MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

En este Capítulo, tratamos de encontrar primitivas de determinadas funciones. Recordamos que si una función f admite una primitiva, tendrá infinitas primitivas que se diferencian entre sí en una constante.

El operador integral tiene la misma propiedad de linealidad que la integral definida:

$$\int (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))\, dx = \lambda \cdot \int f(x)\, dx + \mu \cdot \int g(x)\, dx$$

1.- INTEGRALES INMEDIATAS.

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \;,\; \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;,\; \forall n \neq -1 \qquad \int (f(x))^n \cdot f'(x) dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1} + C \;,\; \forall n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \mathrm{L}|x| + C \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \mathrm{L}|f(x)| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{L}a} + C \qquad \int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\mathrm{L}a} + C$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C \qquad \int f'(x) \cdot \sin(f(x))\, dx = -\cos(f(x)) + C$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C \qquad \int f'(x) \cdot \cos(f(x))\, dx = \sin(f(x)) + C$$

$$\int \tan x\, dx = -\mathrm{L}|\cos x| + C \qquad \int f'(x) \cdot \tan(f(x))\, dx = -\mathrm{L}|\cos(f(x))| + C$$

$$\int \cot x\, dx = \mathrm{L}|\sin x| + C \qquad \int f'(x) \cdot \cot(f(x))\, dx = \mathrm{L}|\sin(f(x))| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 [f(x)]} dx = \tan[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sin^2 [f(x)]} dx = -\cot[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \arctan[f(x)] + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \qquad \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \arcsin[f(x)] + C$$

2.- CAMBIO DE VARIABLE.

Consiste en presentar la integral de manera que sea fácilmente integrable por otro método.

Si $\qquad \mathrm{I} = \int h(x)\, dx = \int f\left[g(x) \right] \cdot g'(x)\, dx$

Haciendo el cambio de variable $t = g(x)$, la integral se transforma en:

$$\mathrm{I} = \int f(t)\, dt$$

Si la primitiva de *f* es *F*, tendremos

$$\mathrm{I} = F(t) + C$$

y, teniendo en cuenta que $t = g(x)$

$$\mathrm{I} = F(g(x)) + C$$

Ejemplo:

$$\mathrm{I} = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Hacemos el cambio $t = \sqrt{x}$, con lo que la integral se transforma en:

$$\mathrm{I} = \int e^t \cdot 2\, dt = 2e^t + C$$

y, deshaciendo el cambio de variable

$$\mathrm{I} = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

3.- INTEGRACIÓN POR PARTES.

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx$$

Será de utilidad práctica si la segunda integral es más sencilla que la primera.

Ejemplo:

$$\mathrm{I} = \int x \cdot e^x\, dx$$

Considerando $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$ resulta:

$$\mathrm{I} = x \cdot e^x - \int e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

4.- INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Son integrales cuya función subintegral es el cociente de dos polinomios:

$$\mathrm{I} = \int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx\,.$$

Si el grado del polinomio del numerador es mayor o igual que el grado del polinomio del denominador, dividimos ambos polinomios

$$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$$

La integral dada queda entonces de la forma

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

El primer sumando, la integral $\int C(x)\,dx$, es inmediato, mientras que el segundo $\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$ es una integral racional donde el grado del polinomio del numerador es menor que el grado del polinomio del denominador. A continuación nos centramos en este tipo de integrales.

Lo primero que hacemos es calcular las raíces del polinomio del denominador y lo descomponemos en factores primos de la forma:

$$Q(x) = (x-x_1)^{\lambda_1}\cdot(x-x_2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_n)^{\lambda_n}\cdot\left[(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\right]^{\mu_1}\cdot\ldots\cdot\left[(x-\alpha_m)^2+\beta_m^2\right]^{\mu_m}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denotan las raíces reales y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sus multiplicidades, $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, \ldots, \alpha_m \pm i\beta_m$ denotan las raíces imaginarias, de multiplicidades respectivas $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$.

Una vez descompuesto el denominador en la forma anteriormente señalada, aplicaremos uno de los dos métodos existentes para resolver este tipo de integrales. En este curso estudiaremos únicamente *el método de las fracciones simples*.

