DERIVADAS PARCIALES Y DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1.- DERIVADAS PARCIALES.

1.1.- Derivadas parciales de primer orden.

Definición: Sea f una función real de dos variables reales definida sobre $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $(x_0, y_0) \in D$. Si fijamos la variable $y = y_0$, obtenemos una función de una sola variable $f(x, y_0)$. La derivada de esta función en el punto x_0 se llama *derivada parcial* de la función f *respecto a la variable* x en el punto (x_0, y_0) y se denota por

$$f'_x(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Es decir:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

De forma análoga se define la *derivada parcial* de la función f *respecto a la variable* y en el punto (x_0, y_0):

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Para el caso general de una función real de n variables reales, la definición de sus derivadas parciales respecto de cada una de las variables es idéntica a la que se acaba de ver. Así, sea f definida sobre $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in D$. La *derivada parcial* de esta función *respecto a la variable* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, en el punto $(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ será:

$$f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h}$$

Esta derivada parcial se denotará, asimismo, de las siguientes formas:

$$f'_{x_i}(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)}{\partial x_i} = f'_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$$

Nota: Se dice que $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto abierto si $\forall (x_0, y_0) \in D \ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon \right\} \subset D$.

1.1.1.- Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función real de dos variables reales.

La expresión $z = f(x, y)$ representa una superficie al variar x e y en un cierto conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, mientras que si se fija una de las variables, por ejemplo, $y = y_0$ entonces se obtiene la siguiente curva:

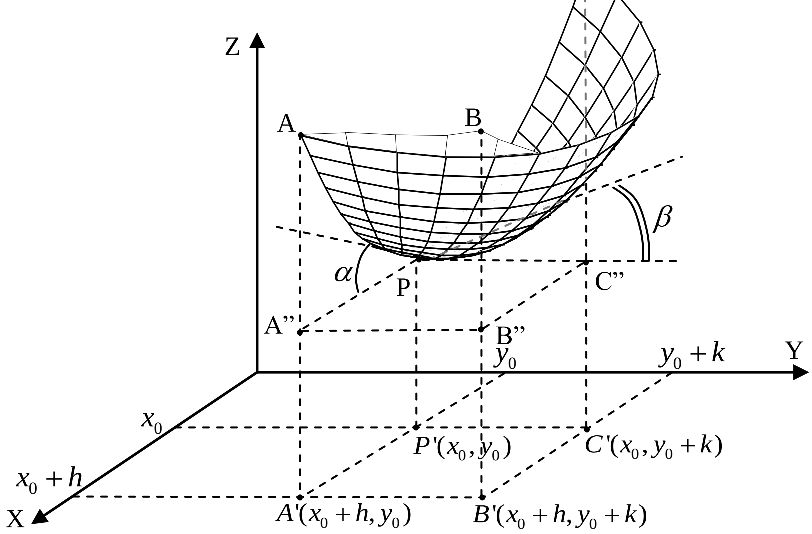
$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

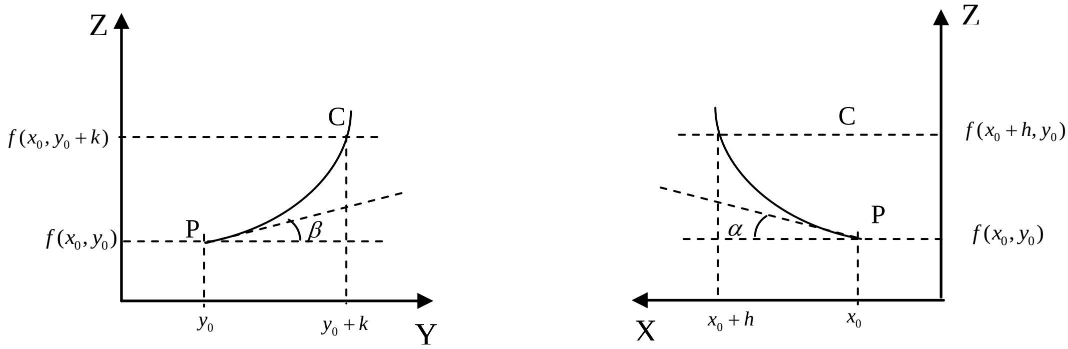
Si las derivadas parciales de la función son finitas, la pendiente de la recta tangente a esta curva en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por $f'_x(x_0, y_0)$.

Y análogamente, para la curva

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ x = x_0 \end{cases}$$

se tiene que $f'_y(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a dicha curva en el punto $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.





1.1.2.- Continuidad y derivadas parciales.

Para funciones de una variable real, la existencia de derivada finita implica continuidad. Para funciones de varias variables la existencia de derivadas parciales finitas no implica continuidad.

