SERIES NUMÉRICAS REALES

1.- SERIES DE NÚMEROS REALES

Definición: Dada una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, se denomina *serie* a la expresión:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n + ...$$

A a_n se le llama *término general* de la serie y cada elemento recibe el nombre de *término de la serie*.

Asociada a la serie podemos considerar la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ donde

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

donde S_n se conoce como *suma parcial n-ésima*.

Tipos de series

Convergente: Si la sucesión de sumas parciales es convergente, esto es, si existe y es finito $\lim_{n \to \infty} S_n$. Este valor finito se llama *suma de la serie*.

Divergente: Si lo es la sucesión de sumas parciales, esto es, $\lim_{n \to \infty} S_n = \pm\infty$, verificándose que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Oscilante: Si no existe $\lim_{n \to \infty} S_n$.

Se llama *carácter* de una serie a su cualidad de ser convergente, divergente u oscilante.

Observaciones:

1. El carácter de una serie no varía si se suprimen o añaden un número finito de términos (por ejemplo, si la serie es convergente y suma *A*, lo seguirá siendo con suma *A*-*k*, siendo *k* la suma de los términos suprimidos).
2. El carácter de una serie no varía si multiplicamos o dividimos todos sus términos por cualquier número finito distinto de cero.

En este Capítulo vamos a estudiar el carácter de las series numéricas reales. Observamos en primer lugar que el estudio de este tipo de series se reduce al estudio de series de términos no negativos ($a_n \geq 0$) y series con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos puesto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ posee un número finito de términos negativos se puede prescindir de ellos ya que no varía el carácter de la serie, con lo cual el problema queda reducido a estudiar el carácter de una serie de términos positivos.

Si tiene todos sus términos negativos salvo un número finito de ellos que son positivos, podemos prescindir de éstos y multiplicar por -1 todos los negativos; de esta forma obtenemos una serie de términos positivos con el mismo carácter que la dada.

2.- CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA

<u>*Teorema*</u> : Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>*Demostración*</u>*:*

Si la serie converge $\Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n = k$ (finito)

Como $a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = k - k = 0$

<u>*Nota*</u>*:* El teorema anterior nos dice que si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no converge.

Esta condición es **necesaria** pero **no suficiente**, por ejemplo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente (como se verá posteriormente) y $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3.- PROPIEDADES

Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes con sumas "*a*" y "*b*" respectivamente, entonces:

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$

$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ $(c \in \mathbb{R})$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$

<u>*Demostración*</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \right] = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = a \pm b$$

La demostración es análoga en el segundo caso.

4.- SERIE GEOMÉTRICA

A partir de la *progresión geométrica* $\{a_n\}$ definida anteriormente, donde $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ $\forall n,$ $a_1 \neq 0$ y $r \neq 0$ (*r* es la *razón)*, si ahora sumamos todos sus términos, obtenemos una *serie geométrica*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 \cdot r^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \ldots$$

Analicemos su convergencia

- Si $|r| \geq 1$:

  $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0 \Rightarrow$ la serie no converge (no cumple la condición necesaria de convergencia).

Para cualquier otro caso, consideremos la suma de sus primeros *n* términos, es decir, su suma *n*-sima, también obtenida previamente, y calculemos su límite:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{a_1 \cdot (1-r^n)}{1-r}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 - a_1 \cdot r^n}{1-r} \right) = \frac{a_1}{1-r} - \frac{a_1}{1-r} \cdot \lim_{n\to\infty} r^n$$

- Si $|r| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} \Rightarrow \text{la serie converge y } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$$

Una serie geométrica es c**onvergente si y sólo si** $|r| < 1$ **y su suma viene dada por:**

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}}$$

<u>*Ejemplo*</u>*:* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$

serie geométrica $r = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge *y* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2$

5.- SERIES NUMÉRICAS DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

5.1.- <u>Propiedades de las series de términos no negativos</u>

1. Las series de términos no negativos no son oscilantes (son convergentes o divergentes).
2. Toda serie de términos no negativos es asociativa, es decir, tiene la misma suma que cualquiera de las series que se obtienen agrupando sus términos.
3. Toda serie de términos no negativos es conmutativa, es decir, tiene la misma suma que cualquiera de sus reordenaciones (esto es, series con sus mismos sumandos pero en distinto orden).
4. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos series de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

5.2.- <u>Criterios de comparación</u>

<u>*Definición*</u>*:* Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos no negativos. Si $a_n \le b_n \quad \forall n \ge n_0$, entonces se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una *serie mayorante* de la

serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una *serie minorante* de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

5.2.1.- Criterio de comparación con una mayorante o minorante (criterio de comparación de primera especie)

<u>*Teorema*</u>: Supongamos dos series de términos no negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es mayorante de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es minorante de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

5.2.2.- Criterio de comparación de segunda especie

<u>*Teorema*</u>: Dadas dos series de términos no negativos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$ finito $\Rightarrow$ ambas series tienen el mismo carácter.

