# EXTREMOS DE FUNCIONES REALES

## 1.- EXTREMOS RELATIVOS.

### 1.1.- <u>Extremos relativos libres.</u>

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el abierto *D*.

<u>*Definición*</u>: Se dice que *f* tiene un *máximo relativo* (*mínimo relativo*) *en sentido estricto* en un punto $a(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ si se verifica que $f(a) > f(x)$ ( $f(a) < f(x)$ ) para algún entorno reducido del punto *a*.

<u>*Nota*</u>: Si las expresiones anteriores se sustituyen por $f(a) \geq f(x)$ y $f(a) \leq f(x)$ respectivamente, se dice que el *máximo* y el *mínimo* lo son *en sentido amplio*. De forma genérica, tanto a los extremos relativos en sentido amplio como en sentido estricto, se les denomina *extremos relativos* o *locales* de la función *f*. En este tema, al hablar de máximos y mínimos relativos entenderemos que se trata de máximos y mínimos relativos en sentido estricto.

<u>*Observación*</u>: En la anterior definición para que *f* alcance un extremo relativo en un punto $a(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ no se le exige a *f* ninguna relación de regularidad. *f* puede tener un extremo relativo en un punto sin que sea, ni siquiera, continua en él. Por ejemplo, consideremos la función *f* dada por la expresión:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Esta función tiene un máximo relativo en el punto (0,0) pues $f(0,0) = 1$ y $f(x,y) < 1 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Esto sucede sin necesidad de que *f* sea continua en ese punto.

#### 1.1.1.- Condición necesaria de extremo relativo.

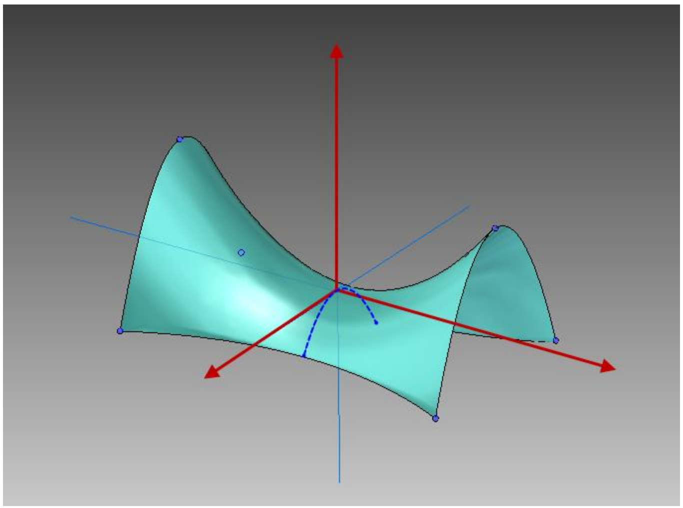
<u>*Definición*</u>: Sea el conjunto *D* un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se llaman *puntos críticos* o *estacionarios* de *f* a aquellos puntos $a(a_1, a_2, ..., a_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $df(a) = 0$.

<u>*Teorema*</u>: Sea el conjunto *D* un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en un cierto punto $a(a_1, a_2, ..., a_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$. Si *f* tiene un extremo relativo en el punto *a*, entonces la diferencial de *f* en *a* es nula, y por lo tanto, también lo serán todas las derivadas parciales de *f* en *a*, es decir, $f'_{x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) = 0, \quad \forall i = 1, 2, ..., n$. El recíproco en general es falso.

Por lo tanto, una condición necesaria pero no suficiente para que una función diferenciable *f* tenga un extremo relativo en el punto $a(a_1, a_2, ..., a_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ es que *a* sea un punto crítico de *f*.

<u>*Definición*</u>: Un punto crítico en el que no hay extremo relativo se denomina *punto de silla*.

<u>Ejemplo</u>: La función $z = f(x,y) = y^2 - x^2$ posee un punto crítico en $(0,0)$ en el que no hay extremo relativo. Se trata, por tanto, de un punto de silla (figura 1).



