Tema 1

INTRODUCCION A LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1.- LOS NÚMEROS COMPLEJOS. FORMA BINÓMICA

Como sabemos, no existe ningún número real que satisfaga cualquiera de las ecuaciones $x^2+4 = 0$, $\cos(x) = 2$, $e^x = -3$. Para poderlas resolver necesitaríamos un conjunto de números en los que sus cuadrados pudieran ser cantidades negativas, o más concretamente, un conjunto en el que existiese un número z tal que $z^2 = -1$. Por este y otros motivos similares, las Matemáticas han necesitado y exigido la creación de un nuevo tipo de números que permitieran superar estas dificultades. Esta deficiencia de los números reales lleva a la introducción de los *números complejos*.

Definición: Un *número complejo* z es un par ordenado de números reales en la forma z=(x,y). A los elementos x, y los denominamos respectivamente *parte real* y *parte imaginaria* del número complejo y se denotan por x=Re(z) e y=Im(z).

El conjunto de los números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Definición: Se dice que d*os números complejos* son *iguales* si tienen iguales sus partes reales e imaginarias.

A continuación se van a definir en $\mathbb{C}$ dos leyes de composición interna y se estudiará la estructura que le confieren.

Definición: Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se define la *suma* de z_1 y z_2 como

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

El conjunto de los números complejos con esta ley interna suma $(\mathbb{C}, +)$ tiene estructura de *grupo conmutativo o abeliano*, en el que el elemento neutro es el (0,0) y el elemento simétrico es z=(-x,-y).

Definición: Dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se define el *producto* de z_1 y z_2 como

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

El conjunto de los números complejos con estas dos leyes internas $(\mathbb{C},+,\cdot)$ tiene estructura de *cuerpo conmutativo o abeliano*, en el que el elemento neutro para el producto es el (1,0) y el elemento simétrico es $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$ siempre que $z\neq 0$.

Además, si consideramos el subconjunto de $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}'=\{(x,0)\ /\ x\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{C}$$

podemos definir una aplicación

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}'\subset\mathbb{C} \\ x &\longrightarrow (x,0) \end{aligned}$$

la cual es un isomorfismo (aplicación lineal biyectiva) y por tanto, podemos considerar el cuerpo de los números reales como un subcuerpo del cuerpo de los números complejos.

Teniendo en cuenta el comentario hecho al inicio de este capítulo y que $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$, cantidad que según el isomorfismo anterior podemos identificar con el número real -1, denotaremos por

$$i=(0,1)$$

teniéndose por tanto que $i^2=-1$.

Las consecuencias más importantes que se obtienen con la introducción de este número “i” son las siguientes:

1- Todo número real afectado por el operador i equivale a un número complejo cuya primera componente es nula

$$x\cdot i=(x,0)\cdot(0,1)=(0,x)$$

2- Utilizando el operador i podemos escribir un número complejo como

$$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(y,0)\cdot(0,1)=x+yi$$

A la forma $x+yi$ se le denomina *forma binómica del número complejo.*

3- Teniendo en cuenta la propiedad anterior, las operaciones suma y producto antes definidas pueden ahora ser escritas en forma binómica como

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+i\,y_1)\cdot(x_2+i\,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+y_1x_2)$$

Obsérvese que los resultados de la parte derecha de esta última igualdad, se pueden obtener manipulando los términos de la parte izquierda como si sólo contuvieran números reales y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

4- Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$, podemos afirmar que

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i, \ldots$$

Las potencias superiores se realizan de manera análoga, observándose que los valores obtenidos se repiten de cuatro en cuatro.

