Metodología de la Programación

Grado en Ingeniería Informática de Gestión y Sistemas de Información
Escuela de Ingeniería de Bilbao (UPV/EHU)
Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos
Curso: 1^o
Curso académico: 2022-2023
Grupo 01
Tema 5: Especificación ecuacional de los TAD

Inducción sobre listas

Última actualización: 11 - 01 - 2023

Índice

1 ¿Se cumple $suma(s\ ++\ r) = suma(s) + suma(r)$ para dos listas cualesquiera de enteros s y r? 3
- 1.1 Especificación ecuacional de la función $suma$ . . . 3
- 1.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$ . . . 3
- 1.3 Propiedades a utilizar . . . 4
- 1.4 Caso simple: $s = [\,]$ . . . 4
  - 1.4.1 Comprobación de la igualdad . . . 4
  - 1.4.2 Conclusión . . . 5
- 1.5 Caso inductivo: $s = x : w$ . . . 5
  - 1.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 5
  - 1.5.2 Comprobación de la igualdad . . . 5
  - 1.5.3 Conclusión . . . 6

2 ¿Se cumple $s\ ++\ [\,] = s$ para cualquier lista s? 7
- 2.1 Especificación ecuacional de la función $(++)$ . . . 7
- 2.2 Propiedades a utilizar . . . 7
- 2.3 Caso simple: $s = [\,]$ . . . 7
  - 2.3.1 Comprobación de la igualdad . . . 7
  - 2.3.2 Conclusión . . . 8
- 2.4 Caso inductivo: $s = x : w$ . . . 8
  - 2.4.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 8
  - 2.4.2 Comprobación de la igualdad . . . 8
  - 2.4.3 Conclusión . . . 9

3 ¿Se cumple $nveces(x, s\ ++\ r) = nveces(x, s) + nveces(x, r)$ para cualquier elemento x y para dos listas cualesquiera s y r? 10
- 3.1 Especificación ecuacional de la función $nveces$ . . . 10
- 3.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$ . . . 10
- 3.3 Propiedades a utilizar . . . 11
- 3.4 Caso simple: $s = [\,]$ . . . 11
  - 3.4.1 Comprobación de la igualdad . . . 11
  - 3.4.2 Conclusión . . . 12

3.5 Caso inductivo: $s = y : w$ . . . 12
3.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 12
3.5.2 Comprobación de la igualdad . . . 12
3.5.3 Conclusión . . . 14

4 ¿Se cumple $esta(x, s \ ++ \ r) = esta(x, s) \ \vee \ esta(x, r)$ para cualquier elemento x y para dos listas cualesquiera s y r? 15
4.1 Especificación ecuacional de la función $esta$ . . . 15
4.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$ . . . 15
4.3 Propiedades a utilizar . . . 16
4.4 Caso simple: $s = [\,]$ . . . 16
4.4.1 Comprobación de la igualdad . . . 16
4.4.2 Conclusión . . . 17
4.5 Caso inductivo: $s = y : w$ . . . 17
4.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 17
4.5.2 Comprobación de la igualdad . . . 17
4.5.3 Conclusión . . . 19

5 ¿Se cumple $esta(x, s) = esta(x, inversa(s))$ para cualquier elemento x y cualquier lista s? 20
5.1 Especificación ecuacional de la función $esta$ . . . 20
5.2 Especificación ecuacional de la función $inversa$ . . . 20
5.3 Propiedades a utilizar . . . 21
5.4 Caso simple: $s = [\,]$ . . . 21
5.4.1 Comprobación de la igualdad . . . 21
5.4.2 Conclusión . . . 22
5.5 Caso inductivo: $s = y : w$ . . . 22
5.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 22
5.5.2 Comprobación de la igualdad . . . 22
5.5.3 Conclusión . . . 24

6 ¿Se cumple $suma(s) = ultimo(s) \ + \ suma(sin\_ultimo(s))$ para cualquier lista no vacía s? 25
6.1 Especificación ecuacional de la función $suma$ . . . 25
6.2 Especificación ecuacional de la función $ultimo$ . . . 25
6.3 Especificación ecuacional de la función sin_ultimo . . . 26
6.4 Propiedades a utilizar . . . 26
6.5 Caso simple: $s = x : [\,]$ . . . 26
6.5.1 Comprobación de la igualdad . . . 27
6.5.2 Conclusión . . . 28
6.6 Caso inductivo: $s = x : w$ y $w \neq [\,]$ . . . 28
6.6.1 Hipótesis de la inducción (h.i.): . . . 28
6.6.2 Comprobación de la igualdad . . . 28
6.6.3 Conclusión . . . 30

7 Letras griegas utilizadas 31

Lista de figuras

Lista de tablas

1 Denominaciones de las letras griegas utilizadas en los ejemplos de inducción sobre listas. . . 31

****

1 ¿Se cumple $suma(s\ ++\ r) = suma(s) + suma(r)$ para dos listas cualesquiera de enteros s y r?

Sean s y r dos listas cualesquiera de enteros. Utilizaremos la inducción para probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$suma(s\ ++\ r) = suma(s) + suma(r)$$

La inducción se aplicará sobre la lista s.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes a las funciones $suma$ y $(++)$ que aparecen en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = [\,]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $suma$ y $(++)$. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = x : w$. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $suma$ y $(++)$. Además, en el caso inductivo, es necesario hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que la sublista w y la lista r cumplen la igualdad. En este ejemplo, hace falta utilizar dos propiedades adicionales sobre números: $(Prop\ 1.1)$ y $(Prop\ 1.2)$. Esas propiedades aparecen en el apartado 1.3 de la página 4.

