DERIVADA Y DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.- DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL.

1.1.- Derivada de una función en un punto.

Definición: Sea f una función real definida en un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Se dice que *f* es *derivable en* x_0 si el cociente $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tiene límite finito cuando *x* tiende a x_0. Este límite, si existe, (finito o infinito) recibe el nombre de *derivada* de la función *f* en el punto x_0 y se representa por:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

ó

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

De la unicidad del límite se deduce que si existe la derivada, es única.

Nota: Se dice que $D \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto abierto si $\forall x \in D$ existe un intervalo abierto *I* tal que $x \in I \subset D$.

1.2.- Propiedades.

- Si *f* y *g* son derivables en x_0, entonces también son derivables en x_0, su suma, producto y cociente, esto último si $g(x_0) \neq 0$.

- Si *g* es derivable en x_0 y *f* es derivable en $g(x_0)$, la función $f \circ g$ es derivable en x_0, teniéndose que $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ (*regla de la cadena*).

1.3.- Derivadas por la derecha y por la izquierda.

Supongamos que existe:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

entonces a este límite se le denomina *derivada por la derecha* en x_0 y se denota por $f'(x_0^+)$.

Análogamente se llama *derivada por la izquierda* en x_0 a:

$$f'(x_0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si la función *f* está definida en un entorno de x_0, entonces existe la derivada de la función en x_0 si y sólo si existen la derivada en x_0 por la izquierda y por la derecha y ambas coinciden.

1.4.- Derivada en un conjunto *D.* Función derivada.

Definición: Se dice que f es *derivable en un conjunto D* si es derivable en todos los puntos de dicho conjunto.

(Si la función f está definida en un intervalo a,b, se considerará en el punto a la derivada por la derecha y en b la derivada por la izquierda).

Sea f una función derivable en un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$. En este caso, aparece la aplicación de D en $\mathbb{R}$ de modo que:

$$\begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \to f'(x) \end{array}$$

Esta aplicación se denomina *función derivada* o simplemente *derivada* de f y se representa por:

$$f'(x), \quad y'(x), \quad \frac{dy}{dx}$$

1.5.- Relación entre derivabilidad y continuidad.

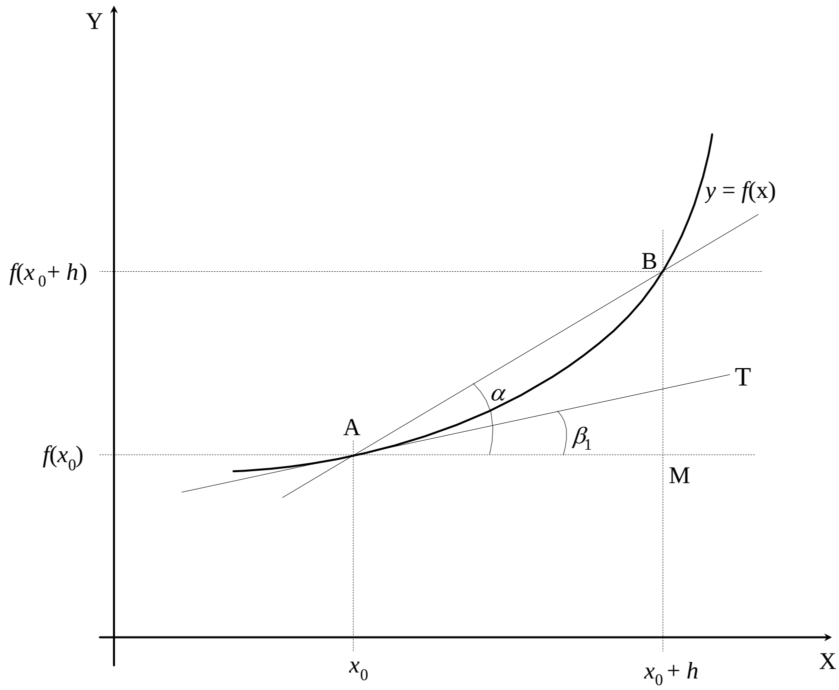
Teorema: Si una función f es derivable en un punto x_0, entonces es continua en x_0.

