EDO DE ORDEN SUPERIOR

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales lineales presentan esta forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x) \qquad [1]$$

La ecuación presenta linealidad respecto a la función y sus derivadas.

- Si $f(x) \neq 0$ entonces se dice que la ecuación es **no homogénea** o **completa.**
- Si $f(x) \equiv 0$ entonces se dice que la ecuación es **homogénea** o **incompleta**.

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0$$

Por otro lado si todos los coeficientes son constantes las ecuaciones se denominan de **coeficientes constantes**. Si al menos uno de ellos depende de x se dice que la ecuación es de **coeficientes variables.**

1. Introducción

Empleando el operador de derivada D, la ecuación [1] se escribe:

$$[a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n](y) \equiv P_n[D](y) \equiv f(x)$$

Donde $\boldsymbol{P_n[D]}$ es el Polinomio Operador Diferencial.

En general:

a) $P_n[D](Cy) = CP_n[D](y)$

b) $P_n[D](y_1 + y_2) = P_n[D](y_1) + P_n[D](y_2)$

$$P_n[D]\left(\sum_1^n C_i y_i\right) = \sum_1^n C_i P_n[D] y_i = C_1 P_n[D] y_1 + C_2 P_n[D] y_2 + \ldots + C_n P_n[D] y_n$$

2. Solución General de una Ecuación Homogénea

Teorema:

"Si y_1, y_2,…,y_n son soluciones cualesquiera de una ecuación homogénea, también lo es toda combinación de ellas mediante constantes arbitrarias".

$$y = \sum_{1}^{n} C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

El conjunto de soluciones y_1, y_2,…,y_n es linealmente independiente en un intervalo $[a,b]$ cuando la igualdad (1) se cumple únicamente para $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0 \quad (1)$$

2. Solución General de una Ecuación Homogénea

Teorema:

“La condición necesaria y suficiente para que las n soluciones de un conjunto sean linealmente dependientes en el intervalo [a,b] es que el wronskiano de las mismas sea nulo en [*a,b*] *”.*

$$\exists C_i \neq 0 \quad : \quad C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$$

El ***wronskiano*** es el siguiente determinante:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

2. Solución General de una Ecuación Homogénea

Sistema Fundamental de Soluciones:

Se llama **sistema fundamental de soluciones** de una ecuación diferencial homogénea de orden *n* a todo conjunto de *n* soluciones que sean linealmente independientes

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

La combinación lineal, mediante constantes arbitrarias, de este conjunto de soluciones constituye la **solución general**:

En resumen:

$$P_n[D](y_i) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, n);\ \ W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0 \xrightarrow{\text{S.G.}}$$

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

Para obtener un sistema fundamental de soluciones a la ecuación:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = 0$$

Se prueba con la solución tipo exponencial simple ***y*=exp(*rx*)=*e*^*rx*^**

$$y = \exp(rx) \equiv e^{rx} \rightarrow y' = re^{rx} \rightarrow y'' = r^2 e^{rx} \rightarrow \ldots \rightarrow y^{(n-1)} = r^{n-1} e^{rx} \rightarrow y^{(n)} = r^n e^{rx}$$

Sustituyendo en la ec: $e^{rx}[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-2} r^2 + a_{n-1} r + a_n] = 0$

Para que se cumpla esto, necesariamente:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-2} r^2 + a_{n-1} r + a_n = 0$$

Esta ecuación se denomina ***Ecuación Característica***

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

Resolviendo la ecuación característica, calculando la raices de r, obtenemos un conjunto de soluciones:

$$\{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \xrightarrow{y=\exp(rx)} \{y_1 = \exp(r_1 x),\ y_2 = \exp(r_2 x), \ldots,\ y_n = \exp(r_n x)\}$$

Estudiando el wronskiano:

Si todas la raíces son diferentes, $W \neq 0$. $\Longrightarrow$ *Soluciones* ***Linealmente independientes***

Si al menos hay una raíz múltiple, $W \equiv 0$. $\Longrightarrow$ *Soluciones* ***Linealmente dependientes***

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

Se distinguen dos casos, el caso en que la raíces son simples, **Caso 1**, y cuando la raíces son múltiples, **Caso 2**:

(1) Raíces Simples. En este caso todas la raíces de la ecuación característica son distintas, las soluciones son independientes y se dispone de un sistema fundamental que permite obtener la solución general. Tenemos dos casos:

(1A) ***Raíz Real Simple*.** En la solución general la combinación lineal de estas soluciones se expresa:

$$\boxed{y = C_1 \exp(r_1 x) + C_2 \exp(r_2 x) + \ldots + C_n \exp(r_n x)}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