(figura 1)

### 1.1.2.- Condición suficiente de extremo relativo.

*Teorema*: Sea el conjunto $D$ un abierto de $\mathbb{R}^n$, $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$ (es decir, una función de clase $C^2$), y $a(a_1, a_2, ..., a_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ un punto crítico de *f*.

- Si $d^2 f(a) > 0 \ \ \forall (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0) \Rightarrow f$ tiene en *a* un mínimo relativo.
- Si $d^2 f(a) < 0 \ \ \forall (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0) \Rightarrow f$ tiene en *a* un máximo relativo.
- Si $d^2 f(a)$ no tiene signo determinado $\Rightarrow$ *a* es un punto de silla.

*Nota*: $d^2 f(a)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$d^2 f(a) = (dx_1 \ldots dx_n) Hf\big|_{x=a} (dx_1 \ldots dx_n)^T$, donde

$$Hf\big|_{x=a} = \begin{pmatrix} f''_{x_1^2}(a) & f''_{x_1 x_2}(a) & \cdots & f''_{x_1 x_n}(a) \\ f''_{x_2 x_1}(a) & f''_{x_2^2}(a) & \cdots & f''_{x_2 x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n x_1}(a) & f''_{x_n x_2}(a) & \cdots & f''_{x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz Hessiana* de la función *f* en el punto *a*. A su determinante se le denomina *Hessiano* de la función *f* en el punto *a*.

**Criterio de Sylvester**

Consideremos $\Delta_k = \det\left( f''_{x_i x_j}(a) \right)_{\substack{1 \le i \le k \\ 1 \le j \le k}}$, es decir, el determinante de orden *k* que forman los elementos de las *k* primeras filas y la *k* primeras columnas del Hessiano de la función *f* en el punto *a*, para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces se verifica que:

- $d^2 f(a) > 0 \ \ \forall (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0) \ \ \Leftrightarrow \ \Delta_k > 0, \ \ \forall k = 1, 2, ..., n$
- $d^2 f(a) < 0 \ \ \forall (dx_1, ..., dx_n) \neq (0, ..., 0) \ \ \Leftrightarrow \ (-1)^k \Delta_k > 0, \ \ \forall k = 1, 2, ..., n$

Además, en el caso particular de dos variables, se puede afirmar que:

a) Si $\Delta_2\big|_{x=a} < 0$, entonces la función presenta en $x = a$ un punto de silla.

b) Si $\Delta_2\big|_{x=a} = 0$, este método no da información.

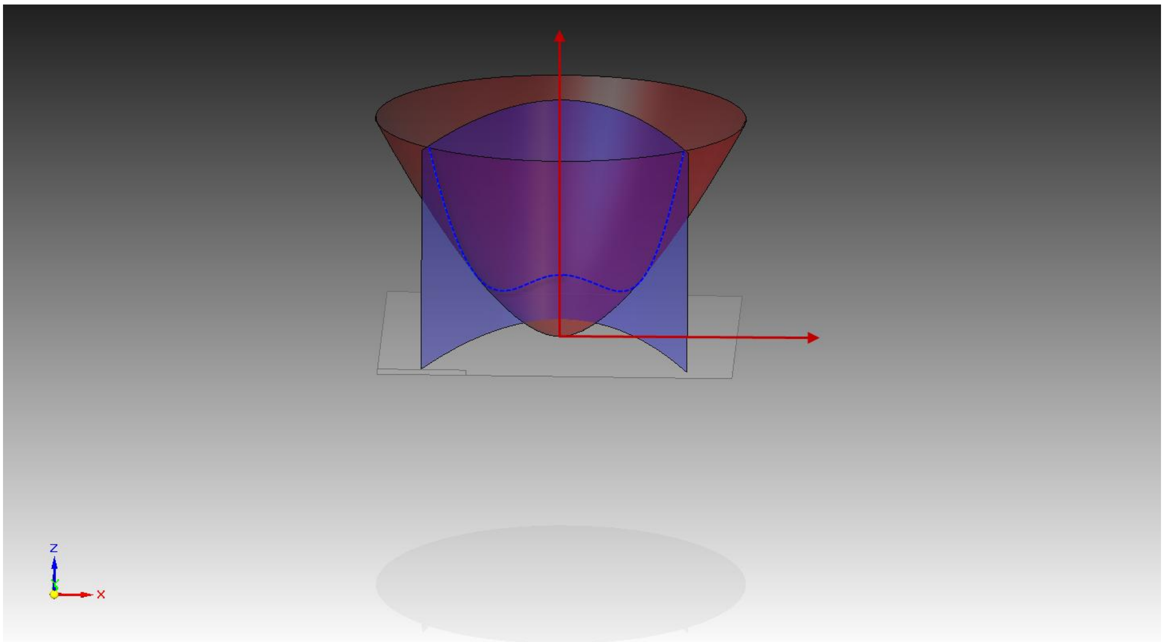
## 1.2.- Extremos relativos condicionados.