Por ejemplo, dada la función:

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\exists f'_x(0,0) = 0$ y $\exists f'_y(0,0) = 0$ pero f no es continua en el punto (0,0).

No es difícil entender cómo una función puede tener derivadas parciales finitas en un punto y no ser continua en él. La existencia de f'_x en (x_0, y_0) depende del comportamiento de f sólo en puntos de la forma (x_0+h, y_0). Análogamente, la existencia de f'_y depende del comportamiento de f sólo en puntos de la forma (x_0, y_0+k). Por otro lado la continuidad en (x_0, y_0) depende de la conducta de *f* en puntos de la forma general (x_0+h, y_0+k), es decir la existencia de derivadas parciales depende de la conducta de la función a lo largo de dos rectas, mientras que la continuidad depende del comportamiento de la función en todas las direcciones.

Posteriormente veremos que para funciones de dos variables la existencia de derivadas parciales finitas en un punto *P* y la existencia de una de ellas en un entorno del mismo siendo continua en el punto, garantiza la continuidad de la función en el punto.

1.2.- <u>Derivadas parciales de orden superior.</u>

Supongamos que las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$ admiten a su vez derivadas parciales. Las derivadas parciales de f'_x *y* f'_y se denominan *derivadas parciales de segundo orden* y se denotan del modo siguiente:

$$(f'_x)'_x = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (f'_x)'_y = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f'_y)'_x = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad (f'_y)'_y = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Análogamente, derivando n veces, se obtienen las *derivadas parciales de orden n* o *derivadas parciales n-ésimas* de la función.

Asimismo, se definen de forma semejante las derivadas parciales de un orden arbitrario para las funciones de cualquier número de variables. (Las derivadas parciales respecto a variables distintas se denominan *derivadas parciales cruzadas*).

1.2.1.- Igualdad de derivadas parciales cruzadas. Teorema de Schwarz.

<u>*Teorema*</u>: Sea la función de dos variables f definida en un entorno del punto *P*. Si están definidas en dicho entorno las derivadas parciales f'_x, f'_y y f''_{yx}, siendo f''_{yx} continua en el punto *P*, entonces $f''_{xy} = f''_{yx}$ en *P*.

<u>*Teorema*</u>: Suponemos que dos derivadas parciales de orden *r* de una función real de *n* variables reales son el resultado de derivar la función respecto a las mismas variables pero en distinto orden. Si estas derivadas parciales son continuas en *P* y si todas las derivadas parciales de *f* de orden menor que *r* son continuas en un entorno de *P*, entonces las dos derivadas parciales cruzadas son iguales en el punto *P*.

2.- DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES.

2.1.- <u>Diferencial primera de una función.</u>

<u>*Definición*</u>*:* Sea f una función definida en un cierto dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y sean $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ dos puntos de *D*. Se dice que la función $z = f(x,y)$ es *diferenciable en el punto* $P(x_0, y_0)$ si se verifica que:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$$

donde A y $B\in\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2$

Por definición a $A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$ se le llama *diferencial primera* de la función $z=f(x,y)$ *en el punto P* y se representa por $dz = df(x_0,y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y$

Para el caso de una función real *f* de *n* variables reales definida en un entorno de un punto $P(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, se dice que $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *es diferenciable en P* si se verifica:

$$\Delta z = f(x_1^0+\Delta x_1, ..., x_n^0+\Delta x_n) - f(x_1^0,...,x_n^0) = A_1\cdot\Delta x_1 + ... + A_n\cdot\Delta x_n + \varepsilon_1\cdot\Delta x_1 + ... + \varepsilon_n\cdot\Delta x_n$$

donde $A_1,...,A_n\in\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{(\Delta x_1,...,\Delta x_n)\to(0,...,0)} \varepsilon_1 = 0 = ... = \lim\limits_{(\Delta x_1,...,\Delta x_n)\to(0,...,0)} \varepsilon_n = 0$

Análogamente al caso de dos variables, a la expresión $A_1\cdot\Delta x_1 + ... + A_n\cdot\Delta x_n$ se la denomina *diferencial primera de la función* $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *en el punto P* y se denota por

$$dz = df(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = A_1\cdot\Delta x_1 + ... + A_n\cdot\Delta x_n$$

2.1.1.- Relación entre diferenciabilidad y existencia de derivadas parciales.

Teorema: Si una función es diferenciable en un punto *P*, entonces existen y son finitas todas las derivadas parciales primeras de la función en dicho punto *P*.

