SUCESIONES

1.- SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES.GENERALIDADES

<u>*Definición*</u>: Se llama *sucesión de números reales* a toda aplicación *f* de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) = a_n$$

a_n se llama *término general* de la sucesión.

Nota: Muchos autores definen de la forma anterior una sucesión de números reales, sin embargo, el hecho de utilizar el término "función" para definirlas puede inducir a error ya que como tal no hablaremos nunca de su continuidad, derivabilidad, diferencibilidad y consecuentemente no es posible utilizar la Regla de l´Hôpital com ose verá en el siguiente tema para la resolución indeterminaciones en el cálculo de límites de funciones de una variable.

La sucesión $\{a_n\}$ está *acotada inferiormente* si $\exists\, m \in \mathbb{R} / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq m$.

La sucesión $\{a_n\}$ está *acotada superiormente* si $\exists\, M \in \mathbb{R} / \ \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M$.

La sucesión $\{a_n\}$ está *acotada* si lo está superior e inferiormente.

Una sucesión $\{a_n\}$ es:

- *Creciente* (*o no decreciente)* si: $\forall n \in N \quad a_{n+1} \geq a_n$.
- *Estrictamente creciente* si: $\forall n \in N \quad a_{n+1} > a_n$
- *Decreciente* (*o no creciente*) si: $\forall n \in N \quad a_{n+1} \leq a_n$.
- *Estrictamente decreciente* si: $\forall n \in N \quad a_{n+1} < a_n$

2.- LÍMITE DE UNA SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

<u>*Definición*</u>: $\ell \in \mathbb{R}$ es el *límite* de la sucesión $\{a_n\}$ cuando *n* tiende a ∞, y se denota $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0(\varepsilon) \in N \ / \ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

En este caso se dice que la sucesión $\{a_n\}$ *converge*.

<u>*Teorema*</u>: Si una sucesión tiene límite, éste es único.

<u>*Teorema*</u>: Toda sucesión convergente está acotada.

<u>*Teorema*</u>: Toda sucesión $\{a_n\}$ creciente (decreciente) y acotada superiormente (inferiormente) es convergente.

<u>*Definición*</u>: Se dice que $\{a_n\}$ *diverge* si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \ \forall A \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n \geq n_0 \ \ a_n \geq A$$

o bien si,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, A \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists\, n_0 \in N \;/\;\; \forall n \geq n_0 \;\; a_n \leq -A$$

Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ que no tiene límite se dice *oscilante*.

2.1.- Cálculo de límites de sucesiones

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ dos sucesiones cuyos límites son respectivamente α y β . Entonces:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (k) = k \quad \forall k$ constante real

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (k \cdot a_n) = k \cdot \alpha \quad \forall k$ constante real

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha \cdot \beta$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n} \right) = \dfrac{\alpha}{\beta}, \quad \beta \neq 0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_{\mathrm{a}} a_n = \log_{\mathrm{a}} \alpha \quad (\alpha > 0)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{a}^{a_n} = \mathrm{a}^{\alpha} \quad (\mathrm{a} > 0)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \alpha^{\beta} \quad (\alpha > 0)$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

α y β pueden ser finito o infinito. Las propiedades anteriores son válidas siempre y cuando las operaciones con α y β estén definidas o tengan sentido.

Teorema: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y *f(x)* es continua en ℓ, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(\ell)$.

Teorema: Si $a_n = f(n) \quad \forall n \in N$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

Teorema: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada , entonces $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

2.1.1.- Indeterminaciones. Métodos de resolución

Al operar algebraicamente con sucesiones que tienen límite, hay siete posibles indeterminaciones en las que el posible límite de la sucesión resultante no queda determinado en función de los límites de las sucesiones de partida, sino que depende, también, de cómo tiendan éstas a sus límites, pudiendo incluso no existir.

Formas indeterminadas: $\dfrac{0}{0}, \quad \dfrac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}$

Equivalencias y desigualdades fundamentales

Definición: Se dice que dos sucesiones $\{a_n\}, \{b_n\}$ son *equivalentes* si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1,$$

y se denota por $a_n \sim b_n$.

<u>*Principio de sustitución*</u>: Todo **factor** o **divisor** (que no aparezca infinitas veces) puede sustituirse por otro equivalente, sin que se altere el límite de la expresión.

