

# Metodología de la Programación

*Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información*

*Escuela de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU)*

*Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos*

*Curso: 1º*

*Curso académico: 2021-2022*

*Grupo 01*

**Tema 4: Derivación formal de programas**

**1,5 puntos**

**11-04-2022**

**Solución**

## Índice

<b>1</b>	<b>Derivación formal de un programa iterativo (1,5 puntos)</b>	<b>2</b>
1.1	Enunciado . . . . .	2
1.2	Solución . . . . .	3
1.2.1	(a) Cálculo de las inicializaciones previas al while . . . . .	3
1.2.2	(b) Cálculo de la condición del while (B) . . . . .	7
1.2.2.1	(b.1) Formulación de $\neg B$ y $B$ . . . . .	9
1.2.2.2	(b.2) Comprobación del punto (II) de la regla del while . . . . .	9
1.2.2.3	(b.3) Comprobación del punto (IV) de la regla del while . . . . .	9
1.2.2.4	(b.4) Comprobación del punto (V) de la regla del while . . . . .	11
1.2.3	(c) Cálculo de las instrucciones que van dentro del while . . . . .	11
1.2.3.1	(c.1) y (c.2) Desarrollo relacionado con el punto (III) y con el punto (VI) de la regla del while . . . . .	11
1.2.4	(d) Escribir el programa completo al final . . . . .	19

## Lista de figuras

1	Estructura del programa a derivar, definiciones de $\varphi$ , $INV$ , $E$ y $\psi$ y definición del predicado utilizado. . . . .	4
2	Esquema de partida para el cálculo de las inicializaciones. . . . .	5
3	Inicialización de $i$ . . . . .	8
4	Inicialización de $w$ . . . . .	8
5	Esquemas de partida para los puntos (III) y (VI). . . . .	13
6	Esquemas para los puntos (III) y (VI) tras actualizar $i$ . . . . .	13
7	Esquemas para los puntos (III) y (VI) tras actualizar $w$ . . . . .	17
8	Programa derivado. . . . .	20

## Lista de tablas

1	Abreviaciones que se recomienda utilizar. . . . .	4
2	Denominaciones de las letras griegas utilizadas. . . . .	4
3	Puntuación por apartados. . . . .	5
4	Las tres opciones para que la expresión $((w = \text{True}) \vee (i = n + 1))$ sea cierta. . . . .	13
5	Denominaciones de las letras griegas adicionales utilizadas en la solución. . . . .	20

\*\*\*\*\*

## 1 Derivación formal de un programa iterativo (1,5 puntos)

### 1.1 Enunciado

Derivar, utilizando la regla del while y el axioma de la asignación del Cálculo de Hoare, un programa que, dado un vector no vacío de enteros  $A(1..n)$  que solo contiene valores positivos ( $\geq 1$ ), decide en la variable booleana  $w$  si para alguna posición del vector ocurre que la posición es múltiplo del contenido de esa posición. El programa ha de ser derivado teniendo en cuenta la precondition y la postcondition ( $\varphi$  y  $\psi$ ), el invariante  $INV$  y la expresión cota  $E$ . El programa obtenido ha de ser eficiente en el sentido de que si en algún momento se detecta que la respuesta va a ser afirmativa, el programa ha de parar sin analizar las posiciones restantes.

En la figura 1 de la página 4, se muestra la estructura que ha de tener el programa derivado. En esa misma figura se indica cuáles son las fórmulas  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $INV$  y  $E$  en las que se ha de basar la derivación. Además, se da la definición del predicado que se utiliza tanto en  $\varphi$  como en  $INV$ .

En el programa de la figura 1,  $mod$  representa el resto de la división entera. Ejemplos:  $20 \bmod 3 = 2$ ;  $18 \bmod 3 = 0$ ;  $19 \bmod 3 = 1$ . En esos tres ejemplos, la división entera, representada aquí como  $div$ , devolvería 6:  $20 \div 3 = 6$ ;  $18 \div 3 = 6$ ;  $19 \div 3 = 6$ . Otros ejemplos para la división entera:  $19 \div 2 = 9$ ;  $19 \div 3 = 6$ ;  $19 \div 4 = 4$ ;  $17 \div 3 = 5$ ;  $8 \div 12 = 0$ .

En la tabla 1 de la página 4, se recogen las abreviaciones que se recomienda utilizar durante el proceso de verificación. En la tabla 2 de la página 4, se recopilan las denominaciones de las letras griegas utilizadas en este enunciado. Finalmente, en la tabla 3 de la página 5, se muestra la puntuación de los distintos pasos o apartados que han de ser considerados en el proceso de derivación.

Todos los elementos numéricos de la figura 1 y de la tabla 1 representan números enteros. Por tanto, los valores representados por esos elementos pertenecen a  $\mathbb{Z}$ , donde el conjunto  $\mathbb{Z}$  es el siguiente:

$$\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Formalmente,  $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-y \mid y \in \mathbb{N} \wedge y \geq 1\}$ , donde  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  es el conjunto de los números naturales y  $\cup$  es la unión de conjuntos.

**Ejemplo 1.1.** (Para el programa a derivar y cuya estructura se muestra en la figura 1) Sea el siguiente vector  $A(1..8)$ :

$A(1..8)$	20	50	1	3	3	2	7	4
	1	2	3	4	5	6	7	8

Para esos valores de  $A(1..8)$ , el programa a derivar —cuya estructura se muestra en la figura 1— devolvería el valor booleano  $\text{True}$  en  $w$ , porque al menos para una posición del vector ocurre que la posición es múltiplo del contenido de esa posición. En concreto, esa propiedad se cumple en las posiciones 3, 6, 7 y 8 del vector  $A(1..8)$ :  $3 \bmod 1 = 0$ ;  $6 \bmod 2 = 0$ ;  $7 \bmod 7 = 0$ ;  $8 \bmod 4 = 0$ . En las restantes posiciones el resto no es 0:  $1 \bmod 20 = 1$ ;  $2 \bmod 50 = 2$ ;  $4 \bmod 3 = 1$ ;  $5 \bmod 3 = 2$ .

En cambio, si el vector  $A(1..8)$  fuera el que se muestra a continuación, la respuesta debería ser *False* porque para ninguna posición del vector ocurre que la posición sea múltiplo del contenido de esa posición:  $1 \bmod 20 = 1$ ;  $2 \bmod 50 = 2$ ;  $3 \bmod 2 = 1$ ;  $4 \bmod 3 = 1$ ;  $5 \bmod 3 = 2$ ;  $6 \bmod 11 = 6$ ;  $7 \bmod 4 = 3$ ;  $8 \bmod 3 = 2$ .

$A(1..8)$	20	50	2	3	3	11	4	3
	1	2	3	4	5	6	7	8

## 1.2 Solución

En la tabla 5 de la página 20, se recogen las letras griegas adicionales utilizadas en este apartado correspondiente a la solución.

### 1.2.1 (a) Cálculo de las inicializaciones previas al *while*

El apartado de inicializaciones previas al *while*, va asociado al punto (I) de la regla del *while*.

- $\iota\varphi \rightarrow INV?$

$$\iota \underbrace{\lambda}_{\varphi} \rightarrow \underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{INV} ? \quad (1)$$

En la primera parte de la implicación (es decir, en  $\varphi$ ) tenemos la información y en la segunda parte ( $INV$ ) tenemos cuatro preguntas:  $\iota\lambda?$   $\iota 1 \leq i?$   $\iota i \leq n+1?$   $\iota w \leftrightarrow \mu(i-1)?$

Si la implicación se cumple, no hace falta ninguna inicialización. En cambio, si la implicación no se cumple, será necesario introducir las inicializaciones que hagan falta con el objetivo de hacer que la implicación se cumpla.

