Ejercicio-1

Determinar y representar gráficamente los dominios de definición de las funciones definidas por:

1º) $f(x,y)=\dfrac{3x-y}{x^2-y^2}$. 2º) $f(x,y)=\dfrac{\ln\left[\operatorname{sen}(\pi x)\right]}{\sqrt{y-1}}$. 3º) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$.

4º) $f(x,y)=\ln(1-x+y)$. 5º) $f(x,y)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{4-y^2}$. 6º) $f(x,y)=\operatorname{arcsen}(x+y)$

7º) $f(x,y)=\cos\left[\ln\left(4x^2+9y^2-36\right)\right]$. 8º) $f(x,y)=\sqrt{\left(1-x^2-y^2\right)(x+y)}$.

Ejercicio-2

Hallar los mapas de curvas de nivel de las funciones definidas por:

1º) $f(x,y)=x^2y$. 2º) $f(x,y)=x^2+y^2-1$. 3º) $f(x,y)=y-2x$. 4º) $f(x,y)=y-x^2$.

5º) $f(x,y)=1-|x|-|y|$. 6º) $f(x,y)=\dfrac{2|x|}{x^2+y^2}$ 7º) $f(x,y)=\begin{cases} y+x & \text{si } x\le 0 \\ y & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Ejercicio-3

Utilizando el concepto de límite, demostrar que.

1º) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 7-x-y=4$. 2º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cos(x+y)=0$. 3º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}=0$.

4º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{|x|+|y|}=0$.

Ejercicio-4

Probar que no existen los límites siguientes:

1º) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1-xy}{x^2-y}$. 2º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$. 3º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$. 4º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y^2-x}$.

Ejercicio-5

Estudiar la existencia de los límites siguientes:

1º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$. 2º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos x}{x^2+y^2}$. 3º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}\dfrac{1}{y}$.

4º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(e^x-1\right)y}{x\ln(1+y)}$. 5º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y^2}{x+y^2}$. 6º) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (x-y)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2y}$.

7º) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{\operatorname{sen} y}$.

Ejercicio-6

Sean las funciones definidas por:

1º) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0\\ 0 & \text{si } x+y=0\end{cases}$

2º) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}\left(x^4+y^4\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

3º) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

4º) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Estudiar si dichas funciones son continuas en el punto (0,0).

Ejercicio-7

Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

1º) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

2º) $f(x,y)=\begin{cases}x e^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Ejercicio-8

Estudiar la derivabilidad de la función f definida por:

$$1^{o})\, f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$2^{o})\; f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Ejercicio-9

Consideremos la función f definida por f(x,y)= $x^4\, y^2 \arcsen\dfrac{y}{x}$. Probar que:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-6f(x,y)=0 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

Ejercicio-10

Consideremos la función f definida por f(x,y)= $x\,\mathrm{sen}\,y+y\,\mathrm{sen}\,x$. Hallar $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio-11

Sea la función f definida por f(x,y,z)= $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Probar que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)=0 \qquad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

Ejercicio-12

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

1º) Hallar $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. 2º) Determinar la derivada de f en (0,0) según la dirección determinada por el vector $\overline{v}=(1,1)$.

Ejercicio-13

Estudiar la existencia, en el punto (0,0), de las derivadas direccionales de la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{sen}\,y}{y} & \text{si } y>0 \\[2ex] xy & \text{si } y\leq 0 \end{cases}$$

Ejercicio-14

Consideremos la función f definida por $f(x,y)=x^2+y^2$. Hallar la derivada direccional de f en (2,1) según el vector $\overline{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

Ejercicio-15

Sea la función f definida por f(x,y)=sen(xy). Hallar la derivada direccional de f en (1,-1) según el vector $\overline{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$.

Ejercicio-16

Sean las funciones f y g definidas por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$g(x,y)=y^2\,e^{xy}$

Haciendo uso del concepto de derivada parcial, determinar $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,0)$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,0)$.

Ejercicio-17

Consideremos la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{xy} & \text{si } xy\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si } xy=0\end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

Ejercicio-18

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2|y| & \text{si } y\neq 0\\[2ex] 3 & \text{si } y=0\end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en los puntos (0,0) y (1,-1).

Ejercicio-19

Consideremos la función f definida por $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{xy}}{2x-y}$. 1º) Hallar el dominio de definición D de f. 2º) Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en D.

