eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

Lenguajes, Computación y Sistemas Inteligentes

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información

Escuela de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU)

2º curso

Curso académico 2023-2024

Tema 3: Lenguajes Soluciones

José Gaintzarain Ibarmia

Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos

Última actualización: 04 - 09 - 2023

Índice general

Tema 3

Lenguajes

3.11. Soluciones

3.11.1 Soluciones: ejercicios sobre comprensión de definiciones formales de lenguajes

Dar algunas palabras que pertenecen y algunas palabras que no pertenecen a los siguientes lenguajes definidos sobre el alfabeto $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$:

1. $H_1 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists x(x \in \{\alpha\varepsilon|\alpha \in \mathbb{A}\}^2 \wedge w = x \cdot x^R \cdot x)\}$

    - Palabras que pertenecen:
      Son palabras que tienen la forma $x \cdot x^R \cdot x$ donde la palabra x ha de estar formada por dos símbolos ya que pertenece al lenguaje $\{\alpha\varepsilon|\alpha \in \mathbb{A}\}^2$. Por tanto, cogiendo palabras de dos símbolos, podemos generar palabras del lenguaje H_1.
        - Si cogemos $x = ab\varepsilon$ entonces $w = x \cdot x^R \cdot x = ab\varepsilon \cdot (ab\varepsilon)^R \cdot ab\varepsilon = abbaab\varepsilon$ es una palabra de H_1.
        - Si cogemos $x = aa\varepsilon$ entonces $w = x \cdot x^R \cdot x = aa\varepsilon \cdot (aa\varepsilon)^R \cdot aa\varepsilon = aaaaaa\varepsilon$ es una palabra de H_1.
        - Si cogemos $x = cb\varepsilon$ entonces $w = x \cdot x^R \cdot x = cb\varepsilon \cdot (cb\varepsilon)^R \cdot cb\varepsilon = cbbccb\varepsilon$ es una palabra de H_1.
    - Palabras que no pertenecen:
      Cualquier palabra que no tenga longitud 6: ε, $ab\varepsilon$, $abababab\varepsilon$, etc. Además, también las palabras de longitud 6 que no se ajusten al formato indicado. Por ejemplo: $ababab\varepsilon$.

2. $H_2 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge w \cdot w = w \cdot w \cdot w\}$
   La única palabra w que cumple $w \cdot w = w \cdot w \cdot w$ es ε ya que $\varepsilon \cdot v = v$ para cualquier palabra v y, por tanto, $\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Si cogemos cualquier otra palabra, por ejemplo $ab\varepsilon$, tenemos que $ab\varepsilon \cdot ab\varepsilon \cdot ab\varepsilon \neq ab\varepsilon \cdot ab\varepsilon$, es decir, $ababab\varepsilon \neq abab\varepsilon$.

3. $H_3 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge u \cdot v \cdot w = w \cdot v \cdot u)\}$
   En H_3 tenemos aquellas palabras w para las cuales existen dos palabras u y v (que pueden

ser iguales o distintas) que hacen cumplir $u \cdot v \cdot w = w \cdot v \cdot u$. Por ejemplo, si w es $aa\varepsilon$, entonces con $u = aa\varepsilon$ y $v = cb\varepsilon$ se cumple $u \cdot v \cdot w = w \cdot v \cdot u$ ya que $\underbrace{aa\varepsilon}_{u}\underbrace{cb\varepsilon}_{v}\underbrace{aa\varepsilon}_{w}$ es igual a $\underbrace{aa\varepsilon}_{w}\underbrace{cb\varepsilon}_{v}\underbrace{aa\varepsilon}_{u}$. Por tanto, para cada palabra w de $\mathbb{A}^*$, basta con coger u igual que w y cualquier v para que la condición se cumpla. Esto quiere decir que todas las palabras de $\mathbb{A}^*$ cumplen la condición y por consiguiente $H_3 = \mathbb{A}^*$. Al cumplirse $H_3 = \mathbb{A}^*$, no hay ninguna palabra que no pertenezca a H_3.

4. $H_4 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w \cdot w \cdot w = u \cdot u)\}$
   Como la longitud de $u \cdot u$ siempre será par (al multiplicar cualquier número por dos siempre se obtiene un número par), hay que elegir palabras w cuya longitud sea par para que $w \cdot w \cdot w$ tenga también longitud par. Además, la longitud de $w \cdot w \cdot w$ será también múltiplo de 3 y, por tanto, la longitud de $u \cdot u$ ha de ser múltiplo de 3. Después de obtener esta información, vemos que podemos elegir como w aquellas palabras de longitud par formados por símbolos iguales: ε, $aa\varepsilon$, $bb\varepsilon$, $cc\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$, etc. Por otro lado, las palabras de longitud impar y las palabras de longitud par pero formadas por símbolos distintos no pertenecen a H_4. Por ejemplo: $a\varepsilon$, $aba\varepsilon$, $ab\varepsilon$, etc.

3.11.2 Soluciones: Ejercicios sobre definición formal de lenguajes

Todos los lenguajes están definidos sobre el alfabeto $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$:

1. L_1 – Lenguaje formado por las palabras $aa\varepsilon$, $bb\varepsilon$ y $ac\varepsilon$.

$$L_1 = \{aa\varepsilon, bb\varepsilon, ac\varepsilon\}$$

   L_1 es un lenguaje finito. Si en un lenguaje finito hay muy pocas palabras o las palabras no cumplen ninguna propiedad fácilmente describible, lo habitual es definir el conjunto dando todas las palabras.

2. L_2 – Lenguaje formado por las palabras ε, $bbc\varepsilon$ y $acc\varepsilon$.

$$L_2 = \{\varepsilon, bbc\varepsilon, acc\varepsilon\}$$

   L_2 es también un lenguaje finito. Además de contener muy pocas palabras, esas palabras no cumplen ninguna propiedad fácilmente describible, por tanto se ha definido el conjunto dando todas las palabras.

3. L_3 – Lenguaje formado por las palabras que contienen exactamente cuatro símbolos (palabras de longitud cuatro). Por ejemplo, las palabras $aaaa\varepsilon$, $bcab\varepsilon$ y $cbbb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_3 mientras que ε, $a\varepsilon$, $bc\varepsilon$ y $bcbcba\varepsilon$ no.

$$L_3 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| = 4\}$$

También L_3 es un lenguaje finito, pero en este caso las palabras cumplen una propiedad fácilmente describible. Por tanto, se ha optado por definir el lenguaje utilizando esa propiedad. Al ser finito, la otra opción sería dar todas las palabras del lenguaje, pero para ello habría que generar todas las combinaciones de cuatro, con los tres símbolos de A. Serían 27 combinaciones. Pero si el alfabeto tuviese más símbolos, habría más combinaciones y no sería muy apropiado el generar todas las combinaciones.

4. L_4 – Lenguaje formado por las palabras que contienen exactamente cuatro símbolos, de los cuales exactamente uno es a. Por ejemplo, las palabras $abcb\varepsilon$, $ccac\varepsilon$ y $cbca\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_4 mientras que ε, $abc\varepsilon$, $bc\varepsilon$, $aabc\varepsilon$ y $cccbb\varepsilon$ no.

$$L_4 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| = 4 \wedge |w|_a = 1\}$$

L_4 es un sublenguaje de L_3 y por tanto es finito, pero como las palabras cumplen una propiedad fácilmente describible, se ha optado por definir el lenguaje utilizando esa propiedad.