En la figura 2 de la página 5, se muestra la situación de partida para el cálculo de las inicializaciones.

- $\iota\lambda?$  Sí, porque en  $\varphi$  tenemos  $\lambda$ .
- $\iota 1 \leq i?$  De la información que se tiene en  $\varphi$  no se puede deducir esto. No sabemos si se cumple o no se cumple  $1 \leq i$ .
- $\iota i \leq n+1?$  De la información que se tiene en  $\varphi$  no se puede deducir esto. No sabemos si se cumple o no se cumple  $i \leq n+1$ .
- $\iota w \leftrightarrow \mu(i-1)?$  De la información que se tiene en  $\varphi$  no se puede deducir esto. No sabemos si se cumple o no se cumple  $w \leftrightarrow \mu(i-1)$ .

Por tanto, la implicación  $\varphi \rightarrow INV$  no se cumple. En  $\varphi$  no hay información ni sobre  $i$  ni sobre  $w$ .

- **Objetivo:** que se cumpla lo expresado en  $INV$ .

Para hacer que se cumpla lo expresado en  $INV$  disponemos de la asignación. Tenemos que hacer que se cumpla lo expresado en  $INV$  haciendo uso de la asignación. Puesto que tenemos dos variables,  $i$  y  $w$ , cuyo valor se desconoce, necesitaremos inicializar esas dos variables. En el caso de  $w$ , queremos que se cumpla  $w \leftrightarrow \mu(i-1)$ , pero al no conocer nada sobre el valor de  $i$ , resulta imposible averiguar cuál es el valor que habría que darle a  $w$ : *True* o *False*. Por ello, nos centramos en  $i$ . De  $\varphi$  sabemos que  $n \geq 1$ . Por tanto,  $n+1 \geq 2$ . Con esa información en mano, podemos asegurar que si asignamos a  $i$  el valor 1 o el valor  $n+1$ , entonces  $i$  cumplirá tanto  $1 \leq i$  como  $i \leq n+1$ . Así que en este momento tenemos dos opciones. Esas dos opciones son los extremos del intervalo que hay en  $INV$  para la variable  $i$ . La primera opción supone empezar a recorrer el vector  $A(1..n)$  desde la izquierda, mientras que la segunda opción supone empezar a recorrer el vector  $A(1..n)$  desde la derecha. La elección que hagamos ha de estar de acuerdo con lo que dice  $INV$  y con lo que dice la expresión cota  $E$ .

Estructura del programa a derivar:
$\{\varphi\}$ $\zeta$ Inicializaciones? <b>while</b> $\{INV\} \{E\} \zeta B?$ <b>loop</b> $\zeta$ Instrucciones? <b>end loop;</b> $\{\psi\}$
Definición de $\varphi$ , $INV$ , $E$ y $\psi$ :
$\varphi \equiv n \geq 1 \wedge posit(A(1..n))$ $INV \equiv n \geq 1 \wedge posit(A(1..n)) \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq i-1 \wedge k \bmod A(k) = 0))$ $E = n+1-i$ $\psi \equiv w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq n \wedge k \bmod A(k) = 0)$
Definición del predicado utilizado:
$posit(H(1..r)) \equiv \forall k(1 \leq k \leq r \rightarrow H(k) \geq 1)$

Figura 1: Estructura del programa a derivar, definiciones de  $\varphi$ ,  $INV$ ,  $E$  y  $\psi$  y definición del predicado utilizado.

Abreviaciones recomendadas:
$\lambda \equiv n \geq 1 \wedge posit(A(1..n))$ $\gamma(\ell) \equiv \ell \bmod A(\ell) = 0$ $\mu(\ell) \equiv \exists k(1 \leq k \leq \ell \wedge k \bmod A(k) = 0)$ $\mu(\ell) \equiv \exists k(1 \leq k \leq \ell \wedge \gamma(k))$

Tabla 1: Abreviaciones que se recomienda utilizar.

Letras griegas utilizadas:
$\varphi$ : fi $\psi$ : psi $\gamma$ : gamma $\mu$ : mu $\lambda$ : lambda

Tabla 2: Denominaciones de las letras griegas utilizadas.

Puntuación:	
(a)	Cálculo de las inicializaciones previas al while: 0,250
(b)	Cálculo de la condición del while (B): 0,380
	(b.1) Formulación de la condición del while (B): 0,150
	(b.2) Comprobación del punto (II) de la regla del while: 0,005
	(b.3) Comprobación del punto (IV) de la regla del while: 0,200
	(b.4) Comprobación del punto (V) de la regla del while: 0,025
(c)	Cálculo de las instrucciones que van dentro del while: 0,850
	(c.1) Desarrollo relacionado con el punto (III) de la regla del while: 0,550
	(c.2) Desarrollo relacionado con el punto (VI) de la regla del while: 0,300
(d)	Escribir el programa completo al final: 0,020
■	Cuando no se explique por qué se cumple una implicación, se contará cero. Es decir, indicar que una implicación sí se cumple sin razonar por qué se cumple cuenta 0.
■	Para aprobar el ejercicio es obligatorio obtener al menos la mitad de la puntuación en los apartados (a), (b) y (c).

Tabla 3: Puntuación por apartados.

Esquema de partida para el cálculo de las inicializaciones:	
$\{\varphi\}$	$\varphi \rightarrow INV?$
$\{INV\}$	

Figura 2: Esquema de partida para el cálculo de las inicializaciones.

Si la expresión cota tiene la forma  $n + z - i$ , siendo  $z$  un número entero, ello significa que hay que recorrer el vector de izquierda a derecha. Si la expresión cota tiene la forma  $i - z$ , siendo  $z$  un número entero, ello significa que hay que recorrer el vector de derecha a izquierda.

En nuestro caso,  $E$  tiene la forma  $n + z - i$  con  $z = 1$ . Por tanto, hay que recorrer el vector de izquierda a derecha.

Consecuentemente, se ha de inicializar  $i$  con 1. Una vez que colocamos la asignación  $i := 1$ ; en el programa que estamos construyendo, hay que calcular la fórmula correspondiente,  $\varphi_1$ , haciendo uso del axioma de la asignación (AA).

En la figura 3, se muestra la situación que se tiene tras inicializar  $i$ .

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_1$  a partir de la fórmula  $INV$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &\equiv \text{def}(1) \wedge INV_i^1 \\
 &\equiv \text{True} \wedge \lambda \wedge (1 \leq 1 \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(1-1)) \\
 &\equiv \text{True} \wedge \lambda \wedge (1 \leq 1) \wedge (1 \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(0)) \\
 &\equiv \text{True} \wedge \lambda \wedge \text{True} \wedge (1 \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(0)) \\
 &\equiv \lambda \wedge (1 \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(0)) \\
 &\equiv \lambda \wedge (0 \leq n) \wedge (w \leftrightarrow \mu(0))
 \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, primero se ha descompuesto  $(1 \leq 1 \leq n+1)$  en  $(1 \leq 1) \wedge (1 \leq n+1)$ . Después, por una parte, se ha tenido en cuenta que  $z \leq z$  es cierto para cualquier número entero  $z$  y se ha puesto  $\text{True}$  en vez de  $(1 \leq 1)$ . Por otra parte, se ha tenido en cuenta que  $\text{True} \wedge \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$  y se han eliminado las apariciones de  $\text{True}$ . Además, se ha transformado  $1 \leq n+1$  en  $0 \leq n$ , restando 1 en ambos lados.

