INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN

1.- PARTICIONES DE UN INTERVALO [a,b].

<u>Definición</u>*:* Dado un intervalo a,b de $\mathbb{R}$, se llama *partición* de a,b a cualquier conjunto finito $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ tal que $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

La longitud del intervalo *i*-ésimo $[x_{i-1}, x_i]$, para $i = 1, \ldots, n$, se representa por $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y la magnitud $|P| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ se denomina *diámetro de la partición P*.

Se dice que otra partición P' es posterior a *P* cuando P' se obtiene de añadir algún punto a *P*, es decir, si $P \subset P'$.

2.- SUMAS DE RIEMANN. INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función **acotada** en a,b y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de este intervalo. Consideremos un conjunto arbitrario *T* de puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

<u>Definición</u>*:* Se llama *suma de Riemann* de *f*, relativa a la partición *P* y al conjunto de puntos *T*, al número $S(P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \Delta x_i$.

<u>Definición</u>*:* Se dice que la función *f* es *integrable según Riemann* sobre el intervalo a,b, y su integral es el número *I*, si para cualquier sucesión de particiones $\{P_n\}$ del intervalo a,b tal que $\lim\limits_{n\to\infty} |P_n| = 0$, (donde $\forall n \quad P_{n+1}$ es posterior a P_n) y para cualquier conjunto de puntos T_n correspondiente a cada partición P_n, se verifica que:

$$I = \lim_{n\to\infty} S(P_n, T_n) .$$

Cuando se cumplen estas condiciones, el número *I* se llama *integral definida* (de Riemann) de la función *f* sobre el intervalo a,b y se denota por $\int_a^b f(x)dx$**.**

3.- TEOREMAS DE INTEGRABILIDAD.

<u>Teorema</u>*:* Si *f* es una función creciente o decreciente en a,b, entonces *f* es integrable en a,b.

<u>Teorema</u>*:* Si *f* es una función continua (continua a trozos) sobre a,b, entonces *f* es integrable en a,b.

4.- PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1.- $\int_a^b dx = b - a$

2.- Si *f* es integrable sobre a,b, entonces *f* es integrable sobre cualquier intervalo $a', b' \subset a,b$.

3.- Sea $a<c<b$. Si f es integrable sobre a,c y c,b, entonces f es integrable sobre a,b y

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

4.- Recíprocamente, si f es integrable sobre a,b, entonces f es integrable sobre a,c y c,b, siendo $a<c<b$, y

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

5.- Si *f* y *g* son integrables sobre a,b, entonces $f+g$ también es integrable sobre a,b y

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx.$$

6.- Sea *f* integrable sobre a,b y *c* una constante. Entonces la función $c\cdot f$ también es integrable sobre a,b y

$$\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx.$$

7.- Si f y g son integrables sobre a,b, entonces $f\cdot g$ también es integrable sobre a,b.

8.- Si f y g son integrables sobre a,b y $|g(x)|\geq c\ \ \forall x\in[a,b]$ donde $c>0$, entonces f/g también es integrable sobre a,b.

9.- Sean *f* y *g* integrables sobre a,b. Si $\forall x\in[a,b]\ \ f(x)\leq g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx.$$

10.- Si *f* es integrable sobre a,b, entonces $|f|$ es integrable sobre a,b y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx.$$

Además por definición:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

Si *f* es integrable sobre a,b : $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.

5.- PRIMER TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA LA INTEGRAL DEFINIDA. GENERALIZACIÓN.

<u>*Teorema*</u>*:* Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable en el intervalo a,b.

a) Sean $m,M\in\mathbb{R}$ tales que $m\leq f(x)\leq M\ \ \forall x\in a,b$. Entonces $\exists\mu\in m,M$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a)$$

b) Si además *f* es continua en $[a,b]$, entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

<u>*Demostración*</u>:

a) Por ser $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$ entonces

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b dx$$

$$\Leftrightarrow\; m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$$\Leftrightarrow\quad m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \le M$$

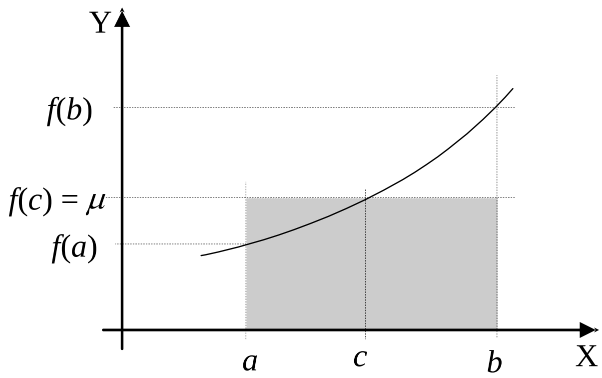
Entonces $\exists \mu \in [m, M]$ tal que $\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$

b) Se deduce de manera inmediata por la continuidad de la función.