5- Teniendo en cuenta que el elemento simétrico para el producto es

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x-yi}{(x+yi)\cdot(x-yi)} = \frac{1}{x+yi}$$

se define el cociente entre dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ como

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2} = \frac{(x_1 + i\,y_1)(x_2 - i\,y_2)}{(x_2 + i\,y_2)(x_2 - i\,y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}$$

siempre que $z_2 \neq 0$

2.- REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA. CONJUGADO Y MÓDULO

Para la representación geométrica de los números complejos en el plano se toma un sistema cartesiano rectangular de coordenadas. El número complejo $z = x + i\,y$ se representa mediante el punto *P*(*x*,*y*) al que se le denomina *afijo* del número complejo o bien como el vector con origen en el punto (0,0) y extremo *P*(*x*,*y*).

El eje *OX* se llama *eje real*, por corresponderse sus puntos con números reales (o complejos de parte imaginaria nula); y el eje *OY*, *eje imaginario*, por corresponderse sus puntos con números imaginarios puros (parte real nula). Cuando el plano XY es usado para representar números complejos se denomina *plano complejo o plano z.*

De acuerdo con esta representación geométrica, dados dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, su suma $z_1 + z_2$ puede considerarse tanto el punto de coordenadas (x_1+x_2, y_1+y_2) como el vector que tiene estas coordenadas como componentes, es decir, $z_1 + z_2$ se puede obtener vectorialmente según la regla del paralelogramo, como se indica en la Fig. 1:

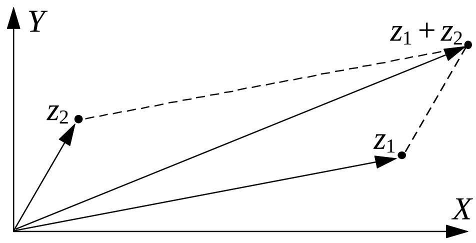

Fig. 1

Análogamente se representa la diferencia $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$, como se indica en la Fig.2:

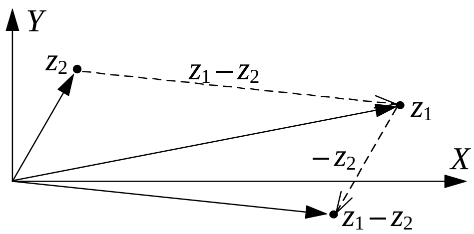

Fig. 2

El *complejo conjugado*, o simplemente *conjugado* de un número complejo $z = x + i\,y$, se define como $\overline{z} = x - i\,y$.

La suma de un número complejo y su conjugado es un número real, y la diferencia es un número *imaginario puro* (la parte real es 0).

Operando directamente puede comprobarse que:

1- $\overline{\overline{z}} = z$

2- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$

y que si tenemos dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$

3- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

4- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

5- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

El *módulo*, o valor absoluto de un número complejo *z* es el número real no negativo

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

Geométricamente, el número $|z|$ representa la distancia euclídea entre el punto (x, y) y el origen, es decir, es la longitud del vector que tiene al punto z como afijo; por tanto, es la norma euclídea y verifica las siguientes propiedades:

1) $|z| \geq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$ y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

2) $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z| \quad \forall \lambda, z \in \mathbb{C}$

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (desigualdad triangular)

En consecuencia, la distancia entre dos números complejos z_1 y z_2 se define:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

que geométricamente coincide con la distancia euclídea entre los puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano OXY.

Mediante simple operación, pueden comprobarse las dos propiedades siguientes:

1) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

3.- FORMAS TRIGONOMETRICA Y POLAR

Sean (ρ, θ) coordenadas polares del punto (x,y) asociado al número complejo no nulo $z = x + iy \neq 0$. Como $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ (Fig 3), z puede expresarse de la forma:

$$z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

A esta expresión se le denomina *forma trigonométrica* del número complejo *z*.

El número positivo ρ es la longitud del vector asociado a z, es decir $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y θ es un ángulo, medido en radianes, desde el eje real positivo hasta el vector *z* cumpliendo $\text{tg}\,\theta = y/x$. Este valor θ se dice que es el argumento de z y se escribe $\theta = \arg(z)$.