<u>*Observación:*</u> En particular, si $a_n \sim b_n$: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen el mismo carácter.

5.3.- <u>Serie armónica. Serie armónica generalizada o de Riemann</u>

Se llama serie *armónica* a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Veamos cuánto vale su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + 16\frac{1}{32} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

por tanto la serie armónica es divergente y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

<u>*Definición:*</u> Se llama serie *armónica generalizada* o *de Riemann* a la serie de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \text{ y se verifica } \begin{cases} a > 1 \Rightarrow \text{converge} \\ a \leq 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$$

<u>*Demostración:*</u>

- Si $a \leq 1$:

  $n^a \leq n \;\Rightarrow\; \frac{1}{n^a} \geq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. La serie minorante es una serie divergente, por el criterio de comparación podemos asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ diverge.

- Si $a > 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} < 1+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^a}+\ldots+\frac{1}{4^a}+\frac{1}{8^a}+\ldots+\frac{1}{8^a}+\ldots=$$

$$= 1+\frac{1}{2^{a-1}}+\frac{1}{4^{a-1}}+\frac{1}{8^{a-1}}+\ldots$$

La mayorante es una serie cuya suma coincide con la de la serie geométrica de razón $r=\frac{1}{2^{a-1}}$, que es convergente ya que $r<1$ $\Rightarrow$ por el criterio de comparación podemos asegurar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ converge.

Ejemplos:

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

$$a_n = \frac{n^2+\left(Ln\right)^3+n-5}{\sqrt[3]{n^{19/2}+n^4+2n+1}} \sim \frac{n^2}{\sqrt[3]{n^{19/2}}} = \frac{1}{n^{7/6}} = b_n \;\; y \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

5.4.- Criterio de D´Alembert o del cociente

Dada una serie de términos no negativos, de término general a_n, si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = k \quad \text{con} \begin{cases} k<1 \Rightarrow \text{converge} \\ k>1 \Rightarrow \text{diverge} \\ k=1 \Rightarrow \text{caso dudoso} \end{cases}$$

Ejemplo: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n^2+1+2n)(n!)}{(n+1)!(1+n^2)} = 0 < 1 \Rightarrow \text{convergente}$$

5.4.- Criterio de Raabe-Duhamel

Dada una serie de términos no negativos, de término general a_n, si

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = k \quad \text{con} \quad \begin{cases} k<1 \;\Rightarrow\; la\, serie\, diverge \\ k=1 \quad\; caso\, dudoso \\ k>1 \;\Rightarrow\; la\, serie\, converge \end{cases}$$

5.4.- Criterio de la raíz

Dada una serie de términos no negativos, de término general a_n, si

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = k \quad \text{con} \quad \begin{cases} k<1 \;\Rightarrow\; la\, serie\, converge \\ k=1 \quad\; caso\, dudoso \\ k>1 \;\Rightarrow\; la\, serie\, diverge \end{cases}$$

6.- SERIES DE TÉRMINOS CUALESQUIERA. CONVERGENCIA ABSOLUTA. CONVERGENCIA CONDICIONAL.

Para estudiar el carácter de estas series, partimos de la serie formada por los valores absolutos de la serie original. Estudiaremos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

<u>Definición</u>: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente.*

<u>Teorema</u>: Si una serie es absolutamente convergente entonces la serie es convergente.

Si una serie es absolutamente convergente, tiene la misma suma que cualquiera de sus reordenaciones (esto es, series con sus mismos sumandos pero en distinto orden); por ello a este tipo de series se les suele llama *incondicionalmente convergentes.*

Si una serie converge pero no es absolutamente convergente, el valor de la suma puede cambiar si se reordenan sus términos (como se verá posteriormente), por ello a las series que convergen pero no son absolutamente convergentes se les llama *condicionalmente convergentes*.

7.- SERIES ALTERNADAS. ACOTACIÓN DEL ERROR

<u>Definición</u>*:* Se llama *serie alternada* a aquella serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos. Las series alternadas aparecen de dos maneras:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \quad a_n > 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots. \quad a_n > 0$$

<u>Ejemplo</u>: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$

Teorema de Leibniz: Las series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ $(a_n > 0)$, si cumplen:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

son convergentes.

