EDO

1.- Introducción

2.- Ecuaciones de primer orden y primer grado

- Enunciado del teorema de existencia
- Ecuaciones de variables separables y reducibles
- Ecuaciones diferenciales homogéneas
- Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas
- Ecuaciones diferenciales exactas
- Ecuaciones reducibles a exactas
- Ecuaciones diferenciales lineales
- Ecuaciones reducibles a lineales

eman ta zabal zazu
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Introducción

¿Qué son las ecuaciones diferenciales?

Se llama ecuación diferencial a toda aquella ecuación en la que figuran derivadas o diferenciales.

Si éstas lo son de funciones de una variable se denominan ***ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)*** y si se refieren a funciones de varias variables se denominan *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP)*.

Orden de la ecuación diferencial

Orden de la derivada de mayor orden que contiene ecuación. Ejemplo, la ecuación $8y''+xy'-13y=1$ es una ecuación diferencial de segundo orden.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Introducción

Grado de la ecuación dferencial

Mayor grado o exponente de las derivadas de la ecuación.

Por ejemplo, $(y'')^3+8xy'-13y=1$ es una ecuación de tercer grado.

La forma general de una ecuación diferencial de orden (n) es:

$$f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Introducción

Tienen especial interés las ***EDO lineales*** que responden al modelo:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$$

En este tema, se estudiarán las **EDO de primer orden**. Es decir, aquellas en las que únicamente encontraremos la primera derivada.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ejemplos de ecuaciones diferenciales

Ejemplo 1: La ley de enfriamiento de Newton establece que el índice de variación de la temperatura de un cuerpo que ha sido sumergido en un medio cuya temperatura se mantiene constante es directamente proporcional en cada momento a la diferencia existente entre las temperaturas del cuerpo y del medio.

La ecuación diferencial que expresa este principio es: $T'(t) = K(T - T_0)$

Ejemplos de ecuaciones diferenciales

Ejemplo 2: La ley de Ohm establece que la tensión $e(t)$ aplicada a un circuito equivale a la suma de las caídas de tensión producidas en los diversos aparatos que lo integran. Para un circuito simple *LRC* las caídas de tensión son:

Autoinducción (*L* henrios): $Li'(t)$

Resistencia (*R* ohm): $Ri(t)$

Capacidad (*C* faradios): $\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

Al tomar como coordenada del sistema eléctrico la intensidad de corriente $i(t)$ que fluye por el circuito, de acuerdo con la ley de Ohm, resulta la ecuación integro-diferencial:

$$Li'(t)+Ri(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,dt=e(t)$$

Soluciones de una ecuación diferencial ordinaria

Se dice que la función $y = g(x)$ es solución de la ecuación $f(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ si la satisface, es decir, si introducida en ella junto con sus derivadas la transforma en una identidad.

Las soluciones se clasifican en:

Primitiva, ***solución general o haz integral*** si contiene (n) constantes arbitrarias.

En forma explícita: $y = y(x, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n)$

En forma implícita: $F(x, y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}, C_n) = 0$

Soluciones particulares o curvas integrales, son las que se obtienen de la solución general dando valores concretos a las constantes arbitrarias.

Soluciones singulares o integrales singulares son aquéllas que no pueden obtenerse de la solución general concretando las constantes.

Ejemplo 1

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Diversas formas de expresión:

Forma general: $f(x, y, y') = 0$ (primer grado en y′)

Forma diferencial: $X(x,\ y)\,dx + Y(x,\ y)\,dy = 0$

Forma normal: $y' = g(x,\ y)$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

<u>Enunciado del teorema de existencia</u>: Sea la ecuación diferencial en su forma normal, $y' = g(x,\ y)$:

"Si g(x,y) y su derivada $(\partial g / \partial y)$ *son funciones continuas en cierto entorno del punto M(a,b) existe una función, y solo una, que satisface a la ecuación diferencial y adquiere el valor y=b cuando x=a".*

Aplicando técnicas de integración se obtiene la solución general $F(x, y, C) = 0.$ Para hallar una solución particular se necesita aportar una condición inicial $y(a)=b$, que permita concretar (C).