- $i\varphi \rightarrow \varphi_1$ ?

$$i \underbrace{\lambda}_{\varphi} \rightarrow \underbrace{\lambda \wedge (0 \leq n) \wedge (w \leftrightarrow \mu(0))}_{\varphi_1} \quad (2)$$

En la primera parte de la implicación ( $\varphi$ ) tenemos la información y en la segunda parte ( $\varphi_1$ ) tenemos tres preguntas:  $i\lambda$ ?  $i0 \leq n$ ?  $i w \leftrightarrow \mu(0)$ ?

Si la implicación se cumple, no hace falta ninguna otra inicialización. En cambio, si la implicación no se cumple, será necesario introducir las inicializaciones que haga falta con el objetivo de hacer que la implicación se cumpla.

- $i\lambda$ ? Sí, porque en  $\varphi$  tenemos  $\lambda$ .
- $i0 \leq n$ ? En  $\varphi$  se nos dice que  $n \geq 1$ . Si  $n$  es mayor o igual que 1, entonces necesariamente ha de ser también mayor o igual que 0. No es posible tener un número que sea mayor o igual que 1 y que no sea mayor o igual que 0. Por tanto, se cumple  $0 \leq n$ . Técnicamente, podemos argumentar de la siguiente forma:  $i0 \leq n$ ? es equivalente a  $i(0 < n) \vee (0 = n)$ ?; por estar en  $\mathbb{Z}$ , eso es equivalente a  $i(1 \leq n) \vee (0 = n)$ ?; en  $\varphi$  se nos dice que  $n \geq 1$ ; por tanto, la pregunta es  $i\text{True} \vee (0 = n)$ ?; y eso es equivalente a  $i\text{True}$ ?. La respuesta es que sí, es decir,  $\text{True}$  es cierto.
- $i w \leftrightarrow \mu(0)$ ? De la información que se tiene en  $\varphi$  no se puede deducir esto. No sabemos si se cumple o no se cumple  $w \leftrightarrow \mu(0)$ .

En resumen, la implicación  $\varphi \rightarrow \varphi_1$  no se cumple. En  $\varphi$  no hay información sobre  $w$ .

- **Objetivo:** que se cumpla lo expresado en  $\varphi_1$ .

Hemos de utilizar la asignación para hacer que sea cierto lo expresado en  $\varphi_1$ . En concreto, queremos que la variable  $w$  cumpla  $w \leftrightarrow \mu(0)$ . El significado de  $\mu(0)$  es el siguiente:

$$\exists k(1 \leq k \leq 0 \wedge k \bmod A(k) = 0) \quad (3)$$

El dominio  $1 \leq k \leq 0$  de esa fórmula existencial es vacío. Consiguientemente, el valor de la fórmula es *False*. Es decir,  $\mu(0)$  es *False*. Por tanto, el objetivo es que se cumpla  $w \leftrightarrow \text{False}$ . Para conseguir ese objetivo, hay que asignar *False* a  $w$ .

Una vez que colocamos la asignación  $w := \text{False}$ ; en el programa que estamos construyendo, hay que calcular la fórmula correspondiente,  $\varphi_2$ , haciendo uso del axioma de la asignación (AA).

En la figura 4, se muestra la situación que se tiene tras inicializar  $w$ .

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_2$  a partir de la fórmula  $\varphi_1$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned} \varphi_2 &\equiv \text{def}(\text{False}) \wedge (\varphi_1)_w^{\text{False}} \\ &\equiv \text{True} \wedge \lambda \wedge (0 \leq n) \wedge (\text{False} \leftrightarrow \mu(0)) \\ &\equiv \lambda \wedge (0 \leq n) \wedge (\text{False} \leftrightarrow \mu(0)) \end{aligned}$$

Para simplificar la fórmula  $\varphi_2$ , se ha tenido en cuenta que  $\text{True} \wedge \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$  y se ha eliminado la aparición de *True*.

- $\varphi \rightarrow \varphi_2$ ?

$$\underbrace{\varphi}_{\lambda} \rightarrow \underbrace{\lambda \wedge (0 \leq n) \wedge (\text{False} \leftrightarrow \mu(0))}_{\varphi_2} \quad (4)$$

En la primera parte de la implicación ( $\varphi$ ), tenemos la información y en la segunda parte ( $\varphi_2$ ), tenemos tres preguntas:  $\varphi \rightarrow \lambda$ ?  $\varphi \rightarrow 0 \leq n$ ?  $\varphi \rightarrow \text{False} \leftrightarrow \mu(0)$ ?

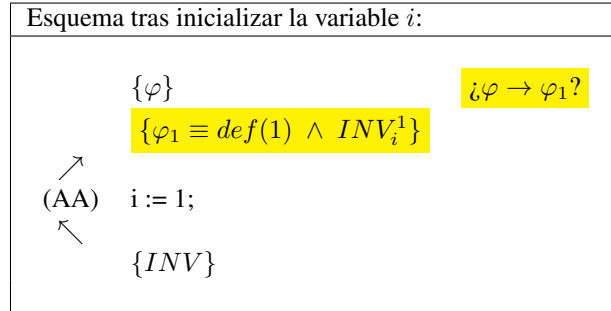
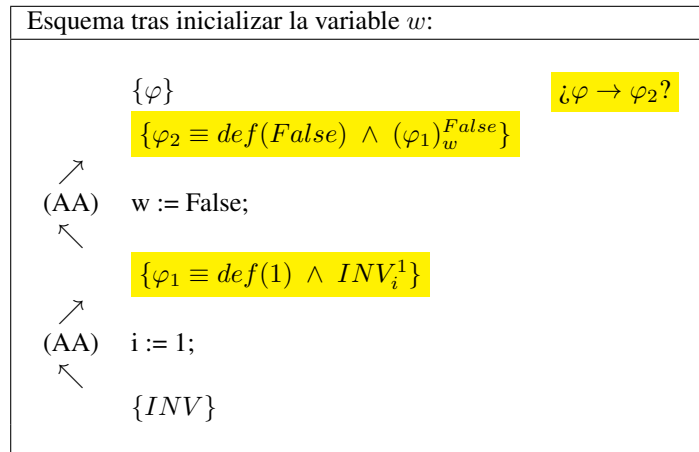
Si la implicación se cumple, habremos terminado con las inicializaciones. Pero si la implicación no se cumple, serán necesarias más inicializaciones que hagan que se cumpla la implicación.

- $\varphi \rightarrow \lambda$ ? Sí, porque en  $\varphi$  tenemos  $\lambda$ .
- $\varphi \rightarrow 0 \leq n$ ? Puesto que en  $\varphi$ , es decir, en  $\lambda$ , se nos dice que  $n \geq 1$ , podemos afirmar que también se cumple  $0 \leq n$ .
- $\varphi \rightarrow \text{False} \leftrightarrow \mu(0)$ ? En la fórmula (3) de la página 7 se constata que  $\mu(0)$  representa una fórmula existencial de dominio vacío. Consecuentemente, su valor es *False*. Por tanto, la pregunta es la siguiente:  $\varphi \rightarrow \text{False} \leftrightarrow \text{False}$ ? La respuesta es afirmativa porque  $(\delta \leftrightarrow \delta) \equiv \text{True}$  para cualquier fórmula  $\delta$ .