Consideramos la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ (grado del numerador menor que el grado del denominador) y supongamos que

$$Q(x) = (x-a)\cdot(x-b)^{\lambda}\cdot\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]\cdot\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^{\mu}$$

El método consiste en descomponer el cociente en sumandos de la siguiente forma:

(1) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a}+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\lambda}{(x-b)^\lambda}+\frac{Cx+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+$$

$$+\frac{E_1x+F_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}+\frac{E_2x+F_2}{\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^2}+\ldots+\frac{E_\mu x+F_\mu}{\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^\mu}$$

Como se observa cada factor $(x-b)^\lambda$ da lugar a λ sumandos de la forma:

$$\frac{B_1}{x-b}, \frac{B_2}{(x-b)^2}, \ldots, \frac{B_\lambda}{(x-b)^\lambda}$$

Asimismo, cada factor de la forma $\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^\mu$ da lugar a μ sumandos de la forma

$$\frac{E_1x+F_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}, \frac{E_2x+F_2}{\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^2}, \ldots, \frac{E_\mu x+F_\mu}{\left[(x-\gamma)^2+\delta^2\right]^\mu}$$

Reduciendo a común denominador la expresión (1) y comparando los numeradores obtendremos los coeficientes $A, B_1, \ldots, B_\lambda, C, D, E_1, \ldots, E_\mu, F_1, \ldots, F_\mu$.

Una vez calculados los coeficientes integramos la expresión (1).

Ejemplos:

1- $I=\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$

$$x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

donde $A=-\frac{3}{2},\ B=\frac{5}{3},\ C=-\frac{1}{6}$

$$I=-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x}\,dx+\frac{5}{3}\int\frac{1}{x-1}\,dx-\frac{1}{6}\int\frac{1}{x+2}\,dx=-\frac{3}{2}\mathrm{L}|x|+\frac{5}{3}\mathrm{L}|x-1|-\frac{1}{6}\mathrm{L}|x+2|+C$$

2.- $I=\int\frac{1}{x^3+8}\,dx$

$$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$$

$$\frac{1}{x^3+8}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}$$

donde $A=\frac{1}{12},\ B=-\frac{1}{12},\ C=\frac{1}{3}$

$$I=\frac{1}{12}\int\frac{1}{x+2}\,dx-\frac{1}{12}\int\frac{x}{x^2-2x+4}\,dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\mathrm{L}|x+2|-\frac{1}{24}\int\frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2-2x+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\mathrm{L}|x+2|-\frac{1}{24}\mathrm{L}(x^2-2x+4)+\frac{1}{4}\int\frac{1}{(x-1)^2+3}\,dx$$

$$=\frac{1}{12}\mathrm{L}|x+2|-\frac{1}{24}\mathrm{L}(x^2-2x+4)+\frac{\sqrt{3}}{12}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

4.1.- <u>Caso particular</u>

Integrales del tipo $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, cuando el polinomio del denominador tiene sólo raíces complejas. En tal caso, dicho polinomio se podrá escribir como sigue:

$$ax^2+bx+c=\left(f(x)\right)^2+D$$

donde $f(x)$ es un polinomio de primer grado y $D>0$. En ese caso, el resultado de la integral vendrá dado por la función arcotangente (concretamente de un polinomio de primer grado, como se ha hecho en el ejemplo 2 anterior).

Ejemplo: Calcular $I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}$

$$2x^2+8x+20=2(x^2+4x+10)=2[(x+2)^2+6]$$

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{6+(x+2)^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{6}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+C$$

Como extensión del anterior, podemos resolver también las integrales del tipo $\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx$, donde $P(x)$ es un polinomio de primer grado.

En general, descompondremos esta integral en dos. Para ello, debemos transformar el polinomio $P(x)$ en la suma de la derivada de ax^2+bx+c y una constante:

$$P(x)=2ax+b+D$$

Así pues,

$$I=\int\frac{P(x)}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+D\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=I_1+I_2$$

Estas dos integrales son conocidas:

$$I_1=\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx=\mathrm{L}\left(ax^2+bx+c\right)+C_1$$

E $I_2=D\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}dx$ es del tipo resuelto previamente.

