PROBLEMAS RESUELTOS

TEMA 7: EDO LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

1.- Plantear la forma de una solución particular de la siguiente ecuación diferencial:

$$y''' + y'' + y' + y = x \cdot e^{-x} - 2x + sen(x) \cdot cos(x)$$

Solución:

Se trata de una EDO lineal no homogénea con ecuación homogénea asociada de orden 3 y coeficientes constantes de forma que las soluciones fundamentales son del tipo $y_h(x) = e^{r \cdot x}$ donde r es raíz de la ecuación característica

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0 \xrightarrow{Ruffini} (r+1)\cdot(r^2+1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} r = -1 \quad \to \quad y_{h1}(x) = e^{-x} \\ r = 0 \pm i \quad \to \quad \begin{cases} y_{h2}(x) = e^{0 \cdot x} \cdot \cos(x) = \cos(x) \\ y_{h3}(x) = e^{0 \cdot x} \cdot sen(x) = sen(x) \end{cases} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores la solución general de la ecuación completa será de la forma

$$y_{SG}(x) = C_1 y_{h1}(x) + C_2 y_{h2}(x) + C_3 y_{h3}(x) + y_p(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 sen(x) + y_p(x)$$

siendo $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación completa cuya forma plantearemos atendiendo al principio de superposición de soluciones y usando el método de los coeficientes indeterminados

$$q(x) = x \cdot e^{-x} - 2x + sen(x) \cdot cos(x) = q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)$$

donde

$$q_1(x) = x \cdot e^{-x} \;\to\; y_{p1}(x) = (Ax + B) \cdot x \cdot e^{-x}$$

$$q_2(x) = -2x \;\to\; y_{p2}(x) = Cx + D$$

$$q_3(x) = sen(x) \cdot \cos(x) = \frac{1}{2} sen(2x) \;\to\; y_{p3}(x) = E\cos(2x) + Fsen(2x)$$

resultando que

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + y_{p3}(x)$$

Finalmente

$$\boxed{y_{SG}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 sen(x) + (Ax + B) \cdot x \cdot e^{-x} + (Cx + D) + E\cos(2x) + Fsen(2x)}$$

2.- Dada la ecuación diferencial

$$y''' + y'' + \frac{a}{4} y' = x + e^{-\frac{1}{2}x}$$

se pide plantear, mediante el método de coeficientes indeterminados, la forma de una solución particular para los distintos valores $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.

Solución:

Se trata de una EDO lineal no homogénea con ecuación homogénea asociada de orden 3 y coeficientes constantes de forma que las soluciones fundamentales son del tipo $y_h(x) = e^{r \cdot x}$ donde r es raíz de la ecuación característica

$$r^3 + r^2 + \frac{a}{4} r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = 0 & \rightarrow \quad y_{h1}(x) = e^{0 \cdot x} = 1 \\ r^2 + r + \frac{a}{4} = 0 \ \Leftrightarrow \ r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2} & \end{cases}$$

En función de los distintos valores de *a* se presentan los diferentes casos:

- si $a = 0$ entonces las otras dos raíces son $r = 0$ y $r = -1$ resultando que $r = 0$ es raíz real doble y $r = -1$ es raíz real simple, de forma que

$$\boxed{y_p(x) = (Ax + B) \cdot x^2 + Ce^{-\frac{1}{2}x}}$$

- si $a = 1$ entonces las otras dos raíces son $r = -1/2$ y $r = -1/2$ resultando que $r = 0$ es raíz real simple y $r = -1/2$ es raíz real doble, de forma que

$$\boxed{y_p(x) = (Ax + B) \cdot x + Cx^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}}$$

- si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces las tres raíces de la ecuación característica son simples (reales si $a < 1$ y complejas si $a > 1$), de forma que

$$\boxed{y_p(x) = (Ax + B) \cdot x + Ce^{-\frac{1}{2}x}}$$

3.- Utilizar el método de coeficientes indeterminados para encontrar una solución particular de la EDO de segundo orden dada y determinar la solución general de la misma $$y'' - 4y = Ch(x)$$

Solución:

En primer lugar obtengamos la solución general de la EDO lineal homogénea asociada, de orden 2: puesto que se trata de una ecuación con coeficientes constantes, las soluciones fundamentales serán del tipo $y_h(x) = e^{r \cdot x}$ donde r es raíz de la ecuación característica

$$r^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (r-2)\cdot(r+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = -2 & \rightarrow \quad y_{h1}(x) = e^{-2x} \\ r = 2 & \rightarrow \quad y_{h2}(x) = e^{2x} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y_H(x) = C_1 \cdot y_{h1}(x) + C_2 \cdot y_{h2}(x) = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x}$$