Observación:

El recíproco de este teorema no es cierto. Una función puede ser continua en un punto pero no derivable en ese punto; por ejemplo, $f(x) = |x|$ es una función continua en $x = 0$ pero no es derivable en dicho punto.

1.6.- Interpretación geométrica de la derivada.

Dada una función continua $y = f(x)$ y su grafo, vamos a determinar la recta tangente en el punto (x_0, y_0). Por definición se llama semirrecta tangente en el punto A por la derecha a la recta posición límite de la cuerda AB cuando B tiende a A por la derecha, es decir, la semirrecta AT cuya pendiente es el límite de la pendiente de la cuerda AB.



$$\tan\alpha = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\tan\beta_1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0^+)$$

Análogamente ocurre al acercarse por la izquierda obteniendo β_2 .

Si las dos semirrectas tangentes están sobre la misma recta, los ángulos que forman con la dirección positiva del eje OX serán β_1 y $\beta_2 = \beta_1 + \pi$ con lo que :

$$\tan\beta_1 = \tan(\beta_1+\pi) \Rightarrow f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$$

Por tanto, la derivada de una función *f* en un punto x_0 es la tangente trigonométrica de los ángulos que forman con la parte positiva del eje OX, las semirrectas tangentes en A.

En el caso de que $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ existan y no coincidan no habrá recta tangente en A pero sí dos semirrectas tangentes a cada uno de los arcos en que se divide la curva, y sus pendientes serán las derivadas a la derecha e izquierda.

1.7.- <u>Estudio de la variación de una función en un intervalo prefijado.</u>

Teorema de Rolle. Sea *f* una función que cumple las siguientes condiciones:

- *f* es continua en a,b
- *f* es derivable en (a,b)
- $f(a) = f(b)$

Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$ / $f'(c) = 0$

Teorema del Valor Medio (de Lagrange o de los Incrementos Finitos). Sea *f* una función que cumple las siguientes condiciones:

- *f* es continua en a,b
- *f* es derivable en (a,b)

Entonces existe al menos un punto $c \in (a,b)$/ $f(b) - f(a) = (b-a)\cdot f'(c)$

<u>*Nota*</u>: Del teorema anterior se deduce que si una función es derivable con derivada nula en un intervalo *I*, la función es constante en dicho intervalo.

Otra forma de escribir el resultado anterior:

llamamos $h = b - a$ entonces como $c \in (a,b) \Rightarrow c = a + \theta\cdot h \quad 0 < \theta < 1$

entonces:

$$\exists\theta \in (0,1) \ / \ f(a+h) - f(a) = h\cdot f'(a+\theta\cdot h)$$

En general para el intervalo $x, x+h$:

$$\exists\theta \in (0,1) \ / \ f(x+h) - f(x) = h\cdot f'(x+\theta\cdot h)$$

2.- DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL.

2.1.- Diferencial de una función en un punto.

Definición: Sea *f* una función definida en un cierto dominio *D* y sean x_0 y $x_0+\Delta x$ dos puntos de *D*. Se dice que la función $y=f(x)$ es *diferenciable en el punto* x_0 si se verifica:

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = M\cdot\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ donde: $M\in\mathbb{R}$ es independiente de Δx

$\varepsilon\to 0$ cuando $\Delta x\to 0$

Por definición a $M\cdot\Delta x$ se le llama *diferencial primera de la función en el punto x* y se representa por:

$$dy = df(x) = M\cdot\Delta x$$

Nota: Δx es la variación (o incremento) de la variable *x*. Es decir, lo que hemos denominado *h* al estudiar la derivabilidad.

2.2.- Relación entre derivabilidad y diferenciabilidad.

Teorema: Una función *f* es diferenciable en un punto *x*, si y sólo si es derivable en ese punto y, además, se demuestra que $\boxed{M = f'(x)}$.