<u>*Equivalencias más utilizadas:*</u>

$$\text{Si } a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} sen(a_n) \sim \tan(a_n) \sim \arcsin(a_n) \sim \arctan(a_n) \sim \mathrm{L}(1+a_n) \sim a_n \\ 1-\cos(a_n) \sim \dfrac{(a_n)^2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Si } a_n \to 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}(a_n) \sim a_n - 1$$

$$\text{Si } a_n \sim b_n \text{ y } a_n \not\to 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}(a_n) \sim \mathrm{L}(b_n)$$

$$\text{Si } a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a_n)^a \sim (b_n)^a \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n} \end{cases}$$

$$\text{Si } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k \sim a_0 n^k \quad (k > 0)$$

$$\text{Si } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}\left(a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_k\right) \sim \mathrm{L}\left(n^k\right) \quad (k > 0)$$

<u>*Desigualdades fundamentales:*</u>

$$\text{Si } n \to \infty \text{ y siendo } a > 0, \quad b > 0, \quad c > 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathrm{L}\, n)^a << n^b << c^n << n! << n^n$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular el límite cuando $n \to \infty$ de las siguientes sucesiones cuyo término general es a_n :

1.- $a_n = \dfrac{3^n + 7}{5^n - 33}$ Solución: 0

2.- $a_n = \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}$ Solución: $-\dfrac{3}{2}$

3.- $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$ Solución: 1

4.- $a_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^2+4n}\right)^{(n^2-1)/n}$ Solución: e^{-4}

5.- $a_n = \sqrt{n^2+n} - n + 1$ Solución: $\dfrac{3}{2}$

6.- $a_n = \left(\sqrt{\dfrac{1+3n}{5+3n}}\right)^{n^2/(2n-1)}$ Solución: $e^{-1/3}$

7.- $a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{3+n} - \sqrt{n}\right)$ Solución: $\dfrac{3}{2}$

8.- $a_n = \left(\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}-n}}$ Solución: 1

9.- $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ donde $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ Solución: e

10.- $a_n = \left(\sqrt[5]{\dfrac{2n-3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3-1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}}$ Solución: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/5e}$

11.- $a_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{3}{n}\right) \cdot \mathrm{L}\left[1+\tan^2\left(\dfrac{5}{n}\right)\right]}{\arctan\left(\dfrac{7}{n}\right) \cdot \left[1-\cos\left(\dfrac{3}{n}\right)\right]}$ Solución: $\dfrac{50}{21}$

12.- $a_n = \left[\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right]^{\sqrt{n}}$ Solución: 1

13.- $a_n = \dfrac{\mathrm{L}(n)}{n}$ Solución: 0

14.- $a_n = \log_n(n+1)^{\ n}$ Solución: 1

15.- $a_n = (n+3)\cdot \mathrm{L}\left(\frac{n^2+5n-1}{n^2-n+1}\right)$ Solución: 6

16.- $a_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ Solución: 3

17.- $a_n = \frac{1}{n^2}\cdot\left[\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\ldots+\frac{(n+1)^n}{n^{(n-1)}}\right]$ Solución: $\frac{e}{2}$

18.- $a_n = \frac{u_1+2u_2+3u_3+\ldots+nu_n}{n^2}$ donde:

i) $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ Solución: $\frac{a}{2}$

ii) $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ Solución: ∞

19.- $a_n = \left(\frac{n^2+n-1}{n^2-3}\right)^{(3n-2)/3n}$ Solución: 1

20.- $a_n = \frac{\mathrm{L}(1+e^n)}{n}$ Solución: 1

21.- $a_n = \frac{3+6+\ldots+(3n)}{n^2}$ Solución: $\frac{3}{2}$

22.- $a_n = \sqrt[n]{\frac{2^n+n^5+8}{3^n+4n^3+\ \mathrm{L}(n)^{\ 80}}}$ Solución: $\frac{2}{3}$

23.- $a_n = \left[\frac{\mathrm{L}(n+a)}{\mathrm{L}(n)}\right]^{n\cdot\mathrm{L}(n)}$ Solución: e^a

24.- $a_n = \frac{3n^4\cdot\sin^2\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\mathrm{L}\left[1+\frac{1}{n}\right]}{(n+5)\cdot\cos\left(\frac{n\pi+5}{4n+1}\right)}$ Solución: $3\sqrt{2}$

25.- $a_n = 2^n\cdot\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)$ Solución: $2a$

