# CONCEPTOS PREVIOS

## 1.- ALGEBRA Y ARITMÉTICA BÁSICA

### 1.1.- Símbolos básicos

$\in \quad \notin \quad \subseteq \quad \not\subset \quad \exists \quad \nexists \quad \infty \quad > \quad \geq \quad < \quad \leq \quad / \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \forall$

### 1.2.- Conjuntos de números

Los distintos conjuntos de números que utilizaremos a lo largo del curso son los siguientes:

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ números naturales. También se denominan números enteros positivos.

Se debe tener en cuenta que $0 \notin \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}$ números enteros.

$\mathbb{Q} = \left\{ x = \dfrac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ números racionales.

$\mathbb{I}$ números irracionales. Son los números reales que no son racionales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$, $\pi$, $e$.

$\mathbb{R}$ números reales. Es el conjunto que forman todos los números definidos anteriormente.

Entre estos conjuntos se verifican las siguientes relaciones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Por extensión, tenemos los conjuntos $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)/x,y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z)/x,y,z \in \mathbb{R}\}$ y, en general, $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)/x_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1,\ldots,n\}$.

Además de ellos, también definimos los números complejos:

$$\mathbb{C} = \{a + bi / a,b \in \mathbb{R}\}$$

donde $i = \sqrt{-1}$. Es claro también que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Dado un número complejo $a+bi$, $a-bi$ es su *conjugado*.

### 1.3.- Productos de interés práctico. Binomio de Newton

Las fórmulas siguientes corresponde a los productos más frecuentes:

a) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

b) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

c) $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$ expresión que se conoce como binomio de Newton.

$\binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, $\quad n \in \mathbb{N} \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad m \leq n$, números combinatorios y se lee "*n* sobre *m*".

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ es el *factorial de* $n$.

Por definición, $0! = 1$, $\binom{n}{0} = 1$.

Si en la expresión anterior se simplifican los factores que se repiten en los factoriales de numerador y denominador, podemos escribir:

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{m!}$$

y $\forall m \leq n \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

## 2.- RECTA REAL

### 2.1.- Intervalos en la recta real

Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$

Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$

Intervalo semiabierto: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$ o $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$

### 2.2.- Recta real ampliada

El sistema de números reales ampliado $(\overline{\mathbb{R}})$, está formado por los números reales a los que se han añadido los símbolos $\infty$ y $-\infty$. Se verifican las siguientes propiedades:

a) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} -\infty < x < \infty \\ x + \infty = \infty \\ x - \infty = -\infty \\ \dfrac{x}{\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0 \end{cases}$

b) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \forall x > 0 \Rightarrow & x \cdot \infty = \infty \quad x \cdot (-\infty) = -\infty \\ \forall x < 0 \Rightarrow & x \cdot \infty = -\infty \quad x \cdot (-\infty) = \infty \end{cases}$

c) $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$ y $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq b\}$

## 3.- GEOMETRIA

### 3.1.- Ecuación de la recta en el plano

Dados el punto del plano $P(x_0, y_0)$ y el vector no nulo $\vec{v} = (v_1, v_2)$,

$$(x,y) = (x_0, y_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2) \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R},$$

es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P$ y cuyo vector director es $\vec{v}$.

De esta expresión se pueden obtener las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

Y eliminando el parámetro $\lambda$, la expresión continua:

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}$$

Efectuando las operaciones adecuadas:

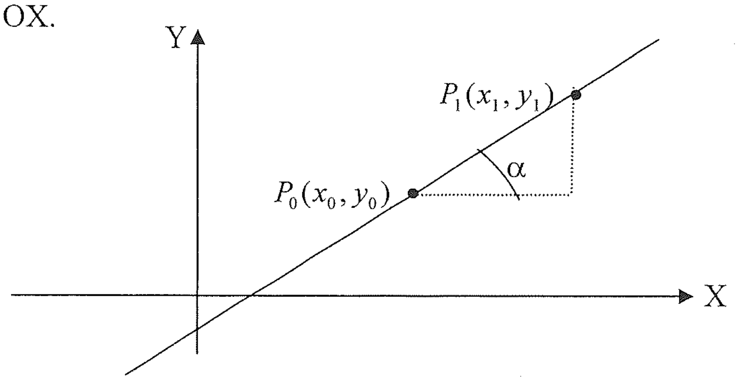
$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}\Leftrightarrow v_2\cdot(x-x_0)=v_1\cdot(y-y_0)\Leftrightarrow y-y_0=\frac{v_2}{v_1}\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y=mx+n$$

$y=mx+n$ es la ecuación explícita de la recta, y $m=\frac{v_2}{v_1}$ la pendiente de dicha recta.