Observaciones:

1. Hemos visto, por tanto, que la **condición necesaria y suficiente** para que la función *f* sea diferenciable en un punto *x* es que sea derivable en ese punto
2. Del teorema anterior se sigue que la diferencial en un punto, si existe, es única.
3. Si *f* es diferenciable en un punto *x*, admite derivada finita en el punto *x*, luego la función es continua en él. Por tanto, la continuidad de la función es una **condición necesaria** de diferenciabilidad.
4. Si consideramos la función $y=f(x)=x$ como $f'(x)=1\quad \forall x \Rightarrow dy=dx=\Delta x$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

2.3.- Propiedades.

Sean *f* y *g* dos funciones diferenciables en *x* entonces:

f+*g* es diferenciable en *x* y $d(f+g)(x) = df(x) + dg(x)$

f·*g* es diferenciable en *x* y $d(fg)(x) = df(x)\cdot g(x) + dg(x)\cdot f(x)$

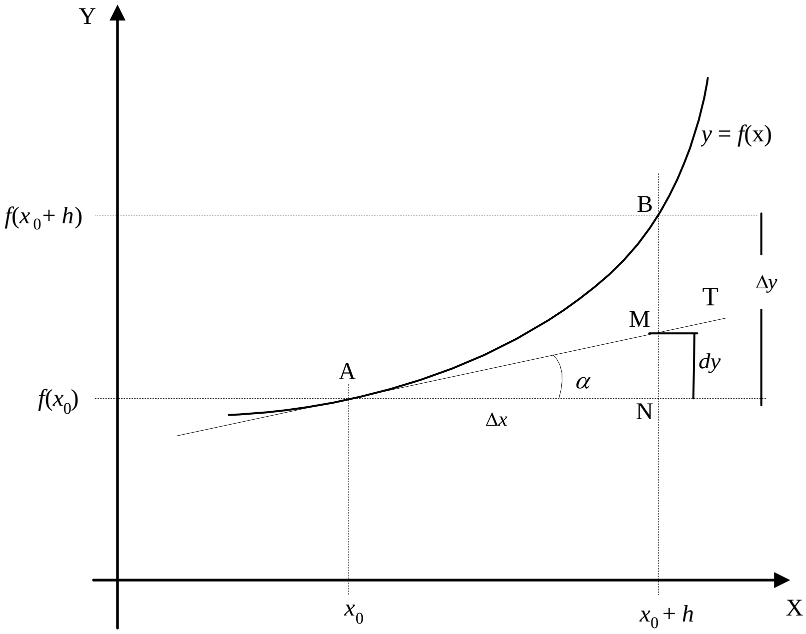
λ·*f* es diferenciable en *x* (λ real) y $d(\lambda f)(x) = \lambda\cdot df(x)$

2.4.- Interpretación geométrica.

Sea *f* una función diferenciable en x_0. Como:

$$\tan\alpha = \frac{\overline{MN}}{\Delta x} = f'(x_0) \Rightarrow \overline{MN} = f'(x_0)\cdot\Delta x = df(x_0)$$

Entonces, el segmento $\overline{MN}$ coincide con el valor de la diferencial de *f* en x_0, cuando la variable independiente *x*, ha sufrido una variación de Δx.



2.5.- <u>Diferenciales sucesivas.</u>

Sea *f* una función diferenciable en un conjunto *D*. Suponiendo que la función $dy = f'(x)dx$ sea una función diferenciable entonces:

$$d(dy) = d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2$$

que recibe el nombre de *diferencial segunda*, la cual tendrá sentido siempre que exista la derivada segunda.

En general:

$$d^{n)}y = f^{n)}(x)\left(dx\right)^n$$

siempre que exista y sea finita la derivada *n*-ésima.

<u>*Nota*</u>: Si *f* tiene derivadas continuas hasta de orden *n*, se dice que *f es de clase n* y se denota por $f \in C^n$. Análogamente, se dice que $f \in C^\infty$ si $f \in C^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular, aplicando la definición, las derivadas de las siguientes funciones en el punto $x = x_0$:

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \mathrm{L}x$

2.- Calcular en el origen las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{1/x}}$

b) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = |x|$

<u>Solución</u> : a) No tiene sentido $f'(0)$

b) No existe $f'(0)$

c) $f'(0) = \infty$

d) No existe $f'(0)$

3.- Estudiar la derivabilidad de la función f en los puntos 0 y -1:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{Si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{Si } -1 < x < 0 \\ -2x-1 & \text{Si } x \leq -1 \end{cases}$$