26.- $a_n = \frac{\sin(\alpha)+2^2\cdot\sin(\alpha/2)+\ldots+n^2\cdot\sin(\alpha/n)}{n^2}$ Solución: $\frac{\alpha}{2}$

27.- $a_n = \left[\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$ Solución: $e^{-1/2}$

28.- $a_n = \left(n+\sqrt{n}\right)\cdot\mathrm{L}\left(1+\frac{3}{2n-1}\right)$ Solución: $\frac{3}{2}$

29.- $a_n = 1+\mathrm{L}(n^2-5n+3)-\mathrm{L}(n^2+3n-5)$ Solución: 1

30.- $a_n = \left[1 + \tan^2\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{\sin^2(1/n)}}$ Solución: e

31.- $a_n = \dfrac{1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n}{\mathrm{L}(n)}$ Solución: 1

32.- $a_n = n \cdot \left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \qquad a > 0$ Solución: L(a)

33.- $a_n = \dfrac{1}{n^p} \cdot \dbinom{n}{p}$ Solución: $\dfrac{1}{p!}$

34.- $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+n)}$ Solución: $\dfrac{4}{e}$

35.- $a_n = \left[\dfrac{1 + \tan(1/n)}{1 - \tan(1/n)}\right]^n$ Solución: e^2

36.- $a_n = (2n^4 + n^2 - 3)^{1/n}$ Solución: 1

37.- $a_n = \left(2 + 3n^4\right)^{\frac{1}{3 + 2\mathrm{L}(n+1)}}$ Solución: e^2

38.- $a_n = \left(\dfrac{n+2}{3n^3 - 1}\right)^{\frac{1}{\mathrm{L}(n^4 - 3)}}$ Solución: $e^{-1/2}$

39.- $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ Solución: $\dfrac{1}{e}$

40.- $a_n = (n^3 + n^2 - 10)^{1/n}$ Solución: 1

41.- $a_n = \sqrt[n]{\sin^4\left[\dfrac{(n+1)\pi}{3n^2}\right]}$ Solución: 1

42.- $a_n = \dfrac{b_0}{2^n} + \dfrac{b_1}{2^{n-1}} + \ldots + \dfrac{b_{n-1}}{2} + b_n$ donde $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$ Solución: 1

43.- $a_n = \dfrac{1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n}{n}$ Solución: 0

44.- $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+n)}{n!}} \qquad a > -1$ Solución: 1

45.- $a_n = \sqrt[n]{2 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}$ Solución: e

46.- i) $a_n = \sqrt[n]{n}$ Solución: 1

ii) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ Solución: ∞

47.- $a_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ <u>Solución</u>: 4

48.- $a_n = \dfrac{\mathrm{L}(5n^4 - 4n^3 + 6n^2 + 3n - 2)}{\mathrm{L}(6n^3 + 4n^2 - 5n + 7)}$ <u>Solución</u>: $\dfrac{4}{3}$

49.- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2+n+1)\cdot(3^{1/n}-1)}{\tan^2(1/n)}$ <u>Solución</u>: ∞

50.- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1! + 2! + \ldots + n!}{n!}$ <u>Solución</u>: 1

51.- Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n}{1+2+3+\ldots+n}$ donde $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ <u>Solución</u>: a

52.- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\left(\dfrac{n^2}{n^3+1}\right)\cdot\left(\mathrm{L}\left(\dfrac{5n+3}{5n}\right)\right)^3}{(n^3+2n+5)\cdot\arctan^2(1/n)}$ <u>Solución</u>: 0

53.- Calcular el siguiente límite en función del parámetro $\lambda > 0$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{6\lambda(n+5)(n^2+1)}\right]^{5n-2}$$

<u>Solución</u>: $\begin{cases} 0 & \text{Si } \lambda > 1/6 \\ e^{-10} & \text{Si } \lambda = 1/6 \\ \infty & \text{Si } \lambda < 1/6 \end{cases}$

54.- Calcular el siguiente límite en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n^{1-\lambda}\cdot\sin(2/n)}{\sqrt{n^2+2}-n}}$$

<u>Solución</u>: $\begin{cases} 1 & \text{Si } \lambda > 0 \\ e & \text{Si } \lambda = 0 \\ \infty & \text{Si } \lambda < 0 \end{cases}$

55.- $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n^{\sin(1/n)} + \log_2\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)\right]$ <u>Solución</u>: 0