Demostración:

Para simplificar, lo demostraremos en el caso de una función real de dos variables reales. Si la función $z=f(x,y)$ es *diferenciable en el punto* $P(x_0,y_0)$:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = A\cdot\Delta x + B\cdot\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta y$$

Si en la definición de la diferencial hacemos $\Delta y = 0$ entonces:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = A\cdot\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x, 0) \quad\Rightarrow\quad f'_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = A\in\mathbb{R}$$

Del mismo modo, para $\Delta x = 0$, resulta: $f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta y} = B\in\mathbb{R}$

De esta forma, podemos escribir:

$$dz(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y$$

Para funciones de *n* variables reales, tendríamos

$$dz(x_1^0,...,x_n^0) = f'_{x_1}(x_1^0,...,x_n^0)\cdot\Delta x_1 + ... + f'_{x_n}(x_1^0,...,x_n^0)\cdot\Delta x_n$$

Nota: - El recíproco de este teorema no es cierto.

- Del teorema anterior se sigue que la diferencial en un punto, si existe, es única.

2.1.2. Condición necesaria y suficiente de diferenciabilidad.

Teorema: La función *f* es diferenciable en el punto $P(x_0,y_0)$ si y sólo si:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y$$

donde $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

o equivalentemente:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y\right|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

Observación:

Si tomamos la función $z = f(x,y) = x$. Entonces:

$$f'_x(x,y)=1 \quad \text{y} \quad f'_y(x,y)=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dz = \Delta x \\ dz = dx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = dx$$

Análogamente, para $z = f(x,y) = y$ se obtiene que $\Delta y = dy$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$dz = f'_x(x,y)\cdot dx + f'_y(x,y)\cdot dy$$

Y, en general, para funciones de *n* variables, $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se tiene

$$dz = f'_{x_1}(x_1,\ldots,x_n)\cdot dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(x_1,\ldots,x_n)\cdot dx_n$$

Propiedades: Son las mismas que para funciones de una variable real.

2.1.3.- Condición suficiente de diferenciabilidad.

Teorema: Si una función $z = f(x,y)$ admite derivadas parciales finitas en un punto *P* y una de ellas existe en un entorno de *P* y es continua en el punto *P*, entonces *f* es diferenciable en el punto *P*.

2.1.4.- Relación entre continuidad y diferenciabilidad.

Teorema: Si la función $z = f(x,y)$ es diferenciable en el punto $P(x_0,y_0)$, entonces es continua en dicho punto.

Demostración:

Por ser diferenciable la función $z = f(x,y)$ en el punto $P(x_0,y_0)$

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y$$

donde $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0$

Luego,

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta z = 0 \quad \Leftrightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ continua en } P$$

Observaciones:

1. El teorema anterior se puede generalizar para *n* variables.

2. El recíproco del teorema anterior no es cierto.

Nota: De los dos teoremas anteriores tenemos una **condición suficiente** de continuidad para funciones reales de dos variables reales. Si una función $z = f(x, y)$ admite derivadas parciales finitas en un punto $P(x_0, y_0)$ y una de ellas existe en un entorno de *P* y es continua en *P*, entonces *f* es continua en el punto *P*.

2.2.- Diferenciales sucesivas.

Sea una función $z = f(x, y)$ diferenciable. Entonces su diferencial viene dada por:

$$dz = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

Si esta función es a su vez diferenciable, obtenemos la *diferencial segunda*:

$$d^2z = d(dz) = d(f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x \cdot dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y \cdot dy =$$

$$= (f''_{x^2} \cdot dx + f''_{yx} \cdot dy) \cdot dx + (f''_{xy} \cdot dx + f''_{y^2} \cdot dy) \cdot dy \overset{(*)}{=} f''_{x^2} \cdot (dx)^2 + 2 f''_{xy} \cdot dxdy + f''_{y^2} \cdot (dy)^2$$

Esta expresión tiene sentido siempre que existan las derivadas parciales de segundo orden y de forma simbólica, se expresa como $d^2z = \left(f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy \right)^{(2)}$. En general, y siempre que tenga sentido su cálculo, tendremos la expresión de la *diferencial m-ésima*:

$$d^m z = \left(f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy \right)^{(m)}$$

Análogamente, para funciones de *n* variables $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, la diferencial de un orden cualquiera *m*, siempre que tenga sentido su cálculo, vendrá dada de forma simbólica por la siguiente expresión:

$$d^m z = \left(f'_{x_1} \cdot dx_1 + \ldots + f'_{x_n} \cdot dx_n \right)^{(m)}$$

(*) Si las derivadas parciales cruzadas son iguales.

Nota: Como en el caso de funciones de una variable aquí también decimos que si *f* tiene derivadas parciales continuas hasta de orden *n*, *f es de clase n* y se escribe $f \in C^n$. Análogamente, $f \in C^\infty$ si $f \in C^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES REALES

1.- Estudiar en el origen la continuidad y existencia de derivadas parciales de primer orden de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2.- Dada la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad en el origen.

b) Estudiar en el origen la existencia de derivadas parciales de primer orden.

