46. (Septiembre 2010) Predicados par(x), mulcuatro(x) y intercuatro(D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos) y programa que, dado un vector A(1..n), donde n es múltiplo de cuatro, intercambia los elementos de las posiciones pares de dos en dos (posiciones 2 y 4, 6 y 8, etc.). -- #

a) $par(x) \equiv \{x \bmod 2 = 0\}$

b) $mulcuatro(x) \equiv \{x \bmod 4 = 0\}$

c) **intercuatro(D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos)** $\equiv$

$\{(r \geq 1) \wedge mulcuatro(r) \wedge$
$(0 \leq pos \leq r) \wedge mulcuatro(pos) \wedge$
$\forall k\, (1 \leq k \leq pos \rightarrow ((mulcuatro(k) \rightarrow (D(k) = d_{k-2} \wedge D(k-2) = d_k)) \wedge$
$\wedge\, ((\neg mulcuatro(k) \wedge par(k)) \rightarrow (D(k) = d_{k+2} \wedge D(k+2) = d_k))$
$\wedge\, (\neg par(k) \rightarrow D(k) = d_k)))\}$

Otra opción para el apartado c):

intercuatro(D(1..r), (d_1, d_2, …, d_r), pos) $\equiv$

$\{(r \geq 1) \wedge mulcuatro(r) \wedge$
$(0 \leq pos \leq r) \wedge mulcuatro(pos) \wedge$
$\forall k\, ((1 \leq k \leq pos \wedge mulcuatro(k)) \rightarrow (D(k) = d_{k-2} \wedge D(k-2) = d_k)) \wedge$
$\forall k\, ((1 \leq k \leq pos \wedge \neg\, mulcuatro(k) \wedge par(k)) \rightarrow (D(k) = d_{k-2} \wedge D(k-2) = d_k))\wedge$
$\forall k\, ((1 \leq k \leq pos \wedge \neg par(k)) \rightarrow D(k) = d_k)\}$

d) Las aserciones se darán en el orden en el que es más natural formularlas:

(1) {Precondición} $\equiv \{n \geq 1 \wedge mulcuatro(n) \wedge \forall k\, (1 \leq k \leq n \rightarrow A(k) = a_k)\}$

En la precondición se indica que el vector A tendrá por lo menos un elemento, que ese número de elementos será múltiplo de 4 y que los valores iniciales de A(1..n) los representaremos mediante *a*’s minúsculas con los correspondientes subíndices.

(2) {Aserción intermedia} $\equiv \{(1) \wedge i = 4\}$

(9) {Postcondición} $\equiv$ {intercuatro(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), n)}

En la postcondición se indica que se han hecho todos los intercambios hasta la posición n incluida, es decir, se ha recorrido todo el vector y se han hecho todos los intercambios necesarios.

(3) {Invariante} $\equiv$ {$(4 \leq i \leq n + 4) \wedge$ mulcuatro(A(1..n), (a_1, a_2, …, a_n), $i - 4$)}

En el invariante se indica que se han hecho todos los intercambios necesarios hasta la posición i – 4 incluida. Por tanto, teniendo en cuenta la definición del predicato *intercuatro*, se han intercambiado los elementos de las posiciones 2 y 4, los elementos de las posiciones 6 y 8, y demás posiciones pares siendo los elementos de las posiciones i – 6 y i – 4 los últimos intercambiados. Los elementos de las posiciones impares no se han movido y los elementos de las posiciones i – 2 e i todavía no han sido intercambiados.

(4) {Aserción intermedia} ≡ $\{(4 \le i \le n) \land$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i - 4)\}$

Por haber entrado en el while sabemos que se ha cumplido la condición del while y que i no es mayor que n. Por tanto i está entre 4 y n.

(5) {Aserción intermedia} ≡ $\{(4 \le i \le n) \land aux = A(i - 2) = a_{i-2} \land$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i - 4)\}$

Tras ejecutar la asignación aux : = A(i – 2); el valor de la variable *aux* y el valor de A(i – 2) son iguales. Pero el predicado *intercuatro* se sigue cumpliendo para i – 4 ya que con respecto a i todavía estamos a medias.

(6) {Aserción intermedia} ≡ $\{(4 \le i \le n) \land aux = a_{i-2} \land A(i - 2) = A(i) = a_i$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i - 4)\}$

Tras ejecutarse la asignación A(i – 2) : = A(i); el valor de la variable *aux* y el valor de A(i – 2) son distintos. El valor de *aux* es a_{i-2}, que es el valor inicial de A(i – 2) pero A(i – 2) ha cambiado de valor tras esta asignación. Por otra parte, A(i – 2) y A(i) tienen el mismo valor: a_i. El predicado *intercuatro* sigue cumpliéndose para i – 4 pero no para i. Con respecto a i todavía estamos a medias.

(7) {Aserción intermedia} ≡ $\{(4 \le i \le n) \land aux = a_{i-2} = A(i) \land A(i - 2) = a_i \land$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i)\}$

Como consecuencia de la ejecución de la asignación A(i) : = aux; la variable aux y A(i) tienen el mismo valor: el valor inicial de A(i – 2), es decir, a_{i-2}. Ahora A(i – 2) y A(i) tienen valores distintos: El valor de A(i – 2) es a_i y el de A(i) es a_{i-2}. Como se ha terminado de hacer el intercambio correspondiente a las posiciones i e i – 2, el predicado *intercuatro* se cumple ahora para i.

Realmente, la información sobre A(i) y A(i – 2) ahora está expresada por medio del predicado intercuatro y por tanto se puede escribir lo siguiente:

(7) {Aserción intermedia} ≡ $\{(4 \le i \le n) \land aux = a_{i-2} \land$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i)\}$

(10) {Aserción intermedia} ≡ $\{(8 \le i \le n + 4) \land aux = a_{i-6} \land$
$\text{intercuatro}(A(1..n), (a_1, a_2, \ldots, a_n), i - 4)\}$

Como consecuencia de la ejecución de la asignación i : = i + 4; la variable aux pasa a tener el valor, a_{i-6} y el predicado *intercuatro* se cumple ahora para i – 4.

(9) $E = n + 4 - i$

La expresión cota nos indica, siempre que estemos en el punto donde se cumple el invariante, cuántas vueltas quedan por dar como máximo. Como la tabla se recorre de izquierda a derecha, E es "el último valor que puede tomar i" menos "i". La expresión E es al fin y al cabo la distancia entre n + 4 y la variable i. Cuando i crece, la distancia disminuye y el número de vueltas pendientes decrece.

Las partes coloreadas resaltan los cambios que hay de una aserción a otra.