Hemos deducido que la implicación  $\varphi \rightarrow \varphi_2$  se cumple y hemos terminado con las inicializaciones.

### 1.2.2 (b) Cálculo de la condición del while (B)

La condición del *while* se ha de construir a partir de la información extraída del invariante. Una vez formulada la condición del *while*, se procederá a verificar que, efectivamente, es correcta. Para ello, se comprobarán las implicaciones correspondientes a los puntos (II), (IV) y (V) de la regla del *while*.

Figura 3: Inicialización de  $i$ .Figura 4: Inicialización de  $w$ .



**1.2.2.1 (b.1) Formulación de  $\neg B$  y  $B$**  Para calcular la condición  $B$  del *while*, se formulará primero  $\neg B$ . La expresión  $\neg B$  indica la condición que ha de darse para que el *while* termine o se detenga. Por tanto, se obtiene respondiendo a la pregunta ¿Cuándo se parará el *while*? o a la pregunta equivalente ¿Cuándo se saldrá del *while*?

La respuesta genérica es: Cuando se sepa la respuesta definitiva, es decir, cuando se sepa si hay que devolver el valor *True* en  $w$  o hay que devolver el valor *False* en  $w$ .

Se sabrá que hay que devolver el valor *True* en  $w$  cuando se encuentre una posición de  $A(1..n)$  para la cual se cumpla que la propia posición es múltiplo del elemento de esa posición. Es decir, se sabrá que hay que devolver *True* en  $w$  si se cumple que en el tramo recorrido desde la posición 1 hasta la actual posición, se tiene que alguna posición es múltiplo del elemento que ocupa la posición. Por tanto, cuando la fórmula  $\exists k(1 \leq k \leq i-1 \wedge k \bmod A(k) = 0)$  —que aparece en el invariante— sea *True*. Además, el invariante nos indica que en cualquier vuelta del *while* el valor de esa fórmula coincide con el valor de la variable  $w$ . La fórmula  $\exists k(1 \leq k \leq i-1 \wedge k \bmod A(k) = 0)$  no se puede poner directamente en  $B$  porque esa fórmula no está escrita en el lenguaje de programación que se está utilizando. Pero  $w$  coincide en valor con esa fórmula y  $w$  sí se puede utilizar. Por consiguiente, podemos decir que se sabrá que la respuesta definitiva del programa ha de ser *True* en cuanto  $w$  tome el valor *True*.

Por otro lado, si  $w$  se mantiene con el valor *False* pero se termina de recorrer el vector, en ese caso se sabrá que la respuesta definitiva del programa ha de ser *False*.

En síntesis, se tiene la respuesta definitiva cuando  $w$  pasa a tener el valor *True* o cuando se ha terminado de recorrer todo el vector, es decir, cuando  $i$  llega a tomar el último valor permitido según el invariante:

$$\neg B \equiv (w = \text{True}) \vee (i = n + 1)$$

Una vez que se tiene  $\neg B$ , su negación nos dará  $B$ :

$$\begin{aligned} B &\equiv \neg(\neg B) \\ &\equiv \neg((w = \text{True}) \vee (i = n + 1)) \\ &\equiv (\neg(w = \text{True})) \wedge (\neg(i = n + 1)) \\ &\equiv (w = \text{False}) \wedge (i \neq n + 1) \end{aligned}$$

**1.2.2.2 (b.2) Comprobación del punto (II) de la regla del *while*** Para que la condición  $B$  sea adecuada se ha de cumplir el punto (II) de la regla del *while*.

$$\begin{aligned} &\text{¿} INV \rightarrow \text{def}(B) \text{?} \\ &\text{¿} INV \rightarrow \text{def}((w = \text{False}) \wedge (i \neq n + 1)) \text{?} \\ &\text{¿} INV \rightarrow \text{True?} \end{aligned}$$

Se nos dice que la fórmula  $INV$  es cierta y se nos pregunta si se cumple *True*. La respuesta es afirmativa, porque *True* se cumple siempre, es decir, *True* es *True* independientemente de la información que se tenga en  $INV$ . Dicho de otra manera,  $(\delta \rightarrow \text{True}) \equiv \text{True}$  para cualquier fórmula lógica  $\delta$ . Recordemos que  $(\delta \rightarrow \text{True})$  es equivalente a  $((\neg\delta) \vee \text{True})$ . Por consiguiente, estamos ante una disyunción donde uno de los componentes es *True*. Eso conlleva que toda la fórmula  $((\neg\delta) \vee \text{True})$  sea *True*, puesto que  $(\pi \vee \text{True}) \equiv \text{True}$  para cualquier fórmula lógica  $\pi$ .

**1.2.2.3 (b.3) Comprobación del punto (IV) de la regla del *while***

$$\text{¿}(INV \wedge \neg B) \rightarrow \psi \text{?}$$

$$\underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{INV} \wedge \underbrace{((w = \text{True}) \vee (i = n + 1))}_{\neg B} \rightarrow \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(n))}_{\psi} \text{?}$$

En la primera parte (parte izquierda) de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1)) \wedge ((w = \text{True}) \vee (i = n+1))$$

Si descomponemos  $(1 \leq i \leq n+1)$ , nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{(i \leq n+1)}_{\alpha_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{\alpha_4} \wedge \underbrace{((w = \text{True}) \vee (i = n+1))}_{\alpha_5 \vee \alpha_6}$$

En la segunda parte (parte derecha) de la implicación tenemos una pregunta:

$$i w \leftrightarrow \mu(n)?$$

Para obtener más información, se ha de recurrir a la disyunción  $\alpha_5 \vee \alpha_6$ . Al ser  $\alpha_5 \vee \alpha_6$  una disyunción, puede ser cierta porque se cumplen tanto  $\alpha_5$  como  $\alpha_6$  o porque se cumple solo  $\alpha_5$  o porque se cumple solo  $\alpha_6$ . En total hay tres opciones. Esas opciones se muestran en la tabla 4 (página 13).

- Casos 1 y 3:  $i = n+1$

Si se cumple  $i = n+1$ , entonces se cumple  $i-1 = n$ . Consecuentemente,  $\alpha_4$  y  $\psi$  son la misma fórmula. Como  $\alpha_4$  se cumple,  $\psi$  también.

Nótese que en esta deducción no nos hace falta conocer el valor de  $w$ . Nos da igual que sea *True* o *False*. De ahí que se hayan podido analizar juntos los casos 1 y 3 de la tabla 4 de la página 13.

- Caso 2:  $w = \text{True}$  e  $i \neq n+1$

Si se cumple  $i \neq n+1$ , entonces por  $\alpha_3$  deducimos que  $i < n+1$ , es decir,  $i-1 < n$ . Consecuentemente,  $\alpha_4$  y  $\psi$  no son la misma fórmula.