1.1 Especificación ecuacional de la función $suma$

Dada una lista de tipo Int, la función $suma$ calculará la suma de los elementos de la lista.

Ejemplos

- ▷ $suma([8, 5, 9, 5]) = 27$
- ▷ $suma([5]) = 5$
- ▷ $suma([\,]) = 0$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s, r y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$suma :: ([Int]) \ {-}{>}\ Int$$

$$suma([\,]) = 0 \qquad (Ec.\ 1.1)$$

$$suma(a : b) = a + suma(b) \qquad (Ec.\ 1.2)$$

1.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$

Dadas dos listas de tipo t, la función $(++)$ devuelve la lista que se obtiene al concatenar las dos listas de entrada. Se respetará el orden de los elementos.

Ejemplos

- ▷ $[8, 5, 9, 5]\ ++ [20, 17] = [8, 5, 9, 5, 20, 17]$
- ▷ $[8, 5, 9, 5]\ ++ [\,] = [8, 5, 9, 5]$

Ecuaciones

También aquí, se utilizarán a, b y c.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$(++) :: ([t], [t]) \to [t]$$

$$[\,] ++ c = c \quad (Ec.\ 1.3)$$

$$(a : b) ++ c = a : (b ++ c) \quad (Ec.\ 1.4)$$

1.3 Propiedades a utilizar

Hay que utilizar las siguientes dos propiedades de los números:

- $(Prop\ 1.1)$ 0 es elemento neutro para la operación de adición de números $+$: $i + 0 = 0 + i = i$.
- $(Prop\ 1.2)$ La adición de números $+$ es asociativa: $i + (j + k) = (i + j) + k$.

1.4 Caso simple: $s = [\,]$

Cuando se cumple $s = [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$¿suma([\,] \ ++ r) = suma([\,]) + suma(r)?$$

1.4.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$¿\underbrace{suma([\,] \ ++ r)}_{\alpha} = \underbrace{suma([\,]) + suma(r)}_{\beta}?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$= suma(\underbrace{[\,] \ ++ \underbrace{r}_{c}}_{Ec.\ 1.3}) =$

$= \boxed{suma(r)}$

Desarrollo de β:

$\beta =$

$= \underbrace{suma([\,])}_{Ec.\ 1.1} + suma(r) =$

$= \underbrace{0 + \underbrace{suma(r)}_{i}}_{Prop\ 1.1} =$

$= \boxed{suma(r)}$

1.4.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

1.5 Caso inductivo: $s = x : w$

Cuando $s = x : w$, la pregunta es la siguiente:

$$¿suma((x : w)\ \ ++\ r) = suma(x : w) + suma(r)?$$

1.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para la sublista w de s y para la lista r:

$$\underbrace{suma(w\ \ ++\ r)}_{\lambda} = \underbrace{suma(w) + suma(r)}_{\pi}$$

1.5.2 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son iguales en el caso inductivo.

$$¿\underbrace{suma((x : w)\ \ ++\ r)}_{\gamma} = \underbrace{suma(x : w) + suma(r)}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$\gamma =$

$$= \underbrace{suma((\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b})\ ++\ \underbrace{r}_{c})}_{Ec.\ 1.4} =$$

$$= \underbrace{suma(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{(w\ ++\ r)}_{b})}_{Ec.\ 1.2} =$$

$$= x + \underbrace{\underbrace{suma(w\ ++\ r)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \boxed{x + (\underbrace{suma(w) + suma(r)}_{\pi})}$$

Desarrollo de δ:

$\delta =$

$$= \underbrace{suma(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b})}_{Ec.\ 1.2} + suma(r) =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{x}_{i} + \underbrace{suma(w)}_{j}) + \underbrace{suma(r)}_{k}}_{Prop\ 1.2} =$$

$$= \boxed{x + (\underbrace{suma(w) + suma(r)}_{\pi})}$$

Se ha utilizado la propiedad $(Prop\ 1.2)$ para mover de sitio los paréntesis.

1.5.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos desarrollado γ y δ y hemos comprobado que son iguales. Por tanto, en el caso $s = x : w$, se cumple la propiedad que estamos probando.

2 ¿Se cumple $s \ ++ \ [\,] = s$ para cualquier lista s?

Utilizaremos la técnica de la inducción para probar que se cumple la igualdad $s \ ++ \ [\,] = s$ para cualquier lista s. La inducción se aplicará sobre la lista s.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes al operador $(++)$ que aparece en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = [\ ]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones del operador $(++)$. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = x : w$. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones del operador $(++)$. Además, en el caso inductivo, es imprescindible hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que la sublista w cumple la igualdad. En este ejemplo, no hace falta utilizar propiedades adicionales.

2.1 Especificación ecuacional de la función $(++)$

Dadas dos listas de tipo t, la función $(++)$ devuelve la lista que se obtiene al concatenar las dos listas de entrada. Se respetará el orden de los elementos.

Ejemplos

- ▷ $[8, 5, 9, 5] ++ [20, 17] = [8, 5, 9, 5, 20, 17]$
- ▷ $[8, 5, 9, 5] ++ [\,] = [8, 5, 9, 5]$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
(++) :: ([t], [t]) \to [t] & & \\
[\,] ++ c & = c & (Ec.\ 2.1) \\
(a : b) ++ c & = a : (b ++ c) & (Ec.\ 2.2)
\end{array}
$$

2.2 Propiedades a utilizar

No hace falta ninguna propiedad adicional.