Ejercicio-20

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,-1)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,-1)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en los puntos (0,0) y (0,-1).

Ejercicio-21

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} x\left(e^{-\frac{1}{(x-y)^2}}+1\right) & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

Ejercicio-22

Consideremos la función f definida por $f(x,y)=\sqrt{1+|x|y^2}$. Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

Ejercicio-23

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Estudiar la diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

Ejercicio-24

Consideremos la función f definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\left(|x|-|y|\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de f en el punto (0,0).

Ejercicio-25

Sea la función f definida por $f(x,y)=xy\,e^{-x^2-y^2}$. Probar que f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ y determinar la diferencial de f en el punto $\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio-26

Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z=\dfrac{x^2+4y^2}{10}$ en el punto (2,-2,2).

Ejercicio-27

Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ en el punto (1,2,2).

Ejercicio 28

Obtener la ecuación del plano tangente al elipsoide $x^2+4y^2+z^2=36$ en el punto (2,-2,4).

Ejercicio-29

Consideremos la función f definida por f(x,y)=sen(xy). Hallar el polinomio de Taylor p de f de orden dos en el punto $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio-30

Sea la función f definida por $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$. Hallar el polinomio de Taylor p de f de orden dos en el punto $(0,0)$.

Ejercicio-31

Consideremos la función f definida por $f(x,y)=\dfrac{x+y-1}{x+y+1}$. Hallar el polinomio de Taylor p de f de orden dos en el punto $(0,0)$.

Ejercicio-32

Sea la función $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}},xy\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ (0,0) & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Estudiar la continuidad de $\overline{f}$ en el punto (0,0), según los valores del parámetro real α.

Ejercicio-33

Consideremos la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y)=\left(x+3y^2, e^{x^2+y^2}, \operatorname{sen}x\cos y\right)$$

1º) Probar que $\overline{f}$ es derivable en $\mathbb{R}^2$. 2º) Hallar $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x}(\pi,0)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y}(\pi,0)$.

3º) Demostrar que $\overline{f}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y determinar $d\overline{f}(\pi,0)$.

Ejercicio-34

Sea la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}\left(x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, \operatorname{sen}(x-y)\right) & \text{si } x\neq 0\\[2ex] (0,-\operatorname{sen}y) & \text{si } x=0\end{cases}$$

Estudiar la diferenciabilidad de $\overline{f}$ en el punto (0,0).

Ejercicio-35

Consideremos la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \dfrac{xy}{x^3+y^3}\right) & \text{si } y\neq -x\\[2ex] (0,0) & \text{si } y=-x\end{cases}$$

Estudiar la continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de $\overline{f}$.

Ejercicio-36

Sean las funciones $\overline{f}$ y g definidas por:

$$\overline{f}(x,y)=(x+y, xy) \qquad g(x,y)=\sqrt{1+x^2+y^2}$$

Probar que $g\circ\overline{f}$ es diferenciable en el punto (1,-1) y hallar $d(g\circ\overline{f})(1,-1)$.

Ejercicio-37

Sean las funciones $\overline{f}$ y g definidas por:

$$\bar{f}(x,y) = (xy, y) \qquad g(x,y) = xy + x + 2$$

Probar que $g \circ \bar{f}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y hallar $d(g \circ \bar{f})(-1,1)$.

Ejercicio-38

Consideremos la función vectorial $\bar{f}$ definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \left(\frac{xy^3 + y}{x^2 + y^2}, x\ln(x^2 + y^2) \right)$$

1º) Probar que $\bar{f}$ es localmente invertible en el punto $\bar{p} = (1,1)$. 2º) Hallar $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial x}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$ y $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial y}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$.

Ejercicio-39

Sea la función vectorial $\bar{f}$ definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \left((x-y)^3, y^3\right)$$

1º) Probar que $\bar{f}$ es globalmente invertible en $\mathbb{R}^2$. 2º) Hallar $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial x}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$ y $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial y}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$ siendo $\bar{p} = (-1,8)$.