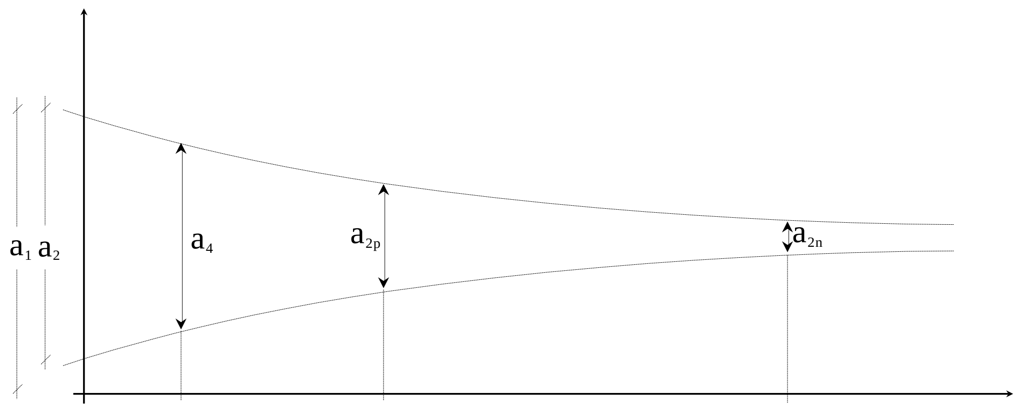
<u>Demostración</u>:

Es análoga para las dos formas de series alternadas. Aquí usaremos la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \qquad a_n > 0$$

$$\begin{array}{ccc} S_1 = a_1 & > & S_2 = a_1 - a_2 \\ \vee & & \wedge \\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & > & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \vee & & \wedge \\ . & & . \\ . & & . \\ \vee & & \wedge \\ S_{2n-1} = a_1 - a_2 + a_3 + \ldots - a_{2n-2} + a_{2n-1} & > & S_{2n} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} \end{array}$$

La sucesión S_{2n-1} es decreciente y la sucesión S_{2n} es creciente.



$\{S_{2n-1}\}$ sucesión decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow$ convergente

$\{S_{2n}\}$ sucesión creciente y acotada superiormente $\Rightarrow$ convergente

$\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = \ell_1$ finito, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \ell_2$ finito

Dado que $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n-1}) = \lim\limits_{n\to\infty} (-a_{2n}) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1}$

$\Rightarrow \ell_1 = \ell_2 \Rightarrow$ la serie converge.

<u>*Observaciones*</u>:

1. Se puede demostrar que, para una serie alternada convergente

, verificando $a_{n+1} < a_n$, el error que se comete al tomar como valor aproximado de la suma de la serie, la suma S_p de sus p primeros términos es menor, en valor absoluto, que el valor absoluto del primer término despreciado.

2. El error cometido en la suma de la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ será por exceso o por defecto dependiendo de cuál sea el signo del primer término despreciado.

3. La segunda condición del criterio de series alternadas puede modificarse exigiendo sólo $a_{n+1} < a_n$ para los n mayores que un cierto n_0.

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$$

La serie anterior no es absolutamente convergente, veamos ahora su convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \;\; y \;\; \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \text{por el teorema de Leibniz converge}.$$

Por tanto la serie armónica alternada es una serie condicionalmente convergente.

Si tomamos como suma aproximada $S \simeq 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \Rightarrow |E| < \frac{1}{5} = 0.2$

Nota: Como se ha comentado anteriormente, en una serie condicionalmente convergente al reordenar los términos de la serie podemos obtener otra suma.

Ejemplo: Llamamos S a la suma de la serie:

$$S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

reordenando

$$\begin{aligned}
S' &= 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\ldots \\
S'_{4n} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n} = \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n} = \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right] = \frac{1}{2}S_{2n}
\end{aligned}$$

Por tanto $\quad S' = \dfrac{1}{2}\, S$

Hemos encontrado una reordenación de la serie cuya suma es la mitad del valor de la suma de dicha serie.