Recordemos que tenemos que responder a la siguiente pregunta:

$$i w \leftrightarrow \mu(n)?$$

Si consideramos el significado de  $\mu(n)$ , tenemos la siguiente pregunta:

$$i w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq n \wedge k \bmod A(k) = 0)?$$

La fórmula existencial se puede expresar mediante la disyunción:

$$i w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(n))? \quad (5)$$

Por  $\alpha_4$  sabemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq i-1 \wedge k \bmod A(k) = 0)$$

Si sustituimos la fórmula existencial por la disyunción, tenemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1)) \quad (6)$$

De  $\alpha_3$  e  $i \neq n+1$  hemos deducido que  $i-1 \leq n-1$ . Por tanto, el número de gammas de (6) es menor que el número de gammas de (5).

Consecuentemente, podemos reescribir la pregunta 5 de la siguiente manera:

$$i w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1) \vee \gamma(i) \vee \dots \vee \gamma(n))? \quad (7)$$

Puesto que estamos considerando el caso en el que  $w = True$  e  $i \neq n + 1$ , por la equivalencia (6) de la página 10 deducimos que  $\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1)$  es  $True$ . Por tanto, la pregunta (7) de la página 10 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$¿True \leftrightarrow (True \vee \gamma(i) \vee \dots \vee \gamma(n))? \quad (8)$$

No tenemos ninguna información sobre la disyunción  $\gamma(i) \vee \dots \vee \gamma(n)$ , pero utilizando la equivalencia lógica  $(True \vee \delta) \equiv True$ , la pregunta (8) de la página 11 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$¿True \leftrightarrow True?$$

La respuesta a esa última pregunta es afirmativa porque  $(\delta \leftrightarrow \delta) \equiv True$  para cualquier fórmula  $\delta$ .

Nótese que en la deducción correspondiente al caso  $w = True$  e  $i \neq n + 1$ , sí nos hace falta conocer el valor de  $w$ .

#### 1.2.2.4 (b.4) Comprobación del punto (V) de la regla del while

$$¿(INV \wedge B) \rightarrow (E > 0)?$$

$$\underbrace{¿\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{INV} \wedge \underbrace{(w = False) \wedge (i \neq n + 1)}_B \rightarrow \underbrace{(n + 1 - i > 0)}_{E > 0}?$$

En la primera parte (parte izquierda) de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1)) \wedge (w = False) \wedge (i \neq n + 1)$$

Si descomponemos  $(1 \leq i \leq n + 1)$ , nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\beta_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\beta_2} \wedge \underbrace{(i \leq n + 1)}_{\beta_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{\beta_4} \wedge \underbrace{(w = False)}_{\beta_5} \wedge \underbrace{(i \neq n + 1)}_{\beta_6}$$

En la segunda parte (parte derecha) tenemos una pregunta:

$$¿n + 1 - i > 0?$$

Por  $\beta_3$  y  $\beta_6$  deducimos que  $n + 1 > i$ . Restando  $i$  en ambos lados, obtenemos  $n + 1 - i > i - i$ , es decir,  $n + 1 - i > 0$ . Y eso es lo que queríamos obtener. Por tanto, la implicación se cumple.

#### 1.2.3 (c) Cálculo de las instrucciones que van dentro del while

La idea es la misma que en el cálculo de las inicializaciones: a base de analizar las implicaciones correspondientes se sabrá si hace falta añadir más asignaciones y, además, las fórmulas utilizadas nos indicarán qué asignaciones añadir. Es necesario llevar el punto (III) y el punto (VI) en paralelo, porque en ambos casos las instrucciones (asignaciones) han de ser las mismas, aunque las fórmulas a considerar sean distintas.

##### 1.2.3.1 (c.1) y (c.2) Desarrollo relacionado con el punto (III) y con el punto (VI) de la regla del while

1.  $¿(INV \wedge B) \rightarrow INV? ¿(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow E < v?$

En la figura 5 de la página 13, se muestra el punto de partida para el cálculo de las instrucciones que han de ir dentro del *while*. Si se cumplen la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow INV$  y la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow E < v$ , entonces no hará falta añadir ninguna asignación. Si alguna de ellas no se cumple, habrá que añadir al menos una asignación con el objetivo de hacer que la implicación se cumpla.

- $\zeta(INV \wedge B) \rightarrow INV?$

Se nos dice que las fórmulas  $INV$  y  $B$  son ciertas y se nos pregunta si la fórmula  $INV$  es cierta. La respuesta es afirmativa, trivialmente. Otra manera de justificar que esta implicación se cumple, consiste en tener en cuenta que  $((\delta_1 \wedge \delta_2) \rightarrow \delta_1) \equiv True$  para dos fórmulas cualesquiera  $\delta_1$  y  $\delta_2$ . Nótese que  $((\delta_1 \wedge \delta_2) \rightarrow \delta_1)$  es equivalente a  $(\neg(\delta_1 \wedge \delta_2) \vee \delta_1)$ , que a su vez es equivalente a  $((\neg\delta_1) \vee (\neg\delta_2) \vee \delta_1)$ . Siempre que en una disyunción de fórmulas aparezcan una fórmula y su negación, la disyunción será cierta porque  $((\neg\pi) \vee \pi) \equiv True$  para cualquier fórmula lógica  $\pi$ . Consecuentemente,  $((\neg\delta_1) \vee (\neg\delta_2) \vee \delta_1) \equiv True \vee (\neg\delta_2) \equiv True$ .

- $\zeta(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow E < v?$  Se nos dice que las fórmulas  $INV$ ,  $B$  y  $E = v$  son ciertas y se nos pregunta si  $E < v$  es cierta. La respuesta es negativa, trivialmente. Si  $E$  es igual a  $v$ , entonces  $E$  no puede ser, al mismo tiempo, menor que  $v$ .

El que se cumpla la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow INV$  conlleva que en lo que respecta al punto (III) no haya necesidad de añadir ninguna asignación. Pero el que no se cumpla la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow E < v$  conlleva que en lo que respecta al punto (VI) sí haya que añadir alguna asignación, siempre con el objetivo de que se cumpla  $E < v$ .

2. **Objetivo:** que se cumpla  $E < v$ :

El objetivo es que se cumpla  $n+1-i < v$  sabiendo que ahora se cumple  $E = v$ , es decir,  $n+1-i = v$ .

$n+1-i$  representa la distancia entre el punto al que hay que llegar ( $n+1$ ) y el punto en el que estamos ( $i$ ). Puesto que previamente hemos visto que el vector se va a recorrer de izquierda a derecha, es decir, hemos visto que el valor de  $i$  ha de ir creciendo, si incrementamos el valor de  $i$  en uno, conseguiremos que la distancia entre el punto al que hay que llegar ( $n+1$ ) y el punto en el que estamos ( $i$ ) decrezca.

Por tanto, deducimos que hay que añadir la asignación  $i := i + 1$ ;

Esa asignación hay que añadirla tanto en el punto (III) como en el (VI), porque las instrucciones han de ser las mismas en ambos casos. Una vez añadida la asignación, se ha de calcular la fórmula correspondiente, utilizando para ello el axioma de la asignación (AA).

3. Cálculo de  $\varphi_3$  y  $\varphi_4$ :

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_3$  a partir de la fórmula  $INV$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned}\varphi_3 &\equiv def(i+1) \wedge INV_i^{i+1} \\ &\equiv True \wedge \lambda \wedge (1 \leq i+1 \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i+1-1)) \\ &\equiv \lambda \wedge (0 \leq i \leq n) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i))\end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, se ha tenido en cuenta que  $True \wedge \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$ . Por otra parte, se ha transformado  $(1 \leq i+1 \leq n+1)$  en  $(0 \leq i \leq n)$ , restando 1 en los tres componentes.