Ejercicio-40

Consideremos la función vectorial $\bar{f}$ definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \left(x^2 + y^2, 2xy\right)$$

1º) Probar que $\bar{f}$ no es globalmente invertible en $\mathbb{R}^2$. 2º) Hallar el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\bar{f}$ sea localmente invertible en cada punto de A. 3º) Probar que $\bar{p} = (4,-3)$ es un punto de A, determinando $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial x}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$ y $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial y}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$.

Ejercicio-41

Sea la función vectorial $\bar{f}$ definida por:

$$\bar{f}(x,y) = \left(e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y\right)$$

1º) Probar que $\bar{f}$ no es globalmente invertible en $\mathbb{R}^2$. 2º) Demostrar que $\bar{f}$ es localmente invertible en cada punto de $\mathbb{R}^2$. 3º) Hallar $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial x}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$ y $\frac{\partial \bar{f}^{-1}}{\partial y}\left(\bar{f}(\bar{p})\right)$

siendo $\overline{p}=\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicio-42

Sea la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y)=\left(x,e^{x-y^2}\right)$$

1º) Probar que $\overline{f}$ no es globalmente invertible en $\mathbb{R}^2$. 2º) Hallar el conjunto $A\subset\mathbb{R}^2$ tal que $\overline{f}$ sea localmente invertible en cada punto de A. 3º) Probar que $\overline{p}=(0,1)$ es un punto de A, determinando $\frac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}\left(\overline{f}(\overline{p})\right)$ y $\frac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}\left(\overline{f}(\overline{p})\right)$.

Ejercicio-43

Consideremos la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y,u,v)=(x^2+y^2-u^2y+2xy,x^2+y^2-v^2y-2xy)$$

la ecuación vectorial:

$$\overline{f}(x,y,u,v)=(0,0)$$

y el punto $\overline{c}$=(2,1,3,1) que satisface dicha ecuación vectorial. 1º) Probar que, en un entorno de $\overline{c}$, la ecuación vectorial define implícitamente una función vectorial $\overline{g}$ con componentes g_1 y g_2 como:

$$\overline{g}(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$$

determinando $\frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(\overline{a})$ y $\frac{\partial \overline{g}}{\partial y}(\overline{a})$ siendo $\overline{a}$=(2,1). 2º) Demostrar que $\overline{g}$ es localmente invertible en $\overline{a}$.

Ejercicio-44

Sean la función vectorial $\overline{f}$ definida por:

$$\overline{f}(x,y,z,u)=(x+y+z-u,x^2-y^2-z-u^3)$$

la ecuación vectorial:

$$\overline{f}(x,y,z,u)=(0,0)$$

y el punto $\overline{c}$=(1,0,0,1) que satisface dicha ecuación vectorial. 1º) Probar que, en un entorno de $\overline{c}$, la ecuación vectorial define implícitamente una función vectorial $\overline{g}$ con componentes g_1 y g_2 como:

$$\overline{g}(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$$

determinando $\frac{\partial \overline{g}}{\partial x}(\overline{a})$ y $\frac{\partial \overline{g}}{\partial y}(\overline{a})$ siendo $\overline{a}=(1,0)$. 2º) Demostrar que $\overline{g}$ es localmente invertible en $\overline{a}$.

Ejercicio-45

Consideremos las funciones f_1 y f_2 definidas por:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = x^3 + y^2 - 3z - 4 \\ f_2(x,y,z) = x + 2y^2 - z^2 - 3 \end{cases}$$

el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

y el punto $\overline{c}=(0,1,2)$ que satisface dicho sistema de ecuaciones. 1º) Probar que, en un entorno de $\overline{c}$, el sistema de ecuaciones define implícitamente dos funciones g_1 y g_2 como:

$$\begin{cases} y = g_1(x) \\ z = g_2(x) \end{cases}$$

2º) Determinar $\frac{dg_1}{dx}(a)$ y $\frac{dg_2}{dx}(a)$ siendo a=0.