<u>*Ejemplo*</u>: Calcular $I=\int\frac{x+1}{x^2+4x+7}dx$

$$x^2+4x+7=(x+2)^2+3$$

$$I=\int\frac{x+1}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4-2}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx-\int\frac{dx}{x^2+4x+7}=I_1-I_2$$

$$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(x^2+4x+7\right)+C_1$$

$$I_2=\int\frac{dx}{x^2+4x+7}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+3}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C_2$$

Y, por lo tanto:

$$I=\int\frac{x+1}{x^2+4x+7}dx=\frac{1}{2}\mathrm{L}\left(x^2+4x+7\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C$$

5.- INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS.

5.1.- <u>Integrales del tipo:</u>

$$\int\sin(ax)\cdot\cos(bx)\,dx \qquad \int\sin(ax)\cdot\sin(bx)\,dx \qquad \int\cos(ax)\cdot\cos(bx)\,dx$$

Habrá que transformar este tipo de integrales para obtener integrales trigonométricas con un único argumento.

Teniendo en cuenta que

$$\sin(\alpha+\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta + cos\alpha \cdot sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sin\alpha \cdot sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sin\alpha \cdot sin\beta$$

se deduce que

$$2\,sin\,\alpha \cdot cos\,\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$
$$2\,cos\,\alpha\,cos\,\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$
$$2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

igualdades que facilitan la resolución de dichas integrales, ya que se transforman en la suma o diferencia de dos integrales inmediatas.

Ejemplo: $I = \int \sin 6x \cdot \cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 10x + \sin 2x\right) dx = -\frac{\cos 10x}{20} - \frac{\cos 2x}{4} + C$

5.2.- Integrales del tipo:

$$\int \tan^n x\, dx \qquad\qquad \int \cot^n x\, dx \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Para $n=1$, son inmediatas. Si $n \geq 2$, se separa en potencias de la tangente o de la cotangente y se utilizan las expresiones:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$
$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Ejemplo:

$$I = \int \tan^5 x\, dx = \int \tan^3 x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^3 x \cdot (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \tan^3 x \cdot \sec^2 x\, dx - \int \tan^3 x\, dx = I_1 - I_2 = I_1 - I_2$$

$$I_1 = \int \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\tan^4 x}{4} + K_1$$

$$I_2 = \int \tan^3 x\, dx = \int \tan^2 x \cdot \tan x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \cdot \tan x\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \tan x\, dx - \int \tan x\, dx = \frac{\tan^2 x}{2} - \mathrm{L}\left|\cos x\right| + K_2$$

Por tanto:

$$I = \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 (x)}{2} - \mathrm{L}\left|\cos x\right| + C$$

5.3.- Integrales del tipo:

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

• Caso m ó n impar positivo.

El cambio a realizar será $\cos x = t$ o $\sin x = t$

Ejemplo:

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx$$

Haciendo el cambio $\sin x = t$

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cos x\, dx = \int \frac{1-t^2}{t^2}\, dt = \int \frac{1}{t^2}\, dt - \int dt = -\frac{1}{t} - t + K = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + K$$

• Caso m y n pares positivos.

Se utilizan las siguientes igualdades:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Ejemplo:

$$I = \int \sin^4 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x))\, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{4} \int \cos^2(2x)\, dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{1}{4} \int \frac{1+\cos(4x)}{2}\, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin(4x)}{32} + C = \frac{3x}{8} - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} + C$$

5.4.- <u>Integrales del tipo:</u>

$$\int R\left(\sin^m x, \cos^n x\right) dx \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

• Caso m y n pares.

El cambio a realizar será: $\tan x = t$

(La integral de partida se transforma en una integral racional).

Necesitaremos las siguientes expresiones:

- ✓ $t = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = t \cdot \cos x \Rightarrow \sin^2 x = t^2 \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot (1 - \sin^2 x)$
- ✓ $\sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$
- ✓ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$

Ejemplo:

$$I=\int\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int\frac{t^2}{(t^2+2)\cdot(t^2+1)}\,dt=\sqrt{2}\cdot\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)-x+C$$

• Caso m ó n impar.

El cambio a realizar será: $\tan\left(\frac{x}{2}\right)=t$

(la integral de partida se transforma en una integral racional).

Para este caso tenemos

$$\sin x=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2\sin(x/2)\cdot\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)}=\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo:

$$I=\int\frac{1+\cos x}{1+\sin x}\,dx=\int\frac{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int\frac{4}{(1+t)^2\cdot(1+t^2)}\,dt$$

$$=-\frac{2}{1+t}+2\mathrm{L}\left|1+t\right|-\mathrm{L}(1+t^2)+C$$

$$=-\frac{2}{1+\tan(x/2)}+\mathrm{L}\frac{(1+\tan(x/2))^2}{1+\tan^2(x/2)}+C$$

6.- INTEGRALES IRRACIONALES.