2.3 Caso simple: $s = [\,]$

Cuando $s = [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$¿[\,] \ ++ \ [\,] = [\,]?$$

2.3.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$¿\underbrace{[\,] \ ++ \ [\,]}_{\alpha} = \underbrace{[\,]}_{\beta}?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación, y con qué elementos de la ecuación se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$= \underbrace{[\,] \ ++ \ \underbrace{[\,]}_{c}}_{Ec.\ 2.1} =$

$= \underbrace{[\,]}_{c}$

Desarrollo de β:

$\beta =$

$= [\,]$

En la expresión β no se puede realizar ninguna transformación porque desde el principio tenemos una constante: la lista vacía.

2.3.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

2.4 Caso inductivo: $s = x : w$

Cuando $s = x : w$, la pregunta es la siguiente:

$$¿(x : w) \ ++ [\,] = x : w?$$

2.4.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para la sublista w de s:

$$\underbrace{w \ ++ [\,]}_{\lambda} = \underbrace{w}_{\pi}$$

2.4.2 Comprobación de la igualdad

También en el caso inductivo, se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$¿\underbrace{(x : w) \ ++ [\,]}_{\gamma} = \underbrace{x : w}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación, y con qué elementos de la ecuación se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$$\gamma =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b}) \; ++ \; \underbrace{[\,]}_{c}}_{Ec.\ 2.2} =$$

$$= x : \underbrace{\underbrace{(w \; ++ [\,])}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \boxed{x : (\underbrace{w}_{\pi})}$$

Desarrollo de δ:

$$\delta =$$

$$= \boxed{x : (\underbrace{w}_{\pi})}$$

En la expresión δ no se puede realizar ninguna transformación.

2.4.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos desarrollado γ y δ y hemos comprobado que son iguales. Por tanto, en el caso $s = x : w$, se cumple la propiedad que estamos probando.

3 ¿Se cumple $nveces(x, s \ {+}{+}\ r) = nveces(x, s) + nveces(x, r)$ para cualquier elemento x y para dos listas cualesquiera s y r?

Sea x un elemento de cualquier tipo y sean s y r dos listas cualesquiera cuyos componentes son del mismo tipo que x. Utilizaremos la inducción para probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$nveces(x, s \ {+}{+}\ r) = nveces(x, s) + nveces(x, r)$$

La inducción se aplicará sobre la lista s.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes a las funciones $nveces$ y $(++)$ que aparecen en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = [\,]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $nveces$ y $(++)$. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = y : w$. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $nveces$ y $(++)$. Además, en el caso inductivo, es necesario hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que el elemento x, la sublista w y la lista r cumplen la igualdad. En este ejemplo, hace falta utilizar dos propiedades adicionales sobre números: $(Prop\ 3.1)$ y $(Prop\ 3.2)$. Esas propiedades aparecen en el apartado 3.3 de la página 11.

3.1 Especificación ecuacional de la función $nveces$

Dado un elemento de cualquier tipo y una lista cuyos componentes son del mismo tipo que el mencionado elemento, la función $nveces$ calculará cuántas veces aparece el elemento en la lista.

Ejemplos

- ▷ $nveces(5, [8, 5, 9, 5]) = 2$
- ▷ $nveces(7, [8, 5, 9, 5]) = 0$
- ▷ $nveces(5, [\,]) = 0$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s, w y r de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$nveces :: (t, [t]) \ {-}{>}\ Int$$

$$nveces(a, [\,]) \qquad = 0 \qquad (Ec.\ 3.1)$$

$$\begin{array}{lll} nveces(a, b : c) & & \\ \quad \mid a == b & = 1 + nveces(a, c) & (Ec.\ 3.2) \\ \quad \mid a \mathrel{/}= b & = nveces(a, c) & (Ec.\ 3.3) \end{array}$$

3.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$

Dadas dos listas de tipo t, la función $(++)$ devuelve la lista que se obtiene al concatenar las dos listas de entrada. Se respetará el orden de los elementos.

Ejemplos

- ▷ $[8, 5, 9, 5] +\!+ [20, 17] = [8, 5, 9, 5, 20, 17]$
- ▷ $[8, 5, 9, 5] +\!+ [\,] = [8, 5, 9, 5]$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$(++) :: ([t], [t]) \to [t]$$

$$[\,] ++ c \qquad = c \qquad (Ec.\ 3.4)$$

$$(a : b) ++ c \qquad = a : (b ++ c) \quad (Ec.\ 3.5)$$

3.3 Propiedades a utilizar

Hay que utilizar las siguientes dos propiedades de los números:

- $(Prop\ 3.1)$ 0 es elemento neutro para la operación de adición de números $+$: $i + 0 = 0 + i = i$.
- $(Prop\ 3.2)$ La adición de números $+$ es asociativa: $i + (j + k) = (i + j) + k$.