Otra opción:

$$L_4 = L_3 \cap \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a = 1\}$$

5. L_5 – Lenguaje formado por las palabras que no contienen ningún símbolo repetido. Por ejemplo, las palabras ε, $a\varepsilon$, $ac\varepsilon$ y $acb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_5 mientras que $aa\varepsilon$, $bcac\varepsilon$ y $accaaa\varepsilon$ no.

$$L_5 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall\alpha(\alpha \in \mathbb{A} \rightarrow |w|_\alpha \leq 1)\}$$

L_5 es un lenguaje finito. Como las palabras cumplen una propiedad fácilmente describible, se ha optado por definir el lenguaje utilizando esa propiedad. En este caso los símbolos no tienen porqué aparecer en una palabra, pero si aparecen solo aparecen una vez. Otra opción será la siguiente:

$$L_5 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a \leq 1 \wedge |w|_b \leq 1 \wedge |w|_c \leq 1\}$$

Pero si el alfabeto $\mathbb{A}$ tuviera muchos símbolos, habrá que ponerlos todos. Por tanto, la primera opción es mucho mejor porque vale para cualquier alfabeto $\mathbb{A}$, independientemente del número de símbolos que tenga $\mathbb{A}$.

Como el lenguaje es finito, se puede definir dando todas sus palabras:

$$L_5 = \{\varepsilon, a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon, ab\varepsilon, ac\varepsilon, ba\varepsilon, bc\varepsilon, ca\varepsilon, cb\varepsilon, abc\varepsilon, acb\varepsilon, bac\varepsilon, bca\varepsilon, cab\varepsilon, cba\varepsilon\}$$

Si el alfabeto $\mathbb{A}$ tuviese muchos símbolos, habría que generar muchas combinaciones. Por tanto, la primera opción es la mejor.

6. L_6 (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_6 formado por las palabras que tienen por lo menos dos símbolos distintos. Por ejemplo, las palabras $aab\varepsilon$, $accccababab\varepsilon$ y $cccbc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_6 mientras que $aaa\varepsilon$, $b\varepsilon$ y ε no.

$$\begin{aligned} L_6 \;=\; \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \;& ((|w|_a \geq 1 \wedge |w|_b \geq 1) \vee \\ & (|w|_a \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1) \vee \\ & (|w|_b \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1))\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_6 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists \alpha, \beta(\alpha \in \mathbb{A} \wedge \beta \in \mathbb{A} \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

Esta segunda opción es más general porque no depende directamente o explícitamente de los símbolos de $\mathbb{A}$.

Otra opción:

$$L_6 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall \alpha(\alpha \in \mathbb{A} \rightarrow |w|_\alpha < |w|)\}$$

Otra opción:

$$L_6 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists \alpha(\alpha \in \mathbb{A} \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\alpha < |w|)\}$$

7. L_7 (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_7 formado por las palabras que no tienen dos o más símbolos distintos, es decir, cada palabra del lenguaje está formado por cero o más repeticiones del mismo símbolo. Por ejemplo, ε, $bbb\varepsilon$, $aa\varepsilon$ y $cccc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_7 mientras que $ac\varepsilon$, $baaa\varepsilon$ y $aaccb\varepsilon$ no.

$$L_7 = \overline{L_6}$$

Otra opción:

$$L_7 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| = |w|_a \vee |w| = |w|_b \vee |w| = |w|_c)\}$$

Otra opción:

$$L_7 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists \alpha(\alpha \in \mathbb{A} \wedge |w| = |w|_\alpha)\}$$

Otra opción:

$$L_7 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists \alpha, \beta(\alpha \in \mathbb{A} \wedge \beta \in \mathbb{A} \wedge \alpha \neq \beta \wedge |w|_\alpha \geq 1 \wedge |w|_\beta \geq 1)\}$$

Otra opción:

$$L_7 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists \alpha, k(\alpha \in \mathbb{A} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge w = (\alpha\varepsilon)^k\}$$

Ahí no se puede poner α^k. Es necesario poner $(\alpha\varepsilon)^k$ porque la exponenciación es una operación definida sobre palabras y α no es una palabra, es un símbolo. En cambio, $\alpha\varepsilon$ es una palabra.

Otra opción:

$$L_7 = \{a\varepsilon\}^* \cup \{b\varepsilon\}^* \cup \{c\varepsilon\}^*$$

8. L_8 (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_8 formado por las palabras que tienen longitud par. Por ejemplo, ε, $ab\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$ y $cabb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_8 mientras que $a\varepsilon$, $bab\varepsilon$ y $accaa\varepsilon$ no.

$$L_8 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0\}$$

Otra opción:

$$L_8 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |v| \wedge w = u \cdot v)\}$$

En esa definición se indica que las apalabras del lenguaje L_8 se pueden partir en dos subpalabras de la misma longitud.

9. L_9 (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_9 formado por las palabras que tienen longitud impar. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $bab\varepsilon$ y $accaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_9 mientras que ε, $ab\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$ y $cabb\varepsilon$ no.

$$L_9 = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 \neq 0\}$$

Otra opción:

$$L_9 = \overline{L_8}$$

Otra opción:

$$L_9 = \{a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon\} \circ L_8$$

Otra opción:

$$L_9 = \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ L_8$$

Otra opción:

$$L_9 = L_8 \circ \{a\varepsilon, b\varepsilon, c\varepsilon\}$$

Otra opción:

$$L_9 = L_8 \circ \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}$$

Otra opción:

$$L_9 = \mathbb{A}^* \setminus L_8$$

10. L_{10} (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{10} formado por las palabras que no tienen dos o más símbolos distintos y cuya longitud es par. Por ejemplo, ε, $bbbb\varepsilon$, $aa\varepsilon$ y $cccc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{10} mientras que $baaa\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $aaccb\varepsilon$ no.

$$L_{10} = L_7 \cap L_8$$

Otra opción:

$$L_{10} = \overline{L_6} \cap L_8$$

Otra opción:

$$L_{10} = L_7 \cap \overline{L_9}$$

Otra opción:

$$L_{10} = (\mathbb{A}^* \setminus L_6) \cap L_8$$

Otra opción:

$$L_{10} = (\mathbb{A}^* \setminus L_6) \setminus \overline{L_8}$$

Otra opción:

$$L_{10} = \{aa\varepsilon\}^* \cup \{bb\varepsilon\}^* \cup \{cc\varepsilon\}^*$$

11. L_{11} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{11} formado por las palabras que empiezan con el símbolo a. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $abcc\varepsilon$, $abaa\varepsilon$ y $acb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{11} mientras que ε, $bc\varepsilon$ y $cbab\varepsilon$ no.

$$L_{11} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge w(1) = a\}$$

Otra opción:

$$L_{11} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u)\}$$

Otra opción:

$$L_{11} \quad = \quad \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*$$

12. L_{12} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{12} formado por las palabras que no empiezan con el símbolo a. Por ejemplo, ε, $bc\varepsilon$ y $cbab\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{12} mientras que $a\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $abcc\varepsilon$, $abaa\varepsilon$ y $acb\varepsilon$ no.