Ejercicio-46

Sean las funciones f_1 y f_2 definidas por:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v) = 5 - 4y + xv + 2e^u \\ f_2(x,y,z,u,v) = 2x - z - 6u + v\cos u \end{cases}$$

el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z,u,v) = 0 \\ f_2(x,y,z,u,v) = 0 \end{cases}$$

y el punto $\overline{c}=(1,2,3,0,1)$ que satisface dicho sistema de ecuaciones. 1º) Probar que, en un entorno de $\overline{c}$, el sistema de ecuaciones define implícitamente dos funciones g_1 y g_2 como:

$$\begin{cases} u = g_1(x,y,z) \\ v = g_2(x,y,z) \end{cases}$$

2º) Determinar $\frac{\partial g_1}{\partial x}(\overline{a})$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(\overline{a})$, $\frac{\partial g_1}{\partial z}(\overline{a})$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(\overline{a})$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(\overline{a})$ y $\frac{\partial g_2}{\partial z}(\overline{a})$ siendo $\overline{a}=(1,2,3)$.

Ejercicio-47

Consideremos la función f definida por:

$$f(x,y,z)=e^{z}-\frac{y+\sqrt{y^{2}+z^{2}}}{x+\sqrt{x^{2}+z^{2}}}$$

la ecuación:

$$f(x,y,z)=0$$

y el punto $\bar{c}=(1,1,0)$ que satisface dicha ecuación. 1º) Probar que, en un entorno de $\bar{c}$, la ecuación define implícitamente una función g como:

$$z=g(x,y)$$

2º) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie S de ecuación z=g(x,y) en el punto $\bar{c}$ de dicha superficie.

Ejercicio-48

Sean la función f definida por:

$$f(x,y)=x^{3}-y^{3}-3xy+5x-2y$$

la ecuación:

$$f(x,y)=0$$

y el punto $\bar{c}=(0,0)$ que satisface dicha ecuación. 1º) Probar que, en un entorno de $\bar{c}$, la ecuación define implícitamente una función g como:

$$y=g(x)$$

2º) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C de ecuación y=g(x) en el punto $\bar{c}$ de dicha curva.

Ejercicio-49

Determinar los extremos locales de la función f definida por:

$$f(x,y)=e^{4y}+2x^{4}-4x^{2}e^{y}$$

Ejercicio-50

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=x^{4}-2\alpha x^{2}-y^{2}+3$$

siendo α un parámetro real. Hallar los valores de α de forma que la función f tenga extremos locales.

Ejercicio-51

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=x^{3}+y^{3}+\alpha xy$$

siendo α un parámetro real. Hallar los valores de α de forma que la función f tenga extremos locales.

Ejercicio-52

Determinar los extremos locales de la función f definida por:

$$f(x,y)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}(x+y)$$

en A=(0,2π)x(0,2π).

Ejercicio-53

Sea la función f definida por:

$$f(x,y)=x^2+y^2-\alpha x y$$

siendo α un parámetro real. Hallar los valores de α de forma que la función f tenga extremos locales.

Ejercicio-54

Determinar los extremos locales de la función f definida por:

$$f(x,y)=\left(x^2+5y^2\right)e^{-x^2-y^2}$$

Ejercicio-55

Sean las funciones f y f_1 definidas por:

$$f(x,y,z)=xy+xz+yz \qquad f_1(x,y,z)=xyz-8$$

Hallar los extremos locales de f condicionados por la ecuación $f_1(x,y,z)=0$.

Ejercicio-56

Consideremos las funciones f, f_1 y f_2 definidas por:

$$f(x,y,z)=x^2+y+z \qquad f_1(x,y,z)=x-y \qquad f_2(x,y,z)=x+z-1$$

Determinar los extremos locales de f condicionados por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Ejercicio-57

Sean las funciones f y f_1 definidas por:

$$f(x,y)=xy \qquad f_1(x,y)=x^2+y^2-1$$

Hallar los extremos locales de f condicionados por la ecuación $f_1(x,y)=0$.

Ejercicio-58

Consideremos las funciones f, f_1 y f_2 definidas por:

$$f(x,y,z)=xy+yz \quad f_1(x,y,z)=x^2+y^2-2 \qquad f_2(x,y,z)=yz-2$$

Determinar los extremos locales de f condicionados por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Ejercicio-59

Sea la función f definida en el conjunto $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2-2\le y\le 2-x^2\right\}$ por f(x,y)=xy. 1°) Hallar los extremos locales de f en el interior int(A) de A. 2°) Determinar los extremos locales de f relativos a la frontera fr(A) de A. 3°) Hallar los extremos de f en A.

Ejercicio-60

Determinar los extremos de la función f definida por f(x,y)=x^2-y^2 en el conjunto $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x+y\ge 0, y\le x, x\le 1\right\}$.