(1B) ***Raíces imaginarias simples.*** Sean $a \pm bi$ un par de raíces complejas simples (conjugadas):

$$y_1 = \exp[(a+bi)x] = \exp(ax)\exp(ibx) \equiv e^{ax}e^{ibx}$$

$$y_2 = \exp[(a-bi)x] = \exp(ax)\exp(-ibx) \equiv e^{ax}e^{-ibx}$$

En la forma trigonométrica,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \rightarrow \quad y_1 = e^{ax}(\cos bx + i\,\mathrm{sen}\,bx)$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \rightarrow \quad y_2 = e^{ax}(\cos bx - i\,\mathrm{sen}\,bx)$$

En la solución general las combinación lineal de estas soluciones se expresa:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos bx + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}\,bx]$$

$$C_1 + C_2 = A; \; i\left(C_1 - C_2\right) = B,$$

$$\boxed{y = e^{ax}(A\cos bx + B\,\mathrm{sen}\,bx)}$$

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

(2) Raíces Múltiples. Las soluciones correspondientes a estas raíces no son linealmente independientes ya que el Wronskiano $W \equiv 0$. Se distinguen dos casos:

(2A) ***Raíces Reales Múltiples*.** Si $r=k$ es una raíz real de multiplicidad *m* sólo se dispone de una de las *m* soluciones asociadas y=exp(kr). Pero el resto de *m-1* soluciones independientes se obtienen al multiplicar la solución por potencias crecientes de *x* hasta el grado *m-1*. En la solución general las combinación lineal de estas soluciones se expresa:

$$\boxed{y = [C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}]e^{kx}}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

3. Integración de Ecuaciones Homogéneas con Coeficientes Constantes

(2B) ***Raíces Imaginarias Múltiples.*** Sean $r=a\pm bi$ raíces complejas conjugadas de multiplicidad m. Entonces, únicamente tenemos las soluciones $y_1=e^{ax}\cos bx$, $y_2=e^{ax}\sin bx$ pero necesitamos conocer otras $2m-2$ soluciones. Se puede comprobar que estas soluciones se obtienen al multiplicar y_1, y_2 por potencias de x hasta el grado m-1.

$$\text{Raices } a\pm bi\ (m) \xrightarrow[\text{asociadas}]{\text{soluciones}} \begin{cases} e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\operatorname{sen} bx,\ xe^{ax}\operatorname{sen} bx, \ldots, x^{m-1}e^{ax}\operatorname{sen} bx \end{cases}$$

En la solución general las combinación lineal de estas soluciones se expresa:

$$\boxed{y=e^{ax}[P_{m-1}(x)\cos bx+Q_{m-1}(x)\operatorname{sen} bx]}$$

Ejemplo 1

4. Integración de Ecuaciones Completas

Sea la EDO lineal no homogénea:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x)$$

Teorema: “*La solución general se obtiene sumando a las solución general de la ecuación homogénea asociada una solución de la ecuación completa*”.

$$\boxed{P_n[D](y) = f(x) \xrightarrow{\text{sol. general}} y = y_h + Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + Y}$$

Nota: Las constantes pueden concretarse si se conocen n restricciones referidas a un punto. En el caso usual de imponer los valores de la función y de sus n primer derivadas, las constantes se concretan resolviendo un sistema de n ecuaciones.

Ejemplo 2

4. Integración de Ecuaciones Completas

Para hallar las soluciones particulares de la ecuación completa se emplean básicamente dos métodos: (1) Método de los Coeficientes Indeterminados y (2) Método de Variación de Parámetros

4.1. Método de Coeficientes Indeterminados: Es un método restrictivo cuya aplicación viene condicionada por el tipo de función *f(x)*. Como norma general se plantea una solución *Y* del tipo de *f(x)* con coeficientes indeterminados. Los casos de aplicación más frecuentes se refieren a combinaciones de productos de funciones de tipo polinómico, exponencial simple y trigonométrico

$$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\operatorname{sen} bx] \xrightarrow{\text{se ensaya}}$$

$$Y = e^{ax}[R_N(x)\cos bx + S_N(x)\operatorname{sen} bx] \quad \text{donde} \quad N \equiv \max\{m, n\}$$

4. Integración de Ecuaciones Completas

Si $f(x)$ coincide con alguna de las soluciones incluidas en y_h no es posible determinar Y ($P_n[D]Y = 0$). En estos casos se resuelve multiplicando la solución a ensayar por la menor potencia de x que evite la coincidencia.