3.4 Caso simple: $s = [\,]$

Cuando se cumple $s = [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$nveces(x, [\,] \ ++ r) = nveces(x, [\,]) + nveces(x, r)?$$

3.4.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$\underbrace{nveces(x, [\,] \ ++ r)}_{\alpha} = \underbrace{nveces(x, [\,]) + nveces(x, r)}_{\beta}?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$= nveces(x, \underbrace{[\,] \ ++ \underbrace{r}_{c}}_{Ec.\ 3.4}) =$

$= nveces(x, r)$

Desarrollo de β:

$$\beta =$$

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, [\,])}_{Ec.\ 3.1} + nveces(x, r) =$$

$$= \underbrace{0 + \underbrace{nveces(x, r)}_{i}}_{Prop\ 3.1} =$$

$$= \boxed{nveces(x, r)}$$

3.4.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

3.5 Caso inductivo: $s = y : w$

Cuando $s = y : w$, la pregunta es la siguiente:

$$nveces(x, (y : w)\ ++\ r) = nveces(x, y : w) + nveces(x, r)?$$

3.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para x, para la sublista w de s y para la lista r:

$$\underbrace{nveces(x, w\ ++\ r)}_{\lambda} = \underbrace{nveces(x, w) + nveces(x, r)}_{\pi}$$

3.5.2 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son iguales en el caso inductivo.

$$\underbrace{nveces(x, (y : w)\ ++\ r)}_{\gamma} = \underbrace{nveces(x, y : w) + nveces(x, r)}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$\gamma =$

$$= nveces(x, \underbrace{(\underbrace{y}_{a} : \underbrace{w}_{b}) \;{+}{+}\; \underbrace{r}_{c}}_{Ec.\ 3.5}) =$$

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 3.2 \text{ o } Ec.\ 3.3} = \textbf{(dos opciones: } (\gamma_1)\ x == y\textbf{; } (\gamma_2)\ x \neq y\textbf{)}$$

- Opción (γ_1) $x == y$:

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 3.2} =$$

$$= 1 + \underbrace{\underbrace{nveces(x, w \;{+}{+}\; r)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= 1 + (\underbrace{nveces(x, w) + nveces(x, r)}_{\pi})$$

- Opción (γ_2) $x \neq y$:

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 3.3} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{nveces(x, w \;{+}{+}\; r)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \underbrace{nveces(x, w) + nveces(x, r)}_{\pi}$$

Desarrollo de δ:

$\delta =$

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 3.2 \text{ o } Ec.\ 3.3} + nveces(x, r) = \textbf{(dos opciones: } (\delta_1)\ x == y\textbf{; } (\delta_2)\ x \neq y\textbf{)}$$

- Opción (δ_1) $x == y$:

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 3.2} + nveces(x, r) =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{1}_{i} + \underbrace{nveces(x, w)}_{j}) + \underbrace{nveces(x, r)}_{k}}_{Prop\ 3.2} =$$

$$= \boxed{1 + (\underbrace{nveces(x, w) + nveces(x, r)}_{\pi})}$$

- Opción (δ_2) $x \neq y$:

$$= \underbrace{nveces(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 3.3} + nveces(x, r) =$$

$$= \boxed{\underbrace{nveces(x, w) + nveces(x, r)}_{\pi}}$$

3.5.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos empezado a desarrollar γ y δ, pero tanto en el caso γ como en el caso δ, hemos tenido que considerar dos subcasos. Ello se debe a que si se cumple $x = y$, se ha de aplicar la ecuación 3.2, mientras que si se cumple $x \neq y$, se ha de aplicar la ecuación 3.3. Consecuentemente, en el caso γ, se han considerado los subcasos γ_1 ($x = y$) y γ_2 ($x \neq y$) y, de la misma forma, en el caso δ, se han considerado los subcasos δ_1 ($x = y$) y δ_2 ($x \neq y$).

Hemos comprobado que en los subcasos γ_1 y δ_1 se llega a la misma expresión y que en los subcasos γ_2 y δ_2 se llega también a la misma expresión. Por tanto, en el caso $s = y : w$, se cumple la propiedad que estamos probando tanto si se cumple $x = y$ como si se cumple $x \neq y$.

4 ¿Se cumple $esta(x, s \mathbin{++} r) = esta(x, s) \lor esta(x, r)$ para cualquier elemento x y para dos listas cualesquiera s y r?

Sea x un elemento de cualquier tipo y sean s y r dos listas cualesquiera cuyos componentes son del mismo tipo que x. Utilizaremos la inducción para probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$esta(x, s \ \mathbin{++} r) = esta(x, s) \ \lor \ esta(x, r)$$

La inducción se aplicará sobre la lista s.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes a las funciones $esta$ y $(++)$ que aparecen en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = [\,]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $esta$ y $(++)$. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = y : w$. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $esta$ y $(++)$. Además, en el caso inductivo, es necesario hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que el elemento x, la sublista w y la lista r cumplen la igualdad. En este ejemplo, hace falta utilizar dos propiedades adicionales sobre números: $(Prop\ 4.1)$ y $(Prop\ 4.2)$. Esas propiedades aparecen en el apartado 4.3 de la página 16.

4.1 Especificación ecuacional de la función $esta$

Dado un elemento de cualquier tipo y una lista cuyos componentes son del mismo tipo que el mencionado elemento, la función $esta$ decidirá si el elemento aparece en la lista.

Ejemplos

- ▷ $esta(4, [8, 5, 9, 5]) = False$
- ▷ $esta(5, [8, 5, 9, 5]) = True$
- ▷ $esta(5, [\,]) = False$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$esta :: (t, [t]) \ {-}{>} \ Bool$$

$$\begin{array}{lll}
esta(a, [\,]) & = False & (Ec.\ 4.1) \\
 & & \\
esta(a, b : c) & & \\
\quad \mid a == b & = True & (Ec.\ 4.2) \\
\quad \mid a \mathrel{/=} b & = esta(a, c) & (Ec.\ 4.3)
\end{array}$$

4.2 Especificación ecuacional de la función $(++)$

Dadas dos listas de tipo t, la función $(++)$ devuelve la lista que se obtiene al concatenar las dos listas de entrada. Se respetará el orden de los elementos.