Hasta ahora, en lo expuesto sobre extremos relativos de funciones de *n* variables reales, a esas *n* variables no se les ha exigido que cumplan ninguna condición. Es decir, no había ninguna ligadura entre ellas, siendo independientes en el dominio de definición. En el problema que se muestra aquí sin embargo, intentaremos calcular los extremos relativos de una función, exigiendo a las variables que verifiquen ciertas ecuaciones (o ligaduras). El problema que aquí nos ocupa puede resumirse así (a grandes rasgos y para un caso muy particular):

Dada una función "suficientemente regular" $z = f(x,y)$ definida en un cierto dominio de $\mathbb{R}^2$, se desean localizar los valores máximos y mínimos relativos que alcanza *f* cuando el punto $(x,y)$ recorre una cierta curva $\varphi(x,y) = 0$ (ligadura), del plano XY.

La resolución de este problema no es trivial y puede dar lugar a alguna curiosidad.

*Ejemplo*: Sea la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2$. Dicha función, presenta un mínimo relativo en el punto (0,0). Sin embargo, cuando los puntos $(x,y)$ se mueven sobre el cilindro $x^2 + y - 1 = 0$, la función tiene dos mínimos y un máximo (figura 2).




(figura 2)

En general, el problema a resolver sería el siguiente:

Sea el conjunto *D* un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Sean las funciones $\varphi_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, 2, ..., q$.

Llamaremos ligadura al sistema de ecuaciones

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_q(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

Definimos el conjunto $S=\{x\in D/\varphi_i(x)=0 \quad \forall i=1,2,...,q\}$ y supongamos que en el punto $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in D$ se cumple la ligadura (1), es decir, $a\in S$ .

Entonces, se dice que *f* tiene en el punto *a* un *extremo relativo en sentido estricto condicionado por la ligadura* (1), si existe un entorno reducido $U^*$ de *a* tal que se verifica una de las condiciones siguientes:

$f(a)>f(x) \quad \forall x\in U^*\cap S$ (en cuyo caso el extremo es un máximo).

$f(a)<f(x) \quad \forall x\in U^*\cap S$ (en cuyo caso el extremo es un mínimo).

Se puede entonces decir que *f* tiene un extremo relativo condicionado por (1) si la restricción $f\big|_S$ tiene un extremo relativo (ordinario) en *a*.

<u>*Ejemplo*</u>: Resolveremos el problema anteriormente planteado. Es decir, se trata de calcular los extremos relativos de la función $z=f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición $\varphi(x,y)=x^2+y-1=0$.

De la ecuación de ligadura se puede despejar *y* en función de *x* en cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ de manera que podemos expresar $y=1-x^2$. Si sustituimos en la ecuación de la superficie $z=f(x,y)=x^2+y^2$, deberemos calcular los extremos libres de una función de una sola variable:

$$z=f(x,y)=x^2+(1-x^2)^2=x^4-x^2+1=F(x) \;\Rightarrow\; F'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; x=0,\, x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} (0,1) \\ \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

El primer punto crítico es un máximo y los dos siguientes son mínimos.

