INTEGRALES IMPROPIAS

En el caso de la integral definida en el sentido de Riemann, suponíamos que la función subintegral estaba **definida** y **acotada** en un **intervalo cerrado y acotado**. En este Capítulo vamos a estudiar cómo y en qué casos puede generalizarse el concepto de integral cuando no se verifican las condiciones anteriores. Este nuevo tipo de integrales se conocen como integrales impropias.

1.- CONCEPTO DE INTEGRAL IMPROPIA.

La integral impropia surge cuando, o bien la función de integración tiende a infinito (o menos infinito) en algún o en algunos puntos del intervalo de integración, o bien el intervalo de integración no está acotado. A los puntos en que la función tiende a infinito (o menos infinito), en el primer caso, o a los propios valores ∞ y -∞, en el segundo caso, se les llama *puntos singulares*.

Definición: Sea f definida en $\left[a,b\right)$ con $-\infty < a < b < \infty$, siendo b punto singular. Suponemos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $\left[a,\mu\right] \subset \left[a,b\right)$. Se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to b^-} \int_a^\mu f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Definición: Sea f definida en $\left(a,b\right]$ con $-\infty < a < b < \infty$, siendo a punto singular. Suponemos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $\left[\mu,b\right] \subset \left(a,b\right]$. Se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to a^+} \int_\mu^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Definición: Sea f definida en $\left[a,\infty\right)$ (∞ punto singular). Suponemos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $\left[a,\mu\right] \subset \left[a,\infty\right)$. Se define:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\mu \to \infty} \int_a^\mu f(x)\,dx$$

Definición: Sea f definida en $\left(-\infty,b\right]$ ($-\infty$ punto singular). Suponemos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $\left[\mu,b\right] \subset \left(-\infty,b\right]$. Se define:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\mu \to -\infty} \int_\mu^b f(x)\,dx$$

En todos los casos anteriores, si el límite **existe** y es **finito** diremos que la integral impropia *converge*, en otro caso diremos que la integral impropia *diverge*.

Si las singularidades se encuentran en los dos extremos del intervalo de integración, entonces definimos la integral impropia de la siguiente forma:

Definición: Sea f definida en $\left(a,b\right)$ con $-\infty \le a < b \le \infty$, siendo a, b puntos singulares. Suponemos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $\left[\mu,\mu'\right] \subset \left(a,b\right)$ y $c \in \left(a,b\right)$. Se define:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si las dos integrales impropias $\int_a^c f(x)\,dx$, y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen.

Por último, definimos la integral impropia si tenemos $k+1$ puntos singulares sobre el intervalo de integración:

<u>*Definición*</u>: Sea f definida en (a,b) con $-\infty \le a < b \le \infty$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ puntos singulares. Suponemos que $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ convergen $\forall i = 1,\ldots,k$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \text{ converge.}$$

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si y sólo si las k integrales impropias $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$, i=1,..k convergen.

2.- PROPIEDADES.

Suponemos f definida en $[a,b)$ con b punto singular finito o infinito y Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,\mu] \subset [a,b)$.

- *Fórmula de Newton-Leibniz* (*Regla de Barrow*)

Si f es una función continua en el intervalo $[a,b)$ y F es una primitiva de f en $[a,b)$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \lim\limits_{x \to b^-} F(x) - F(a) & b \ne \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} F(x) - F(a) & b = \infty \end{cases}$$

- *Linealidad y desigualdad*

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ convergen, entonces:

1. $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
2. $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall c \in \mathbb{R}$
3. Si $f(x) \le g(x) \;\; \forall x \in [a,b) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

- *Integración por partes*

Sean u y v funciones continuamente derivables en $[a,b)$, siendo finitos dos de los tres términos siguientes. Entonces también lo es el tercero y se verifica:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

- *Cambio de variable*

Sea f una función continua en $[a,b)$ y $\varphi(t)$ continuamente derivable en $[\alpha,\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$, verificando $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < b = \lim_{t\to\beta} \varphi(t)$, con $t \in [\alpha,\beta)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\cdot \varphi'(t)\,dt$$

<u>*Observaciones*</u>:

1. Puede ocurrir que una integral impropia, al aplicar un cambio de variable adecuado, se transforme en una integral propia.
2. Toda integral impropia con singularidad en un punto finito (b), se puede reducir a una integral impropia cuyo punto singular es no finito, mediante el siguiente cambio de variable:

$$[a,b) \longrightarrow [0,\infty)$$
$$x \longrightarrow t = \frac{x-a}{b-x} \Leftrightarrow x = \frac{bt+a}{t+1}$$

3. Toda integral impropia con singularidad en el extremo inferior del intervalo de integración, se puede reducir a una integral impropia cuyo punto singular se encuentra en el extremo superior, mediante el siguiente cambio de variable:

$$(a,b] \longrightarrow [-b,-a)$$
$$x \longrightarrow t = -x \Leftrightarrow x = -t$$

Por lo tanto, todas las propiedades deducidas suponiendo que la integral impropia presenta un punto singular situado en el extremo superior del intervalo de integración, quedan demostradas para integrales impropias que presentan un punto singular situado en el extremo inferior del intervalo de integración.

3.- CONDICIÓN NECESARIA DE CONVERGENCIA.

Sea f definida en $[a,\infty)$ (∞ punto singular), y supongamos que f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,\mu] \subset [a,\infty)$.

<u>*Teorema*</u>: Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge y existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Del mismo modo, si f está definida en $(-\infty,b]$ (-∞ punto singular) y f es Riemann-integrable en cualquier intervalo cerrado $[\mu,b] \subset (-\infty,b]$, entonces tenemos el siguuiente resultado:

<u>*Teorema*</u>: Si $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ converge y existe $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{0} \frac{x^2+4}{x^2-1} dx$ Solución: $-\infty$

b) $\int_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}$ Solución: $\frac{\mathrm{L}2}{2}$

c) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx$ Solución: 2

d) $\int_{2}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x-2}} dx$ Solución: ∞

e) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{(1-x)^2} dx$ Solución: ∞

f) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$ Solución: $\frac{\pi}{6}$

g) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x(3-x)}}$ Solución: $\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

h) $\mathrm{I}=\int_{0}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$ Solución: $\frac{64}{15}\sqrt{2}$

2.- Teniendo en cuenta que la ecuación $(1-x)^3 y-3x=0$ define una función $y=f(x)$, para $x\neq 1$, hallar el valor de la siguiente integral:

$$\mathrm{I}=\int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

Solución: $-\infty$

3.- Calcular $\mathrm{I}=\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ Solución: $\frac{\pi}{4}$

4.- Calcular $\int_{-\infty}^{6} \frac{dx}{(4-x)^2}$ Solución: ∞

5.- Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$ Solución: $\frac{\pi}{2}$

6.- Calcular $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$ Solución: π

7.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & 0<x\leq 1 \\ 2+x & 1<x\leq 4 \end{cases}$:

a) Dibujarla

b) Hallar $\int_{-\infty}^{4} f(x)dx$.

Solución: 33/2

8.- Calcular $\int_{a}^{\infty} \frac{e^x}{2^{2+x}} dx \quad \forall a > 0$ Solución: ∞

9.- Calcular $\int_{1}^{\infty} e^{-\mathrm{L}x^3} \mathrm{L}x \, dx$ Solución: 1/4