Ejemplos

- ▷ $[8, 5, 9, 5] \mathbin{++} [20, 17] = [8, 5, 9, 5, 20, 17]$
- ▷ $[8, 5, 9, 5] \mathbin{++} [\,] = [8, 5, 9, 5]$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$(++) :: ([t], [t]) \to [t]$$

$$[\,] ++ c \quad = c \qquad (Ec.\ 4.4)$$

$$(a : b) ++ c \quad = a : (b ++ c) \qquad (Ec.\ 4.5)$$

4.3 Propiedades a utilizar

Hay que utilizar las siguientes dos propiedades de los valores Booleanos:

- $(Prop\ 4.1)$: $True \ \vee\ \psi = \psi\ \vee\ True = True.$
- $(Prop\ 4.2)$: $False \ \vee\ \psi = \psi\ \vee\ False = \psi.$

4.4 Caso simple: $s = [\,]$

Cuando se cumple $s = [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$esta(x, [\,]\ ++ r) = esta(x, [\,])\ \vee\ esta(x, r)?$$

4.4.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$\underbrace{esta(x, [\,]\ ++ r)}_{\alpha} = \underbrace{esta(x, [\,])\ \vee\ esta(x, r)}_{\beta}?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$$= esta(x, \underbrace{[\,]\ ++ \underbrace{r}_{c}}_{Ec.\ 4.4}) =$$

$$= \boxed{esta(x, r)}$$

Desarrollo de β:

$\beta =$

$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, [\,])}_{Ec.\ 4.1} \vee esta(x, r) =$

$= \underbrace{False \vee \underbrace{esta(x, r)}_{\psi}}_{Prop\ 4.2} =$

$= \boxed{esta(x, r)}$

4.4.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

4.5 Caso inductivo: $s = y : w$

Cuando $s = y : w$, la pregunta es la siguiente:

$$esta(x, (y : w)\ ++\ r) = esta(x, y : w)\ \vee\ esta(x, r)?$$

4.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para x, para la sublista w de s y para la lista r:

$$\underbrace{esta(x, w\ ++\ r)}_{\lambda} = \underbrace{esta(x, w)\ \vee\ esta(x, r)}_{\pi}$$

4.5.2 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son iguales en el caso inductivo.

$$\underbrace{esta(x, (y : w)\ ++\ r)}_{\gamma} = \underbrace{esta(x, y : w)\ \vee\ esta(x, r)}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$\gamma =$

$$= esta(x, \underbrace{(\underbrace{y}_{a} : \underbrace{w}_{b}) \;{+}{+}\; \underbrace{r}_{c}}_{Ec.\ 4.5}) =$$

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 4.2 \text{ edo } Ec.\ 4.3} =$$ **(dos opciones: (γ_1) $x == y$; (γ_2) $x \neq y$)**

- Opción (γ_1) $x == y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 4.2} =$$

$$= \boxed{True}$$

- Opción (γ_2) $x \neq y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{(w \;{+}{+}\; r)}_{c})}_{Ec.\ 4.3} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{esta(x, w \;{+}{+}\; r)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \boxed{\underbrace{esta(x, w) \;\vee\; esta(x, r)}_{\pi}}$$

Desarrollo de δ:

$\delta =$

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 4.2 \text{ o } Ec.\ 4.3} \vee esta(x, r) =$$ **(dos opciones: (δ_1) $x == y$; (δ_2) $x \neq y$)**

- Opción (δ_1) $x == y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 4.2} \vee esta(x, r) =$$

$$= \underbrace{True \ \vee \ \underbrace{esta(x, r)}_{\psi}}_{Prop\ 4.1} =$$

$$= \boxed{True}$$

- Opción (δ_2) $x \neq y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 4.3} \vee esta(x, r) =$$

$$= \boxed{\underbrace{esta(x, w) \ \vee \ esta(x, r)}_{\pi}}$$

4.5.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos empezado a desarrollar γ y δ, pero tanto en el caso γ como en el caso δ, hemos tenido que considerar dos subcasos. Ello se debe a que si se cumple $x = y$, se ha de aplicar la ecuación 4.2, mientras que si se cumple $x \neq y$, se ha de aplicar la ecuación 4.3. Consecuentemente, en el caso γ, se han considerado los subcasos γ_1 ($x = y$) y γ_2 ($x \neq y$) y, de la misma forma, en el caso δ, se han considerado los subcasos δ_1 ($x = y$) y δ_2 ($x \neq y$).

Hemos comprobado que en los subcasos γ_1 y δ_1 se llega a la misma expresión y que en los subcasos γ_2 y δ_2 se llega también a la misma expresión. Por tanto, en el caso $s = y : w$, se cumple la propiedad que estamos probando tanto si se cumple $x = y$ como si se cumple $x \neq y$.

5 ¿Se cumple $esta(x, s) = esta(x, inversa(s))$ para cualquier elemento x y cualquier lista s?

Sea x un elemento de cualquier tipo y sea s una lista cualquiera cuyos componentes son del mismo tipo que x. Utilizaremos la inducción para probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$esta(x, s) = esta(x, inversa(s))$$

La inducción se aplicará sobre la lista s.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes a las funciones $esta$ e $inversa$ que aparecen en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = [\,]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $esta$ e $inversa$. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = y : w$. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $esta$ y $inversa$. Además, en el caso inductivo, es necesario hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que el elemento x y la sublista w cumplen la igualdad. En este ejemplo, hace falta utilizar dos propiedades adicionales sobre valores Booleanos y una propiedad sobre listas: $(Prop\ 5.1)$, $(Prop\ 5.2)$ eta $(Prop\ 5.3)$. Esas propiedades aparecen en el apartado 5.3 de la página 21.