Geométricamente arg z denota el ángulo medido en radianes, que forma z con el semieje positivo

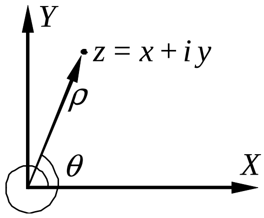

Fig. 3

Por lo tanto, hay un número infinito de valores reales que difieren en múltiplos de 2π, del argumento. Todos ellos pueden determinarse a través de la ecuación $tg\theta = \dfrac{y}{x}$ donde hay que especificar también el cuadrante en que está situada z. Así, en general, si $z \neq 0$:

$$\mathrm{z} = \rho[\cos(\theta + 2\mathrm{k}\pi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\theta + 2\mathrm{k}\pi)] \qquad \mathrm{k} \in \mathbb{Z}$$

Siendo ρ el módulo de z y θ cualquier valor particular de arg z. Para z = 0, θ no está definido, luego asumiremos implícitamente que todo número complejo que escribamos en coordenadas polares es no nulo.

El conjunto de todos los posibles argumentos de *z* se llama *argumento* de *z*, y se representa arg(*z*):

$$\arg(z) = \theta + 2\,k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Al único valor de arg(*z*) perteneciente al intervalo $(-\pi, \pi]$ se le denomina *valor principal del argumento*, y se denota Arg(*z*).

Ejemplo: El número complejo $z = 1 - i$, que está en el cuarto cuadrante y verifica

$$|z| = \sqrt{2}\,; \quad \mathrm{tg}\ \theta = -1/1 = -1$$

se puede escribir como: $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos(-\pi/4) + i \cdot \mathrm{sen}(-\pi/4)\right]$

pero también, por ejemplo, como: $1 - i = \sqrt{2}\left[\cos(7\pi/4) + i \cdot \mathrm{sen}(7\pi/4)\right]$, verificando:

$\arg(1-i) = -\pi/4 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ y $\mathrm{Arg}(1-i) = -\pi/4$. ■

El número complejo $z = \rho\ (\cos\theta + i\ \mathrm{sen}\theta)$ suele representarse como $z = \rho_\theta$, que se denomina *forma polar* de *z*.

Producto, cociente y potencia entera en forma polar:

Dados dos números complejos no nulos $z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}$, $z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}$, escribiéndolos en forma trigonométrica y operando, puede comprobarse que se verifica que se verifica:

1) $\mathrm{z}_1 \cdot \mathrm{z}_2 = (\rho_1)_{\theta_1} \cdot (\rho_2)_{\theta_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2)_{\theta_1+\theta_2}$

2) $\mathrm{z}_1 / \mathrm{z}_2 = (\rho_1)_{\theta_1} / (\rho_2)_{\theta_2} = (\rho_1 / \rho_2)_{\theta_1-\theta_2}$

3) $1/\mathrm{z} = 1/(\rho)_\theta = (1/\rho)_{-\theta}$ si $\mathrm{z} = (\rho)_\theta$

Teniendo en cuenta las expresiones para el producto de dos números complejos dados en forma polar, es fácil comprobar que si $z = \rho_\theta$, entonces:

$$\mathrm{z}^{\mathrm{n}} = (\rho_\theta)^{\mathrm{n}} = (\rho^{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\theta} \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

4.- FORMA EXPONENCIAL

A menudo conviene escribir $e^{i\theta}$, *o* $\exp(i\theta)$ para expresar el número complejo $\cos\theta + i \cdot \mathrm{sen}\theta$, es decir escribiremos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \mathrm{sen}\theta$$

Esta expresión recibe el nombre de *fórmula de Euler*.

Usando esta fórmula de Euler se define la función exponencial de variable compleja como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \cdot \mathrm{sen} y) = (e^x)_y$$

***Propiedades de la función exponencial*: Se deducen mediante simple operación**

1) $\mathrm{e}^{\mathrm{z}_1}\mathrm{e}^{\mathrm{z}_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2}$

2) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{z}_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{z}_2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{z}_1-\mathrm{z}_2}$

3) $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{z}}\right)^{\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{nz}} \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$

4) La función exponencial $\mathrm{f}(\mathrm{z}) = \mathrm{e}^{\mathrm{z}}$ es *periódica* con periodo imaginario puro igual a $2\pi i$.