Para que el método utilizado en el ejemplo anterior pueda ser utilizado, no sólo es necesario que de las ligaduras se puedan "despejar", de un modo efectivo, *q* de las variables en función de las $n-q$ restantes, cosa que ocurre en muy pocas ocasiones, sino que las expresiones que así se obtienen deben definir realmente *q* funciones en un entorno de cada uno de los puntos que hayan de ser estudiados. Es decir, el procedimiento llevado a cabo en el ejemplo anterior no siempre es utilizable y debemos buscar un método alternativo. Uno muy sencillo fue desarrollado por Lagrange.

### 1.2.1.- Método de los multiplicadores de Lagrange.

Sea el conjunto *D* un abierto de $\mathbb{R}^n$ y las funciones $f: D\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi_i: D\subseteq\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad i=1,2,...,q$ funciones de clase $C^2$ en *D*. Supongamos $q<n$ y

$$\left(\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_q)}{D(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_q})}\right)_{(a_1,a_2,...,a_n)} \neq 0$$

siendo $(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_q})$ *q* de las *n* componentes de $(x_1,x_2,...,x_n)$.

Para determinar los extremos relativos de *f* condicionados por la ligadura $\varphi_i(x_1,...,x_n)=0 \quad \forall i=1,2,...,q$, se procede del siguiente modo:

a) Se considera la función de Lagrange $w=f+\lambda_1\cdot\varphi_1+\lambda_2\cdot\varphi_2+...\lambda_q\cdot\varphi_q$ (donde $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_q\in\mathbb{R}$ se denominan *multiplicadores de Lagrange*).

b) Se resuelve el sistema de $n+q$ ecuaciones formado por $dw(x_1,x_2,...,x_n)=0 \Leftrightarrow w'_{x_i}(x_1,x_2,...,x_n)=0 \quad \forall i=1,2,...,n$ ($n$ ecuaciones) y $\varphi_i(x_1,...,x_n)=0 \quad \forall i=1,2,...,q$ ($q$ ecuaciones). Es decir, se determinan los $(x_1,x_2,...,x_n)\in D$ y $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_q\right)\in\mathbb{R}^q$ para los que se verifica el siguiente sistema de $n+q$ ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}+\lambda_1\cdot\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}+...+\lambda_q\cdot\dfrac{\partial\varphi_q(x_1,...,x_n)}{\partial x_1}=0 \\ \dfrac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_2}+\lambda_1\cdot\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_2}+...+\lambda_q\cdot\dfrac{\partial\varphi_q(x_1,...,x_n)}{\partial x_2}=0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}+\lambda_1\cdot\dfrac{\partial\varphi_1(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}+...+\lambda_q\cdot\dfrac{\partial\varphi_q(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}=0 \\ \varphi_1(x_1,...,x_n)=0 \\ \varphi_2(x_1,...,x_n)=0 \\ \vdots \\ \varphi_q(x_1,...,x_n)=0 \end{cases}$$

c) Para que en el punto $x(x_1,...,x_n)=a(a_1,a_2,...,a_n)$ haya un extremo relativo condicionado <u>es necesario</u> que $x(x_1,...,x_n)=a(a_1,a_2,...,a_n)$ y $\lambda=\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_q\right)$ sean solución del anterior sistema de ecuaciones.

d) Para analizar si la función *f* tiene en tal punto *a* (solución del sistema de ecuaciones) un extremo relativo condicionado por $\varphi_i(x_1,...,x_n)=0 \quad \forall i=1,2,...,q$, se analiza el signo de $d^2w(a)$ restringida por el sistema de ecuaciones siguiente:

$$R\equiv\begin{cases} d\varphi_1(x_1,...,x_n)=0 \\ d\varphi_2(x_1,...,x_n)=0 \\ \vdots \\ d\varphi_q(x_1,...,x_n)=0 \end{cases}$$

Entonces,

- Si $d^2w(a)\big|_R>0 \quad \forall(dx_1,...,dx_n)\neq(0,...,0)\Rightarrow f$ en $a$ mínimo relativo condicionado.
- Si $d^2w(a)\big|_R<0 \quad \forall(dx_1,...,dx_n)\neq(0,...,0)\Rightarrow f$ en $a$ máximo relativo condicionado.
- Si $d^2w(a)\big|_R$ no tiene signo determinado, entonces *f* tiene en *a* un punto de silla condicionado.