$$L_{12} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| = 0 \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{12} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (w = \varepsilon \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{12} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| \geq 1 \rightarrow w(1) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{12} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u)\}$$

Otra opción:

$$L_{12} = \overline{L_{11}}$$

Otra opción:

$$L_{12} \quad = \quad \mathbb{A}^* \setminus L_{11}$$

Otra opción:

$$L_{12} \quad = \quad \{\varepsilon\} \; \cup \; (\{b\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \; \cup \; (\{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

Otra opción:

$$L_{12} \quad = \quad \{\varepsilon\} \; \cup \; (\{b\varepsilon, c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

13. L_{13} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{13} formado por las palabras que terminan con el símbolo a. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $ccca\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $abaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{13} mientras que ε, $aab\varepsilon$, $b\varepsilon$ y $ccc\varepsilon$ no.

$$L_{13} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge w(|w|) = a\}$$

Otra opción:

$$L_{13} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot a\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{13} = (L_{11})^R$$

Otra opción:

$$L_{13} \quad = \quad \mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\}$$

14. L_{14} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{14} formado por las palabras que no terminan con el símbolo a. Por ejemplo, ε, $c\varepsilon$, $ccb\varepsilon$, $aac\varepsilon$ y $abac\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{14} mientras que $a\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $baa\varepsilon$ y $acbaaa\varepsilon$ no.

$$L_{14} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| = 0 \vee (|w| \geq 1 \wedge w(|w|) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{14} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (w = \varepsilon \vee (|w| \geq 1 \wedge w(|w|) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{14} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| \geq 1 \rightarrow w(|w|) \neq a)\}$$

Otra opción:

$$L_{14} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot a\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{14} = \overline{L_{13}}$$

Otra opción:

$$L_{14} \quad = \quad \{\varepsilon\} \cup (\mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\}) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\})$$

Otra opción:

$$L_{14} \quad = \quad \{\varepsilon\} \cup (\mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon, c\varepsilon\})$$

15. L_{15} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{15} formado por las palabras que empiezan con el símbolo a y terminan con el símbolo a. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $abba\varepsilon$ y $acaaabba\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{15} mientras que ε, $c\varepsilon$, $ab\varepsilon$, $bbc\varepsilon$ y $ccaa\varepsilon$ no.

$$L_{15} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = a\}$$

Otra opción:

$$L_{15} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = a) \vee \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u \cdot a\varepsilon))\}$$

Otra opción:

$$L_{15} = L_{11} \cap L_{13}$$

Otra opción:

$$L_{15} = \{a\varepsilon\} \cup \ (L_{11} \circ L_{13})$$

El lenguaje $L_{11} \circ L_{13}$ no contiene la palabra $a\varepsilon$ que sí pertenece a L_{15}.

Otra opción:

$$L_{15} = \{a\varepsilon\} \cup \ (\{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\})$$

16. L_{16} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{16} formado por las palabras que no empiezan ni terminan con el símbolo a. Por ejemplo, ε, $b\varepsilon$, $baac\varepsilon$, $ccc\varepsilon$ y $ccaaabac\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{16} mientras que $a\varepsilon$, $abb\varepsilon$, $abba\varepsilon$ y $caa\varepsilon$ no.

$$L_{16} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((|w| = 0) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) \neq a \wedge w(|w|) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{16} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = \varepsilon) \vee (|w| \geq 1 \wedge w(1) \neq a \wedge w(|w|) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{16} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u) \wedge \neg\exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge w = v \cdot a\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{16} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w| \geq 1 \rightarrow (w(1) \neq a \wedge w(|w|) \neq a))\}$$

Otra opción:

$$L_{16} = L_{12} \cap L_{14}$$

Otra opción:

$$L_{16} = L_{12} \circ L_{14}$$

Otra opción:

$$L_{16} = (\mathbb{A}^* \setminus L_{11}) \setminus L_{13}$$

17. L_{17} – Dar la definición formal del lenguaje L_{17} formado por palabras de longitud impar y cuyo símbolo central sea a. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $ababc\varepsilon$ y $ccaabba\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{17} mientras que ε, $b\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $abc\varepsilon$ y $abcc\varepsilon$ no.

$$L_{17} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \text{ mod } 2 \neq 0 \wedge w((|w| \text{ div } 2) + 1) = a\}$$

Otra posibilidad:

$$L_{17} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |v| \wedge w = u \cdot a\varepsilon \cdot v)\}$$

En este caso, indicamos que cualquier palabra de L_{17} se puede dividir en tres trozos donde el del medio es una a y los otros dos trozos tienen la misma longitud. Por tanto, aunque no se indique expresamente que la longitud de las palabras w sea impar, al decir que u y v tienen la misma logitud, sabemos que $|u| + |v| + 1$ es impar ya que $|u| + |v|$ es par. Como caso particular, la palabra $a\varepsilon$ partenece al lenguaje y en ese caso u y v serán ε, puesto que $\varepsilon \cdot a\varepsilon \cdot \varepsilon = a\varepsilon$.

18. L_{18} – Dar la definición formal del lenguaje L_{18} formado por las palabras que terminan en b. Por ejemplo, $b\varepsilon$, $aab\varepsilon$, $bbb\varepsilon$ y $bacb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{18} mientras que ε, $c\varepsilon$, $ba\varepsilon$, $ccc\varepsilon$ y $abbbc\varepsilon$ no.

$$L_{18} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge w(|w|) = b\}$$

Otra opción:

$$L_{18} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{18} = \mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\}$$

En esta tercera opción se define L_{18} como la concatenación de los lenguajes $\mathbb{A}^*$ y $\{b\varepsilon\}$.

19. L_{19} – Dar la definición formal del lenguaje L_{19} formado por las palabras que empiezan por a y terminan en b. Por ejemplo, $ab\varepsilon$, $aaacb\varepsilon$ y $abcab\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{19} mientras que ε, $a\varepsilon$, $ca\varepsilon$, $bca\varepsilon$ y $bbbcb\varepsilon$ no.

$$L_{19} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 2 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b\}$$

Otra opción:

$$L_{19} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{19} = L_{11} \circ L_{18}$$

Otra opción:

$$L_{19} = L_{11} \cap L_{18}$$

Otra opción:

$$L_{19} = \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\}$$

20. L_{20} – Dar la definición formal del lenguaje L_{20} formado por las palabras que empiezan por a o terminan en b. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $b\varepsilon$, $ab\varepsilon$, $ac\varepsilon$, $cb\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $aacb\varepsilon$ y $ccb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{20} mientras que ε, $c\varepsilon$, $cca\varepsilon$ y $baac\varepsilon$ no.

$$L_{20} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge ((w(1) = a) \vee (w(|w|) = b))\}$$

Otra opción:

$$L_{20} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = a\varepsilon \cdot u) \vee (w = u \cdot b\varepsilon)))\}$$

Otra opción:

$$L_{20} = L_{11} \cup L_{18}$$

Otra opción:

$$L_{20} = (\{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\})$$

21. L_{21} – Dar la definición formal del lenguaje L_{21} formado por las palabras que empiezan por a pero que no terminan en b. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $ac\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $abbc\varepsilon$ y $abbba\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{21} mientras que ε, $b\varepsilon$, $ab\varepsilon$, $ccb\varepsilon$ y $cacb\varepsilon$ no.