5) $\mathrm{e}^{\mathrm{z}} \neq 0 \quad \forall \mathrm{z} \in \mathbb{C}$ (puesto que $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{z}}\right| = \mathrm{e}^{\mathrm{x}} \neq 0$)

Puede demostrarse, que al igual que ocurre con la función exponencial real, la derivada de la función exponencial de variable compleja es ella misma, es decir

$$\left(e^{z}\right)' = e^{z}$$

Considerando la fórmula de Euler, un número complejo $z = \rho\ (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ puede expresarse como: $z = \rho\, e^{i\theta}$ que se denomina *forma exponencial* de z.

Producto, cociente y potencia entera en forma exponencial:

Dados dos números complejos no nulos $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, se verifica:

1) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1 \cdot e^{i\theta_1}}{\rho_2 \cdot e^{i\theta_2}} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho \cdot e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\rho} \cdot e^{-i\theta}$ si $z = \rho \cdot e^{i\theta}$

Teniendo en cuenta la expresión para el producto de dos números complejos dados en forma exponencial, es fácil comprobar que $z = \rho\, e^{i\theta}$, entonces:

$$z^n = (\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n\, e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Si ahora se supone que m es un número entero negativo, entonces m=-n con $n \in \mathbb{N}$, de donde

$$z^m = z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left((1/\rho)_{-\theta}\right)^n = \left(1/\rho^n\right)_{-n\theta} = \rho^{-n} \cdot e^{-in\theta} = \rho^m \cdot e^{im\theta}$$

5.- FORMAS TRIGONOMÉTRICAS COMPLEJAS

De las ecuaciones: $\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \cdot \mathrm{sen}x \\ e^{-ix} = \cos x - i \cdot \mathrm{sen}x \end{cases}$ se deduce: $\begin{cases} \mathrm{sen}x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Por tanto, resulta natural definir las funciones seno y coseno de variable compleja z en la forma:

$$\mathrm{sen}z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Estas funciones son derivables en todo $\mathbb{C}$ por ser suma y resta de las funciones derivables e^{iz} y e^{-iz} . Usando las derivadas de las funciones exponenciales, se deduce que:

$$(\mathrm{sen} z)' = \cos z\,, \quad (\cos z)' = -\mathrm{sen} z$$

6.- RAÍCES DE UN NÚMERO COMPLEJO

Definición: Dado un número complejo $z = \rho \cdot e^{i\theta}$**,** se define $z^{1/n}$ como cualquiera de los números complejos w tales que $w^n = z$.

Calculemos su expresión. Sean, en forma polar, $z = \rho_\theta$ y $w = r_\phi$. Recordando que z es dato, y buscando todas las posibles soluciones w:

$$w^n = \left(r^n\right)_{n\phi} = \rho_\theta$$

Por tanto: $r^n = \rho \;\Rightarrow\; r = \sqrt[n]{\rho}$

$$n\phi = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Para cada valor de $k = 0,\ 1,\ \ldots ,n-1$ se obtiene un número complejo diferente. El resto de los valores de k dan lugar a los mismos números complejos que los valores anteriores. Por tanto:

$$z^{1/n} = w = \left(\rho^{1/n}\right)_{\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

Geométricamente, como el módulo de todas las raíces es común e igual a $\rho^{1/n}$, y la diferencia entre dos argumentos consecutivos es $\dfrac{2\pi}{n}$, los puntos que representan los diversos valores de $z^{1/n}$ están sobre la circunferencia de radio $\rho^{1/n}$, y uniformemente espaciados con una separación angular de $2\pi/n$, habiendo n raíces enésimas distintas de cualquier número complejo $z \neq 0$. Esto se representa en la Fig. 4 para $n = 4$.