Si en lugar de un punto nos dan dos, $P(x_0,y_0)$ y $Q(x_1,y_1)$, la ecuación de la recta que definen se puede expresar como sigue:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

En general, por lo tanto, la pendiente de la recta viene dada por $m=\frac{v_2}{v_1}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\tan\alpha$, donde $\alpha$ es el ángulo que forma dicha recta con el sentido positivo del eje OX.




**3.2.- <u>Ecuación de la recta en el espacio</u>**

Dados el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y el vector no nulo $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, la ecuación de la recta que pasa por $P$ y cuyo vector director es $\vec{v}$ se puede expresar de las siguientes formas:

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\cdot(v_1,v_2,v_3)\text{ con }\lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_0+\lambda\cdot v_1\\ y=y_0+\lambda\cdot v_2\\ z=z_0+\lambda\cdot v_3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

Igual que en el plano, dados dos puntos, $P(x_0,y_0,z_0)$ y $Q(x_1,y_1,z_1)$, la ecuación de la recta será:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

**3.3.- <u>Ecuación del plano</u>**

Dados el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y los vectores no paralelos $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, las ecuaciones paramétricas del plano que definen son las siguientes:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 + \mu \cdot w_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 + \mu \cdot w_2 \\ z = z_0 + \lambda \cdot v_3 + \mu \cdot w_3 \end{cases} \quad \text{donde } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Y eliminando los parámetros $\lambda$ y $\mu$ de esta expresión, obtenemos la ecuación implícita $Ax + By + Cz + D = 0$, donde al vector $(A, B, C)$ se le denomina *vector característico, y* es perpendicular al plano en cuestión.

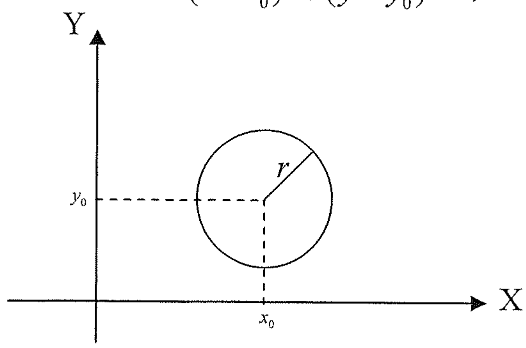
Si en lugar de un punto nos dan dos, $P(x_0, y_0, z_0)$ y $Q(x_1, y_1, z_1)$, la ecuación del plano se puede obtener mediante este determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

**3.4.- <u>Curvas básicas en el plano (cónicas)</u>**

Ecuación de la *circunferencia* con centro en $(x_0, y_0)$ y radio $r > 0$:

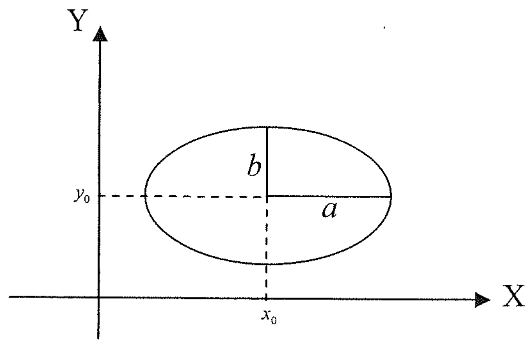
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$




Ecuación de la elipse con centro en $(x_0, y_0)$ y semirradios $a > 0, b > 0$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

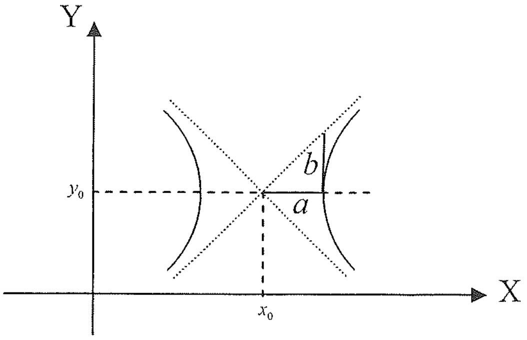
Los ejes de esta elipse (rectas perpendiculares que pasan por el centro) son paralelos a los ejes coordenados.