Principio de Superposición de Soluciones: Si $f(x)$ es suma de funciones (exponencial simple, trigonométrica, polinómicas) se ensaya una suma de las soluciones que se ensayarían por separado:

$$y = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x) \xrightarrow{\text{se ensaya}} Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m$$

De manera que:

$$P_n[D](Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_m) \equiv f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_m(x)$$

Ejemplo 3

4. Integración de Ecuaciones Completas

4.2. Método de Variación de Parámetros: Se puede aplicar a cualquier ecuación lineal con independencia de que los coeficientes sean variables o constantes y del tipo de función f(x). Es necesario conocer la solución de la ecuación homogénea.

Sea $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{(n-2)} y'' + a_{(n-1)} y' + a_n y = f(x)$ la ecuación completa, de la que se conoce la solución de la ecuación homogénea.

$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$

Basándonos en las soluciones de y_h se plantea como solución general:

$$y = L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2 + \ldots + L_n(x) y_n \equiv \sum_{1}^{n} L_i(x) y_i$$

4. Integración de Ecuaciones Completas

Donde $L_1(x), L_2(x) \ldots L_n(x)$ son funciones auxiliares que hay que determinar. El método es el siguiente:

Se plantea el siguiente sistema de n ecuaciones con las derivadas $L_i'(x)$:

$$
\begin{cases}
\sum_1^n L_i' \, y_i = 0 & (1) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i' = 0 & (2) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i'' = 0 & (3) \\
\quad \vdots & \vdots \\
\sum_1^n L_i' \, y_i^{(n-2)} = 0 & (n-1) \\
\sum_1^n L_i' \, y_i^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0} & (n)
\end{cases}
$$

4. Integración de Ecuaciones Completas

Este sistema es compatible determinado ya que el determinante de los coeficientes no es otra cosa que el wronskiano de las soluciones de la ecuación homogénea que es no nulo debido a la hipótesis de independencia:

La resolución del sistema conduce a: $L_i'(x) = \Phi_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Integrando: $L_i(x) = \int \Phi_i(x)dx + A_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Sustituyendo en la ecuación resulta la solución general:

$$y = \sum_1^n L_i(x) y_i = \sum_1^n \left[\int \Phi_i(x)dx + A_i \right] y_i$$

Ordenando esta solución se deduce que una solución particular de la ecuación completa es:

$$y = \sum_1^n A_i y_i + \sum_1^n y_i \int \Phi_i(x)dx = y_h + Y \quad \Rightarrow \quad Y = \sum_1^n y_i \int \Phi_i(x)dx$$

Ejemplo 4

5. Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Variables

El número de ecuaciones con coeficientes variables cuyas soluciones se pueden expresar mediante funciones elementales es limitado. Por ello se estudiarán cambios de variable que transformen la ecuación en una ecuación de coeficientes constantes. Un ejemplo notable es la **ecuación de Euler**:

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x)$$

Para el caso frecuente de a=1 y b=0:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad [1]$$

5. Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Variables

La reducción al caso de coefientes constantes se logra mediante a sustitución:

General: $ax+b = e^t \leftrightarrow t = \ln(ax+b)$,

Y en el caso frecuente donde a=1; b=0 : $x = e^t \leftrightarrow t = \ln x$.

En este último caso si tomamos las derivadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \xrightarrow{D_t} \frac{d^2y}{dx^2}e^t = e^{-t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Se puede demostrar mediante inducción:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt}\left(c_n\frac{d^ny}{dt^n} + c_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + c_2\frac{d^2y}{dt^2} + c_1\frac{dy}{dt}\right)$$

donde c_1, c_2 ,…, c_n son coeficientes constantes.

5. Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Variables

Sustituyendo las derivadas y x=e^t en la ecuación (1) se logra la siguiente ecuación de coeficientes constantes:

$$b_0 y^{(n)}(t) + b_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + b_{n-2} y''(t) + b_{n-1} y'(t) + b_n y(t) = f(e^t) \equiv g(t) \qquad [2]$$

Donde $y(t)$ es función de t y, $b_0, b_1, \ldots, b_n$ son constantes.

La ecuación así expresada nos permitirá calcular la homogénea asociada en función de t. Una vez obtenida la homogénea $\boldsymbol{y_h(t)}$ calcularemos $\boldsymbol{y_h(x)}$ (deshacer el cambio de variable) y aplicaremos el método de **variación de parámetros** para obtener la solución general de la completa.

Nota: Para obtener la homogénea asociada de la [2] se pueden emplear soluciones tipo $y(t)$=e^{rt} o directamente la soluciones tipo y=x^r (debido al cambio de variable x=e^t son equivalentes).