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_4$  a partir de la fórmula  $E < v$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned}\varphi_4 &\equiv def(i+1) \wedge (E < v)_i^{i+1} \\ &\equiv True \wedge (n+1-(i+1) < v) \\ &\equiv True \wedge (n+1-i-1 < v) \\ &\equiv (n-i < v)\end{aligned}$$

Para simplificar la expresión, se ha tenido en cuenta que  $True \wedge \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$ . Por otra parte, se ha transformado  $(n+1-(i+1) < v)$  en  $(n-i < v)$ , aplicando el signo negativo a  $(i+1)$  y realizando la resta 1-1.

	$\alpha_5$	$\alpha_6$
	$w = True$	$i = n + 1$
1	True	True
2	True	False
3	False	True

Tabla 4: Las tres opciones para que la expresión  $((w = True) \vee (i = n + 1))$  sea cierta.

Esquema de partida para el punto (III):
$\{INV \wedge B\}$ $i(INV \wedge B) \rightarrow INV?$  $\{INV\}$
Esquema de partida para el punto (VI):
$\{INV \wedge B \wedge E = v\}$ $i(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow E < v?$  $\{E < v\}$

Figura 5: Esquemas de partida para los puntos (III) y (VI).

Esquema para el punto (III) tras actualizar $i$ :
$\{INV \wedge B\}$ $i(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3?$  $\{\varphi_3 \equiv def(i+1) \wedge INV_i^{i+1}\}$ $\nearrow$ (AA) $i := i + 1;$ $\nwarrow$ $\{INV\}$
Esquema para el punto (VI) tras actualizar $i$ :
$\{INV \wedge B \wedge E = v\}$ $i(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4?$  $\{\varphi_4 \equiv def(i+1) \wedge (E < v)_i^{i+1}\}$ $\nearrow$ (AA) $i := i + 1;$ $\nwarrow$ $\{E < v\}$

Figura 6: Esquemas para los puntos (III) y (VI) tras actualizar  $i$ .

En la figura 6 de la página 13, se muestran los esquemas para los puntos (III) y (VI) tras la actualización de  $i$ . Una vez que se han calculado  $\varphi_3$  y  $\varphi_4$ , se han de comprobar la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3$  y la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4$ .

4.  $\text{¿}(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3?$   $\text{¿}(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4?$

- Comprobación de la implicación:  $\text{¿}(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3?$

$$\underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{INV} \wedge \underbrace{(w = False) \wedge (i \neq n+1)}_B \rightarrow \underbrace{\lambda \wedge (0 \leq i \leq n) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i))}_{\varphi_3}?$$

En la primera parte (parte izquierda o primera línea) de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1)) \wedge (w = False) \wedge (i \neq n+1)$$

Si descomponemos  $(1 \leq i \leq n+1)$ , nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{(i \leq n+1)}_{\alpha_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{\alpha_4} \wedge \underbrace{(w = False)}_{\alpha_5} \wedge \underbrace{(i \neq n+1)}_{\alpha_6}$$

En la segunda parte (parte derecha o segunda línea) tenemos cuatro preguntas:  $\text{¿}\lambda?$   $\text{¿}0 \leq i?$   $\text{¿}i \leq n?$   $\text{¿}w \leftrightarrow \mu(i)?$

- $\text{¿}\lambda?$  Sí, por  $\alpha_1$ .
- $\text{¿}0 \leq i?$  Sí, por  $\alpha_2$ .
- $\text{¿}i \leq n?$  Sí, por  $\alpha_3$  y  $\alpha_6$ .
- $\text{¿}w \leftrightarrow \mu(i)?$  Considerando el significado de  $\mu(i)$ , la pregunta queda de la siguiente forma:

$$\text{¿}w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq i \wedge k \bmod A(k) = 0)?$$

Las fórmulas existenciales representan una disyunción. En este caso, la pregunta queda de la siguiente manera:

$$\text{¿}w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1) \vee \gamma(i))? \quad (9)$$

De  $\alpha_4$  sabemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow \exists k(1 \leq k \leq i-1 \wedge k \bmod A(k) = 0)$$

Si expresamos la fórmula existencial como una disyunción, tenemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1))$$

Por  $\alpha_5$  sabemos que  $w$  es *False*. Por tanto,  $\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1)$  es *False*. En definitiva, la pregunta (9) queda de la siguiente forma:

$$\text{¿}False \leftrightarrow (False \vee \gamma(i))? \quad (10)$$

Puesto que  $False \vee \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$ , la pregunta (10) queda de la siguiente forma:

$$\text{¿}False \leftrightarrow \gamma(i)? \quad (11)$$

Es decir:

$$\text{¿}False \leftrightarrow (i \bmod A(i) = 0)? \quad (12)$$

En  $INV \wedge B$  no tenemos información que nos sirva para responder a esa pregunta. Por consiguiente, la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3$  no se cumple.

Hemos comprobado que la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3$  no se cumple.

- Comprobación de la implicación:  $\iota(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4$ ?

$$\underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{INV} \wedge \underbrace{(w = False) \wedge (i \neq n+1)}_B \wedge \underbrace{(n+1-i=v)}_{E=v} \rightarrow \underbrace{(n-i < v)}_{\varphi_4}?$$

En la primera parte de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n+1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i-1)) \wedge (w = False) \wedge (i \neq n+1) \wedge (n+1-i=v)$$

Si descomponemos  $(1 \leq i \leq n+1)$ , nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{(i \leq n+1)}_{\alpha_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i-1))}_{\alpha_4} \wedge \underbrace{(w = False)}_{\alpha_5} \wedge \underbrace{(i \neq n+1)}_{\alpha_6} \wedge \underbrace{(n+1-i=v)}_{\alpha_7}$$

En la segunda parte de la implicación tenemos una pregunta:  $\iota n-i < v$ ?

- $\iota n-i < v$ ? Por  $\alpha_7$  sabemos que  $(n+1-i=v)$ . Si restamos 1 a ambos lados de la igualdad, nos queda  $(n+1-i-1=v-1)$ , es decir,  $(n-i=v-1)$ . Puesto que para cualquier número entero  $z$  se cumple  $z-1 < z$ , también se cumple  $v-1 < v$ . Por tanto, deducimos que  $(n-i < v)$ .

Hemos comprobado que la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4$  se cumple.

El que no se cumpla la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_3$  conlleva que en lo que respecta al punto (III) sí haya que añadir alguna asignación, siempre con el objetivo de que se cumpla  $\varphi_3$ . Pero el que se cumpla la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_4$  conlleva que en lo que respecta al punto (VI) no haya necesidad de añadir ninguna asignación.

##### 5. **Objetivo:** que se cumpla $\varphi_3$ :

Hemos visto que  $INV \wedge B$  no implica  $\varphi_3$ . En concreto, dentro de  $\varphi_3$  el componente que no se cumple es  $w \leftrightarrow \mu(i)$ . De manera extendida, lo que no se cumple es la siguiente equivalencia:

$$\iota w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1) \vee \gamma(i))?$$

De  $\alpha_4$  sabemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1))$$

Sabiendo que el valor de  $w$  coincide con el valor de  $\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1)$  y sabiendo que lo que se quiere es que el valor de  $w$  coincida con el valor de  $\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i-1) \vee \gamma(i)$ , vemos que el único elemento que le falta a  $w$  para que se cumpla eso, es que se le añada  $\vee \gamma(i)$  al valor que ya tiene.