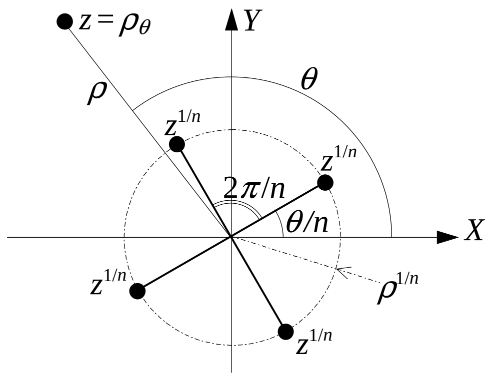

Fig. 4

Ejemplo: Para calcular las tres raíces cúbicas $(-8)^{1/3}$ basta tener en cuenta que:

$$|-8| = 8\,; \quad \arg(-8) = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad (-8)^{1/3} = \left(8^{1/3}\right)_{\frac{\pi+2k\pi}{3}} = 2_{\frac{\pi+2k\pi}{3}} \quad (k = 0,1,2)$$

Si $k = 0$ queda: $$z_1 = 2_{\pi/3} = 2\left[\cos(\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(\pi/3)\right] = 1 + i\sqrt{3}$$

Si $k = 1$ queda: $$z_2 = 2_{\pi} = 2\left(\cos\pi + i\cdot\mathrm{sen}\,\pi\right) = -2$$

Si $k = 2$ queda: $$z_3 = 2_{5\pi/3} = 2\left[\cos(5\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(5\pi/3)\right] = 1 - i\sqrt{3}$$

que son los vértices del triángulo equilátero inscrito en $|z| = 2$ representado en la Fig. 5.

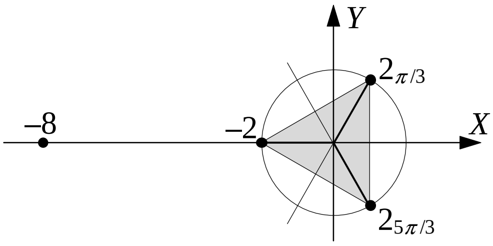

Fig. 5.

EJERCICIOS

1.- Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma binómica:

1.1.) $z = 5 \cdot e^{7\pi \cdot i}$ **Solución**: $z = -5$

1.2.) $z = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{3\pi}{2}i}$ **Solución**: $z = \frac{1}{3}i$

1.3.) $z = \sqrt{3} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i}$ **Solución**: $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

1.4.) $z = e^{-\frac{\pi}{6}i}$ **Solución**: $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

1.5.) $z = e^{\frac{7\pi}{3}i}$ **Solución**: $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1.6.) $z = \sqrt{2}_{\pi}$ **Solución**: $z = -\sqrt{2}$

1.7.) $z = \sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$ **Solución**: $z = 1 + i$

1.8.) $z = 5_{-\frac{7\pi}{2}}$ **Solución**: $z = 5i$

1.9.) $z = 1_{\pi} \cdot 2_{\frac{\pi}{2}}$ **Solución**: $z = -2i$

1.10.) $z = e^{\frac{5\pi}{2}i} \cdot 2 \cdot e^{\pi \cdot i}$ **Solución**: $z = -2i$

2.- Expresar cada uno de los siguientes números complejos en forma exponencial $z = \rho \cdot e^{\theta \cdot i}$, $-\pi < \theta \leq \pi$:

2.1.) $z = 5i$ **Solución**: $z = 5 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$

2.2.) $z = -(1 + \sqrt{3}i)$ **Solución**: $z = 2 \cdot e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

2.3.) $z = -1 + i$ **Solución**: $z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}i}$

2.4.) $z = -1 - i$ **Solución**: $z = \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{3\pi}{4}i}$

2.5.) $z = (-\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^4$ **Solución**: $z = 16 \cdot e^{\pi i}$