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

En general, el orden de una ecuación puede ser rebajado cuando falta en ella una de las variables o cuando, en el caso de las ecuaciones lineales, se conoce una solución particular de la homogénea asociada.

1-Cuando falta la variable dependiente: Para reducir el orden en una unidad, $y' = z \rightarrow y'' = z', \dots, y^{(n-1)} = z^{(n-2)}, \; y^{(n)} = z^{(n-1)} \rightarrow$

$$f[x, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0 \quad \Rightarrow \quad f[x, z, z', \dots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}] = 0$$

Obtenida z una cuadratura lleva a la solución general:

$$z = z(x, C_{1,} C_2, \dots, C_{n-1}) \quad \rightarrow \quad y = \int z(x, C_{1,} C_2, \dots, C_{n-1})dx + C_n$$

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

Si además de *y* faltan las (m-1) primeras derivadas, es decir, si la primera derivada que figura en la ecuación es $y^{(m)}$, el orden baja m unidades con:

$$y^{(m)} = z \rightarrow y^{(m+1)} = z', \dots, y^{(n-1)} = z^{(n-m-1)}, y^{(n)} = z^{(n-m)} \rightarrow$$

$$f[x, y^{(m)}, y^{(m+1)}, \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0 \quad \Rightarrow \quad f[x, z, z', \dots, z^{(n-m-1)}, z^{(n-m)}] = 0$$

En este caso necesitamos m integrales para obtener la solución general una vez obtenida *z*:

$$z = z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m}) \quad \rightarrow$$

$$y^{(m-1)} = \int z(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-m})dx + C_{n-m+1} \dots \rightarrow \dots y = \int y' dx + C_n$$

Ejemplo 6

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

2-Cuando no aparece la variable independiente: En la ecuación no aparece la *x*:

$$f[y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}] = 0$$

Con el siguiente cambio de variable reducimos un orden de la ec:

$$y' = z(y) \rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} y' = \frac{dz}{dy} z \rightarrow y''' = \frac{d^2 z}{dy^2} y'z + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dy} y' = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z \quad \ldots$$

Sustituyendo llegamos a una ecuación de un orden inferior:

$$g[y, z, z', \ldots, z^{(n-2)}, z^{(n-1)}] = 0$$

Una vez obtenida $z = z(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$, mediante una integral obtenemos z :

$$y' = z(y) \rightarrow \frac{dy}{z(y)} = dx \xrightarrow{\int} \int \frac{dy}{z(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n$$

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

3-Ecuaciones diferenciales lineales de las que se conoce una solución particular de la homogénea asociada

Partiendo de una ecuación lineal $P_n[D](y) = f(x)$, donde se conoce una solución particular de la homogénea asociada [$u = u(x)$]. Donde

$$P_n[D](u) = 0$$

La sustitución,

$$y = uz \to y' = u'z + uz' \to y'' = u''z + 2u'z' + uz'' \to ...$$

Conduce a una en la que no aparece z (variable dependiente), cuyo orden se rebaja mediante $z=w'$.

Para una ecuación de segundo orden el procedimiento es el siguiente siendo u(x) una solución de la homogénea:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad \to \quad u'' + P(x)u' + Q(x)u = 0$$

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

La sustitución **y=uz** conduce a una ecuación de variables separables:

$$u''z+2u'z'+uz''+P(u'z+uz')+Quz=0\rightarrow \overbrace{(u''+Pu'+Qu)}^{=0}z+uz''+(2u'+Pu)z'=0$$

$$\rightarrow\ uz''+(2u'+Pu)z'=0\xrightarrow{z'=w}uw'+(2u'+Pu)w=0$$

Siendo la solución:

$$\frac{dw}{w}+\left(\frac{2u'}{u}+P(x)\right)dx=0\rightarrow \ln w+2\ln u+\int P(x)dx=A\Rightarrow w(x)\equiv\frac{B\exp\left(-\int P\,dx\right)}{u^2}$$

Mediante la integración:

$$z=\int w(x)dx=B\int\frac{\exp\left(-\int Pdx\right)}{u^2}dx+C\quad\xrightarrow{y=uz}\quad \boxed{y=Bu\int\frac{\exp\left(-\int Pdx\right)}{u^2}dx+Cu}$$

6. Casos en los que puede ser rebajado el orden

De ahí se deduce que v(x) es otra solución de la homogénea:

$$v = u \int \frac{\exp\left(-\int P(x)dx\right)}{u^2} dx \equiv u \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{u^2} dx$$

Ejemplo 7