## 2.- EXTREMOS ABSOLUTOS.

<u>*Definición*</u>*:* Sea *f* una función real definida en un conjunto $D\subseteq\mathbb{R}^n$. Se dice que *f* tiene un *máximo absoluto* (*mínimo absoluto*) en un punto $a(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in D$ si se verifica que:

$$f(a) \geq f(x) \quad (f(a) \leq f(x)) \quad \forall x \in D$$

A estos puntos los denominamos *extremos absolutos*. A continuación enunciamos un teorema relativo a la existencia de extremos absolutos:

*Teorema de Weiertrass*: Toda función continua en un conjunto cerrado y acotado alcanza en él, al menos una vez, sus valores máximo y mínimo absolutos.

Nota: Se dice que un conjunto es *cerrado* si su complementario es abierto.

# EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular los extremos relativos de la siguiente función:

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy + 27$$

Solución: $P_1(0,0)$ punto de silla

$P_2(-3,-3)$ máximo relativo

2.- Calcular los extremos relativos de la función $z = z(x, y)$ dada implícitamente por:

a) $(x+y)^2 + z^2 - xy + 2z = 0$

b) $x^2 - 2xy + yz + 3y - 4z = 0$

Nota: La ecuación dada en el apartado a) define dos funciones diferentes ($z = z_1(x, y)$ y $z = z_2(x, y)$) en un entorno del punto $(0,0,z)$ según que $z$ tome valor positivo o negativo. De ahí que los extremos obtenidos correspondan en realidad no a una función sino a dos.

Solución: a) $P_1(0,0,0)$ máximo relativo de $z = z_1(x, y)$

$P_2(0,0,-2)$ mínimo relativo de $z = z_2(x, y)$

b) $P_1(2,2,1)$ punto de silla

$P_2(6,6,9)$ punto de silla

3.- Hallar los extremos relativos de la función $u = u(x, y, z) = xyz$ con la condición $x + y + z = 9$.

Nota: Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange.

Solución: $P_1(3,3,3)$, $\lambda = -9$, máximo relativo

$P_2(9,0,0)$, $\lambda = 0$, punto de silla

$P_3(0,9,0)$, $\lambda = 0$, punto de silla

$P_4(0,0,9)$, $\lambda = 0$, punto de silla

4.- Calcular los extremos relativos de la función $u = u(x, y, z) = x + y + 2z$ con las condiciones:

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solución: $P_1(1,3,-2)$, $\lambda = 1/6$, $\mu = -2$, mínimo relativo

$P_2(-1,-3,6)$, $\lambda = -1/6$, $\mu = -2$, máximo relativo

5.- Calcular el área del rectángulo de área máxima inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ con los lados paralelos a los ejes de la elipse.

Solución: $S = 4u^2$

6.- Dado el elipsoide de ecuación $x^2 + 4y^2 + z^2 = 12$, calcular las dimensiones de un ortoedro (paralelepípedo rectangular con las caras paralelas a los planos de referencia) inscrito en el elipsoide de forma que su volumen sea máximo.

Solución: $x = 2,\ y = 1,\ z = 2,\ \mathrm{V} = 32u^3$

7.- Determinar un triángulo isósceles inscrito en la elipse $x^2 + 3y^2 - 12 = 0$, siendo el punto $(0,-2)$ uno de los vértices, el lado desigual paralelo al eje OX y de tal forma que su área sea máxima.

Solución: Vértices: $P_1(0,-2), P_2(3,1), P_3(-3,1)$

8.- Una ventana tiene la forma de un rectángulo más un semicírculo sobre uno de los lados como diámetro. El perímetro total es 10 m. Hallar las dimensiones de la ventana para que entre el máximo de luz.