<u>Solución</u> : f no es derivable en $x = 0$

f derivable en $x = -1$ ($f'(-1) = -2$)

4.- Estudiar la derivabilidad en el punto $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{Si } x > 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \\ x + x^3 & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u> : f derivable en $x = 0$ ($f'(0) = 1$)

5.- Estudiar la continuidad y derivabilidad en el punto $x = 0$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \sin(1/x) & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u> : f continua y derivable en $x = 0$ ($f'(0) = 0$)

6.- Sea la función $f(x) = x^2 + 4x + 1$, que satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[2,4]$. Hallar la abscisa de un punto de la curva en el cual la tangente es paralela a la recta determinada por los puntos A(2,13) y B(4,33).

<u>Solución</u> : $x = 3$

7.- Probar que la función $f(x) = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ con $x \in [-1/2, 3]$ verifica las condiciones del teorema de Rolle y hallar el valor o los valores de x en donde $f'(x) = 0$.

<u>Solución</u> : $x = 5/4$

8.- Dada la función $y = f(x) = x^3$:

a) Probar que es diferenciable en $x = 1$ y $x = 3$.

b) Comparar Δy con $\mathrm{d}y$ en dichos puntos cuando $\Delta x = \mathrm{d}x = 0.1$.

<u>Solución</u> : $x = 1$: $\Delta y = 0.331$, $\mathrm{d}y = 0.3$

$x = 3$: $\Delta y = 2.791$, $\mathrm{d}y = 2.7$

9.- Estudiar si es diferenciable en $x = 0$ la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{Si } x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

<u>Solución</u> : f no es diferenciable en $x = 0$

10.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{Si } x \neq 0 \\ 1 & \text{Si } x = 0 \end{cases}$$

a) Hallar $f'(0)$, si existe.

b) Obtener para $x = 0$ con $dx = 0.1$ la diferencial en caso de que exista .

c) Obtener la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $x = 0$.

d) Hallar, si existe, la diferencial segunda d^2y en $x = 0$.

<u>Solución</u>: a) $f'(0) = 0$

b) $dy(0) = 0$

c) $y = 1$

d) $d^2y(0) = -1/3 \cdot (dx)^2$

11.- Hallar $f'(0^+)$, siendo $f(x) = \sqrt{|x|}$.

<u>Solución</u>: $f'(0^+) = \infty$

12.- Hallar la derivada de $f(x) = x + \dfrac{x}{1+|x|}$ en el punto $x = 0$.

Solución: $f'(0) = 2$

13.- Analizar la continuidad de la siguiente función en el punto $x = 0$ (indicando el tipo de discontinuidad) y calcular las derivadas laterales en dicho punto:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{1}{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Solución: D. Inevitable de 2ª especie.

$f'(0^+) = 0,\ f'(0^-) = -\infty$

14.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \forall x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 + x + \dfrac{x^2}{2} & \forall x < 0 \end{cases}$:

a) Hallar su dominio de definición y estudiar su continuidad.

b) Calcular su derivada determinando su dominio de definición.

c) Cuántas veces es f derivable en el punto $x = 0$? Por qué?

Solución: a) $D = \mathbb{R}$. Continua en todo $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \begin{cases} e^x & \forall x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 + x & \forall x < 0 \end{cases}$

c) f es dos veces derivable en $x = 0$.

15.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \forall x > 0 \\ x^2 & \forall x \leq 0 \end{cases}$, calcular $f'(0)$.

Solución: $f'(0) = 0$

16.- Calcular $f'(0)$ para las dos siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x^4}$ Solución: $\nexists f'(0)$

b) $f(x) = x \cdot e^{\sqrt{x^2 + x^4}}$ Solución: $f'(0) = 1$

17.- Un globo esférico de radio $r = 1m$, se fabrica con seda de $1cm$ de espesor. Utilizando la diferencial, obtener el volumen aproximado de seda necesario para construirlo.

Solución: $0,04\pi\ m^3$