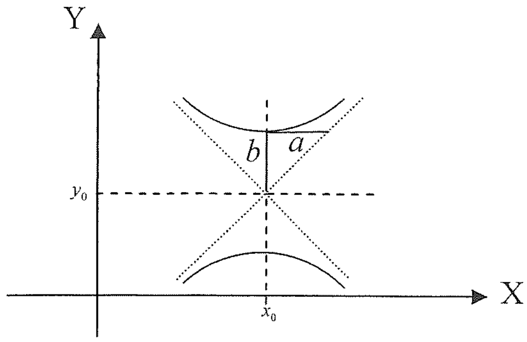



Ecuación de la hipérbola con centro en $(x_0, y_0)$ y semirradios $a > 0, b > 0$:

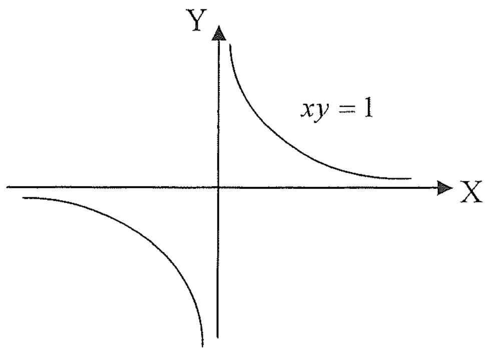
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{o} \quad \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1$$

Estas hipérbolas también tienen dos ejes paralelos a los ejes coordenados. A diferencia de la elipse, donde ambos ejes cortan la curva, en el caso de la hipérbola uno de sus ejes corta la curva pero el otro no. De las dos ecuaciones dadas, en la primera el eje que corta a la hipérbola es paralelo al eje OX, y en la segunda, el que la corta es el paralelo al eje OY.




Entre las hipérbolas hay un caso especial al que denominados hipérbola equilátera:

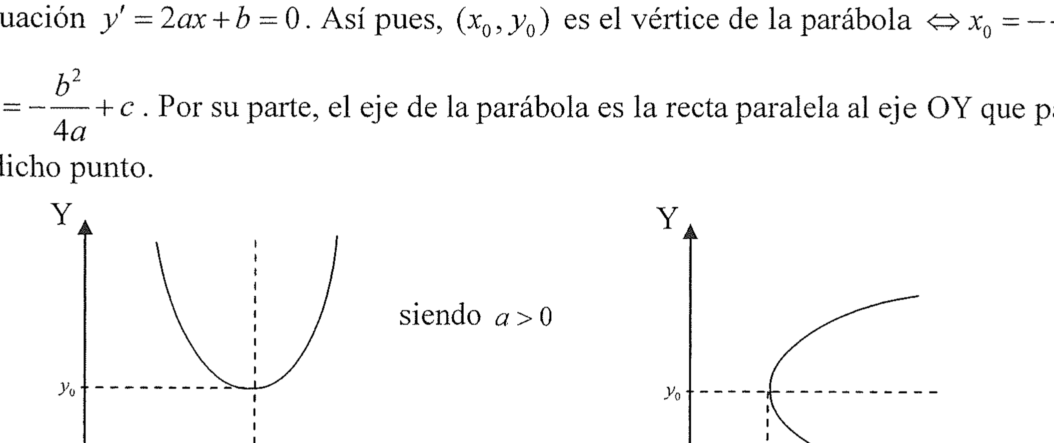



La ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(x_0, y_0)$:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{con } a \neq 0 \quad \text{o} \quad x = ay^2 + by + c \quad \text{con } a \neq 0$$

En el primer caso el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje OY, y en el segundo caso el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje OX.

Para obtener el vértice de la parábola basta con calcular el punto donde se anula la derivada. Por ejemplo, el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto que verifica la ecuación $y' = 2ax + b = 0$. Así pues, $(x_0, y_0)$ es el vértice de la parábola $\Leftrightarrow x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_0 = -\dfrac{b^2}{4a} + c$. Por su parte, el eje de la parábola es la recta paralela al eje OY que pasa por dicho punto.



En general, y como fácilmente se puede comprobar al observar las definiciones analíticas dadas, las expresiones de estas curvas son ecuaciones de segundo grado, cada una con su propia característica. Así:

Si los coeficientes de los sumandos $x^2$ e $y^2$ son iguales, tenemos una circunferencia.

Si los coeficientes de los sumandos $x^2$ e $y^2$ son distintos pero del mismo signo, entonces es una elipse.