EJERCICIOS PROPUESTOS

Estudiar el carácter de las siguientes series de término general a_n :

1.- $a_n = \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!}$, sabiendo que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{3^n \cdot n!} = 0$ Solución: Convergente

2.- $a_n = \dfrac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)\cdot(2n-1)}$ Solución: Divergente

3.- $a_n = \dfrac{n^2 + (\mathrm{L}n)^3 + n - 5}{\sqrt[3]{n^9 + 2n + 1}}$ Solución: Divergente

4.- $a_n = \dfrac{2^n + 3}{n^4 + 5}$ Solución: Divergente

5.- $a_n = \left[\dfrac{(n-1)\cdot(n-2)}{n^2}\right]^{\sqrt{n}}$ Solución: Divergente

6.- $a_n = \dfrac{1+\sin^2(na)}{n^a}$ Solución: $\begin{cases} a > 1 \text{ Convergente} \\ a \le 1 \text{ Divergente} \end{cases}$

7.- $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^p}$ $(p > 0)$ Solución: $\begin{cases} p > 2 \text{ Convergente} \\ p \le 2 \text{ Divergente} \end{cases}$

8.- $a_n = \dfrac{n^3 + (\mathrm{L}n)^4 + 2^n}{n^5 + 3^n + 8}$ Solución: Convergente

9.- $a_n = n^2 \cdot e^{-n}$ Solución: Convergente

10.- $a_n = \dfrac{(n!)^2 \cdot 5^n}{(2n)!}$ Solución: Divergente

11.- $a_n = \dfrac{n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot(2n-1)}$ Solución: Convergente

12.- $a_n = \dfrac{n^n}{(n+2)^{n+2}}$ Solución: Convergente

13.- $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ Solución: Convergente

14.- Estudiar el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sabiendo que la suma de sus n primeros términos es $S_n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, siendo $a > 0$ y $b > 0$.

Solución: $\begin{cases} a > b \text{ Divergente} \\ a \le b \text{ Convergente} \end{cases}$

Estudiar el carácter de las siguientes series de término general a_n :

15.- $a_n = \dfrac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ Solución: Convergente

16.- $a_n = \dfrac{x^{5n}}{x^{5n}+2n^3}$ $x \geq 0$ Solución: $\begin{cases} \text{Convergente si } 0 \leq x \leq 1 \\ \text{Divergente si } x > 1 \end{cases}$

17.- Estudiar el carácter de la serie cuyo término general a_n verifica lo siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \qquad \forall n \in N$$

Solución: Divergente

Estudiar el carácter de las siguientes series de término general a_n :

18.- $a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3n}$ Solución: Convergente

19.- $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{n^3+1}$ Solución: Convergente

20.- $a_n = \dfrac{(n-1) \cdot \sqrt[3]{n^5+3n}}{(n^3-1) \cdot \sqrt{n^3-2}}$ Solución: Convergente

21.- $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$ Solución: Divergente

22.- $a_n = \dfrac{1}{n + \mathrm{L}(n)}$ Solución: Divergente

23.- La suma de los n primeros términos de una serie es $S_n = \dfrac{4n+1}{n+3} - \dfrac{1}{3}$.

a) Estudiar su carácter.

b) Hallar el término a_{20} .

Solución: a) Convergente

b) $a_{20} = 1/46$

24.- Estudiar el carácter de la serie $\left(-\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{1}{3^1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\ldots$, y si es convergente, calcular su suma.

Solución: a) Convergente (absolutamente)

b) $S = -1/12$

25.- En un cuadrado de lado ℓ inscribimos otro cuadrado uniendo los puntos medios de sus lados, y así sucesivamente. Calcular la suma de las áreas de los infinitos cuadrados.

Solución: $S = 2\ell^2$

Estudiar el carácter de las siguientes series de término general a_n :

26.- $a_n = n^a \cdot \mathrm{L}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$ Solución: Convergente $\forall a \in \mathbb{R}$

27.- $a_n = \dfrac{n \cdot a^n}{e^n} \quad a > 0$ Solución: $\begin{cases} \text{Convergente } \forall a < e \\ \text{Divergente } \forall a \geq e \end{cases}$

28.- $a_n = \mathrm{L}\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$. Solución: Convergente

29.- $a_n = \dfrac{n^b}{a^n} \quad a > 0,\ b \in \mathbb{Z}$ Solución: $\begin{cases} \text{Si } a > 1 \text{ converge} \\ \text{Si } a < 1 \text{ diverge} \\ \text{Si } a = 1 \text{ y } \begin{cases} \text{Si } b < -1 \text{ converge} \\ \text{Si } b \geq -1 \text{ diverge} \end{cases} \end{cases}$

30.- $a_n = \dfrac{1}{3+x^n} \quad x > 0$ Solución: $\begin{cases} \text{Convergente } \forall x > 1 \\ \text{Divergente } \forall x \leq 1 \end{cases}$

31.- $a_n = \dfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\dfrac{1}{10^n}+\dfrac{1}{n(n+1)}$ Solución: Convergente

32.- $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^a}$ Solución: $\begin{cases} \text{Convergente } \forall a > 1/2 \\ \text{Divergente } \forall a \leq 1/2 \end{cases}$

33.- $a_n = \dfrac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} \cdot a^n \quad a > 0$ Solución: $\begin{cases} \text{Convergente } \forall a < 2/9 \\ \text{Divergente } \forall a \geq 2/9 \end{cases}$

34.- $a_n = \dfrac{(n+1)!-n!}{4^n}$ Solución: Divergente

35.- Sea a_n el término general de una serie de términos positivos.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, ¿qué se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+a_n}$?

