

Lenguajes, Computación y Sistemas Inteligentes

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Escuela de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU)

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

2º curso

Curso académico: 2023-2024

Grupo 16

Tema 2: Sistemas inteligentes

0,600 puntos

Solución

Modelo de examen

Índice

2.1	Algoritmo de las k-CNF (0,300 puntos)	1
2.1.1	Enunciado	1
2.1.2	Solución	2
2.1.3	Comentarios	3
2.2	Algoritmo de las k-DNF (0,300 puntos)	4
2.2.1	Enunciado	4
2.2.2	Solución	4
2.2.3	Comentarios	6

2.1 Algoritmo de las k-CNF (0,300 puntos)

2.1.1 Enunciado

Supongamos que el usuario tiene en mente una fórmula proposicional g que es una 2-CNF y en la cual pueden aparecer las variables proposicionales x_1 , x_2 y x_3 . Por tanto, $k = 2$ y $n = 3$.

Indicar, paso a paso, la interacción que se desarrollará entre el algoritmo y el usuario hasta que el algoritmo construya una fórmula proposicional h que sea equivalente a g . Durante el proceso de construcción de h , las valoraciones que —a modo de contraejemplos— el usuario dará al algoritmo son las siguientes:

- $v_1 = (F, F, T)$
- $v_2 = (F, T, T)$
- $v_3 = (T, T, F)$
- $v_4 = (T, F, F)$

Cada vez que el usuario presenta una propuesta h_j que no es equivalente a la fórmula objetivo g , el usuario presenta un contraejemplo v_{j+1} .

En las valoraciones, se ha escrito T y F en vez de *True* y *False*.

2.1.2 Solución

A continuación se muestra el diálogo entre el algoritmo (A) y el usuario (U). Se escribirá *T* y *F* en vez de *True* y *False*:

A: ¿Cuál es el valor de k y de n ?

U: $k = 2$ y $n = 3$

A: Propuesta inicial:

$$h_0 = () \wedge (x_1) \wedge (\neg x_1) \wedge (x_2) \wedge (\neg x_2) \wedge (x_3) \wedge (\neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

¿ $h_0 \leftrightarrow g$?

U: **No.** $v_1 = (F, F, T)$ hace que g sea *True* y h_0 sea *False*.

A: (Se eliminan las cláusulas de h_0 que son *False* con v_1 para obtener una fórmula h_1 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_1)

$$h_0 = \cancel{() \wedge (x_1) \wedge (\neg x_1) \wedge (x_2) \wedge (\neg x_2) \wedge (x_3) \wedge (\neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$h_1 = (\neg x_1) \wedge (\neg x_2) \wedge (x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

¿ $h_1 \leftrightarrow g$?

U: **No.** $v_2 = (F, T, T)$ hace que g sea *True* y h_1 sea *False*.

A: (Se eliminan las cláusulas de h_1 que son *False* con v_2 para obtener una fórmula h_2 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_2)

$$h_1 = (\neg x_1) \wedge (\neg x_2) \wedge (x_3) \wedge \cancel{(x_1 \vee \neg x_2)} \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge \cancel{(\neg x_2 \vee x_3)} \wedge \cancel{(\neg x_2 \vee \neg x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$h_2 = (\neg x_1) \wedge (x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$$

¿ $h_2 \leftrightarrow g$?

U: **No.** $v_3 = (T, T, F)$ hace que g sea *True* y h_2 sea *False*.

A: (Se eliminan las cláusulas de h_2 que son *False* con v_3 para obtener una fórmula h_3 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_3)

$$h_2 = \frac{(\neg x_1) \wedge (\neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)}{(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$h_3 = (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

¿ $h_3 \leftrightarrow g$?

U: **No.** $v_4 = (T, F, F)$ hace que g sea *True* y h_3 sea *False*.

A: (Se eliminan las cláusulas de h_3 que son *False* con v_4 para obtener una fórmula h_4 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_4)

$$h_3 = \frac{(x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)}{(\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$h_4 = (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3)$$

¿ $h_4 \leftrightarrow g$?

U: **Sí.**

2.1.3 Comentarios

Nótese que el valor de h_0 es *False* porque tiene la forma $() \wedge \dots$, donde el valor de la cláusula vacía $()$ es *False*. Por equivalencias de la lógica, tenemos que $False \wedge \gamma \equiv False$ para cualquier fórmula lógica γ . Además de la cláusula vacía, tenemos subexpresiones como $(x_1) \wedge (\neg x_1)$ y, puesto que se cumple $\delta \wedge \neg \delta \equiv False$ para cualquier fórmula lógica δ , se puede justificar que h_0 es *False* también por esas subexpresiones.

2.2 Algoritmo de las k-DNF (0,300 puntos)

2.2.1 Enunciado

Supongamos que el usuario tiene en mente una fórmula proposicional g que es una 2-DNF y en la cual pueden aparecer las variables proposicionales x_1, x_2 y x_3 . Por tanto, $k = 2$ y $n = 3$.