Para resolverlas, lo primero que hay que conseguir es que aparezca una única base irracional en el numerador de la expresión.

6.1.- Funciones que contiene sólo potencias fraccionarias de x.

$$\int R(x,x^{m/n},\ldots,x^{t/s})\,dx$$

Se transforma la integral irracional en integral racional, mediante el cambio $x=t^k$ donde k es el mínimo común múltiplo de los denominadores de los exponentes.

Ejemplo: Calcular $I=\int\frac{x^{1/2}}{x^{3/4}+1}\,dx$

En este caso el cambio de variable $x=t^4$, nos da la siguiente integral:

$$I=4\int\frac{t^5}{t^3+1}\,dt=\frac{4}{3}(x^{3/4}-\mathrm{L}(x^{3/4}+1))+C$$

Nota: Si la base irracional es distinta de *x*, se realiza un cambio de variable para conseguir que sea *x*.

6.2.- Integrales del siguiente tipo:

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$$

Si aparece $\sqrt{a^2 - x^2}$ se realiza el cambio $x = a \cdot \sin t$ ó $x = a \cdot \cos t$

Ejemplo:

I = $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$

Realizando el cambio de variable $x = a \cdot \sin t$ la integral se transforma en la integral trigonométrica siguiente:

I = $\displaystyle a^2 \int |\cos t| \cdot \cos t\, dt$

Esta integral se resuelve según los métodos vistos anteriormente.

6.3.- Integrales del siguiente tipo:

a) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Si $a < 0 \;\Rightarrow$ tratamos de obtener una expresión del tipo $ax^2 + bx + c = D - \left(f(x)\right)^2$, donde $f(x)$ es un polinomio de primer grado y $D > 0$. En tal caso, la solución de la integral vendrá dada por la función arcoseno.

b) $\displaystyle I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$ donde $P(x)$ es un polinomio de primer grado.

En general, descompondremos esta integral en dos. Para ello, debemos transformar el polinomio $P(x)$ en la suma de la derivada de $ax^2 + bx + c$ y una constante:

$$P(x) = 2ax + b + D$$

Así pues,

$$I = \int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx + D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = I_1 + I_2$$

Estas dos integrales son conocidas:

$$I_1 = \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C_1$$

E $\displaystyle I_2 = D\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$ es del tipo resuelto en el apartado anterior.

Ejemplo: Calcular $\displaystyle I = \int \frac{x + 3}{\sqrt{3 + 4x - 4x^2}}\, dx$

$$I=\int \frac{x+3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx=-\frac{1}{8}\int \frac{-8x+4-28}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx=-\frac{1}{8}\int \frac{-8x+4}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx-\frac{1}{8}\int \frac{-28}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$$

Y resolvemos cada una de estas integrales:

$$I_1=-\frac{1}{8}\int \frac{-8x+4}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx=-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+C_1$$

$$I_2=-\frac{1}{8}\int \frac{-28}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx=\frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{4-(2x-1)^2}}=\frac{7}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2}}=\frac{7}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)+C_2$$

Por lo tanto:

$$I=I_1+I_2=-\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Calcular las siguientes integrales:

INTEGRALES INMEDIATAS O POR CAMBIO DE VARIABLE

1.- $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\sqrt{(1-2x^2)^3} + C$

2.- $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{L}(e^{2x}+2) + C$

3.- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\cdot e^{\sqrt{x}} + C$

4.- $\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x) + C$

5.- $\int \frac{dx}{\tan(x/5)} = 5\cdot\mathrm{L}\left|\sin(x/5)\right| + C$

6.- $\int \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = x + \sqrt{x^2+4} + C$

7.- $\int \frac{dx}{e^x\cdot\sqrt{1-e^{-2x}}} = -\arcsin(e^{-x}) + C$

8.- $\int \frac{x\,dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2}\arctan\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + C \qquad (a \neq 0)$

9.- $\int \frac{dx}{\sqrt{4+\sqrt{4+x}}} = 4\sqrt{4+\sqrt{4+x}}\left[\frac{1}{3}\left(4+\sqrt{4+x}\right)-4\right] + C$