$$L_{21} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) \neq b)\}$$

Otra opción:

$$L_{21} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u(u \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u) \wedge \neg\exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge w = v \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{21} = \{a\varepsilon\} \cup (\{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon, c\varepsilon\})$$

Otra opción:

$$L_{21} = L_{11} \setminus L_{18}$$

Otra opción:

$$L_{21} = L_{11} \cap \overline{L_{18}}$$

22. L_{22} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{22} formado por las palabras que contienen más a-s que b-s. Por ejemplo, $a\varepsilon$, $acc\varepsilon$, $baac\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{22} mientras que ε, $ab\varepsilon$, $bbac\varepsilon$, $bbb\varepsilon$ y $cccc\varepsilon$ no.

$$L_{22} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a > |w|_b\}$$

23. L_{23} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{23} formado por las palabras que contienen un número par de a-s. Por ejemplo, ε, $b\varepsilon$, $aa\varepsilon$, $baab\varepsilon$, $caba\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$ y $ccc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{23} mientras que $a\varepsilon$, $bac\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $ccab\varepsilon$ no.

$$L_{23} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0\}$$

24. L_{24} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{24} formado por las palabras que no contienen más a-s que b-s. Por ejemplo, ε, $ab\varepsilon$, $ccc\varepsilon$, $bc\varepsilon$ y $bacc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{24} mientras que $a\varepsilon$, $aba\varepsilon$, $ca\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ no.

$$L_{24} = \overline{L_{22}}$$

Otra opción:

$$L_{24} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a \leq |w|_b\}$$

25. L_{25} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{25} formado por las palabras que contienen más a-s que b-s y cuyo número de a-s es par. Por ejemplo, $aa\varepsilon$, $caba\varepsilon$ y $aaaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{25} mientras que ε, $b\varepsilon$, $aaab\varepsilon$, $ccb\varepsilon$ y $acc\varepsilon$ no.

$$L_{25} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a \bmod 2 = 0 \wedge |w|_a > |w|_b\}$$

Otra opción:

$$L_{25} = L_{22} \cap L_{23}$$

26. L_{26} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{26} formado por las palabras que no contienen ni b-s ni c-s. Por ejemplo, ε, $a\varepsilon$, $aa\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{26} mientras que $b\varepsilon$, $abca\varepsilon$, $ccc\varepsilon$ y $abb\varepsilon$ no.

$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w|) \rightarrow w(k) = a)\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall \alpha((\alpha \in \mathbb{A} \wedge \alpha \neq a) \rightarrow |w|_\alpha = 0)\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| = |w|_a\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge$
$((w = u \cdot b\varepsilon \cdot v) \vee (w = u \cdot c\varepsilon \cdot v)))\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u, \alpha, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge \alpha \in \mathbb{A} \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge \alpha \neq a \wedge w = u \cdot \alpha\varepsilon \cdot v)\}$
$L_{26} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge w = (a\varepsilon)^k)\}$

27. L_{27} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{27} formado por las palabras que no contienen ni a-s ni c-s. Por ejemplo, ε, $b\varepsilon$, $bb\varepsilon$ y $bbbb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{27} mientras que $c\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $ac\varepsilon$, $bac\varepsilon$ y $bcc\varepsilon$ no.

$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a = 0 \wedge |w|_c = 0\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w|) \rightarrow w(k) = b)\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall \alpha((\alpha \in \mathbb{A} \wedge \alpha \neq b) \rightarrow |w|_\alpha = 0)\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| = |w|_b\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge$
$((w = u \cdot a\varepsilon \cdot v) \vee (w = u \cdot c\varepsilon \cdot v)))\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u, \alpha, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge \alpha \in \mathbb{A} \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge \alpha \neq b \wedge w = u \cdot \alpha\varepsilon \cdot v)\}$
$L_{27} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge w = (b\varepsilon)^k)\}$

28. L_{28} – Dar la definición formal del lenguaje L_{28} formado por las palabras que no contienen ninguna c y en las que todas las apariciones de a (si hay alguna a) están seguidas en la izquierda y todas las apariciones de b (si hay alguna b) están seguidas en la derecha. Por ejemplo, ε, $aab\varepsilon$, $aaabbbb\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $bb\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{28} mientras que $caa\varepsilon$, $abcb\varepsilon$, $bbaaa\varepsilon$ y $ccc\varepsilon$ no.

En este lenguaje tenemos palabras del estilo de $aaabbbbb\varepsilon$ y $aaaab\varepsilon$ donde no aparece ninguna c y las a's están en la izquierda y las b's en la derecha. Pero también están palabras como $bbbb\varepsilon$, $aa\varepsilon$ y ε ya que no contienen el símbolo c, todas las a's (si hay alguna) están en la izquierda y todas las b's (si hay alguna) están en la derecha.

Este lenguaje podría ser definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_{28} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(&k \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq k \leq |w| \wedge \\ &\forall j((j \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq j \leq k) \to w(j) = a) \wedge \\ &\forall \ell((\ell \in \mathbb{N} \wedge k+1 \leq \ell \leq |w|) \to w(\ell) = b))\} \end{aligned}$$

k es la posición de la última a y $k+1$ es la posición de la primera b. Si no hay ninguna a, entonces k vale 0. Si no hay ninguna b, entonces $k = |w|$. Mediante la variable j decimos que todas las posiciones comprendidas entre 1 y k contienen una a. Si k es 0, es decir, si no hay ninguna a, el dominio de la fórmula universal $\forall j((j \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq j \leq k) \to w(j) = a)$ es vacío y por tanto esa fórmula universal se cumple. Por otro lado, mediante la variable ℓ decimos que todas las posiciones comprendidas entre $k+1$ y $|w|$ contienen una b. Si k es $|w|$, es decir, si no hay ninguna b, el dominio de la fórmula universal $\forall \ell((\ell \in \mathbb{N} \wedge k+1 \leq \ell \leq |w|) \to w(\ell) = b)$ es vacío y por tanto esa fórmula universal se cumple.

Otra manera alternativa de definir el lenguaje L_{28} sería la siguiente:

$$L_{28} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge w = u \cdot v)\}$$

En este caso se indica que toda palabra w de L_{28} puede ser dividida en dos palabras u y v de tal forma que todos los elementos de la pababra u son a's y todos los elementos de la palabra v son b's. Si w no contiene a's entonces u será la palabra vacía ε. De la misma forma, si w no contiene b's entonces v será la palabra vacía ε.

Una tercera manera de definir L_{28} es utilizando los lenguajes L_{26} y L_{27} y la concatenación:

$$L_{28} = L_{26} \circ L_{27}$$

Por tanto, L_{28} contiene las palabras que se obtienen concatenando palabras que solo tienen a's con palabras que solo tienen b's, pudiendo éstas ser vacías. En particular, palabras de la forma $aaa\varepsilon$ están en L_{28} y se obtienen concatenando la palabra $aaa\varepsilon$ de L_{26} con la palabra vacía ε que pertenece a L_{27}. Ocurre lo mismo con palabras de la forma $bbb\varepsilon$ ya que se obtienen concatenando la palabra vacía ε (que pertenece a L_{26}) con la palabra $bbb\varepsilon$ de L_{27}.