Ejercicio-51

Hallar los extremos de la función f definida por f(x,y)=$3x+4y$ en el conjunto $A=[2,4]\times[0,3]$.

Ejercicio-62

Determinar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ en el conjunto $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 10\right\}$.

Ejercicio-63

Hallar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $2-x^2-y^2$ en el conjunto $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / y\le 2x-3\right\}$.

Ejercicio-64

Sea la función f definida en el conjunto $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2\ge 4\right\}$ por f(x,y)=x. 1°) Hallar los extremos locales de f en el interior int(A) de A. 2°) Determinar los extremos locales de f relativos a la frontera fr(A) de A. 3°) Hallar los extremos de f en A.

Ejercicio-65

Hallar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $x^2 - y$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + y + 5 \geq 0\}$.

Ejercicio-66

Determinar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $x^2 + y^2$ en el conjunto $A = [-1,1] \times [-1,1]$.

Ejercicio-67

Hallar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $y - 3x$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x^3\}$.

Ejercicio-68

Determinar los extremos de la función f definida por f(x,y)= $x^2 y$ en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 0\}$.

Ejercicio-69

Hallar las dimensiones de un paralelepípedo rectangular de volumen máximo inscrito en una semiesfera de radio r=10 m.

Ejercicio-70

Se desea construir una caja paralelepipédica rectangular abierta (sin tapa) con un volumen de 100 cm^3. El material para construir la base y las paredes cuesta 4 euros por cm^2 y 1 euro por cm^2 respectivamente. Determinar las dimensiones de la caja de forma que sea mínimo el coste del material utilizado.

Ejercicio-71

Calcular la mínima distancia del punto (0,0,0) a la curva C definida por la intersección de las superficies S_1 y S_2 de ecuaciones respectivas $y^2=x-1$ y $z^2=x+1$.

Ejercicio-72

Determinar la mínima distancia entre las rectas de ecuaciones $x = y = z$ y $\frac{x-1}{2} = y = -z$.

Ejercicio-73

Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r= $3\sqrt{2}$ m.

Ejercicio-74

Determinar la mínima distancia entre la recta de ecuación $x-y=2$ y la parábola de ecuación $y=x^2$.

TEMA V

Ejercicio-1

1º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\neq x \ \wedge \ y\neq -x\right\}$.

2º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x\in(2k,2k+1) \ \wedge \ x\in\mathbb{Z} \ \wedge \ y>1\right\}$

3º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\geq 4\right\}$

4º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x-y<1\right\}$

5º) $D=(-\infty,-1]\times[-2,2]\cup[1,+\infty)\times[-2,2]$

6º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y\geq -1 \ \wedge \ x+y\leq 1\right\}$

7º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}>1\right\}$

8º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x+y=0\right\}\cup$
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2<1 \ \wedge \ x+y>0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2>1 \ \wedge \ x+y<0\right\}$

Ejercicio-2

1º) $C_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0 \ \vee \ y=0\right\}$ y $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=\dfrac{m}{x^2}\right\}$ para $m\in\mathbb{R}-\{0\}$

2º) $C_{-1}=\{(0,0)\}$ y $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x^2+y^2=1+m\right\}$ para $m\in(-1,+\infty)$

3º) $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=2x+m\right\}$ para $m\in\mathbb{R}$

4º) $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=x^2+m\right\}$ para $m\in\mathbb{R}$

5º) $C_1=\{(0,0)\}$ y $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x+y=1-m \ \wedge \ x\geq 0 \ \wedge \ y>0\right\}\cup$
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ x-y=1-m \ \wedge \ x>0 \ \wedge \ y\leq 0\right\}\cup$
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -x+y=1-m \ \wedge \ x<0 \ \wedge \ y\geq 0\right\}\cup$
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -x-y=1-m \ \wedge \ x\leq 0 \ \wedge \ y<0\right\}$ para $m\in(-\infty,1)$

6º) $C_0=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} / x=0\right\}$ y

$$C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} / \left(x+\frac{1}{m}\right)^2+y^2=\frac{1}{m^2} \ \wedge \ x\leq 0\right\}\cup$$

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\} / \left(x-\frac{1}{m}\right)^2+y^2=\frac{1}{m^2} \ \wedge \ x\geq 0\right\} \text{ para } m\in(0,+\infty)$$

7º) $C_m=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y+x=m \ \wedge \ x\leq 0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=m \ \wedge \ x>0\right\}$ para $m\in\mathbb{R}$

(se sugiere representar gráficamente los mapas de curvas de nivel de los distintos apartados)

Ejercicio-5

1º) Existe y vale 0. 2º) No existe. 3º) Existe y vale 0. 4º) Existe y vale 1. 5º) No existe. 6º) Existe y vale $-\frac{2}{\pi}$. 7º) No existe.