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones de variables separables y reducibles:

El caso más sencillo, en la forma diferencial, es: $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0$

Aplicando el operador integral: $\int f(x)dx + \int g(y)dy = C$

A este caso, dividiendo por $F(x)\cdot G(y)$, se reduce la ecuación

$$f(x)G(y)\,dx + g(y)F(x)\,dy = 0 \quad \to \quad \int \frac{f(x)}{F(x)}\,dx + \int \frac{g(y)}{G(y)}\,dy = C$$

si bien es necesario investigar posibles soluciones no incluidas en la solución general, que resultan de anular $F(x)\cdot G(y)$,

Ejemplo 2

Ecuaciones de primer orden y primer grado

<u>**Ecuaciones diferenciales homogéneas**</u>: $X(x, y)dx + Y(x, y)dy = 0$

Se dice que la EDO es ***homogénea***, cuando $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ son funciones homogéneas con idéntico grado de homogeneidad (m).

Es decir, se ha de cumplir:

$$X(xt,\ yt) \;=\; t^m X(x,\ y), \quad Y(xt,\ yt) = t^m Y(x, y)$$

Si la ecuación se expresa en la forma normal,

$$y' = \frac{-X(x, y)}{Y(x, y)} \equiv f(x, y),$$

resulta que $f(x, y)$, al ser un cociente de funciones homogéneas del mismo grado, es una función homogénea de grado cero. De ahí:

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones diferenciales homogéneas:

$$y' = f(x,y) = t^0(xt, yt) = f(xt, yt) \quad \rightarrow \quad y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ecuación que se reduce a variables separables, con solución general:

$$\int \frac{dz}{g(z)-z} - \ln x = C, \quad \text{con} \;\; z = \frac{y}{x}$$

Ejemplo 3

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas:

Las ecuaciones de la forma:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

se reducen a homogéneas con la sustitución:

$$\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$$

donde (x_0, y_0) es el punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Si $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \lambda$, las rectas son paralelas (el sistema es incompatible) y la anterior transformación no es válida. En este caso

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = \lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1 \,.$$

Entonces la sustitución: $z = a_2 x + b_2 y$

la convierte en una ecuación de variables separadas, ya que:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right) = g(z)$$

$$\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\,\frac{dy}{dx} = a_2 + b_2 \cdot g(z)$$

Ejemplo 4

Ecuaciones de primer orden y primer grado

<u>Ecuaciones diferenciales exactas</u>: $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$

Se dice que la ecuación diferencial, es ***exacta*** en un cierto dominio plano D si existe una función real $U(x,y)$ que, en dicho dominio, verifica: $d[U(x,y)] = X(x,y)dx + Y(x,y)dy$

En tal caso, la ecuación se escribe $d[U(x,y)] = 0$ y su solución es:

$$d\left[U(x,y)\right] = 0 \xrightarrow{\int} U(x,y) = C$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Teorema: Si $X(x,y)$, $Y(x,y)$ y sus derivadas $(\partial Y/\partial x)$ y $(\partial X/\partial y)$, son funciones continuas en D la condición necesaria y suficiente para que la ecuación sea diferencial exacta es que se verifique $\partial Y/\partial x = \partial X/\partial y$ (igualdad de derivadas cruzadas).

$$\boxed{\exists U(x,y) : dU = Xdx + Ydy \quad \Leftrightarrow \quad \partial Y/\partial x = \partial X/\partial y}$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Condición necesaria (⇒)

Por hipótesis: $dU = Xdx + Ydy$

Por definición: $dU = (\partial U/\partial x)dx + (\partial U/\partial y)dy$

Al identificar ambas diferenciales:

$$X(x,y) = \partial U/\partial x \quad [1], \qquad Y(x,y) = \partial U/\partial y \quad [2]$$

Derivando [1] respecto a (*y*) y [2] respecto a (*x*), al aplicar el teorema de Schwarz:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Condición suficiente (⇐)

Por hipótesis: $\dfrac{\partial Y}{\partial x} = \dfrac{\partial X}{\partial y}$ [3]

Bastará probar que, de acuerdo con [3], es posible hallar $U(x,y)$ tal que: $dU = Xdx + Ydy$

Se implica que $U(x,y)$ cumpla [1] y [2]. De [1]:

$$U(x, y) = \int_a^x X(x, y)dx + \varphi(y) \qquad [4]$$

donde $\phi(y)$ es una función auxiliar que ha de cumplir [2].

