VERSUCH NUMMER 107

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Irgendjemand
irgend.jemand@tu-dortmund.de

Someone
some.one@tu-dortmund.de

Durchführung: 07.12.2021 Abgabe: 14.12.2021

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll durch das Beobachten einer Kugel die sich durch eine Flüssigkeit bewegt die Viskosität dieser Flüssigkeit bestimmt werden. Dazu wird ein Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler verwendet.

2 Theorie

2.1 Die Viskosität in Abhängigkeit der wirkenden Kräfte

Auf eine Kugel die sich durch eine Flüssigkeit bewegt, wirken drei Kräfte. Die Gewichtskraft F_G, die Reibungskraft F_R und die Auftriebskraft F_A. Dabei sind die Auftriebskraft und die Reibungskraft der Gewichtskraft entgegengesetzt. Wenn sich die Kugel in einer Flüssigkeit mit ausreichender Ausdehnung bewegt, treten keine Wirbel (siehe Laminare Strömung) auf und die Reibungskraft kann als

$$F_\mathrm{R} = 6 \cdot \eta \cdot v \cdot r \tag{1}$$

ausgedrückt werden. F_R hängt von der Materialeigenschaft η, sowie der Geschwindigkeit v und dem Kugelradius r ab. Da die Reibungskraft von der Geschwindigkeit abhängt, wird sie während des Falls größer, bis sie sich mit der Gewichtskraft ausgleicht und sich die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit weiter bewegt. Für diesen Versuch interessiert aber die Viskosität η. Diese kann durch die Formel

$$\eta = K\left(\rho_\mathrm{K} - \rho_\mathrm{Fl}\right) \cdot t \tag{2}$$

bestimmt werden. K ist eine Apparaturkonstante, die sich aus der Fallhöhe und der Kugelgeometrie bestimmen lässt. ρ_K und ρ_Fl sind die Dichten der Kugel und der Flüssigkeit. η ist stark temperaturabhängig. Diese Abhängigkeit kann durch die Andradesche Gleichung

$$\eta(T) = A \exp \frac{B}{T} \tag{3}$$

bestimmt werden. Dabei sind A und B Konstanten.

2.2 Laminare Strömung

Laminaren Strömungen sind solche, die keine turbolenten Wirbel aufweisen. Das bedeutet im Besonderen, dass diese Strömungen in getrennten Schichten auftreten. Diese Schichten interagieren nicht mit einander. Dies ermöglicht es, dass die Flüssigkeit keine Wirbel bildet obwohl es verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten gibt. Dies ist besonders wichtig, da sonst die Reibungskraft F_R nicht über die Gleichung 1 bestimmt werden kann und sich so der Zusammenhang in Gleichung 2 verändert. Quantitativ werden laminare Strömungen durch die Reynoldssche Zahl bestimmt [1]. Die Reynoldssche Zahl berechnet sich da bei zu

$$Re = \frac{d \cdot \rho_\mathrm{Fl} \cdot v}{\eta}. \tag{4}$$

Dabei beschreibt v die Geschwindigkeit der Strömung, η die Viskosität von Wasser, ρ_Fl die Dichte von Wasser und d den Durchmesser der Kugel. Unter einem kritischen Wert von 2300 gilt eine Strömung als laminar.

2.3 Berechnung der Messunsicherheiten

Alle Mittelwerte einer N-fach gemessenen Größe x werden über die Formel

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_\mathrm{i}. \tag{5}$$

berechnet. Der zugehörige Fehler des Messwertes berechnet sich dann über

$$\Delta\overline{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_\mathrm{i} - \overline{x})^2}. \tag{6}$$

Setzt sich eine zu berechnende Größe aus mehreren mit Unsicherheit behafteten Messwerten zusammen, so ist die Unsicherheit dieser Größe über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung gegeben

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2 \right]}. \tag{7}$$

Ausgleichsgraden lassen sich wie folgt berechnen:

$$y = m \cdot x + b \tag{8a}$$

$$m = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \tag{8b}$$

$$b = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}. \tag{8c}$$

Bei der Angabe des Endergebnisses wird schließlich der sich aus den Unsicherheiten ergebene systematische Fehler mit dem sich aus der Mittelwertberechnung ergebenden statistischen Fehler addiert. Alle Berechnungen, Graphen sowie das Bestimmen der Unsicherheiten werden mit Python 3.8.8 und entsprechenden Bibliotheken[1] durchgeführt.

[1] Numpy [2], Uncertainties [3] and Matplotlib [4]

3 Versuchsaufbau und Durchführung

In diesem Versuch soll die Viskosität von destilliertem Wasser bestimmt werden. Des weiteren wird ihre Temperaturabhängigkeit dargestellt. Dazu wird ein Kugelfallviskosimeter nach Höppler verwendet, welches im nächsten Abschnitt näher beschrieben wird.