Ejercicio-6

1º) f no es continua en (0,0). 2º) f es continua en (0,0). 3º) f no es continua en (0,0). 4º) f es continua en (0,0).

Ejercicio-7

1º) f es continua en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. 2º) f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio-8

1º) f es derivable en $\mathbb{R}^2$. 2º) f es derivable en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio-10

1

Ejercicio-12

1º) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. 2º) $\frac{\partial f}{\partial \overline{u}}(0,0)=0$

Ejercicio-13

Consideremos $\overline{v}=(v_1,v_2)$. Para $v_2\neq 0$ la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(0,0)$ existe si y sólo si $v_1=0$, siendo $\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(0,0)=0$. Para $v_2=0$ existe la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(0,0)$, siendo $\frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(0,0)=0$.

Ejercicio-14

$\sqrt{2}$

Ejercicio-15

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 1$

Ejercicio-16

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=-1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=1$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)=0$ y $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)=0$

Ejercicio-17

f no es continua en (0,0), f es derivable en (0,0) y f no es diferenciable en (0,0).

Ejercicio-18

f no es continua en (0,0), f no es derivable en (0,0) y f no es diferenciable en (0,0).

f es continua en (1,-1), f es derivable en (1,-1) y f es diferenciable en (1,-1).

Ejercicio-19

1º) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / xy\geq 0 \ \wedge \ 2x-y\neq 0\right\}$.

2º) f es continua en D, f es derivable en $D-\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0 \ \vee \ y=0\right\}$ y f es diferenciable en $D-\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=0 \ \vee \ y=0\right\}$.

Ejercicio-20

f es continua en (0,0), f es derivable en (0,0) y f es diferenciable en (0,0).

f es continua en (0,-1), f es derivable en (0,-1) y f no es diferenciable en (0,-1).

Ejercicio-21

f es continua en (0,0), f es derivable en (0,0) y f es diferenciable en (0,0).

Ejercicio-22

f es diferenciable en (0,0).

Ejercicio-23

f es diferenciable en (0,0).

Ejercicio-24

f es continua en (0,0), f es derivable en (0,0) y f es diferenciable en (0,0).

Ejercicio-25

$$df\left(1,\frac{1}{2}\right)(h,k)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{4}}h+\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{4}}k \qquad \forall(h,k)\in\mathbb{R}^2$$

Ejercicio-26

2x-8y-5z-10=0

Ejercicio-27

2x-y+z-2=0

Ejercicio-28

x-4y+2z-18=0

Ejercicio-29

$P_2(x,y)=xy$

Ejercicio-30

$P_2(x,y)=1-x^2-y^2$

Ejercicio-31

$P_2(x,y) = -1 + 2x + 2y - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

Ejercicio-32

$\overline{f}$ es continua en (0,0) si y sólo si $\alpha \in (-\infty, 2)$

Ejercicio-33

2º) $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x}(\pi,0) = \left(1, 2\pi e^{\pi^2}, -1\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial y}(\pi,0) = (0,0,0)$.

3º) $d\overline{f}(\pi,0)(h,k) = \left(h, 2\pi e^{\pi^2} h, -h\right) \qquad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^2$

Ejercicio-34

$\overline{f}$ es diferenciable en (0,0)

Ejercicio-35

$\overline{f}$ es continua en $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq -x\right\}$, f es derivable en $E \cup \{(0,0)\}$ y f es diferenciable en E.