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Derivando parcialmente [4] respecto de y: $\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x,y) = \int_a^x \frac{\partial X}{\partial y} dx + \varphi'(y)$

Teniendo en cuenta la hipótesis [3]:

$$Y(x,y) = \int_a^x \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \varphi'(y) = \left[Y(x,y)\right]_a^x + \varphi'(y) \rightarrow Y(x,y) = Y(x,y) - Y(a,y) + \varphi'(y)$$

$$\rightarrow \quad \varphi'(y) = Y(a,y) \quad \rightarrow \quad \varphi(y) = \int_b^y Y(a,y)dy \qquad [6]$$

Llevando [6] a [4] queda concretada $U(x,y)$:

$$U(x,y) = \int_a^x X(x,y)dx + \int_b^y Y(a,y)dy$$

Donde $M(a,b)$, es un punto arbitrario que pertenece al dominio de continuidad de $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ y puede ser fijado a efectos de facilitar el cómputo de integrales.

Ecuaciones de primer orden y primer grado

La solución general de la ecuación es:

$$\boxed{\int_a^x X(x,y)dx + \int_b^y Y(a,y)dy = C}$$

De forma opcional puede resultar práctico aplicar la fórmula equivalente que resulta de permutar las variables

$$\boxed{\int_b^y Y(x,y)dy + \int_a^x X(x,b)dx = C}$$

Ejemplo 5

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones reducibles a exactas. Teoría del factor integrante

Sea la ecuación diferencial no exacta $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ en la que supondremos que $(\partial \mathrm{Y}/\partial \mathrm{x})$ y $(\partial \mathrm{X}/\partial \mathrm{y})$ son funciones continuas en cierto dominio D.

Se dice que $z = f(x,y)$, es un ***factor integrante*** de la ecuación, si se cumple que:

$$z(x,y)X(x,y)dx + z(x,y)Y(x,y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta.

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Determinación de factores integrantes. Habrá de ser:

$$\frac{\partial(zX)}{\partial y}=\frac{\partial(zY)}{\partial x} \rightarrow X\frac{\partial z}{\partial y}+z\frac{\partial X}{\partial y}=Y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial Y}{\partial x} \Rightarrow Y\frac{\partial z}{\partial x}-X\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

Para que sea exacta

ecuación en derivadas parciales de primer orden cuya integración proporciona el conjunto de factores integrantes $z=z(x,y)$ de la ecuación considerada.

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Factores integrantes sencillos. En algunos casos, sin necesidad de resolver la ecuación en derivadas parciales, se pueden obtener factores integrantes atendiendo a la forma de la expresión diferencial $X(x,y)dx+Y(x,y)dy$. Son ejemplos de diferenciales simples los siguientes:

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{y^2}; \qquad d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2}$$

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}; \qquad d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{xy}; \qquad d\left(\ln\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{xy}$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Por ejemplo, para la sencilla ecuación $ydx - xdy = 0$ se obtienen los siguientes factores integrantes de los modelos anteriores:

$$z(x,y) = \frac{1}{y^2}; \quad \frac{-1}{x^2}; \quad \frac{\pm 1}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\pm 1}{xy}$$

Otra opción interesante es estudiar la existencia de factores integrantes que dependen de una sola de las variables. Se consideran los dos casos:

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Factores integrantes z = z(x)

Si (z) no depende de (y) entonces: $\dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv \dfrac{dz}{dx}; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

La ecuación en derivadas parciales se reduce a la ecuación ordinaria:

$$\frac{dz}{dx} = z\,\frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}, \quad \text{siempre que} \quad \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y} \equiv \phi(x)$$