Si los coeficientes de los sumandos $x^2$ e $y^2$ son de signo contrario, es una hipérbola.

Si el coeficiente de $x^2$ o $y^2$ es nulo (es decir, sólo aparece uno de estos dos sumandos), entonces es la ecuación de una parábola.

## 4.- PROGRESIÓN ARITMÉTICA Y GEOMÉTRICA

### 4.1.- Progresión aritmética

Una progresión aritmética es una sucesión de números $\{a_n\}=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\}$ tales que la diferencia entre dos términos sucesivos cualesquiera es una constante:

$$a_n - a_{n-1} = d \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_{n-1}+d \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$a_n$ es el término general de la progresión aritmética, y nos permite obtener todos los términos de dicha progresión sin más que dar valores a $n$.

Por ejemplo, $\{2n-1\}=\{1,3,5,7,\ldots\}$ es una progresión aritmética siendo $d=2$.

Partiendo de la expresión $a_n = a_{n-1}+d \quad \forall n\in\mathbb{N}$, vamos a calcular la suma de los $n$ primeros términos de una progresión aritmética, es decir $S_n = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dado } a_1\\ a_2=a_1+d\\ a_3=a_2+d=a_1+2d\\ \quad\vdots\\ a_{n-1}=a_{n-2}+d=a_1+(n-2)d\\ a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d \quad \forall n\in\mathbb{N}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1+a_n=2a_1+(n-1)d\\ a_2+a_{n-1}=2a_1+(n-1)d\\ \quad\vdots\\ a_m+a_{n-(m-1)}=2a_1+(n-1)d \quad \forall m<n\end{array}\right.$$

Es decir, $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots=a_m+a_{n-(m-1)} \quad \forall m\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n\\ S_n=a_n+a_{n-1}+\ldots+a_2+a_1\end{array}\right. \overset{\text{Sumando}}{\Rightarrow} 2S_n=n(a_1+a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 330 términos de la progresión aritmética $\{2n-1\}=\{1,3,5,7,\ldots\}$ tiene el siguiente resultado:

$$S_{330}=1+3+5+\ldots+659=\frac{1+659}{2}\cdot 330=\frac{660\cdot 330}{2}=108900$$

### 4.2.- Progresión geométrica

Una progresión geométrica es una sucesión de números $\{a_n\}=\{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\}$ tales que el cociente entre dos términos sucesivos cualesquiera es una constante:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad a_n = a_{n-1} \cdot r \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$a_n$ es el término general de la progresión geométrica, y nos permite obtener todos los términos de dicha progresión sin más que dar valores a $n$. $r$ se denomina *razón* de la progresión.

Por ejemplo, $\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ es una progresión geométrica siendo $r = 2$.

Igual que en el caso anterior, aquí también calcularemos la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica, esto es, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

$$a_n = a_{n-1} \cdot r \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{Dado } a_1 \neq 0 \\ a_2 = a_1 \cdot r \\ a_3 = a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot r = a_1 \cdot r^{n-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_n = a_1 + a_1 \cdot r + \ldots + a_1 \cdot r^{n-2} + a_1 \cdot r^{n-1} \\ r \cdot S_n = \quad a_1 \cdot r + \ldots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n \end{cases} \overset{\text{Restando}}{\Rightarrow} (1-r) \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot r^n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}}$$

Por ejemplo, la suma de los primeros 120 términos de la progresión geométrica $\{2^n\} = \{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ toma el siguiente valor:

$$S_{120} = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{120} = \frac{2(1-2^{120})}{1-2} = 2(2^{120} - 1)$$

## 5.- REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

$$y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{R} \qquad\qquad y = [f(x)]^n \Rightarrow y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

$$y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \mathrm{L}a \quad \forall a \in \mathbb{R},\ a > 0 \qquad\qquad y = a^{f(x)} \Rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \mathrm{L}a$$

$$y = \mathrm{L}x \Rightarrow y' = \frac{1}{x} \qquad\qquad y = \mathrm{L}[f(x)] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \qquad\qquad y = \sin[f(x)] \Rightarrow y' = f'(x) \cdot \cos[f(x)]$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \cos[f(x)] \Rightarrow y' = -f'(x) \cdot \sin[f(x)]$$

$$y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \tan[f(x)] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}$$

$$y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arcsin[f(x)] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$y = \arccos x \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos[f(x)] \Rightarrow y' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \arctan[f(x)] \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$