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, ¿qué se puede decir de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{1+n^2 \cdot a_n}$?

Solución: a) Convergente

b) Convergente

36.- Dada la serie $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, probar que es condicionalmente convergente.

Estudiar el carácter de las siguientes series de término general a_n :

37.- $a_n = \left|\sin\left(\left(\dfrac{\pi}{a}\right)^n\right)\right| \qquad a>0$ <u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Convergente si } a>\pi \\ \text{Divergente si } a\le\pi\end{cases}$

38.- $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ <u>Solución</u>: Convergente (absolutamente)

39.- $a_n = \dbinom{n+2}{n}\cdot b^n \;, \quad \forall b\in\mathbb{R}$

<u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Converge si } -1<b<1 \\ \text{No converge si } \mathrm{b}\le -1 \text{ o } \mathrm{b}\ge 1\end{cases}$

40.- $a_n = (-1)^n\dfrac{\sin(an)}{n^3}, \quad a\in\mathbb{R}$ <u>Solución</u>: Convergente (absolutamente)

41.- $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{L}(n+1)}$ <u>Solución</u>: Convergente (condicionalmente)

42.- $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+4}}$ <u>Solución</u>: Convergente (condicionalmente)

43.- $a_n = \dfrac{a^n}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}$

<u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Converge si } -1\le a\le 1 \\ \text{No converge si } a<-1 \text{ o } a>1\end{cases}$

44.- $a_n = \dfrac{a^n\cdot\sqrt{n}}{n^2+1}$ <u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Converge si } -1\le a\le 1 \\ \text{No converge si } a<-1 \text{ o } a>1\end{cases}$

45.- $a_n = \dfrac{b^n\cdot(n^2+1)}{3^n}$ <u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Converge si } -3<b<3 \\ \text{No converge si } b\le -3 \text{ o } b\ge 3\end{cases}$

46.- $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{(x-2)^n} \qquad x\ne 2$ <u>Solución</u>: $\begin{cases}\text{Converge si } x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty) \\ \text{No converge si } x\in[1,2)\cup(2,3]\end{cases}$

47.- Dada la serie de término general $a_n = \dfrac{\sin(n\pi/2)}{n^a}$:

a) Desarrollar los términos de dicha serie y reescribir el término general.

b) Estudiar el carácter de la serie para $a=1$ y $a=2$.

b) Para $a=3$, calcular su suma con un error menor que 0.008

<u>Solución</u>: b) a = 1 Convergente (condicionalmente)

a = 2 Convergente (absolutamente)

c) 26/27

48.- ¿Cuántos términos se deben tomar en la serie de término general $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2+1}}$ para obtener su suma con una precisión tal que $\varepsilon = 10^{-6}$? <u>Solución</u>: $N \geq 10^6 - 1$

Estudiar el carácter de las siguientes series:

49.- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{L}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ <u>Solución</u>: Convergente

50.- $\dfrac{1}{2^2-1} - \dfrac{1}{3^2-1} + \dfrac{1}{4^2-1} - \dots$ <u>Solución</u>: Convergente

51.- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathrm{L}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right) - \frac{1}{n(n+1)}\right]$ <u>Solución</u>: Convergente

52.- Calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{4^n+1}{3^n}$. <u>Solución</u>: -19/35

53.- a) Calcular la longitud total L de la curva formada por la sucesión de las infinitas semicircunferecias de radios a, $a/3$, $a/9$, $a/27$,....

b) Calcular la longitud de las primeras n semicircunferencias, L_n.

c) Calcular el menor valor de n para que al tomar L_n en lugar de calcular L, el error que se cometa sea menor que el 5% de L. <u>Solución</u>: a) L = $3a\pi/2$

b) $\mathrm{L}_n = \dfrac{3a\pi}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$

c) $n = 3$

54.- Estudiar el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n} - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ <u>Solución</u>: Convergente

55.- Calcular el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{n}^2}}{\sin 1+\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{3}+\cdots+\sin\frac{1}{n}}$ <u>Solución</u>: 0

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\frac{1}{2^3}\sqrt{2}+\frac{1}{3^3}\sqrt{3}+\cdots+\frac{1}{n^3}\sqrt{n}}$ <u>Solución</u>: ∞