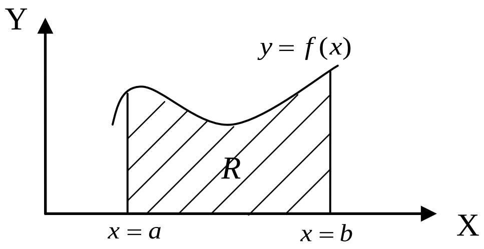
APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1.- ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA.

1.1.- Área definida entre una curva y el eje de abscisa.

Consideremos la región R del plano limitada por la curva que define la función continua $y = f(x) \geq 0$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$:



Es decir, $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, a \leq x \leq b \text{ y } 0 \leq y \leq f(x)\right\}$

Entonces:

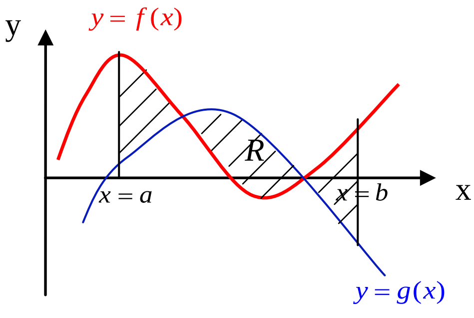
$$\text{Área}(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Si la función f corta el eje OX (un número finito de veces), quedando la región R definida por encima y por debajo del mismo, entonces:

$$\text{Área}(R) = \int_a^b \left| f(x) \right| dx$$

1.2.- Área entre dos curvas.

Consideremos la región R del plano limitada por las curva que definen las funciones continuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, y las rectas $x = a$ y $x = b$:



Entonces:

$$\text{Área}(R) = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

2.- LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA PLANA.

Definición: Sea $y = f(x)$ una función continua con derivada continua $\forall x \in [a, b]$. Se denomina *longitud de arco* de la curva definida por esa función al límite, si existe, de la longitud de las poligonales inscritas en dicho arco, con la condición de que sus vértices se aproximen cada vez más unos a otros, siempre que este límite no dependa de los procedimientos utilizados para dividir el arco.

La longitud de arco (s) se calcula mediante esta integral:

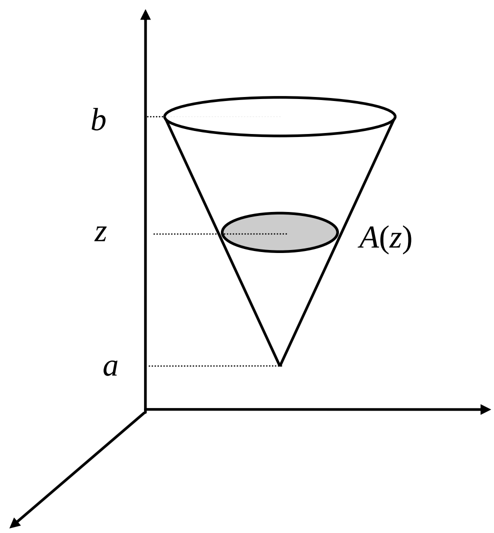
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} \, dx$$

3.- VOLUMEN DE UN SÓLIDO.

3.1.- Volumen de un sólido conocidas sus secciones transversales.

Consideremos un sistema de planos paralelos situado a una distancia z de un plano dado, y sea $A(z)$ el área de la sección transversal que cada uno de estos planos genera en un sólido. Si el sólido se encuentra situado entre los planos $z = a$ y $z = b$, y $z \to A(z)$ es una función continua, entonces su volumen viene dado por:

$$\text{Volumen}(V) = \int_a^b A(z) \, dz$$

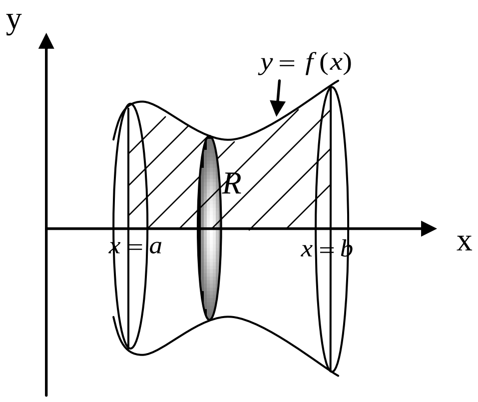


3.2.- Volumen de un sólido de revolución.

Giro alrededor del eje OX.

Consideremos la región del plano limitada por la curva que define la función continua $y = f(x)$ y el eje OX $\forall x \in [a,b]$ (la región rayada del dibujo). Al girar esta región alrededor del eje OX se genera un sólido *V*, cuyas secciones transversales (surgidas al cortar dicho sólido mediante planos perpendiculares al eje OX) son círculos de radio $|f(x)|$ (como se muestra en el dibujo). Es decir, secciones de área $A(x) = \pi \cdot f^2(x)$. Entonces, el volumen de este sólido de revolución viene dado por la siguiente integral:

$$\text{Volumen}(V) = \int_a^b A(x) \, dx = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$



Giro alrededor del eje OY.