Interpretación geométrica: Si *f* es no negativa y continua en $[a,b]$, la expresión

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu$$

implica que el área bajo la curva $y = f(x)$, es decir el área limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$ e $y = 0$ es igual al área del rectángulo cuya base es $[a,b]$ y su altura μ.



GENERALIZACIÓN.

<u>*Teorema*</u>: Sean *f* y *g* dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$, y supongamos que el signo de *g* se mantiene constante sobre $[a,b]$.

a) Sean $m, M \in \mathbb{R}$ tales que $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$. Entonces $\exists \mu \in [m, M]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu\cdot\int_a^b g(x)dx .$$

b) Si además *f* es continua en a,b , entonces existe un punto $c \in a,b$ tal que

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx .$$

Demostración:

a) Supongamos que $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in a,b$ (la demostración es análoga si se supone $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in a,b$).

Por ser $m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in a,b$:

$$m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x) \quad \forall x \in a,b$$

$$\Rightarrow \quad m\cdot\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq M\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Suponemos que $\int_a^b g(x)dx > 0$ (en otro caso, de las desigualdades anteriores se deduce que $\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = 0$, verificándose el teorema de forma inmediata).

Entonces:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

En consecuencia, $\exists \mu \in m, M$ tal que $\dfrac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = \mu$

b) Se deduce de manera inmediata por la continuidad de la función.

6.- TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO INTEGRAL.

Sea *f* integrable sobre el intervalo a,b . En este caso tiene sentido definir la función

$$F(x) = \int_a^x f = \int_a^x f(t)dt \quad \forall x \in [a,b] .$$

Teorema: Si *f* es integrable en a,b , entonces *F* es continua en a,b .

Primer teorema fundamental del cálculo integral: Si *f* es continua en a,b , entonces $F(x) = \int_a^x f$ es derivable en a,b y su derivada es $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in a,b$.

Demostración:

F es derivable en $a,b \iff \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \in \mathbb{R} ,\; \forall x \in [a,b]$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\int_a^{x+\Delta x} f - \int_a^x f}{\Delta x} = \frac{\int_x^{x+\Delta x} f}{\Delta x} = \frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

Luego, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f(x)\in\mathbb{R}$

<u>*Definición*</u>: Dada una función *f* definida en un intervalo *I*, se dice que otra función *F* es *primitiva* de *f* en *I* si *F* es derivable y $F'=f$ en *I*.

<u>*Observación*</u>: Según acabamos de ver, si *f* es continua en a,b, $F(x)=\int_a^x f$ es una primitiva de *f* en a,b.

<u>*Teorema*</u>: Toda función *f* que admite primitiva tendrá infinitas primitivas que se diferencian entre sí en una constante.

<u>*Demostración*</u>:

a) Es evidente que si *F* es una primitiva de *f* , la función $G=F+C \quad \forall C\in\Re$ también lo es.

b) Si *F* y *G* son dos primitivas de *f* se verifica que:

$$(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

entonces $G-F$ es una constante.

<u>*Definición*</u>: Se llama *integral indefinida* de *f* al conjunto de todas las primitivas de *f* y se denota por $\int f(x)\,dx$ (notación de Leibniz).

Segundo teorema fundamental del cálculo integral: Sea *f* continua sobre a,b y *G* una primitiva cualquiera de *f* en a,b. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)=G(x)\big]_a^b$$

(Regla de Barrow o Fórmula de Newton-Leibniz).

<u>*Demostración*</u>:

Por el primer teorema fundamental del cálculo integral, $F(x)=\int_a^x f$ es una primitiva de *f* en a,b.

Al serlo también *G*, se tiene que $F-G$ es constante, es decir,

$$F(x)=G(x)+C \qquad \forall x\in a,b$$

$F(a)=\int_a^a f=0=G(a)+C\ \Rightarrow\ C=-G(a)$

y $F(b)=\int_a^b f=G(b)+C=G(b)-G(a)$.

7.- INTEGRACIÓN POR PARTES.

<u>*Teorema:*</u> Si *u* y *v* son dos funciones derivables con derivada continua en a,b entonces:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Demostración:

Derivando la función producto *uv* obtenemos:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

donde todos los sumandos son funciones continuas y por tanto integrables, luego:

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Aplicando ahora la regla de Barrow al primer miembro de esta igualdad se obtiene el resultado buscado.

8.- INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN.

Sea f continua sobre el intervalo a,b . Sea $\varphi = \varphi(t)$ derivable con derivada continua sobre el intervalo α,β , tal que $a \leq \varphi(t) \leq b \quad \forall t \in \alpha,\beta$, siendo $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$