Una cuarta opción para definir el lenguaje L_{28} sería la siguiente:

$$L_{28} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists j, k(j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge w = (a\varepsilon)^j \cdot (b\varepsilon)^k)\}$$

Otra opción:

$$L_{28} = \{a\varepsilon\}^*\{b\varepsilon\}^*$$

29. L_{29} (0,200 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{29} formado por las palabras que no contienen ninguna c y donde todas las a-s (si hay a-s) están juntas (en el lado izquierdo o en el lado derecho) y todas las b-s (si hay b-s) están también juntas. Por ejemplo, ε, $aabbb\varepsilon$, $baaa\varepsilon$, $bbb\varepsilon$ y $aaaa\varepsilon$ son palabras de L_{29} mientras que $aabaa\varepsilon$, $aaaccbb\varepsilon$ y $abaaa\varepsilon$ no son palabras de L_{29}.

$$\begin{array}{l} L_{29} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge \\ \qquad ((w = u \cdot v) \vee (w = v \cdot u)))\} \end{array}$$

Otra opción:

$$L_{29} = (L_{26} \circ L_{27}) \cup (L_{27} \circ L_{26})$$

Otra opción para definir el lenguaje L_{29} sería la siguiente:

$$L_{29} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists j, k(j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge ((w = (a\varepsilon)^j \cdot (b\varepsilon)^k) \vee (w = (b\varepsilon)^k \cdot (a\varepsilon)^j)))\}$$

Otra opción:

$$L_{29} = (\{a\varepsilon\}^* \circ \{b\varepsilon\}^*) \cup (\{b\varepsilon\}^* \circ \{a\varepsilon\}^*)$$

30. L_{30} (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{30} formado por las palabras que no contienen ninguna c, tienen el mismo número de a-s que de b's y donde todas las a-s (si hay a-s) están juntas (en el lado izquierdo) y todas las b-s (si hay b-s) están también juntas (en el lado derecho). Por ejemplo, ε, $ab\varepsilon$, $aabb\varepsilon$ y $aaabbb\varepsilon$ son palabras de L_{30} mientras que $aabbb\varepsilon$, $aaacbb\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $bbaa\varepsilon$ no son palabras de L_{30}.

$$\begin{array}{l} L_{30} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge \\ \qquad |u| = |v| \wedge w = u \cdot v)\} \end{array}$$

Otra opción:

$$L_{30} = (L_{26} \circ L_{27}) \cap \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a = |w|_b\}$$

Otra opción:

$$\begin{array}{ll} L_{30} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* & \wedge |w| \, mod \, 2 = 0 \\ & \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \, div \, 2) \rightarrow w(k) = a) \\ & \wedge \forall j((j \in \mathbb{N} \wedge (|w| \, div \, 2) + 1 \leq j \leq |w|) \rightarrow w(j) = b)\} \end{array}$$

31. L_{31} (0,125 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{31} formado por las palabras donde todas las a-s (si hay a-s) están juntas (en el lado izquierdo), todas las b-s están también juntas (en el centro) y todas las c-s están también juntas (en el lado derecho). Adicionalmente, el número de b's ha de ser mayor que el de a's y el número de c's ha de ser mayor que el de b's. Por ejemplo, $bccc\varepsilon$, $abbccc\varepsilon$, $aabbbcccccc\varepsilon$ y $bbcccc\varepsilon$ son palabras de L_{31} mientras que ε, $aabbb\varepsilon$, $aaacbb\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $ccc\varepsilon$ y $bbaa\varepsilon$ no son palabras de L_{31}.

$$\begin{aligned} L_{31} &= \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v, x(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge x \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_a \wedge \\ &\qquad |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |u| < |v| \wedge |v| < |x| \wedge w = u \cdot v \cdot x)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{31} &= \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists j, k, \ell(j \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N} \wedge \ell \in \mathbb{N} \wedge \\ &\qquad 0 \leq j < k < \ell \wedge w = (a\varepsilon)^j \cdot (b\varepsilon)^k \cdot (c\varepsilon)^\ell)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{31} &= \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a < |w|_b < |w|_c \wedge \\ &\qquad \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w|_a) \to w(k) = a) \wedge \\ &\qquad \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge (|w|_a + 1) \leq k \leq (|w|_a + |w|_b)) \to w(k) = b) \wedge \\ &\qquad \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge (|w|_a + |w|_b + 1) \leq k \leq |w|) \to w(k) = c)\} \end{aligned}$$

32. L_{32} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{32} formado por las palabras en las que el número de a-s coincide con la suma del número de b-s y c-s. Por ejemplo, las palabras ε, $aabc\varepsilon$, $acccaa\varepsilon$ y $cabaca\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{32} mientras que $aaa\varepsilon$, $b\varepsilon$ y $accb\varepsilon$ no.

$$L_{32} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a = |w|_b + |w|_c\}$$

33. L_{33} (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{33} formado por las palabras en las que después de una a siempre hay al menos dos b-s. Por ejemplo, las palabras ε, $bcbbcabb\varepsilon$, $abbbabbabbc\varepsilon$ y $cccc\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{33} mientras que $baaa\varepsilon$, $ab\varepsilon$ y $aaccb\varepsilon$ no.

$$\begin{aligned} L_{33} &= \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \to \\ &\qquad (k \leq |w| - 2 \wedge w(k+1) = b \wedge w(k+2) = b))\} \end{aligned}$$

34. L_{34} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{34} formado por las palabras que no contienen ni b-s ni c-s y el número de a-s es par. Por ejemplo, las palabras ε, $aaaa\varepsilon$ y $aa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{34} mientras que $baaa\varepsilon$, $bb\varepsilon$, $cbbb\varepsilon$, $c\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $aaccb\varepsilon$ no.

$$L_{34} = L_{23} \cap L_{26}$$

Otra opción:

$$L_{34} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0 \wedge |w|_a \bmod 2 = 0\}$$

Otra opción:

$$L_{34} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge w = (a\varepsilon)^k)\}$$

Otra opción:

$$L_{34} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w|) \rightarrow w(k) = a)\}$$

Otra opción:

$$L_{34} = \{aa\varepsilon\}^*$$

35. L_{35} – Dar la definición formal del lenguaje L_{35} formado por las palabras que cumplen alguna (por lo menos una) de las siguientes dos condiciones:

    - no contienen ninguna b ni ninguna c
    - el número de a's es par.