Por tanto, la asignación que se necesita es  $w := w \vee \gamma(i)$ ;

Esa asignación hay que añadirla tanto en el punto (III) —encima de  $\varphi_3$ — como en el (VI) —encima de  $\varphi_4$ —, porque las instrucciones han de ser las mismas en ambos casos. Una vez añadida la asignación, se ha de calcular la fórmula correspondiente, utilizando para ello el axioma de la asignación

(AA).

Puesto que por  $\alpha_5$  sabemos que  $w$  es *False*, teniendo en cuenta que  $\text{False} \vee \delta \equiv \delta$  para cualquier  $\delta$ , la asignación puede ponerse también como  $w := \gamma(i)$ ; De todas formas, en los siguientes apartados utilizaremos la asignación  $w := w \vee \gamma(i)$ ;

6. Cálculo de  $\varphi_5$  y  $\varphi_6$ :

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_5$  a partir de la fórmula  $\varphi_3$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned}
 \varphi_5 &\equiv \text{def}(w \vee \gamma(i)) \wedge (\varphi_3)_w^{w \vee \gamma(i)} \\
 &\equiv \text{def}(w \vee (i \bmod A(i) = 0)) \wedge \lambda \wedge (0 \leq i \leq n) \wedge ((w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i)) \\
 &\equiv \underbrace{(1 \leq i \leq n)}_{A(i)} \wedge \underbrace{(A(i) \neq 0)}_{\bmod A(i)} \wedge \lambda \wedge (0 \leq i \leq n) \wedge ((w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i)) \\
 &\equiv (1 \leq i \leq n) \wedge \lambda \wedge ((w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i)) \\
 &\equiv (1 \leq i) \wedge (i \leq n) \wedge \lambda \wedge ((w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i))
 \end{aligned}$$

En la parte correspondiente a  $\text{def}(w \vee \gamma(i))$ , se ha puesto el intervalo  $(1 \leq i \leq n)$  por  $A(i)$  y se ha puesto  $(A(i) \neq 0)$  porque aparece el resto de la división por  $A(i)$ . Se ha eliminado  $(A(i) \neq 0)$  porque en  $\lambda$  se dice  $\text{posit}(A(1..n))$ . De la expresión  $\text{posit}(A(1..n))$  se deduce  $(A(i) \neq 0)$  y, por tanto, se puede eliminar  $(A(i) \neq 0)$ . Para determinar el intervalo de  $i$  a partir de  $(1 \leq i \leq n)$  y  $(0 \leq i \leq n)$ , se ha cogido el mayor de los límites inferiores (1) y el menor de los límites superiores ( $n$ ). Finalmente, se ha separado  $(1 \leq i \leq n)$  en dos trozos:  $(1 \leq i)$  y  $(i \leq n)$ .

- Cálculo de la fórmula  $\varphi_6$  a partir de la fórmula  $\varphi_4$  utilizando el axioma de la asignación (AA).

$$\begin{aligned}
 \varphi_6 &\equiv \text{def}(w \vee \gamma(i)) \wedge (\varphi_4)_w^{w \vee \gamma(i)} \\
 &\equiv \text{def}(w \vee (i \bmod A(i) = 0)) \wedge (n - i < v)_w^{w \vee \gamma(i)} \\
 &\equiv \underbrace{(1 \leq i \leq n)}_{A(i)} \wedge \underbrace{(A(i) \neq 0)}_{\bmod A(i)} \wedge (n - i < v) \\
 &\equiv (1 \leq i) \wedge (i \leq n) \wedge (A(i) \neq 0) \wedge (n - i < v)
 \end{aligned}$$

De la misma forma que al calcular  $\varphi_5$ , en la parte correspondiente a  $\text{def}(w \vee \gamma(i))$ , se ha puesto el intervalo  $(1 \leq i \leq n)$  por  $A(i)$  y se ha puesto  $(A(i) \neq 0)$  porque aparece el resto de la división por  $A(i)$ . Pero a diferencia de lo que ha ocurrido al calcular  $\varphi_5$ , en  $\varphi_6$  no es posible eliminar  $(A(i) \neq 0)$  porque en  $\varphi_6$  no aparece  $\lambda$ . Para obtener la versión final de  $\varphi_6$ , se ha separado  $(1 \leq i \leq n)$  en dos trozos:  $(1 \leq i)$  y  $(i \leq n)$ .

En la figura 7 de la página 17, se muestran los esquemas para los puntos (III) y (VI) tras la actualización de  $w$ . Una vez que se han calculado  $\varphi_5$  y  $\varphi_6$ , se han de comprobar la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_5$  y la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_6$ .

7.  $\iota(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_5$ ?  $\iota(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_6$ ?

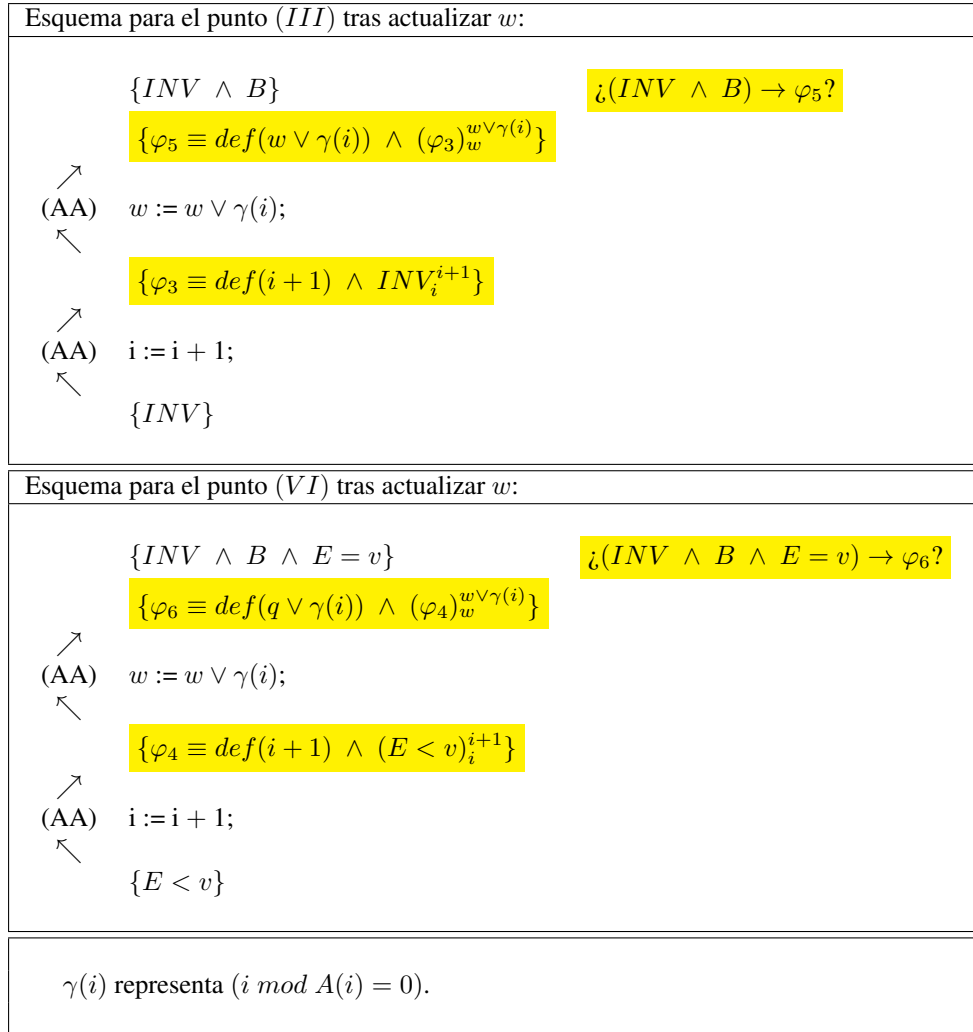
- Comprobación de la implicación:  $\iota(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_5$ ?