Indicar, paso a paso, la interacción que se desarrollará entre el algoritmo y el usuario hasta que el algoritmo construya una fórmula proposicional h que sea equivalente a g . Durante el proceso de construcción de h , las valoraciones que —a modo de contraejemplos— el usuario dará al algoritmo son las siguientes:

- $v_1 = (F, F, T)$
- $v_2 = (F, T, T)$
- $v_3 = (T, T, F)$
- $v_4 = (T, F, F)$

Cada vez que el usuario presenta una propuesta h_j que no es equivalente a la fórmula objetivo g , el usuario presenta un contraejemplo v_{j+1} .

En las valoraciones, se ha escrito T y F en vez de *True* y *False*.

2.2.2 Solución

A continuación se muestra el diálogo entre el algoritmo (A) y el usuario (U). Se escribirá T y F en vez de *True* y *False*:

A: ¿Cuál es el valor de k y de n ?

U: $k = 2$ y $n = 3$

A: Propuesta inicial.

$$h_0 = () \vee (x_1) \vee (\neg x_1) \vee (x_2) \vee (\neg x_2) \vee (x_3) \vee (\neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)$$

¿ $h_0 \leftrightarrow g$?

U: **No**. $v_1 = (F, F, T)$ hace que g sea *False* y h_0 sea *True*.

A: (Se eliminan los términos de h_0 que son *True* con v_1 para obtener una fórmula h_1 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_1)

$$h_0 = \cancel{()} \vee \cancel{(x_1)} \vee \cancel{(\neg x_1)} \vee (x_2) \vee \cancel{(\neg x_2)} \vee \cancel{(x_3)} \vee \cancel{(\neg x_3)} \vee \cancel{(x_1 \wedge x_2)} \vee \cancel{(x_1 \wedge \neg x_2)} \vee (x_1 \wedge x_3) \vee \cancel{(x_1 \wedge \neg x_3)} \vee \cancel{(\neg x_1 \wedge x_2)} \vee \cancel{(\neg x_1 \wedge \neg x_2)} \vee \cancel{(\neg x_1 \wedge x_3)} \vee \cancel{(\neg x_1 \wedge \neg x_3)} \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee \cancel{(\neg x_2 \wedge x_3)} \vee \cancel{(\neg x_2 \wedge \neg x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$\begin{aligned}
 h_1 = & (x_1) \vee (x_2) \vee (\neg x_3) \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$\text{¿}h_1 \leftrightarrow g\text{?}$

U: **No**. $v_2 = (F, T, T)$ hace que g sea *False* y h_1 sea *True*.

A: (Se eliminan los términos de h_1 que son *True* con v_2 para obtener una fórmula h_2 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_2)

$$\begin{aligned}
 h_1 = & (x_1) \vee \cancel{(x_2)} \vee (\neg x_3) \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & \cancel{(\neg x_1 \wedge x_2)} \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & \cancel{(x_2 \wedge x_3)} \vee (x_2 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la nueva propuesta es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 h_2 = & (x_1) \vee (\neg x_3) \vee \\
 & (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (x_2 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$\text{¿}h_2 \leftrightarrow g\text{?}$

U: **No**. $v_3 = (T, T, F)$ hace que g sea *False* y h_2 sea *True*.

A: (Se eliminan los términos de h_2 que son *True* con v_3 para obtener una fórmula h_3 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_3)

$$\begin{aligned}
 h_2 = & \cancel{(x_1)} \vee \cancel{(\neg x_3)} \vee \\
 & \cancel{(x_1 \wedge x_2)} \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee \cancel{(x_1 \wedge \neg x_3)} \vee \\
 & \cancel{(\neg x_1 \wedge \neg x_3)} \vee \\
 & \cancel{(x_2 \wedge \neg x_3)} \vee \\
 & (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la nueva propuesta es:

$$\begin{aligned}
 h_3 = & (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee \\
 & (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee \\
 & (\neg x_2 \wedge \neg x_3)
 \end{aligned}$$

$\text{¿}h_3 \leftrightarrow g\text{?}$

U: **No**. $v_4 = (T, F, F)$ hace que g sea *False* y h_3 sea *True*.

A: (Se eliminan los términos de h_3 que son *True* con v_4 para obtener una fórmula h_4 que tenga el mismo valor que g para la valoración v_4)

$$h_3 = \frac{(x_1 \wedge \cancel{\neg x_2}) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_2 \wedge \cancel{\neg x_3})}{(\neg x_1 \wedge \neg x_3)}$$

Por lo tanto, la nueva hipótesis es:

$$h_4 = (x_1 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_3)$$

¿ $h_4 \leftrightarrow g$?

U: **Sí.**

2.2.3 Comentarios

Nótese que el valor de h_0 es *True* porque tiene la forma $() \vee \dots$, donde el valor del término vacío $()$ es *True*. Por equivalencias de la lógica, tenemos que $\text{True} \vee \gamma \equiv \text{True}$ para cualquier fórmula lógica γ . Además del término vacío, tenemos subexpresiones como $(x_1) \vee (\neg x_1)$ y, puesto que se cumple $\delta \vee \neg \delta \equiv \text{True}$ para cualquier fórmula lógica δ , se puede justificar que h_0 es *True* también por esas subexpresiones.