CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

1.- CONTINUIDAD EN UN PUNTO

<u>*Definición*</u>: Sea f una función real definida en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Se dice que *f* es *continua en* x_0 si se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

es decir, si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 \;/\; \forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

<u>*Definición*</u>: Se dice que *f* es continua en un conjunto *D* si es continua en todos los puntos de *D*.

1.1.- <u>Propiedades.</u>

- Si *f* y *g* son continuas en x_0, entonces también son continuas en x_0 su suma *f*+*g*, su producto *fg* y su cociente *f/g*, esto último siempre y cuando $g(x_0) \neq 0$.

- Dadas dos funciones *f* y *g*, si *g* es continua en x_0 y *f* es continua en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es una función continua en x_0.

1.2.- <u>Continuidad por la derecha y por la izquierda.</u>

Según la definición anterior, al calcular el límite podemos hablar de límites laterales. En este caso tenemos las siguientes definiciones.

Se dice que *f* es *continua a la derecha* en x_0 si se cumple $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

De igual modo, se dice que *f* es *continua a la izquierda* en x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Si una función está definida en un entorno de un punto, entonces es continua en el punto si y sólo si es continua a la derecha e izquierda de dicho punto.

Es claro entonces que una función es continua en un intervalo a,b, si es continua en el intervalo abierto (a,b) y además es continua a la derecha en *a* y continua a la izquierda en *b*. (La continuidad de una función en un intervalo implica que el grafo de la función es una curva ininterrumpida en el mismo).

2.- DISCONTINUIDAD EN UN PUNTO

Una función es *discontinua* en un punto si no es continua en él.

2.1.- <u>Tipos de disontinuidad.</u>

Discontinuidad evitable. Prolongación por continuidad.

<u>*Definición*</u>: Se dice que *f* tiene una *discontinuidad evitable* en un punto x_0 si existe y es finito el límite de *f* en x_0, pero o bien la función no está definida en dicho punto, o el valor del límite no coincide con $f(x_0)$.

Esta discontinuidad puede ser evitada definiendo la función de manera adecuada en el punto x_0, obteniéndose así una función g denominada *función prolongación por continuidad de f*:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \forall x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

Discontinuidad inevitable.

Definición: Se dice que *f* tiene una *discontinuidad inevitable* en un punto x_0 si no existe el límite de la función en dicho punto, o su valor no es finito.

Además de lo anterior, la discontinuidad inevitable puede ser de dos tipos. Se dice que una función presenta una *discontinuidad inevitable de primera especie* (o *de salto finito*) en x_0 si existen y son finitos los límites laterales de la función en x_0 pero éstos no coinciden. En el resto de los casos se dice que la función presenta una *discontinuidad inevitable de segunda especie* en x_0.

212Función continua a trozos.

Definición: Se dice que una función es *continua a trozos* en un intervalo a,b si es continua excepto en un número finito de puntos en los cuales presenta discontinuidad de salto finito.

3- TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS EN EL INTERVALO CERRADO [*a*,*b*]

Teorema de Bolzano. Si *f* es continua en el intervalo cerrado a,b y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos distintos, existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=0$.

Teorema del valor intermedio. Si f es continua en a,b, y k es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c)=k$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Estudiar la continuidad de la siguiente función en los puntos x = 1 y x = 2:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x\cdot \mathrm{L}(x)}{x^2-1} & \text{si } \ x\neq 1 \\ \\ 1/2 & \text{si } \ x=1 \end{cases}$$

Solución: f continua en x = 1 y x = 2

2.- Estudiar la continuidad en x = 0 (indicando tipo de discontinuidad) de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{1+e^{1/x}} & \text{Si } \ x\neq 0 \\ \\ 0 & \text{Si } \ x=0 \end{cases}$$

Solución: f no es continua en x = 0 (D. I. de 2ª especie)

3.- Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } \ x\neq 3 \\ \\ 2 & \text{si } \ x=3 \end{cases}$$

a) En x = 3 b) intervalo (3,4) c) intervalo [3,4].

Solución: a) f no es continua en x = 3

b) f es continua en (3,4)

c) f no es continua en [3,4]

4.- Estudiar la continuidad en x = 0 (indicando en caso de ser discontinua, tipo de discontinuidad) de las funciones:

a) $f(x)=e^{1/\sin(x)}$ Solución: D. I. (2ª especie)

b) $g(x)=\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x}}$ Solución: D. E.

c) $h(x)=\dfrac{x\cdot \mathrm{L}(1+x)}{3x^2}$ Solución: D. E.

d) $i(x)=e^{1/x}\cdot\sin(\pi/x)$ Solución: D. I. (2ª especie)

e) $j(x)=\dfrac{|x|}{x}$ Solución: D. I. (1ª especie)

5.- Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{1/x}+2}{e^{1/x}+1} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

a) Estudiar el tipo de discontinuidad que presenta en $x = 0$.

b) ¿Cómo debe definirse la función para que sea continua a la izquierda de $x = 0$?

Solución: a) Discontinuidad inevitable 1ª especie

b) $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

6.-Estudiar en el punto $x = 1$ el tipo de discontinuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin[1/(x-1)]}{e^{1/(x-1)}+1} & \text{Baldin} \quad x\neq 1 \\ 0 & \text{Baldin} \quad x=1 \end{cases}$$

Solución: Discontinuidad inevitable 2ª especie

7.- Estudiar el tipo de discontinuidad, en $x = \pi/2$, de la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\tan x}+1}{e^{\tan x}-1} & \text{Si} \quad x\neq \pi/2 \\ 0 & \text{Si} \quad x=\pi/2 \end{cases}$$

Solución: Discontinuidad inevitable 1ª especie

8.- Estudiar la continuidad (indicando en cada caso tipo de discontinuidad):

a) $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$ b) $g(x)=x\cdot\text{sen}(\pi/x)$ b) $g(x)=x\cdot\text{sen}(\pi/x)$

c) $h(x)=\dfrac{x\cdot \text{L}(x)}{x^3-1}$ d) $i(x)=\text{L}(x^2-4x+3)$

e) $j(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ f) $k(x)=\dfrac{1}{\text{L}|x|}$

g) $l(x)=\begin{cases} (x+1)\cdot 2^{-[(1/|x|)+(1/x)]} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$

h) $m(x)=\dfrac{1}{1+2^{\tan x}}$ en el punto $x=\pi/2$

Solución: a,b) f continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. En $x = 0$ D. E.

c) Continua en $(0,1)\cup(1,\infty)$. En x = 0,1 D. E.

d) Continua en $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$. En x = 1, 3 D. I.

e) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. En x = 0 D. I. (1ª especie)

f) Continua en $\mathbb{R}-\{0,1,-1\}$. En x = 0 D.E.

En $x = \pm 1$ D. I. (2ª especie)

g) Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$. En x = 0 D. I. (1ª especie)

h) $x = \dfrac{\pi}{2}$ D. I. (1ª especie)

9.- Calcular las constantes A y B para que la función *f* sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} -2\cdot\sin(x) & \text{Si } x\le -\pi/2 \\ \mathrm{A}\cdot\sin(x)+\mathrm{B} & \text{Si } -\pi/2<x<\pi/2 \\ \cos(x) & \text{Si } x\ge \pi/2 \end{cases}$$

<u>Solución</u>: A = -1, B = 1

10.- Estudiar la continuidad de las dos siguientes funciones en $\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+e^{nx}}$ <u>Solución</u>: Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.

b) $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{x}$ <u>Solución</u>: Continua en $\mathbb{R}-\{0\}$.