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{INV} \wedge \underbrace{(w = \text{False}) \wedge (i \neq n + 1)}_B \rightarrow \\
 &\quad \underbrace{(1 \leq i) \wedge (i \leq n) \wedge \lambda \wedge ((w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i))}_{\varphi_5}
 \end{aligned}$$

En la primera parte (parte izquierda o primera línea) de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1)) \wedge (w = \text{False}) \wedge (i \neq n + 1)$$



Figura 7: Esquemas para los puntos (III) y (VI) tras actualizar  $w$ .

Si descomponemos ( $1 \leq i \leq n + 1$ ), nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{(i \leq n + 1)}_{\alpha_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{\alpha_4} \wedge \underbrace{(w = False)}_{\alpha_5} \wedge \underbrace{(i \neq n + 1)}_{\alpha_6}$$

En la segunda parte (parte derecha o segunda línea) tenemos cuatro preguntas:  $\dot{?} 1 \leq i?$   $\dot{?} i \leq n?$   $\dot{?} \lambda?$   $\dot{?} (w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i)?$

- $\dot{?} 1 \leq i?$  Sí, por  $\alpha_2$ .
- $\dot{?} i \leq n?$  Sí, por  $\alpha_3$  y  $\alpha_6$ .
- $\dot{?} \lambda?$  Sí, por  $\alpha_1$ .
- $\dot{?} (w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \mu(i)?$  Considerando el significado de  $\mu(i)$ , la pregunta queda de la siguiente forma:

$$\dot{?} (w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow \exists k (1 \leq k \leq i \wedge k \bmod A(k) = 0)?$$

Las fórmulas existenciales representan una disyunción. En este caso, la pregunta queda de la siguiente manera:

$$\dot{?} (w \vee \gamma(i)) \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i - 1) \vee \gamma(i))? \quad (13)$$

De  $\alpha_4$  sabemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow \exists k (1 \leq k \leq i - 1 \wedge k \bmod A(k) = 0)$$

Si expresamos la fórmula existencial como una disyunción, tenemos que se cumple lo siguiente:

$$w \leftrightarrow (\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i - 1))$$

Por  $\alpha_5$  sabemos que  $w$  es *False*. Por tanto,  $\gamma(1) \vee \gamma(2) \vee \dots \vee \gamma(i - 1)$  es *False*. En definitiva, la pregunta (13) queda de la siguiente forma:

$$\dot{?} (False \vee \gamma(i)) \leftrightarrow (False \vee \gamma(i))? \quad (14)$$

Puesto que  $False \vee \delta \equiv \delta$  para cualquier fórmula  $\delta$ , la pregunta (14) queda de la siguiente forma:

$$\dot{?} \gamma(i) \leftrightarrow \gamma(i)? \quad (15)$$

La respuesta es afirmativa porque  $\delta \leftrightarrow \delta \equiv True$  para cualquier fórmula  $\delta$ .

Hemos comprobado que la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_5$  se cumple.

- Comprobación de la implicación:  $\dot{?} (INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_6?$

$$\underbrace{\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{INV} \wedge \underbrace{(w = False) \wedge (i \neq n + 1)}_B \wedge \underbrace{(n + 1 - i = v)}_{E = v} \rightarrow \underbrace{(1 \leq i) \wedge (i \leq n) \wedge (A(i) \neq 0) \wedge (n - i < v)}_{\varphi_6}$$

En la primera parte de la implicación tenemos la información:

$$\lambda \wedge (1 \leq i \leq n + 1) \wedge (w \leftrightarrow \mu(i - 1)) \wedge (w = False) \wedge (i \neq n + 1) \wedge (n + 1 - i = v)$$

Si descomponemos  $(1 \leq i \leq n + 1)$ , nos queda:

$$\underbrace{\lambda}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{(1 \leq i)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{(i \leq n + 1)}_{\alpha_3} \wedge \underbrace{(w \leftrightarrow \mu(i - 1))}_{\alpha_4} \wedge \underbrace{(w = False)}_{\alpha_5} \wedge \underbrace{(i \neq n + 1)}_{\alpha_6} \\ \wedge \underbrace{(n + 1 - i = v)}_{\alpha_7}$$

En la segunda parte de la implicación tenemos cuatro preguntas: ¿ $1 \leq i$ ? ¿ $i \leq n$ ? ¿ $A(i) \neq 0$ ? ¿ $n - i < v$ ?

- ¿ $1 \leq i$ ? Sí, por  $\alpha_2$ .
- ¿ $i \leq n$ ? Sí, por  $\alpha_3$  y  $\alpha_6$ .
- ¿ $A(i) \neq 0$ ? En  $\alpha_1$ , es decir, en  $\lambda$ , tenemos que el vector  $A(1..n)$  cumple  $posit(A(1..n))$ . Por tanto, todos los elementos de  $A(1..n)$  son mayores o iguales que 1. Esto significa que son distintos de 0. Así que podemos asegurar que  $A(i)$  es distinto de 0.
- ¿ $n - i < v$ ? Por  $\alpha_7$  sabemos que  $(n + 1 - i = v)$ . Si restamos 1 a ambos lados de la igualdad, nos queda  $(n + 1 - i - 1 = v - 1)$ , es decir,  $(n - i = v - 1)$ . Puesto que para cualquier número entero  $z$  se cumple  $z - 1 < z$ , también se cumple  $v - 1 < v$ . Por tanto, deducimos que  $(n - i < v)$ .

Hemos comprobado que la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_6$  se cumple.

Puesto que se han cumplido la implicación  $(INV \wedge B) \rightarrow \varphi_5$  y la implicación  $(INV \wedge B \wedge E = v) \rightarrow \varphi_6$ , no hace falta añadir más asignaciones. Consecuentemente, hemos terminado la derivación del programa.

#### 1.2.4 (d) Escribir el programa completo al final

En la figura 8 de la página 20, se muestra el programa que se ha construido. Ahí aparecen también las fórmulas que se han calculado.

Programa derivado:
$\{\varphi\}$ $\{\varphi_2\}$ $w := \text{False};$ $\{\varphi_1\}$ $i := 1;$ <b>while</b> $\{INV\} \{E\} (\text{not } w \text{ and } i \neq n + 1)$ <b>loop</b> $\{\varphi_5\} \quad \{\varphi_6\}$ $\quad w := (w \text{ or } (i \bmod A(i) = 0));$ $\{\varphi_3\} \quad \{\varphi_4\}$ $\quad i := i + 1;$ <b>end loop;</b> $\{\psi\}$

Figura 8: Programa derivado.

Letras griegas adicionales utilizadas en la solución:
$\alpha$ : alfa $\beta$ : beta $\delta$ : delta

Tabla 5: Denominaciones de las letras griegas adicionales utilizadas en la solución.