    Por ejemplo, las palabras ε, $aaa\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$, $abca\varepsilon$, $bb\varepsilon$ y $aa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{35} mientras que $baaa\varepsilon$, $bab\varepsilon$, $cbbbaaa\varepsilon$, $ca\varepsilon$, $aaca\varepsilon$ y $aaccba\varepsilon$ no.

    $$L_{35} \quad = \quad L_{23} \cup L_{26}$$

    Otra opción:

    $$L_{35} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((|w|_b = 0 \wedge |w|_c = 0) \vee (|w|_a \bmod 2 = 0))\}$$

    Otra opción:

    $$L_{35} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((|w|_a \bmod 2 = 0) \vee (|w| = |w|_a))\}$$

    Otra opción:

    $$L_{35} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge ((|w|_a \bmod 2 = 0) \vee \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge w = (a\varepsilon)^k))\}$$

36. L_{36} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{36} formado por las palabras que contienen por lo menos una a y una c. Por ejemplo, las palabras $ca\varepsilon$, $aabbbbaabc\varepsilon$ y $ccccaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{36} mientras que ε, $baaa\varepsilon$, $bb\varepsilon$, $cbbb\varepsilon$, $c\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ no.

$$L_{36} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a \geq 1 \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Otra opción:

$$L_{36} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot a\varepsilon \cdot v) \wedge \\ \exists x, z(x \in \mathbb{A}^* \wedge z \in \mathbb{A}^* \wedge w = x \cdot c\varepsilon \cdot z)\}$$

Otra opción:

$$L_{36} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 2 \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge w(k) = a) \wedge \\ \exists \ell(\ell \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \ell \leq |w| \wedge w(\ell) = c)\}$$

Otra opción:

$$L_{36} = (\mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cap (\mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

37. L_{37} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{37} formado por las palabras que contienen al menos una aparición de la subpalabra $ac\varepsilon$ o la subpalabra $ca\varepsilon$. Por ejemplo, las palabras $ca\varepsilon$, $acabbbbccaac\varepsilon$, $abaccb\varepsilon$ y $acaccbaac\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{37} mientras que ε, $cbaaa\varepsilon$, $bba\varepsilon$, $cbbab\varepsilon$, $bbb\varepsilon$, $c\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ no.

$$L_{37} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (\exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot ac\varepsilon \cdot v) \vee \\ \exists x, z(x \in \mathbb{A}^* \wedge z \in \mathbb{A}^* \wedge w = x \cdot ca\varepsilon \cdot z))\}$$

Otra opción:

$$L_{37} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge \\ ((w = u \cdot ac\varepsilon \cdot v) \vee (w = u \cdot ca\varepsilon \cdot v)))\}$$

Otra opción:

$$L_{37} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge ((w(k) = a \wedge w(k+1) = c) \vee \\ (w(k) = c \wedge w(k+1) = a)))\}$$

Otra opción:

$$L_{37} = (\mathbb{A}^* \circ \{ac\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{ca\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

Otra opción:

$$L_{37} = (\mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\} \circ \{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\} \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

38. L_{38} (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{38} formado por las palabras en las que a y c nunca aparecen juntos ni como ac ni como ca. Por ejemplo, las palabras ε, $cbaaa\varepsilon$, $bcba\varepsilon$, $cbbb\varepsilon$, $c\varepsilon$ y $aaa\varepsilon$ pertenecen al lenguaje L_{38} mientras que $ca\varepsilon$, $aabbbbaac\varepsilon$ y $ccccaa\varepsilon$ no.

$$L_{38} = \overline{L_{37}}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{38} = \{w \mid \; & w \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a) \rightarrow w(k+1) \neq c) \wedge \\ & \forall \ell((\ell \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \ell \leq |w| - 1 \wedge w(\ell) = c) \rightarrow w(\ell+1) \neq a)\} \end{aligned}$$

39. L_{39} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{39} formado por las palabras que contienen el mismo número de a-s que de b-s. Por ejemplo, $aabacbcb\varepsilon$, $ccc\varepsilon$, ε, $aaabbb\varepsilon$, $abab\varepsilon$ y $bccacccc\varepsilon$ pertenecen a L_{39} mientras que $b\varepsilon$, $ca\varepsilon$, $aabbbbca\varepsilon$ y $ccccaa\varepsilon$ no.

$$L_{39} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_a = |w|_b\}$$

40. L_{40} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{40} formado por las palabras que empiezan por a, terminan en b y contienen el mismo número de a-s que de b-s. Por ejemplo, $aabacbcb\varepsilon$, $acb\varepsilon$, $aababb\varepsilon$ y $accbbcaab\varepsilon$ pertenecen a L_{40}. En cambio, $abba\varepsilon$ no pertenece a L_{40} porque, aunque el número de a's y b's es el mismo, la palabra no acaba en b.

$$L_{40} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 2 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b \wedge |w|_a = |w|_b\}$$

Otra opción:

$$L_{40} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge |v|_a = |v|_b \wedge w = a\varepsilon \cdot v \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{40} = L_{11} \cap L_{18} \cap L_{39}$$

41. L_{41} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{41} formado por las palabras que contienen la subpalabra $aa\varepsilon$. Por ejemplo, $aaaaa\varepsilon$, $aabacbcb\varepsilon$, $acaaab\varepsilon$, $cbaabaab\varepsilon$ y $accbaaaab\varepsilon$ pertenecen a L_{41} mientras que ε, $b\varepsilon$, $ca\varepsilon$, $abbbca\varepsilon$ y $cccc\varepsilon$ no.

$$L_{41} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot aa\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$L_{41} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = a)\}$$

Otra opción:

$$L_{41} = (\mathbb{A}^* \circ \{aa\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

Otra opción:

$$L_{41} = (\mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\} \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

42. L_{42} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{42} formado por las palabras que contienen la subpalabra $aa\varepsilon$ y la subpalabra $cc\varepsilon$ (pero puede aparecer antes $cc\varepsilon$ que $aa\varepsilon$ o al revés). Cada palabra ha de contener ambas subpalabras al menos una vez. Por ejemplo, $ccaaaaa\varepsilon$, $aabacbcccb\varepsilon$, $accaaab\varepsilon$, $ccbaabaab\varepsilon$ y $accbaaaabcc\varepsilon$ pertenecen a L_{42}. En cambio, $bacbcc\varepsilon$ no pertenece a L_{42} porque no contiene la subpalabra $aa\varepsilon$.

$$\begin{aligned} L_{42} = \{w \mid \ & w \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot aa\varepsilon \cdot v) \wedge \\ & \exists x, z(x \in \mathbb{A}^* \wedge z \in \mathbb{A}^* \wedge w = x \cdot cc\varepsilon \cdot z)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{42} = L_{41} \cap \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot cc\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{42} = \{w \mid \ & w \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a \wedge w(k+1) = a) \wedge \\ & \exists j(j \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq j \leq |w| - 1 \wedge w(j) = c \wedge w(j+1) = c)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{42} = (\mathbb{A}^* \circ \{aa\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cap (\mathbb{A}^* \circ \{cc\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

Otra opción:

$$L_{42} = (\mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\} \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cap (\mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\} \circ \{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

43. L_{43} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{43} formado por las palabras que no contienen la subpalabra $aa\varepsilon$. Por ejemplo, $cabbccaba\varepsilon$, $cccabbbb\varepsilon$, $cccc\varepsilon$, ε y $accbbbabab\varepsilon$ pertenecen a L_{43}.

$$L_{43} = \overline{L_{41}}$$

Otra opción:

$$L_{43} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot aa\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$L_{43} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge w(k) = a) \rightarrow w(k+1) \neq a)\}$$

44. L_{44} (0,100 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{44} formado por las palabras que en caso de contener b's, todas las b's están juntas. Por ejemplo, $ccaaaaa\varepsilon$, $aabbbccca\varepsilon$, $ccc\varepsilon$, $bbaccaaa\varepsilon$, ε, $bbbb\varepsilon$ y $ccbbb\varepsilon$ pertenecen a L_{44}. En cambio, $bacbcc\varepsilon$ no pertenece a L_{44} porque las b's no están juntas.