5.1 Especificación ecuacional de la función $esta$

Dado un elemento de cualquier tipo y una lista cuyos componentes son del mismo tipo que el mencionado elemento, la función $esta$ decidirá si el elemento aparece en la lista.

Ejemplos

- ▷ $esta(4, [8, 5, 9, 5]) = False$
- ▷ $esta(5, [8, 5, 9, 5]) = True$
- ▷ $esta(5, [\,]) = False$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$esta :: (t, [t]) \;{-}{>}\; Bool$$

$$esta(a, [\,]) \qquad = False \qquad (Ec.\ 5.1)$$

$$\begin{array}{lll} esta(a, b : c) & & \\ \quad \mid a == b & = True & (Ec.\ 5.2) \\ \quad \mid a \mathrel{/=} b & = esta(a, c) & (Ec.\ 5.3) \end{array}$$

5.2 Especificación ecuacional de la función $inversa$

Dada una lista de cualquier tipo, la función $inversa$ devolverá la lista que obtinen poniendo en orden inverso los elementos de la lista de entrada.

Ejemplos

- ▷ $inversa([8, 5, 9, 5]) = [5, 9, 5, 8]$
- ▷ $inversa([8]) = [8]$
- ▷ $inversa([\,]) = [\,]$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a y b.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$inversa :: ([t]) \to [t]$$

$$inversa([\,]) \quad = [\,] \qquad (Ec.\ 5.4)$$

$$inversa(a : b) \quad = inversa(b) \mathbin{++} (a : [\,]) \qquad (Ec.\ 5.5)$$

5.3 Propiedades a utilizar

Hay que utilizar las siguientes tres propiedades de los valores Booleanos y de las listas:

- $(Prop\ 5.1)$: $True\ \vee\ \psi = \psi\ \vee\ True = True$.
- $(Prop\ 5.2)$ $False\ \vee\ \psi = \psi\ \vee\ False = \psi$.
- $(Prop\ 5.3)$ $esta(z, u\ \mathbin{++}\ v) = esta(z, u)\ \vee\ esta(z, v)$, donde, por un lado, z es un elemento de cualquier tipo y, por otro lado, u y v son dos listas cuyos elementos son del mismo tipo que z.

5.4 Caso simple: $s = [\,]$

Cuando se cumple $s = [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$esta(x, [\,]) = esta(x, inversa([\,]))?$$

5.4.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$\underbrace{esta(x, [\,])}_{\alpha} = \underbrace{esta(x, inversa([\,]))}_{\beta}\,?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, [\,])}_{Ec.\ 5.1} =$

$= \boxed{False}$

Desarrollo de β:

$\beta =$

$= esta(x, \underbrace{inversa([\,])}_{Ec.\ 5.4}) =$

$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, [\,])}_{Ec.\ 5.1} =$

$= False$

5.4.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

5.5 Caso inductivo: $s = y : w$

Cuando $s = y : w$, la pregunta es la siguiente:

$$esta(x, y : w) = esta(x, inversa(y : w))?$$

5.5.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para x y para la sublista w de s:

$$\underbrace{esta(x, w)}_{\lambda} = \underbrace{esta(x, inversa(w))}_{\pi}$$

5.5.2 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son iguales en el caso inductivo.

$$\underbrace{esta(x, y : w)}_{\gamma} = \underbrace{esta(x, inversa(y : w))}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$\gamma =$

$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 5.2 \text{ o } Ec.\ 5.3} =$ **(dos opciones: (γ_1) $x == y$; (γ_2) $x \neq y$)**

- Opción (γ_1) $x == y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 5.2} =$$

$$= \boxed{True}$$

- Opción (γ_2) $x \neq y$:

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{w}_{c})}_{Ec.\ 5.3} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{esta(x, w)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \boxed{\underbrace{esta(x, inversa(w)))}_{\pi}}$$

Desarrollo de δ:

$$\delta =$$

$$= esta(x, \underbrace{inversa(\underbrace{y}_{a} : \underbrace{w}_{b})}_{Ec.\ 5.5}) =$$

$$= \underbrace{esta(\underbrace{x}_{z}, \underbrace{inversa(w)}_{u} \ ++ \ \underbrace{(y : [\,])}_{v})}_{Prop\ 5.3} =$$

$$= esta(x, inversa(w)) \ \vee \ \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{[\,]}_{c})}_{Ec.\ 5.2 \text{ o } Ec.\ 5.3} = \textbf{(dos opciones: } (\delta_1)\ x == y\textbf{; } (\delta_2)\ x \neq y\textbf{)}$$

- Opción (δ_1) $x == y$:

$$= esta(x, inversa(w)) \lor \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{[\,]}_{c})}_{Ec.\ 5.2} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{esta(x, inversa(w))}_{\psi} \lor True}_{Prop\ 5.1} =$$

$$= \boxed{True}$$

- Opción (δ_2) $x \neq y$:

$$= esta(x, inversa(w)) \lor \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, \underbrace{y}_{b} : \underbrace{[\,]}_{c})}_{Ec.\ 5.3} =$$

$$= esta(x, inversa(w)) \lor \underbrace{esta(\underbrace{x}_{a}, [\,])}_{Ec.\ 5.1} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{esta(x, inversa(w))}_{\psi} \lor False}_{Prop\ 5.2} =$$

$$= \boxed{\underbrace{esta(x, inversa(w)))}_{\pi}}$$

5.5.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos empezado a desarrollar γ y δ, pero tanto en el caso γ como en el caso δ, hemos tenido que considerar dos subcasos. Ello se debe a que si se cumple $x = y$, se ha de aplicar la ecuación 5.2, mientras que si se cumple $x \neq y$, se ha de aplicar la ecuación 5.3. Consecuentemente, en el caso γ, se han considerado los subcasos γ_1 ($x = y$) y γ_2 ($x \neq y$) y, de la misma forma, en el caso δ, se han considerado los subcasos δ_1 ($x = y$) y δ_2 ($x \neq y$).

