g(x)\big)$

Si $f \sim g \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^a \sim \big(g(x)\big)^a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Si $x \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k \sim a_0x^k \quad (k>0)$

Si $x \to \infty \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}\Big(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k\Big) \sim L\, x^k \quad (k>0)$

2.4.2.- Regla de L´Hopital

Si bien el tema de derivabilidad se tratará más adelante, se introducirá a continuación una regla de gran utilidad en el cálculo de algunos límites indeterminados en forma de cociente de funciones reales de una variable real.

<u>*Teorema*</u>: Sean f y g dos funciones derivables en un entorno reducido de x_0. Si:

a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ o bien

b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

entonces, si existe $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, también se verifica $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Observaciones

1.- El punto en el cual se estudia el límite puede ser real o $\pm\infty$. El límite ℓ puede ser también finito o infinito.

2.- Todas las indeterminaciones se pueden reducir a las formas

2.4.3- Infinitésimos e infinitos.

Definición: Se dice que una función *f* es *infinitamente pequeña* o un *infinitésimo* cuando *x* tiende a x_0, si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

Definición: Se dice que una función *f* es *infinitamente grande* o *infinito* cuando *x* tiende a x_0, si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ \ (-\infty).$$

Comparación de infinitésimos e infinitos

- Si el límite del cociente de dos infinitésimos (infinitos) en x_0 es finito, no nulo, se dice que son del mismo orden.

- Si es nulo, el infinitésimo (infinito) del numerador es de orden superior (inferior) al del denominador. Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces se escribirá $f(x) << g(x)$ ó $f(x) = o(g(x))$ (Notación de Landau).

- Si es $\pm\infty$, el infinitésimo (infinito) del numerador es de orden inferior (superior) al del denominador.

- Si no existe el límite, se dice que no son comparables.

Comparando los infinitos usuales:

$$\text{Si } x\to\infty \ \Rightarrow \ (\mathrm{L}x)^a << x^b << c^x << x^x \qquad \forall a,b>0 \quad \forall c>1$$

Observaciones:

1.- En el cálculo de límites de cociente de infinitos (∞/∞), además de utilizar la Regla de L´Hopital (si esto fuera posible) se puede resolver la indeterminación dividiendo numerador y denominador por el infinito de mayor orden, es decir el que tiende a infinito más rápidamente. Así por ejemplo, si *f* es cociente de dos polinomios, $f(x) = \dfrac{a_0x^p + a_1x^{p-1} + \ldots + a_p}{b_0x^q + b_1x^{q-1} \ + \ldots + b_q}$ $\quad a_0, b_0 \neq 0$ se deduce:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } p>q \\ 0 & \text{si } p<q \\ a_0/b_0 & \text{si } p=q \end{cases}$$

2.- Si la indeterminación se corresponde con la resta de dos infinitos del mismo orden $(\infty - \infty)$, puede resolverse dicha indeterminación si aparecen radicales cuadráticos multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada de la dada. Si aparecen potencias naturales de *n*, aplicando el binomio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

donde $$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} \quad n,m \in N \text{ ;} \quad \binom{m}{0} = 1$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

DOMINIOS DE DEFINICIÓN

1.- Hallar el dominio de definición de las siguientes funciones reales de una variable real:

a) $f(x) = \mathrm{L}(x^2 - 4)$ $\qquad D = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

b) $f(x) = \mathrm{L}(x+2) + \mathrm{L}(x-2)$ $\qquad D = (2,\infty)$

c) $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\qquad D = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \left[4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2\right]$

d) $f(x) = \arccos[2\cdot\sin(x)]$ $\qquad D = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $f(x) = \left(x + |x|\right)\cdot\sqrt{x\cdot\sin^2(\pi x)}$ $\qquad D = \left[0,\infty\right) \cup \mathbb{Z}^-$

f) $f(x) = \mathrm{L}\left(\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x+1}\right)$ $\qquad D = (-1,1) \cup (2,\infty)$

g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$ $\qquad D = \left[-\dfrac{1}{3},1\right]$

h) $f(x) = \mathrm{L}\left(|x| - |x+1|\right)$ $\qquad D = \left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$

i) $f(x) = \dfrac{\arcsin\left(\dfrac{x+2}{3}\right)}{1 - \mathrm{L}(x+2)}$ $\qquad D = \left(-2,1\right] - \{e-2\}$

LÍMITES

Calcular los siguientes límites.

1.- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^p - a^p}$ $\qquad$ Solución: $m\cdot a^{m-p} / p$

2.- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)^{10} - (2+x)^{10}}{x^9 + 3x}$ $\qquad$ Solución: -10

3.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cdot\cos(x)}{x\cdot[1-\cos(x)]}$ $\qquad$ Solución: 2/3

4.- $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{\mathrm{L}(x-\pi/2)}{\tan x}$ $\qquad$ Solución: 0

5.- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}$ $\quad a > 0$ $\qquad$ Solución: $1/(2a)$

6.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(Mx)-Mx}{2x^2\cdot\tan(Mx)}$ Solución: $M^2/6$

7.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{L}[\sin(mx)]}{\mathrm{L}[\sin(x)]}\quad m>0$ Solución: 1

8.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$ Solución: 3

9.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$ Solución: 3

10.- $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan(x)}{\tan(5x)}$ Solución: 5

11.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arctan(x/2)}{\cos x\cdot\sin^2(2x)}$ Solución: 1/8

12.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\cdot\mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$ Solución: 1/2

13.- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{\cot x}{x}\right]$ Solución: 1/3

14.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{c^x-d^x}\quad a,b,c,d>0$ Solución: $\dfrac{\mathrm{L}(a/b)}{\mathrm{L}(c/d)}$

15.- $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left[\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{x}}-1\right]$ Solución: $a/3$

16.- $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\mathrm{L}x}\right]$ Solución: 1/2

17.- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{3x-9}\left[\dfrac{5}{4x-2}-\dfrac{2}{x+1}\right]$ Solución:-1/40

18.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\mathrm{x}^2+1)\cdot\sin(\pi/x)}{x}$ Solución: π

19.- $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ Solución: 1

20.- $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos(x)\right]^{\cot^2 x}$ Solución: $e^{-1/2}$

21.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x+2}{2x^2-5}\right]^{(x-2)/(x^2+6)}$ Solución: 1

22.- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\cot x\right]^{\sin x}$ Solución: 1

23.- $\lim\limits_{x\to 1/2^+}\left(2x^2+3x-2\right)^{\tan(\pi x)}$ Solución: ∞

24.- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{2/\arcsin(x^2)}$ Solución: e

25.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\cos(\alpha/x)+a\cdot\sin(\alpha/x)\right]^{x}$ Solución: $e^{a\alpha}$

26.- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot\left(x^{1/x}-1\right)}{\mathrm{L}x}$ Solución: 1

27.- $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+4)^a\cdot\left[\mathrm{L}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)\right]^a$ Solución: 15^a

28.- $\lim\limits_{x\to\infty}(ax+b)\cdot\left[\mathrm{L}\left(\dfrac{x+p}{x-q}\right)^r\right]$ Solución:$ra(p+q)$

29.- $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$ Solución: $e^{2/\pi}$

30.- Calcular el valor del parámetro a para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=4$.

Solución: a = L(2)

31.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\mathrm{L}\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ Solución: 1/2

32.- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$ Solución: -e/2

33.- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x+|x|}{7x-5|x|}$ Solución: 1/6

34.- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{e^{3x}}\right)^{\frac{x+2}{x^2+6}}$ Solución: e^{-3}