Atendiendo al resultado anterior separaremos el término independiente de la ecuación completa en dos resolviendo la ecuación en dos etapas y aplicando posteriormente el principio de superposición de soluciones

$$y'' - 4y = Ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

- en primer lugar, para la ecuación $\quad y'' - 4y = f_1(x) = \frac{1}{2}e^x$

planteamos una solución particular del tipo $\quad y_{p1}(x) = A \cdot e^x$

de forma que el valor de *A* será tal que satisfaga la ecuación planteada

$$y''_{p1}(x) - 4y_{p1}(x) = A \cdot e^x - 4A \cdot e^x = -3A \cdot e^x = \frac{1}{2}e^x \;\rightarrow\; A = -\frac{1}{6} \;\Longrightarrow\; y_{p1}(x) = -\frac{1}{6}e^x$$

- a continuación haremos lo propio con la ecuación $\quad y'' - 4y = f_2(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$

planteando ahora una solución particular del tipo $\quad y_{p2}(x) = B \cdot e^{-x}$

de forma que el valor de *B* será tal que satisfaga la ecuación planteada

$$y''_{p2}(x) - 4y_{p2}(x) = B \cdot e^x - 4B \cdot e^x = -3B \cdot e^x = \frac{1}{2}e^{-x} \;\rightarrow\; B = -\frac{1}{6} \;\Longrightarrow\; y_{p2}(x) = -\frac{1}{6}e^{-x}$$

Finalmente

$$y_{SG}(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 \cdot y_{h1}(x) + C_2 \cdot y_{h2}(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) =$$

$$= C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x} - \frac{e^x + e^{-x}}{6} = \boxed{C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{3}Ch(x)}$$

4.- Mediante el método de variación de parámetros encontrar una solución particular de la EDO de segundo orden dada y determinar la solución general de la misma

$$y'' + y = sec(x)$$

Solución:

Para aplicar el método de variación de parámetros primero necesitamos conocer la solución general de la EDO lineal homogénea asociada, de orden 2: puesto que se trata de una ecuación con coeficientes constantes, las soluciones fundamentales serán del tipo $y_h(x) = e^{r\cdot x}$ donde r es raíz de la ecuación característica

$$r^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0 \pm i \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y_{h1}(x) = e^{0\cdot x} \cdot \cos(x) = \cos(x) \\ y_{h2}(x) = e^{0\cdot x} \cdot sen(x) = sen(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad y_H(x) = C_1 \cdot y_{h1}(x) + C_2 \cdot y_{h2}(x) = C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot sen(x)$$

Planteamos ahora una solución particular de la ecuación completa del tipo

$$y_p(x) = L_1(x) \cdot y_{h1}(x) + L_2(x) \cdot y_{h2}(x) = L_1(x) \cdot cos(x) + L_2(x) \cdot sen(x)$$

donde $L_1'(x)$ y $L_2'(x)$ deben verificar el sistema

$$\begin{cases} L_1'(x) \cdot y_{h1}(x) + L_2'(x) \cdot y_{h2}(x) = L_1'(x) \cdot cos(x) + L_2'(x) \cdot sen(x) = 0 \\ L_1'(x) \cdot y_{h1}'(x) + L_2'(x) \cdot y_{h2}'(x) = -L_1{}'(x) \cdot sen(x) + L_2'(x) \cdot cos(x) = \sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior

$$L_2'(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad L_1'(x) = -\frac{sen(x)}{cos(x)}$$

e integrando las expresiones obtenidas

$$L_2(x) = x + A \qquad \text{y} \qquad L_1(x) = ln\left|\cos(x)\right| + B\,.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación completa sería

$$y_{SG}(x) = y_H(x) + y_p(x) = C_1 \cdot y_{h1}(x) + C_2 \cdot y_{h2}(x) + L_1(x) \cdot y_{h1}(x) + L_2(x) \cdot y_{h2}(x) =$$

$$= C_1 \cdot cos(x) + C_2 \cdot sen(x) + \left(ln\left|\cos(x)\right| + B\right) \cdot cos(x) + (x + A) \cdot sen(x) =$$

$$= \boxed{C \cdot cos(x) + K \cdot sen(x) + cos(x) \cdot \ln\left|\cos(x)\right| + x \cdot sen(x)}$$