$$L_{44} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v, x(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge x \in \mathbb{A}^* \wedge |v| = |v|_b = |w|_b \wedge w = u \cdot v \cdot x)\}$$

Otra opción:

$$L_{44} = \{a\varepsilon, c\varepsilon\}^* \circ \{b\varepsilon\}^* \circ \{a\varepsilon, c\varepsilon\}^*$$

45. L_{45} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{45} formado por las palabras cuya longitud es al menos 2 y que terminan con el mismo símbolo con el que empiezan. Por ejemplo, $aabacbca\varepsilon$, $bcb\varepsilon$, $babb\varepsilon$ y $ccccc\varepsilon$ pertenecen a L_{45}. En cambio, $cbbb\varepsilon$ no pertenece a L_{45} porque no acaba con el mismo símbolo con el que empieza y c no pertenece a L_{45} porque su longitud es menor que 2.

$$L_{45} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v, \alpha(v \in \mathbb{A}^* \wedge \alpha \in \mathbb{A} \wedge w = \alpha\varepsilon \cdot v \cdot \alpha\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{45} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = a\varepsilon \cdot v \cdot a\varepsilon) \vee (w = b\varepsilon \cdot v \cdot b\varepsilon) \vee (w = c\varepsilon \cdot v \cdot c\varepsilon))\}$$

Otra opción:

$$L_{45} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 2 \wedge w(1) = w(|w|)\}$$

Otra opción:

$$L_{45} \;=\; (\{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\}) \cup (\{b\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\}) \cup (\{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\})$$

46. L_{46} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{46} formado por las palabras que se obtienen concatenando la palabra $ab\varepsilon$ todas las veces que se quiera. Por ejemplo, $ababab\varepsilon$, $ab\varepsilon$ y ε pertenecen a L_{46}. En cambio, $aba\varepsilon$, $bababa\varepsilon$ y $cabc\varepsilon$ no pertenecen a L_{46}.

$$L_{46} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge w = (ab\varepsilon)^k)\}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{46} = \{w \mid \;& w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \\ & \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \rightarrow \\ & \qquad\qquad (w(k) = a \wedge w(k+1) = b))\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{46} = \{w \mid \;& w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \\ & \forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 \neq 0) \rightarrow w(k) = a) \wedge \\ & \forall \ell((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \ell \leq |w| \wedge \ell \bmod 2 = 0) \rightarrow w(\ell) = b)\} \end{aligned}$$

47. L_{47} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{47} formado por las palabras que contienen la subpalabra $aa\varepsilon$ o la subpalabra $cc\varepsilon$. Cada palabra ha de contener al menos una de las subpalabras al menos una vez. Por ejemplo, $ccaaaaa\varepsilon$, $bacbcccb\varepsilon$, $acaaab\varepsilon$, $cccc\varepsilon$, $ccba\varepsilon$ y $aabccccb\varepsilon$ pertenecen a L_{47}. En cambio $bacbca\varepsilon$ no pertenece a L_{47} porque no contiene ni la subpalabra $aa\varepsilon$ ni la subpalabra $cc\varepsilon$.

$$\begin{aligned} L_{47} = \{w \mid \;& w \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & (\exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot aa\varepsilon \cdot v) \vee \\ & \;\exists x, z(x \in \mathbb{A}^* \wedge z \in \mathbb{A}^* \wedge w = x \cdot cc\varepsilon \cdot z))\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{47} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(&u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & ((w = u \cdot aa\varepsilon \cdot v) \vee (w = u \cdot cc\varepsilon \cdot v)))\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{47} = L_{41} \cup \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot cc\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{47} = \{w \mid \ & w \in \mathbb{A}^* \wedge \\ & \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| - 1 \wedge \\ & \quad ((w(k) = a \wedge w(k+1) = a) \vee (w(k) = c \wedge w(k+1) = c)))\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{47} = (\mathbb{A}^* \circ \{aa\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{cc\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*)$$

48. L_{48} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{48} formado por las palabras que empiezan por a, terminan en b y contienen al menos una c. Por ejemplo, $accaaaab\varepsilon$, $aabbcbccbb\varepsilon$, $acb\varepsilon$ y $aaccbaccb\varepsilon$ pertenecen a L_{48}. En cambio ε, $bacbcc\varepsilon$ y $bbbb\varepsilon$ no pertenecen a L_{48}.

$$L_{48} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 3 \wedge w(1) = a \wedge w(|w|) = b \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Otra opción:

$$L_{48} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge |v|_c \geq 1 \wedge w = a\varepsilon \cdot v \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{48} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = a\varepsilon \cdot u \cdot c\varepsilon \cdot v \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{48} = L_{11} \cap L_{18} \cap \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c \geq 1\}$$

Otra opción:

$$L_{48} = L_{11} \cap L_{18} \cap \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = u \cdot c\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$L_{48} = \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^* \circ \{c\varepsilon\}\mathbb{A}^* \circ \{b\varepsilon\}$$

49. L_{49} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{49} formado por las palabras cuya longitud es mayor que tres y contienen una a en la tercera posición. Por ejemplo, $aaaa\varepsilon$, $ccab\varepsilon$, $cbabbbaac\varepsilon$, $ccabcbaaaa\varepsilon$ y $bcaccc\varepsilon$ pertenecen a L_{49}. Pero ε, $aa\varepsilon$, $aaa\varepsilon$, $ba\varepsilon$, $aabbca\varepsilon$ y $bba\varepsilon$ no pertenecen a L_{49}.

$$L_{49} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| > 3 \wedge w(3) = a\}$$

Otra opción:

$$L_{49} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = 2 \wedge w = u \cdot a\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$L_{49} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge \\ w = u \cdot a\varepsilon \cdot v)\}$$

El conjunto $\mathbb{A}$ es un alfabeto, y sus elementos son símbolos pero no son palabras. El lenguaje formado por las palabras que constan de un único componente, se puede definir como $\{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}$. En el lenguaje $\{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}$ se tienen las palabras —definidas sobre el alfabeto $\mathbb{A}$— que están formadas por dos componentes. Otra manera de representar $\{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}$ es $\{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}^2$.