2.6.) $z = (-2 - 2i)^2$ **Solución**: $z = 8 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}$

2.7.) $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ **Solución**: $z = e^{\frac{\pi}{6}i} = 1_{\frac{\pi}{6}}$

2.8.) $z = i \cdot (1+i) \cdot e^{\frac{\pi}{6}i}$ **Solución**: $z = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{11\pi}{12}i} = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{11\pi}{12}}$

2.9.) $z = (\sqrt{3}+i) \cdot 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}$ **Solución**: $z = 4\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{12}i} = (4\sqrt{2})_{-\frac{\pi}{12}}$

2.10.) $z = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} - 1}{1+i\sqrt{3}}$ **Solución**: $z = \dfrac{1}{2} e^{\frac{\pi}{3}i} = \left(\dfrac{1}{2}\right)_{\frac{\pi}{3}}$

3.- Calcular las siguientes raíces:

3.1.) $\sqrt[3]{27i}$ **Solución**: $z_1 = \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}+i),\ z_2 = \dfrac{3}{2}(-\sqrt{3}+i),\ z_3 = -3i$

3.2.) $\sqrt[4]{-16}$ **Solución**: $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(1+i), \quad z_2 = \sqrt{2}(-1+i) \\ z_3 = -\sqrt{2}(1+i),\ z_4 = \sqrt{2}(1-i) \end{cases}$

4.- Resolver las siguientes ecuaciones:

4.1.) $z^4 + 16 = 0$ **Solución**: $\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}(1+\mathrm{i}), \quad z_2 = \sqrt{2}(-1+\mathrm{i}) \\ z_3 = -\sqrt{2}(1+\mathrm{i}),\ z_4 = \sqrt{2}(1-i) \end{cases}$

4.2.) $z^3 - 1 = 0$ **Solución**: $z_1 = 1,\ z_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

4.3.) $(1+i) \cdot z^3 - 2i = 0$ **Solución**: $z_1 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{\pi}{12}},\ z_2 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{3\pi}{4}},\ z_3 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{17\pi}{12}}$

4.4.) $z^3 + z = 0$ **Solución**: $z_1 = 0,\ z_2 = \mathrm{i},\ z_3 = -i$

4.5.) $z^3 - z = 0$ **Solución**: $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1$

5.- Pasar a forma binómica $\sqrt{3-4i}$ **Solución**: $\pm(2-i)$

6.- Hallar las raíces sextas de la unidad.

Solución: $z_1 = 1,\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_4 = -1,\ z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

7.- Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ **Solución**: $A = 0$

b) $B = \frac{1-e^{\pi i/2}}{1+e^{\pi i/2}}$ **Solución**: $B = -i$

8.- Demostrar la *fórmula de Moivre* : $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = (\cos n\theta + i\,\mathrm{sen} n\theta) \quad (n \in \mathbb{N})$

9.- Demostrar que $\left(1+i\cdot\sqrt{3}\right)^n + \left(1-i\cdot\sqrt{3}\right)^n = 2^{n+1}\cdot\cos(n\pi/3)$

10.- Calcular las raíces de la ecuación: $z^3 - 17i\cdot z^2 + (4i-91)\cdot z + (171i+36) = 0$, sabiendo que la raíz de mayor componente imaginaria está situada en la parte positiva del eje imaginario, y su módulo es tres veces el módulo de las raíces de la ecuación $z^3 = 27$.

Solución: $z_1 = 9i,\ z_2 = 2+3i,\ z_3 = -2+5i$

11.- La suma de dos números complejos es (3 + 2i), y la parte real de uno de ellos es 2. Hallar dichos números sabiendo que su cociente es un número imaginario puro.

Solución: $\begin{cases} z_1 = 2 + (1-\sqrt{3})i \\ z_2 = 1 + (1+\sqrt{3})i \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = 2 + (1+\sqrt{3})i \\ z_2 = 1 + (1-\sqrt{3})i \end{cases}$