INTEGRAL DEFINIDA SEGÚN RIEMANN

1.- Calcular las siguientes integrales utilizando las sustituciones indicadas:

a) $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}$, $\quad z = \frac{1}{t}$

Solución: $\ln(3/2)$

b) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{3/2}}$, $\quad x-1 = \sqrt{3}\cdot tg(z)$

Solución: $1/6$

2.- Comprobar los siguientes resultados:

a) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\cdot ln^3(x)} = \frac{3}{8}$

b) $\int_{0}^{1} \frac{x^{1/4}}{1+x^{1/2}}\,dx = \frac{3\pi-8}{3}$

c) $\int_{0}^{2\pi} [1-\cos(\varphi)]\,d\varphi = 3\pi$

d) $\int_{1}^{2} \frac{10x^2\,dx}{(x^3+1)^2} = \frac{35}{27}$

e) $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{848}{105}$

f) $\int_{0}^{2} x\sqrt{4x^2+9}\,dx = \frac{49}{6}$

3.- Calcular las siguientes integrales impropias convergentes:

a) $\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)\,dx$

Solución: $\frac{a}{a^2+b^2}$

b) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

Solución: 4

c) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

Solución: $\sqrt{2}-1$

d) $\int_{0}^{\infty} \frac{dy}{(a^2+y^2)^2}$

Solución: $\frac{\pi}{4a^3}$

e) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Solución: π

f) $\int_{0}^{\infty} \frac{dz}{z^2-3z+2}$

Solución: $-ln(2)$

4.- Demostrar que las siguientes integrales son divergentes:

a) $\int_{-2}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$

b) $\int_{1}^{\infty} \frac{x^2}{4x^2+25}\,dx$

c) $\int_{3}^{6} \frac{ln(x)}{(x-3)^2}\,dx$

5.- Calcular la longitud del arco de la curva $y = ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ entre $x = 2$ y $x = 4$.

Solución: $-2 + ln\dfrac{e^8 - 1}{e^8 + 1}$

6.- Calcular el área limitada por la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$, su recta tangente en el punto $P(2, -5)$ y el eje de ordenadas.

Solución: $8/3$

7.- Calcular el área limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 8$ y $x^2 = 2y$.

Solución: $2\pi + 4/3$

8.- Calcular el volumen del sólido engendrado por la circunferencia $x^2 + (y-8)^2 = 4$ al girar alrededor del eje de abscisas.

Solución: $64\pi^2$

9.- Considérese el dominio plano del primer cuadrante definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + 2 \geq y \\ x + y \leq 4 \end{cases}.$$

Calcular

a) el área y el perímetro del dominio
b) el volumen del sólido obtenido al girar dicho dominio alrededor del eje *OX*.

Soluciones: a) $A = 41/6$, $L = 6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5}/2 + [ln(2+\sqrt{5})]/4$, b) $V = 218\pi/15$

10.- Calcular el área del dominio plano delimitado por las siguientes curvas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4y + 3 \leq 0 \end{cases}.$$

Solución: $\pi/2 - 1$

11.- Calcular el volumen del sólido generado al girar sobre el eje *OX* el dominio plano definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \\ y^2 \leq x - 1 \end{cases}.$$

Solución: $\left(\dfrac{89}{12} - \dfrac{17\sqrt{17}}{12}\right)\pi$

12.- Hallar el área limitada por la curva $(y-1)^2 - 2(2+x) = 0$ y la recta que une los puntos $A(0,-1)$ y $B(6,5)$.

Solución: 18

13.- Calcular $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{1}{x^2 - 4}\,dx$

a) utilizando el método de los trapecios para *n=6*
b) utilizando el método de Simpson para *n=3*
c) el valor exacto de la integral.

Soluciones: a) -0.491462, b) -0.48683, c) -0.486478

14.- Calcular $\displaystyle\int_1^2 x \cdot ln(x)\,dx$

a) utilizando el método de los trapecios para *n=6*
b) a través del cálculo de una función primitiva

Soluciones: a) 0.637898, b) $-3/4+2ln(2)$

15.- Calcular $\int_0^{\pi/2} sen(x^2)\,dx$ mediante el método de Simpson para *n=4*

Soluciones: 0.828206

16.- Calcular $\int_1^2 \cos(x^3)\,dx$

a) utilizando el método de los trapecios para *n=10*
b) utilizando el método de Simpson para *n=5*

Soluciones: a) -0.0842748, b) -0.0750789

17.- Calcular las siguientes integrales impropias convergentes:

a) $\int_0^{\infty} \frac{5}{5+x^2}\,dx$

Solución: $\sqrt{5}\pi/2$

b) $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

Solución: $3(1-2\sqrt[3]{2})/2$

18.- Considérese el dominio plano definido analíticamente por el conjunto

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, (x-2)^2+y^2\geq 1, y\leq 1, x\geq 0, x\leq 2, y\geq 0\right\}.$$

Calcular utilizando la integral definida

a) el área del dominio plano *D*
b) el volumen del sólido obtenido al girar dicho dominio alrededor del eje de abscisas.

Soluciones: a) $(8-\pi)/4$, b) $4\pi/3$

19.- Considérese el dominio plano *D* delimitado por las curvas

$$\begin{cases} y^2\leq 4x \\ y\geq 2x-4 \end{cases}.$$

Calcular utilizando la integral definida

a) el área del dominio plano *D*
(Sugerencia: utilizar *y* como variable de integración)
b) el perímetro del dominio *D*
(Sugerencia: utilizar *y* como variable de integración)
c) el volumen del sólido engendrado por el primer cuadrante del dominio plano al girar alrededor del eje de abscisas
(Sugerencia: utilizar *x* como variable de integración)

Soluciones: a) 9, b) $5\sqrt{5}+\sqrt{2}+ln(4+2\sqrt{5})-ln(-2+2\sqrt{2})$, c) $64\pi/3$