Ejercicio-36

$d\left(g \circ \overline{f}\right)(1,-1)(h_1,h_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}h_2 \qquad \forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

Ejercicio-37

$d\left(g \circ \overline{f}\right)(1,1)(h_1,h_2) = 2h_1 - 3h_2 \qquad \forall (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$

Ejercicio-38

2º) $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}(1,\ln 2) = \left(-\dfrac{2}{3+2\ln 2}, \dfrac{2+2\ln 2}{3+2\ln 2}\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}(1,\ln 2) = \left(\dfrac{2}{3+2\ln 2}, \dfrac{1}{3+2\ln 2}\right)$.

Ejercicio-39

2º) $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}(-729,512) = \left(\dfrac{1}{243}, 0\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}(-729,512) = \left(\dfrac{1}{192}, \dfrac{1}{192}\right)$.

Ejercicio-40

2º) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq -x \wedge y \neq x\right\}$ 3º) $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}(25,-24) = \left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{3}{14}\right)$ y

$\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}(25,-24) = \left(\dfrac{3}{14}, \dfrac{2}{7}\right)$.

Ejercicio-41

2º) $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}(0,e^{\pi})=\left(0,-\dfrac{1}{e^{\pi}}\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}(0,e^{\pi})=\left(\dfrac{1}{e^{\pi}},0\right)$.

Ejercicio-42

2º) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\neq 0\right\}$ 3º) $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial x}\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}^{-1}}{\partial y}\left(0,\dfrac{1}{e}\right)=\left(0,-\dfrac{1}{2}e\right)$.

Ejercicio-43

1º) $\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x}(2,1)=(1,1)$ y $\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y}(2,1)=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$.

Ejercicio-44

1º) $\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial x}(1,0)=\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ y $\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial y}(1,0)=\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

Ejercicio-45

2º) $\dfrac{dg_1}{dx}(0)=-\dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{dg_2}{dx}(0)=-\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio-46

2º) $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(1,2,3)=\dfrac{1}{8}$, $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(1,2,3)=\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{\partial g_1}{\partial z}(1,2,3)=-\dfrac{1}{8}$

$\dfrac{\partial g_2}{\partial x}(1,2,3)=-\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{\partial g_2}{\partial y}(1,2,3)=3$ y $\dfrac{\partial g_2}{\partial z}(1,2,3)=\dfrac{1}{4}$

Ejercicio-47

2º) $z=-x-y+2$

Ejercicio-48

2º) $y=\dfrac{5}{2}x$

Ejercicio-49

f tiene mínimos locales en (-1,0) y (1,0).

Ejercicio-50

f tiene extremos locales si y sólo si $\alpha\in(0,+\infty)$. Para $\alpha\in(0,+\infty)$) la función f tiene un máximo local en (0,0).

Ejercicio-51

f tiene extremos locales si y sólo si $\alpha \in \mathbb{R}$ -{0}=(-∞,0)U(0,+∞). Para $\alpha \in$ (-∞,0) la función f tiene un mínimo local en $\left(-\frac{\alpha}{3},-\frac{\alpha}{3}\right)$. Para $\alpha \in$ (0,+∞) la función f tiene un máximo local en $\left(-\frac{\alpha}{3},-\frac{\alpha}{3}\right)$.

Ejercicio-52

f tiene un máximo local en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ y un mínimo local en $\left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$.

Ejercicio-53

f tiene extremos locales si y sólo si $\alpha \in [-2,2]$. Para $\alpha \in (-2,2)$ la función f tiene un mínimo local en (0,0). Para $\alpha=-2$ la función f tiene mínimos locales en (β,-β) para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$. Para $\alpha=2$ la función f tiene mínimos locales en (β, β) para cualquier $\beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio-54

f tiene un mínimo local en (0,0) y máximos locales en (0,-1) y (0,1).

Ejercicio-55

f tiene un mínimo local en (2,2,2) condicionado por la ecuación $f_1(x,y,z)=0$.

Ejercicio-56

f tiene un mínimo local en (0,0,1) condicionado por las ecuaciones $f_1(x,y,z)=0$ y $f_2(x,y,z)=0$.

Ejercicio-57

f tiene máximos locales en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y mínimos locales en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ condicionados por la ecuación $f_1(x,y)=0$.

Ejercicio-58

f tiene máximos locales en (-1,-1,-2) y (1,1,2) y mínimos locales en (-1,1,2) y (1,-1,-2) condicionados por las ecuaciones $f_1(x,y,z)=0$ y $f_2(x,y,z)=0$.