Consideremos la región del plano limitada por la curva que define la función continua $y = f(x) \geq 0$ y el eje OX $\forall x \in [a,b]$, donde $a \geq 0$ (la región rayada del dibujo). Al girar esta región alrededor del eje OY se genera un sólido *V*. En este caso, los diferenciales ("cachitos") que vamos a integrar ("sumar") para calcular su volumen no son perpendiculares al eje de giro (como en el caso anterior) sino paralelos. Es decir, el volumen del sólido es la suma de los volúmenes de los cilindros que se muestran en el dibujo:

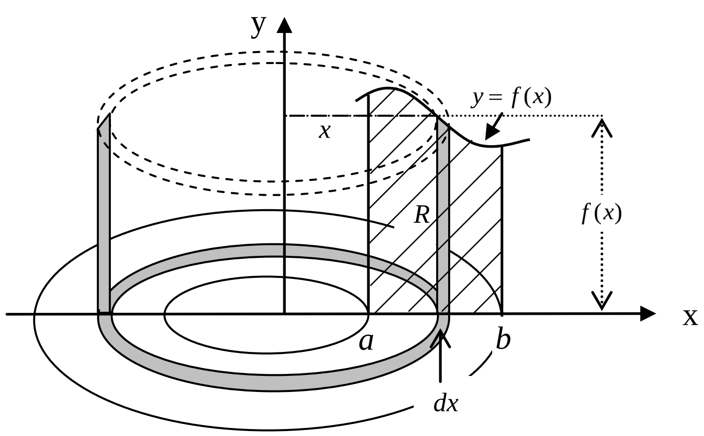
$$dV = \underbrace{\text{Área de la base}}_{(1)} \cdot \text{Altura} =$$

$$= \underbrace{(\text{Longitud de la circunferencia de radio } x) \cdot dx}_{(1)} \cdot f(x) =$$

$$= \underbrace{2\pi x \cdot dx}_{(1)} \cdot f(x)$$

Por lo tanto:

$$\text{Volumen}(V) = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$$



EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular el área de la región plana limitada por las curvas:

$$y^3 = x, \quad y = 1, \quad x = 8$$

Solución: $A = \dfrac{17}{4}\,u^2$

2.- Calcular el área de la región plana limitada por las curvas:

$$\begin{cases} y = x \\ y = 1 - x/2 \end{cases}, \quad x = 1, \quad x = 4$$

Solución: $A = \dfrac{33}{4}\,u^2$

3.- Calcular el área de la región plana limitada por las curvas:

$$y = e^{-x}, \quad y = e^{x}, \quad x = 1$$

Solución: $A = \left(e + \dfrac{1}{e} - 2\right) u^2$

4.- Calcular el área de la región plana limitada por las parábolas:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Solución: $A = \dfrac{64}{3}\,u^2$

5.- Calcular el área del segmento parabólico limitado por la recta que pasa por los puntos $P_1(16,12)$ y $P_2(4,-6)$ y la parábola $y^2 = 9x$.

Solución: $A = 108\;u^2$

6.- Calcular el área de la región plana limitada por las curvas:

$$x = 3 - y^2, \quad y = x - 1$$

Solución: $A = 9/2\;u^2$

7.- Calcular la longitud de arco de la curva $y = 2x\sqrt{x}$ entre las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución: $L = \frac{2}{27} \cdot (19\sqrt{19} - 1)\ u$

8.- Calcular la longitud de arco que delimita la recta $x = 4/3$ en la curva $y^2 = x^3$.

Solución: $L = \frac{112}{27}\ u$

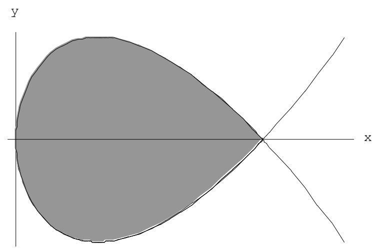
9.- Calcular el volumen del segmento esférico limitado en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ por las bases que forman los planos $x = 2$ y $x = 3$.

Solución: $B = \frac{29\pi}{3}\ u^3$

10.- Calcular el volumen del sólido que genera la curva $y = \sin(x)$ al girar alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución: $B = \frac{\pi^2}{2}\ u^3$

11.- Dada la hoja parabólica que se muestran en el dibujo, cuya ecuación es $9y^2 = x(3-x)^2$, determinar:



a) El área de la región plana dibujada.

b) El Volumen del sólido que genera la región dibujada al girar alrededor del eje OX.

c) Lo mismo alrededor del eje OY.

Solución: a) $A = \frac{8\sqrt{3}}{5}\ u^2$

b) $B_x = \frac{3}{4}\pi u^3$

c) $B_y = \frac{144\sqrt{3}}{35}\pi u^3$

12.- Dada la parábola $y = 4x^2$, calcular:

a) El área de la región que limitan en el primer cuadrante dicha curva y la recta tangente a la misma que es paralela a la recta $y = 2x$.

b) El Volumen del sólido que genera dicha región al girar alrededor del eje OX.

Solución: a) $A = \dfrac{1}{192}\ u^2$

b) $B = \dfrac{\pi}{1920}\ u^3$