Hemos comprobado que en los subcasos γ_1 y δ_1 se llega a la misma expresión y que en los subcasos γ_2 y δ_2 se llega también a la misma expresión. Por tanto, en el caso $s = y : w$, se cumple la propiedad que estamos probando tanto si se cumple $x = y$ como si se cumple $x \neq y$.

6 ¿Se cumple $suma(s) = ultimo(s) + suma(sin\_ultimo(s))$ para cualquier lista no vacía s?

Sean s una lista cualquiera de enteros. Utilizaremos la inducción para probar que se cumple la siguiente igualdad:

$$suma(s) = ultimo(s) + suma(sin\_ultimo(s))$$

La inducción se aplicará sobre la lista s.

Esta propiedad se cumple solo para listas no vacías, porque las funciones $ultimo$ y sin_ultimo generan un error si la lista es vacía.

Para aplicar dicha técnica, en primer lugar, habrá que dar las ecuaciones correspondientes a las funciones $suma$, $ultimo$ y sin_ultimo que aparecen en esa igualdad. En segundo lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso simple, es decir, cuando $s = x : [\,]$. Para ello, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $suma$, $ultimo$ y sin_ultimo. En tercer lugar, habrá que probar que la igualdad se cumple en el caso inductivo, es decir, cuando $s = x : w$, donde w es una lista no vacía. También en este caso, será necesario utilizar las ecuaciones de las funciones $suma$, $ultimo$ y sin_ultimo. Además, en el caso inductivo, es necesario hacer uso de la hipótesis de la inducción: consideraremos que la sublista w cumple la igualdad. En este ejemplo, hace falta utilizar tres propiedades adicionales sobre números: $(Prop\ 6.1)$, $(Prop\ 6.2)$ y $(Prop\ 6.3)$. Esas propiedades aparecen en el apartado 6.4 de la página 26.

6.1 Especificación ecuacional de la función $suma$

Dada una lista de tipo Int, la función $suma$ calculará la suma de los elementos de la lista.

Ejemplos

- ▷ $suma([8, 5, 9, 5]) = 27$
- ▷ $suma([5]) = 5$
- ▷ $suma([\,]) = 0$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a, b y c para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$suma :: ([Int]) -> \ Int$$

$$suma([\,]) \qquad = 0 \qquad (Ec.\ 6.1)$$

$$suma(a : b) \qquad = a + suma(b) \qquad (Ec.\ 6.2)$$

6.2 Especificación ecuacional de la función $ultimo$

Dada una lista de cualquier tipo, la función $ultimo$ devolverá el elemento situado más a la derecha. Si la lista es vacía, generará un error.

Ejemplos

- ▷ $ultimo([8, 5, 9, 3]) = 3$
- ▷ $ultimo([8, 5, 9, 5, 5]) = 5$
- ▷ $ultimo([20]) = 20$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a y b para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$ultimo :: ([t]) \; {-}{>} \; t$$

$$ultimo([\,]) \qquad = error \text{ ''Lista vacía.''} \qquad (Ec.\ 6.3)$$

$$\begin{array}{lll} ultimo(a : b) & & \\ \quad |\ es\_vacia(b) & = a & (Ec.\ 6.4) \\ \quad |\ otherwise & = ultimo(b) & (Ec.\ 6.5) \end{array}$$

6.3 Especificación ecuacional de la función sin_ultimo

Dada una lista de cualquier tipo, la función sin_ultimo devolverá la lista que se obtinen al eliminar el elemento situado más a la derecha. Si la lista es vacía, generará un error.

Ejemplos

- ▷ $sin\_ultimo([8, 5, 9, 3]) = [8, 5, 9]$
- ▷ $sin\_ultimo([8, 5, 9, 5, 5]) = [8, 5, 9, 5]$
- ▷ $sin\_ultimo([20]) = [\,]$

Ecuaciones

Al formular las ecuaciones, representaremos los elementos mediante las letras a y b para no generar confusión con los elementos x, s y w de la igualdad y del caso inductivo.

La especificación ecuacional es la siguiente:

$$sin\_ultimo :: ([t]) \; {-}{>} \; [t]$$

$$sin\_ultimo([\,]) \qquad = error \text{ ''Lista vacía.''} \qquad (Ec.\ 6.6)$$

$$\begin{array}{lll} sin\_ultimo(a : b) & & \\ \quad |\ es\_vacia(b) & = [\,] & (Ec.\ 6.7) \\ \quad |\ otherwise & = a : sin\_ultimo(b) & (Ec.\ 6.8) \end{array}$$

6.4 Propiedades a utilizar

Hay que utilizar las siguientes tres propiedades de los números:

- ○ $(Prop\ 6.1)$ 0 es elemento neutro para la operación de adición de números $+$: $i + 0 = 0 + i = i$.
- ○ $(Prop\ 6.2)$ La adición de números $+$ es asociativa: $i + (j + k) = (i + j) + k$.
- ○ $(Prop\ 6.3)$ La adición de números $+$ es conmutativa: $i + j = j + i$.