Otra opción:

$$L_{49} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists \alpha, \beta, v(\alpha \in \mathbb{A} \wedge \beta \in \mathbb{A} \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge w = \alpha\beta a\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$L_{49} = \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\} \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*$$

Otra opción:

$$L_{49} = \{\alpha\varepsilon \mid \alpha \in \mathbb{A}\}^2 \circ \{a\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*$$

50. L_{50} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{50} formado por las palabras que empiezan por a, terminan en b, contienen una única c, entre la a inicial y la única c hay una serie de b's (cero o más) pero ninguna a y entre la única c y la b final hay una serie de a's (cero o más) pero ninguna b. Por ejemplo, $abbbcaab\varepsilon$, $acb\varepsilon$, $acaaab\varepsilon$ y $abbbbcb\varepsilon$ pertenecen a L_{50}. En cambio, $abba\varepsilon$, ε, $abbcaba\varepsilon$, $abbcac\varepsilon$, $acbbb\varepsilon$, $aaa\varepsilon$ y $ab\varepsilon$ no pertenecen a L_{50}.

$$L_{50} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_b \wedge |v| = |v|_a \wedge \\ w = a\varepsilon \cdot u \cdot c\varepsilon \cdot v \cdot b\varepsilon)\}$$

Otra opción:

$$L_{50} = \{a\varepsilon\} \circ \{b\varepsilon\}^* \circ \{c\varepsilon\} \circ \{a\varepsilon\}^* \circ \{b\varepsilon\}$$

51. L_{51} (0,050 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{51} formado por las palabras que contienen al principio una serie de a's (cero o más), luego una serie de b's (al menos una b) y al final una serie de c's (justo el mismo número de c's que de a's). Por ejemplo, $aabcc\varepsilon$, $bbbb\varepsilon$, $b\varepsilon$, $abbc\varepsilon$ y $aabbbcc\varepsilon$ pertenecen a L_{51}. En cambio, $bc\varepsilon$, $ac\varepsilon$, ε, $aaccbbb\varepsilon$ y $aaabbb\varepsilon$ no pertenecen a L_{51}.

$$L_{51} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists u, v, x(u \in \mathbb{A}^* \wedge v \in \mathbb{A}^* \wedge x \in \mathbb{A}^* \wedge |u| = |u|_a \wedge |v| = |v|_b \wedge |x| = |x|_c \wedge |v| \geq 1 \wedge |u| = |x| \wedge w = u \cdot v \cdot x)\}$$

52. L_{52} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{52} formado por las palabras que contienen la subpalabra $abc\varepsilon$ al principio o al final (o en ambos sitios). La subpalabra $abc\varepsilon$ puede aparecer o no aparecer en diferentes posiciones intermedias de la palabra. Por ejemplo, $abcaaaa\varepsilon$, $abc\varepsilon$, $accaaabc\varepsilon$, $abcbbbabc\varepsilon$ y $abccabcaaa\varepsilon$ pertenecen a L_{52}. En cambio ε, $a\varepsilon$ y $bacbcc\varepsilon$ no pertenecen a L_{52}.

$$L_{52} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = abc\varepsilon \cdot v) \vee (w = v \cdot abc\varepsilon)))\}$$

Otra opción:

$$L_{52} = (\{a\varepsilon\} \circ \{b\varepsilon\} \circ \{c\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{a\varepsilon\} \circ \{b\varepsilon\} \circ \{c\varepsilon\})$$

Otra opción:

$$L_{52} = (\{abc\varepsilon\} \circ \mathbb{A}^*) \cup (\mathbb{A}^* \circ \{abc\varepsilon\})$$

53. L_{53} (0,025 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{53} formado por las palabras que no pertenecen a L_{52}.

$$L_{53} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \neg\exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge ((w = abc\varepsilon \cdot v) \vee (w = v \cdot abc\varepsilon)))\}$$

Otra opción:

$$L_{53} = \overline{L_{52}}$$

54. L_{54} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{54} formado por las palabras que en caso de contener b's, no contienen c's. Por ejemplo, $ccaaaaa\varepsilon$, $aabbba\varepsilon$, $ccc\varepsilon$, $aaaa\varepsilon$, ε, $bbbb\varepsilon$ y $acaac\varepsilon$ pertenecen a L_{54}. En cambio, $bacbcc\varepsilon$ no pertenece a L_{54}.

$$L_{54} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w|_b \geq 1 \rightarrow |w|_c = 0)\}$$

Otra opción:

$$L_{54} \quad = \quad \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge (|w|_b = 0 \vee |w|_c = 0)\}$$

55. L_{55} (0,075 puntos) Dar la definición formal del lenguaje L_{55} formado por las palabras que empiezan por a y luego no contienen ninguna c pero contienen al menos dos b's, o empiezan por a y luego solo contienen c's. Por ejemplo, $abb\varepsilon$, $aababa\varepsilon$, $aabaaab\varepsilon$, $aabababb\varepsilon$ y $acccc\varepsilon$ son palabras de L_{55} mientras que ε, $aabbcb\varepsilon$, $caacbb\varepsilon$, $cccc\varepsilon$ y $bbc\varepsilon$ no son palabras de L_{55}.

$$L_{55} \quad = \quad \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists v(v \in \mathbb{A}^* \wedge ((|v|_c = 0 \wedge |v|_b \geq 2) \vee |v| = |v|_c) \wedge w = a\varepsilon \cdot v)\}$$

Otra opción:

$$\begin{aligned} L_{55} = (&L_{11} \circ \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = 0 \wedge |w|_b \geq 2\}) \cup \\ &(L_{11} \circ \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = |v|\}) \end{aligned}$$

En este caso $L_{11} \circ \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = 0 \wedge |w|_b \geq 2\}$ es el lenguaje que se obtiene concatenando los lenguajes L_{11} y $\{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = 0 \wedge |w|_b \geq 2\}$. De la misma forma, $L_{11} \circ \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = |v|\}$ es el lenguaje que se obtiene concatenando los lenguajes L_{11} y $\{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w|_c = |v|\}$.

56. L_{56} – Lenguaje formado por palabras que contienen por lo menos un símbolo y en las posiciones pares siempre hay una a y en las impares siempre una b. Por ejemplo, $babab\varepsilon$, $b\varepsilon$ y $bababa\varepsilon$ son palabras de L_{56} mientras que ε, $aabbcb\varepsilon$, $caacbb\varepsilon$, $cccc\varepsilon$ y $bbc\varepsilon$ no son palabras de L_{56}.

$$\begin{aligned} L_{56} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \geq 1 \wedge \\ &\forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \rightarrow w(k) = a) \wedge \\ &\forall \ell((\ell \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \ell \leq |w| \wedge \ell \bmod 2 \neq 0) \rightarrow w(\ell) = b)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{56} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge \exists k(k \in \mathbb{N} \wedge ((w = (ba\varepsilon)^k \cdot b\varepsilon) \vee (w = (ba\varepsilon)^k)))\}$$

57. L_{57} – Lenguaje formado por las palabras que tienen longitud par y en las posiciones pares siempre hay una a y en las impares siempre una b. Por ejemplo, ε, $baba\varepsilon$, $ba\varepsilon$ y $bababa\varepsilon$ son palabras de L_{57} mientras que $aabbcb\varepsilon$, $caacbb\varepsilon$, $cccc\varepsilon$, $babab\varepsilon$ y $bbc\varepsilon$ no son palabras de L_{57}.

$$\begin{aligned} L_{57} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \wedge |w| \bmod 2 = 0 \wedge \\ &\forall k((k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \leq |w| \wedge k \bmod 2 = 0) \rightarrow w(k) = a) \wedge \\ &\forall \ell((\ell \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq \ell \leq |w| \wedge \ell \bmod 2 \neq 0) \rightarrow w(\ell) = b)\} \end{aligned}$$

Otra opción:

$$L_{57} = \{w \mid w \in \mathbb{A}^* \land \exists k(k \in \mathbb{N} \land w = (ba\varepsilon)^k)\}$$

Otra opción:

$$L_{57} = \{\varepsilon\} \cup \ (L_8 \cap L_{56})$$

ε es la única palabra de L_{57} que no pertenece a $L_8 \cap L_{56}$.