3.- Dada la función definida como sigue:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4y^2+4x-8y}{x-2y} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Dibujar el conjunto de puntos donde no está definida.

b) Dibujar el conjunto de puntos donde no es continua. Prolongarla por continuidad para que esté definida en todo el plano.

c) Usando la prolongación por continuidad definida en el apartado anterior, hallar f'_x y f'_y.

4.- Considérese la función *f* definida por:

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$$

Calcular:

a) Límite en el origen.

b) Continuidad en el origen.

c) Derivadas parciales de primer orden (Si es necesario, prolongar por continuidad)

5.- Estudiar en el origen la existencia de derivadas parciales de la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+2y^2} & \forall (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

6.- Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y)=\begin{cases} x+y & \forall (x,y)\,/\,x\neq y \\ 2x & \forall (x,y)\,/\,x=y \end{cases}$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

7.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \sin(x+y) & \forall (x,y)\,/\,x+y\neq 0 \\ 1-\cos(x+y) & \forall (x,y)\,/\,x+y=0 \end{cases}$, calcular sus derivadas parciales $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

DERIVADAS PARCIALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES REALES

1.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=xy$ c) $f(x,y)=x\cdot\cos x\cdot\cos y$

b) $f(x,y)=e^{xy}$ d) $f(x,y)=(x^2+y^2)\cdot \mathrm{L}(x^2+y^2)$

2.- Calcular las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones en los puntos señalados:

a) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ a>0$ en los puntos (0,0) y (a/2,a/2)

b) $f(x,y)=\mathrm{L}\left(\sqrt{1+xy}\right)$ en los puntos (1,2) y (0,0)

3.- Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=y^x+3$ d) $f(x,y)=e^{-xy^3}+y^3x^4$

b) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ e) $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2 x}+e^{-y}$

c) $f(x,y)=\cos(xy^2)$

4.- Dada la función $u=u(x,y,z)=xyz\cdot\sin(xyz)$, calcular las primeras y segundas derivadas parciales.

5.- Calcular el valor de la expresión $E=x^2\cdot z''_{x^2}+xy\cdot z''_{xy}+y^2\cdot z''_{y^2}$, donde $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, siendo $(x,y)\neq(0,0)$.

Solución: $E=\dfrac{x^2y^2}{z^3}$

6.- Calcular el valor de la expresión $w=x\cdot z'_x+y\cdot z'_y$, para la función z definida por:

$$z=\sin\left(\frac{2x+y}{2x-y}\right)$$

Solución: $w\equiv 0$

7.- Calcular la suma de las derivadas parciales de esta función en el punto $(\pi/4,\pi/4)$:

$$z=\mathrm{L}(x^x+y^y)+\sqrt{\sin(x+y)}$$

Solución: $L(\pi/4)+1$

8.- Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E = x^3 \cdot z'''_{x^3} + 3x^2 y \cdot z'''_{x^2 y} + 3xy^2 \cdot z'''_{xy^2} + y^3 \cdot z'''_{y^3}$$

siendo $z = z(x,y) = xy - y^3$.

Solución: $E = -6y^3$

9.- Demostrar que la función $u = u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ verifica esta expresión:

$$u''_{x^2} + u''_{y^2} + u''_{z^2} = 0$$

DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

1.- Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función en el origen:

$$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2.- Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función en el punto (0,0):

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \cdot \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.- Dada la siguiente función

$$z = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

a) Estudiar la continuidad en el origen.

b) Calcular las derivadas parciales de primer orden en el origen.

c) Estudiar la diferenciabilidad de primer orden en el origen.

4.- Dada la función $z = f(x,y) = (x+y) \cdot e^{\sqrt{x^2+y^2}}$:

a) Analizar su continuidad en el punto (0,0).

b) Calcular $f'_x(0,0)$ y $f'_y(0,0)$.

c) Analizar su diferenciabilidad en el punto (0,0).

5.- Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} x + x^2 y \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, estudiar en el punto (0,0):

a) continuidad.

b) derivadas parciales.

c) diferenciabilidad.

6.- Expresar la tercera diferencial de la función $z = f(x, y)$ y la segunda diferencial de la función $u = f(x, y, z)$, suponiendo la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

7.- Un envase cilíndrico de 2 centímetros de diámetro y 4 centímetros de altura se construye con aluminio de 0.01 centímetros de espesor. Haciendo uso de la diferencial, calcular el volumen de aluminio utilizado en cada envase.

Solución: $dv = 0.1\pi$

8.- Calcular la diferencial de la función *z*, hallando, previamente, su dominio de definición:

$$z = f(x, y) = x^{\log_x (4 - x^2 - y^2)}$$