6.5 Caso simple: $s = x : [\,]$

Cuando se cumple $s = x : [\,]$, la pregunta es la siguiente:

$$suma(x : [\,]) = ultimo(x : [\,]) + suma(sin\_ultimo(x : [\,]))?$$

6.5.1 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son realmente iguales.

$$\underbrace{suma(x : [\,])}_{\alpha} = \underbrace{ultimo(x : [\,]) + suma(sin\_ultimo(x : [\,]))}_{\beta}\,?$$

Desarrollo de α y β:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de α:

$\alpha =$

$= \underbrace{suma(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{[\,]}_{b})}_{Ec.\ 6.2} =$

$= x + \underbrace{suma([\,])}_{Ec.\ 6.1} =$

$= \underbrace{x + 0}_{Prop\ 6.1} =$

$= \boxed{x}$

Desarrollo de β:

$\beta =$

$= \underbrace{ultimo(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{[\,]}_{b})}_{Ec.\ 6.4} + suma(sin\_ultimo(x : [\,])) =$

$= x + \underbrace{suma(sin\_ultimo(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{[\,]}_{b}))}_{Ec.\ 6.7} =$

$= x + \underbrace{suma([\,])}_{Ec.\ 6.1} =$

$= \underbrace{\underbrace{x}_{i} + 0}_{Prop\ 6.1} =$

$= \boxed{x}$

6.5.2 Conclusión

En ambos lados (α y β), se ha obtenido el mismo valor. Por tanto, en el caso $s = [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

6.6 Caso inductivo: $s = x : w$ y $w \neq [\,]$

Siendo $w \neq [\,]$, cuando $s = x : w$, la pregunta es la siguiente:

$$suma(x : w) = ultimo(x : w) + suma(sin\_ultimo(x : w))?$$

6.6.1 Hipótesis de la inducción (h.i.):

Se ha de considerar que la ecuación se cumple para la sublista no vacía w de s:

$$\underbrace{suma(w)}_{\lambda} = \underbrace{ultimo(w) + suma(sin\_ultimo(w))}_{\pi}$$

6.6.2 Comprobación de la igualdad

Se ha de comprobar que los dos lados de la igualdad son iguales en el caso inductivo.

$$\underbrace{suma(x : w)}_{\gamma} = \underbrace{ultimo(x : w) + suma(sin\_ultimo(x : w))}_{\delta}?$$

Desarrollo de γ y δ:

En cada paso, se indicará qué ecuación o propiedad se va a utilizar, a qué parte de la expresión se le aplicará la ecuación o la propiedad, y con qué elementos de la ecuación o la propiedad se asocian los elementos de la expresión que se tiene en ese paso.

Desarrollo de γ:

$$\gamma =$$

$$= \underbrace{suma(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b})}_{Ec.\ 6.1} =$$

$$= x + \underbrace{\underbrace{suma(w)}_{\lambda}}_{h.i.} =$$

$$= \boxed{x + (\underbrace{ultimo(w) + suma(sin\_ultimo(w))}_{\pi})}$$

Desarrollo de δ:

$$\delta =$$

$$= \underbrace{ultimo(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b})}_{w \neq [\,],\ Ec.\ 6.5} + suma(sin\_ultimo(x : w)) =$$

$$= ultimo(w) + suma(\underbrace{sin\_ultimo(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{w}_{b})}_{w \neq [\,],\ Ec.\ 6.8}) =$$

$$= ultimo(w) + \underbrace{suma(\underbrace{x}_{a} : \underbrace{sin\_ultimo(w)}_{b})}_{Ec.\ 6.2} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{ultimo(w)}_{i} + (\underbrace{x}_{j} + \underbrace{suma(sin\_ultimo(w))}_{k})}_{Prop\ 6.2} =$$

$$= (\underbrace{\underbrace{ultimo(w)}_{i} + \underbrace{x}_{j}}_{Prop\ 6.3}) + suma(sin\_ultimo(w)) =$$

$$= \underbrace{(\underbrace{x}_{i} + \underbrace{ultimo(w)}_{j}) + \underbrace{suma(sin\_ultimo(w))}_{k}}_{Prop\ 6.2} =$$

$$= \boxed{x + (\underbrace{ultimo(w) + suma(sin\_ultimo(w))}_{\pi})}$$

Se ha utilizado la propiedad $(Prop\ 6.2)$ para mover de sitio los paréntesis, mientras que se ha utilizado la propiedad $(Prop\ 6.3)$ para intercambiar de sitio dos elementos.

6.6.3 Conclusión

En el caso inductivo, hemos desarrollado γ y δ y hemos comprobado que son iguales. Por tanto, en el caso $s = x : w$, siendo $w \neq [\,]$, se cumple la propiedad que estamos probando.

7 Letras griegas utilizadas

Las denominaciones de las letras griegas utilizadas en los ejemplos de inducción sobre listas se encuentran en la tabla 1 de la página 31.

Letras griegas utilizadas en los ejemplos de inducción sobre listas:						
α : alfa	β : beta	γ : gamma	δ : delta	λ : lambda	π : pi	ψ : psi

Tabla 1: Denominaciones de las letras griegas utilizadas en los ejemplos de inducción sobre listas.