10.- $\int a^x\cdot\cos(a^x)dx = \frac{\sin(a^x)}{\mathrm{L}(a)} + C$

11.- $\int \frac{\cos[\arctan(x)]}{1+x^2}dx = \sin[\arctan(x)] + C$

12.- $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\sin(x)} + C$

13.- $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^4}{3\sqrt{x}}dx = \frac{2}{15}(\sqrt{x}+2)^5 + C$

14.- $\int e^{\mathrm{L}(x^2)}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}e^{\mathrm{L}(x^2)} + C$

15.- $\int \frac{4}{1-3x}\,dx = -\frac{4}{3}\mathrm{L}\left|1-3x\right| + C$

INTEGRACIÓN POR PARTES

16.- $\int 2x\cdot\cos(3x)dx=\frac{2}{3}x\cdot\sin(3x)+\frac{2}{9}\cos(3x)+C$

17.- $\int \arctan(x/2)dx=x\cdot\arctan(x/2)-\mathrm{L}(x^2+4)+C$

18.- $\int e^{-x}\cdot\sin(3x)dx=-\frac{e^{-x}}{10}\cdot[3\cos(3x)+\sin(3x)]+C$

19.- $\int x\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)dx=-\frac{1}{4}x\cdot\cos(2x)+\frac{1}{8}\sin(2x)+C$

20.- $\int x^3\cdot e^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}(x^2+1)\cdot e^{-x^2}+C$

21.- $\int x^n\cdot\mathrm{L}(x)dx=\frac{x^{n+1}}{(n+1)}\cdot\mathrm{L}(x)-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C \qquad n\neq -1$

22.- $\int\frac{x\,dx}{\sin^2(x)}=-x\cdot\cot(x)+\mathrm{L}\left|\sin(x)\right|+C$

INTEGRALES DE FUNCIONES RACIONALES

23.- $\int\frac{2x^3-7x^2+9x-5}{x^4-x^3}dx=-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+4\cdot\frac{1}{x}+3\cdot\mathrm{L}\left|x\right|-\mathrm{L}\left|x-1\right|+C$

24.- $\int\frac{8x^2+6x+6}{x^3-3x^2+7x-5}dx=5\cdot\mathrm{L}\left|x-1\right|+\frac{3}{2}\cdot\mathrm{L}\left[x^2-2x+5\right]+11\cdot\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$

25.- $\int\frac{x^4}{x^4-1}dx=x+\frac{1}{4}\cdot\mathrm{L}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\cdot\arctan(x)+C$

INTEGRALES DE FUNCIONES IRRACIONALES

26.- $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=2\cdot\sqrt{x}-3\cdot\sqrt[3]{x}+6\cdot\sqrt[6]{x}-6\cdot\mathrm{L}\left(\sqrt[6]{x}+1\right)+C$

27.- $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx=\frac{6x^{7/6}}{7}-x+\frac{6x^{5/6}}{5}-\frac{3x^{2/3}}{2}+4x^{1/2}-6x^{1/3}+12x^{1/6}-12\mathrm{L}(x^{1/6}+1)+C$

28.- $\int\frac{x+2}{\sqrt{3+2x-x^2}}dx=-\sqrt{3+2x-x^2}+3\cdot\arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)+C$

INTEGRALES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

29.- $\int\tan^4(x)dx=\frac{\tan^3(x)}{3}-\tan(x)+x+C$

30.- $\int\sin^3(x)dx=\frac{1}{3}\cdot\cos^3(x)-\cos(x)+C$

31.- $\int\sin^2(2x)\cdot\cos^2(2x)dx=\frac{x}{8}-\frac{\sin(8x)}{64}+C$

Calcular las siguientes integrales:

32.- $\int \cos(x)\cdot\sin(2x)dx = -\frac{2}{3}\cos^3(x)+C$

33.- $\int \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}dx = 2\cdot\sqrt{1+\sin^2(x)}+C$

34.- $\int \frac{x(x+1)}{(1+x^2)(x-1)}dx = \arctan(x)+\mathrm{L}\left|x-1\right|+C$