Al integrar se obtiene:

$$z(x) = A\exp\int \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y}\,dx = A\exp\int \phi(x)\,dx$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Factores integrantes z = z(y)

Si (z) no depende de (x) entonces: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{dz}{dy}$

La ecuación en derivadas parciales se reduce a la ecuación ordinaria:

$$\frac{dz}{dy} = z\frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}, \quad \text{si} \quad \frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X} \equiv \varphi(y)$$

Al integrar se obtiene:

$$z(y) = A\exp\int \frac{\partial Y/\partial x - \partial X/\partial y}{X}\,dy = A\exp\int \varphi(y)\,dy$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Factores integrantes para ecuaciones homogéneas.

Si la ecuación $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$ es homogénea admite como factor integrante:

$$z(x,y) = \frac{1}{xX(x,y) + yY(x,y)}$$

Ejemplo 6

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones diferenciales lineales:

Para el caso de primer orden responden a la forma:

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

O bien dividiendo la ecuación por el coeficiente de y' [$a_0(x) \neq 0$]:

$$y' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y = \frac{f(x)}{a_0(x)} \rightarrow \boxed{y' + P(x)y = Q(x)} \quad [1]$$

Una técnica sencilla de integración consiste en hallar un factor integrante $z(x)$. Para ello se dispone la ecuación en la forma diferencial. Resulta:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0 \rightarrow \frac{\partial X/\partial y - \partial Y/\partial x}{Y} = P(x) \Rightarrow z(x) = \exp\left[\int P(x)dx\right]$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Al multiplicar [1] por el factor integrante:

$$y'\exp\left[\int P(x)dx\right]+P(x)\,y\exp\left[\int P(x)dx\right]=Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]$$

se observa que la parte izquierda de la igualdad es la derivada del producto $y\cdot\exp\left[\int P(x)dx\right]$

Al operar e integrar:

$$\left(y\exp\left[\int P(x)dx\right]\right)=\int\left[Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]\right]dx+C$$

se llega a la solución general, resuelta en (y):

$$\boxed{y=\exp\left[-\int P(x)dx\right]\left(\int\left[Q(x)\exp\left[\int P(x)dx\right]\right]dx+C\right)}$$

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Si la ecuación diferencial tiene a (x) como variable dependiente,

$$x' + P(y)x = Q(y)$$

su solución general, al permutar sus variables, es:

$$\boxed{x = \exp\left[-\int P(y)dy\right]\left(\int\left[Q(y)\exp\left[\int P(y)dy\right]\right]dy + C\right)}$$

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Sí se conoce una solución particular de la ecuación lineal,

$y' + P(x)y = Q(x)$, se precisa una sola cuadratura para llegar a la solución general.

En efecto, si $y_1(x)$ es solución: $y_1' + P(x)y_1 = Q(x)$

Restando las ecuaciones miembro a miembro e integrando:

$$y' - y_1' + (y - y_1)P(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d(y-y_1)}{dx} + (y - y_1)P(x) = 0 \quad \xrightarrow{\int}$$

$$\ln(y - y_1) = -\int P(x)dx + C \quad \rightarrow \quad (y - y_1) = A\exp\left[-\int P(x)dx\right]$$

Ejemplo 7

Ecuaciones de primer orden y primer grado

Ecuaciones reducibles a lineales:

(a) Ecuación de Bernoulli: Es de la forma: $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

Se reduce a lineal mediante:

$$y^{(1-n)} = z \xrightarrow{D} (1-n)y^{-n}y' = z' \rightarrow y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}$$

En efecto, al multiplicar la ecuación por (y^{-n}) y sustituir:

$$y^{-n}y' + P(x)y^{(1-n)} = Q(x) \rightarrow z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

resulta una ecuación lineal con solución general:

$$\boxed{z = y^{(1-n)} = \exp\left[\int (n-1)P(x)dx\right]\left(\int \left[(1-n)Q(x)\exp\left[\int (1-n)P(x)dx\right]\right]dx + C\right)}$$

Ejemplo 8