Solución: Dimensiones: base $x = 20/(4+\pi)\ u$

altura $y = 10/(4+\pi)\ u$

9.- Calcular las distancias máxima y mínima del origen de coordenadas a la elipse:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16 = 0$$

Solución: Distancia máxima $d = 2\sqrt{2}\ u$

Puntos más lejanos $A(2,-2),\ B(-2,2)$

Distancia mínima $d = \sqrt{2}\ u$

Puntos más próximos $C(1,1),\ D(-1,-1)$

10.- Hallar los puntos de la curva $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y + z = 4 \end{cases}$ para los cuales la distancia al plano OXY alcanza sus valores máximo y mínimo.

Solución: Distancia máxima $d = 6\ u$. Punto más lejano $A(0,-2,6)$

Distancia mínima $d = 2\ u$. Punto más cercano $B(0,2,2)$

11.- Calcular los puntos donde la función $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el conjunto:

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3\right\}$$

Solución: Mínimo absoluto: $z(1,1) = -1$

Máximo absoluto: $z(3,0) = z(0,3) = 6$

12.- Calcular los puntos donde la función $z = f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en el conjunto:

$$M=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\leq 1, y\geq -2, x-y+2\geq 0\right\}$$

Solución: Mínimo absoluto: $z(-4,-2)=-32$

Máximo absoluto: $z(1,3)=18$

13.- Determinar los extremos absolutos de la función $z=z(x,y)=x^2+y^2$ en el círculo:

$$(x-1)^2+(y-1)^2\leq 8$$

Solución: Mínimo absoluto: $z(0,0)=0$

Máximo absoluto: $z(3,3)=18$

14.- ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una piscina abierta, paralelepípedo rectangular, de una capacidad dada $V=4000\,m^3$, para que su superficie sea mínima?. Calcular dicha superficie mínima, sabiendo que el mínimo existe.

Solución: Dimensiones de la piscina: largura $x=20$ m

anchura $y=20$ m

profundidad $z=10$ m

Superficie: $A=1200$ m$^2$

15.- Se desea recubrir con un aislante la superficie exterior en contacto con el aire de un depósito de $(8000/3)\pi\ m^3$ de capacidad. El depósito, apoyado en el suelo, está formado por una parte cilíndrica y una bóveda semiesférica. El material para aislar la superficie lateral cilíndrica tiene un precio en el mercado de $10$ €/m$^2$ y el precio correspondiente para la superficie semiesférica es de $20$ €/m$^2$ .

Dimensionar el depósito de forma que el costo del aislamiento sea mínimo y calcular el precio total de aislante, sabiendo que el mínimo existe.

Solución: Dimensiones del cilindro: Radio $R=10\ m$

Altura $H=20\ m$

Coste del recubrimiento: $P=8000\pi$ €.

16.- Desde el vértice de un cono recto de sección circular de radio *R* y altura *H*, se deja caer una bola, a lo largo de una generatriz, con velocidad constante *v* que viene dada por la ecuación $v=G^2$, siendo *G* la longitud de la generatriz.

Calcular, utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, las dimensiones del cono para que la velocidad de caída sea mínima, sabiendo que el mínimo existe y que el volumen del cono es $2000\pi/3$ .

Solución: Dimensiones del cono: Radio: $10\sqrt{2}$

Altura: 10

Velocidad de caída: $v=150$

17.- El reglamento postal de algunos países estipula que una caja paralelepipédica puede enviarse por correo si la longitud más el fleje es igual a 90 cm. ¿Cuál es el máximo volumen que puede enviarse?. (El fleje es el perímetro de la sección de la caja perpendicular al lado más largo. Entiéndase por longitud de medida del lado más largo).

Solución: Dimensiones de la caja: largo $x = 30\ u$

ancho $y = 15\ u$

alto $z = 15\ u$

Volumen: $V = 67500\ u^3$

18.- Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ en el recinto limitado por $\begin{cases} x + y \geq -3 \\ x \leq y \\ y \leq 0 \end{cases}$

Solución: Máximo absoluto: $f(-3{,}0) = 6$

Mínimo absoluto: $f(-1,-1) = -1$