35.- $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin(x^2)+k$

36.- $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2x}{3}\right)+C$

37.- $\int \sin(x)\cdot\sin(2x)dx = \frac{2}{3}\sin^3(x)+C$

38.- $\int \frac{x^2}{e^x}dx = -\frac{x^2+2x+2}{e^x}+C$

39.- $\int \frac{dx}{\cos^2(x)\cdot\left[1+\tan(x)\right]^2} = -\frac{1}{1+\tan(x)}+C$

40.- $\int \cos^3(x)\cdot\sqrt{\sin(x)}dx = 2\cdot\left[\sin(x)\right]^{3/2}\cdot\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\sin^2(x)\right]+C$

41.- $\int \frac{x-4}{x^3-x^2-x-2}dx = -\frac{2}{7}\cdot\mathrm{L}\left|x-2\right|+\frac{1}{7}\cdot\mathrm{L}(x^2+x+1)+\frac{8\sqrt{3}}{7}\cdot\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

42.- $\int \frac{dx}{x\left[\mathrm{L}^2(x)+1\right]} = \arctan[\mathrm{L}(x)]+C$

43.- $\int \frac{dx}{\tan(x)+2\sec(x)} = \mathrm{L}\left[\sin(x)+2\right]+C$

44.- $\int \frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^4}dx = -\frac{1}{6}\frac{1}{\left(x^2+2x\right)^3}+C$

45.- $\int x\cdot\sin(1-x^2)dx = \frac{1}{2}\cdot\cos(1-x^2)+C$

46.- $\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\cdot\sin\left(\sqrt{x}\right)+C$

47.- $\int \cos(x)\cdot\mathrm{L}[\sin(x)]dx = \sin(x)\cdot[\mathrm{L}[\sin(x)]-1]+C$

48.- $\int \cos^4(x)\cdot\sin^3(x)dx = \frac{1}{7}\cdot\cos^7(x)-\frac{1}{5}\cdot\cos^5(x)+C$

49.- $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx = \frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \mathrm{L}(\sqrt[4]{x^3}+1)\right)+C$

50.- $\int x^2 \cdot \mathrm{L}(2x)dx = \frac{x^3}{9}\cdot[3\cdot \mathrm{L}(2x)-1]+C$

51.- $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \arctan(e^x)+C$

52.- $\int \arcsin x dx = x\cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$

53.- $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right)+C$

54.- $\int \frac{\mathrm{L}(x)}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}\cdot[2\mathrm{L}(x)-4]+C$

55.- $\int e^{-(x+e^{-x})}\cdot dx = e^{-e^{-x}}+C$

56.- $\int x^3\cdot \arctan(x)dx = \frac{1}{4}(x^4-1)\cdot \arctan(x) - \frac{x^3}{12}+\frac{x}{4}+C$

57.- $\int \frac{x}{2+\sqrt{1+x}}dx = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(1+x)^3} - 2(1+x)+6\cdot\sqrt{1+x} - 12\cdot \mathrm{L}\left(2+\sqrt{1+x}\right)+C$

58.- $\int \sin^3(x)\cdot\sqrt{1-\cos(x)}dx = [1-\cos(x)]^{5/2}\cdot\left[\frac{4}{5}-\frac{2}{7}[1-\cos(x)]\right]+C$

59.- $\int \frac{5x-2}{x^3+2x^2-4x-8}dx = -\frac{3}{x+2}+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{L}\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

60.- $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{\mathrm{L}(x)}\cdot\cos^2\left(\sqrt{\mathrm{L}(x)}\right)} = 2\cdot\tan\left(\sqrt{\mathrm{L}(x)}\right)+C$

61.- $\int \sin^2(x)\cdot\cos^5(x)dx = \frac{1}{3}\sin^3(x)-\frac{2}{5}\sin^5(x)+\frac{1}{7}\sin^7(x)+C$

62.- $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}dx = \frac{2}{27}\sqrt[4]{x^9} - \frac{2}{13}\sqrt[12]{x^{13}}+C$

63.- $\int \sin^4(x)dx = \frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{1}{32}\sin(4x)+C$

64.- $\int \sin^3(x)\cdot\cos^3(x)dx = \frac{1}{4}\sin^4(x)-\frac{1}{6}\sin^6(x)+C$

65.- $\int \frac{10}{(e^x-2)\cdot(e^{2x}+1)}dx = -5x+\mathrm{L}\left|e^x-2\right|+2\cdot \mathrm{L}(e^{2x}+1)-2\cdot\arctan(e^x)+C$