3.1 Das Höppler-Viskosimeter

In Abbildung 1 ist ein Glasrohr mit mehreren Messmarken erkennbar. In dieses Glasrohr kann eine Kugel und die zu untersuchende Flüssigkeit eingefüllt werden. Sobald sich die Kugel im Fallrohr befindet, wird die Apparatur mit der dazu vorgesehenen Schraube verschlossen. Um die Temperatur der Flüssigkeit zu erhöhen, wird der zweite größere Glaszylinder verwendet, welcher das Fallrohr außen umschließt. Er funktioniert als Wasserbad, welches mithilfe eines Thermostates mit warmem Wasser durchflossen wird. Die Wassertemperatur wird mithilfe eines Thermometers abgelesen. Am Fallzylinder sind drei Messmarken angebracht, über welche die Fallstrecke definiert ist. Die Länge der Strecke zwischen den einzelnen Messmarken ist s = 50 mm. Zwischen der ersten und letzten Strecke folgt damit die Länge x = 100 mm. Die Kugel ist beim Versuch so zu wählen, sie vor dem Passieren der ersten Messmarke eine konstante Geschwindigkeit hat. Um wiederholt zu messen, kann das Viskosimeter um 180° Grad gedreht werden. Dabei sollten die Zeiten für die verschiedenen Fallrichtungen getrennt aufgeschrieben werden, um so mögliche Unterschiede bemerkbar zu machen.

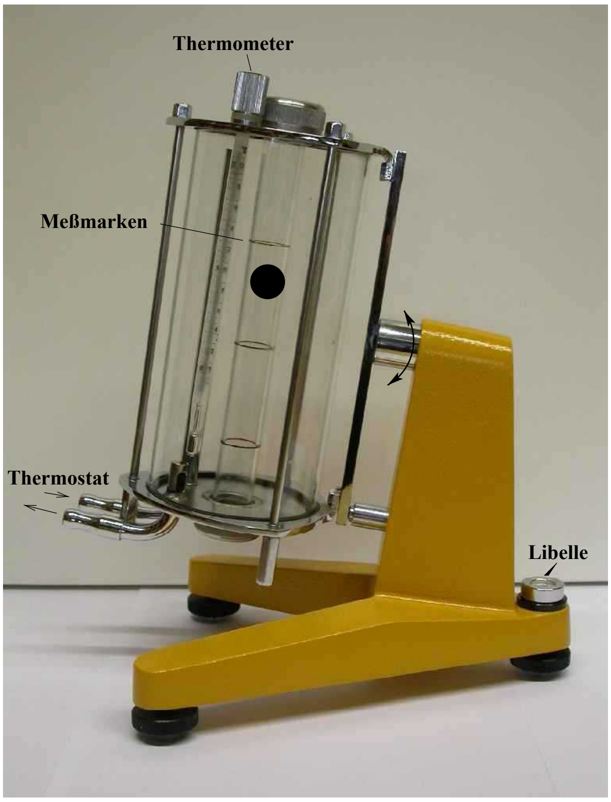

Abbildung 1: Kugelfallviskosimeter nach Höppler [5]

3.2 Versuchsdurchführung

Zuerst soll die Dichte von zwei unterschiedlich großen Glaskugeln aus der jeweiligen Masse und dem Volumen bestimmt werden. Bevor mit dem Messen begonnen werden kann, muss dann noch mithilfe der Libelle des Viskosimeters die Apparatur so aufgebaut werde, dass sie eben steht. Steht das Viskosimeter eben, wird das Fallrohr bis oben mit destillierten Wasser befüllt. Dabei ist sicherzustellen, dass sich keine Luftblasen an Rohrwand oder Kugel befinden. Nachdem die Kugel ins Glasrohr gegeben wurde, wird dieses verschlossen. Mithilfe einer Stoppuhr wird dann die Zeit gemessen, die die Kugel benötigt, um die Strecke zwischen den Messmarken zurückzulegen. Diese Messung wird bei Raumtemperatur durchgeführt. Sobald die Kugel die untere Messmarke überschritten hat, wird das Viskosimeter um 180° gedreht und die Messung wiederholt. Für die kleine Kugel werden beide Fallrichtungen werden zehnmal gemessen. Bei der großen Kugel werden nur fünf Messungen durchgeführt. Außerdem wird auch nur die Zeit gemessen, die die Kugel benötigt, um bis zur zweiten Messmarke zu gelangen, als die Zeit, die sie für eine Strecke von s = 50 mm benötigt. Im zweiten Teil des Versuches wird das Wasser mithilfe des Wasserbads langsam auf bis zu 50 °C erhitzt. Danach setzt die Siedeblasenbildung ein, was die Messung der Viskosität verfälscht. Während des Erhitzens werden für mindestens zehn Temperaturen zwei Mal pro Fallrichtungen gemessen. Dabei muss nach ein bis zwei Messungen muss die Entlüftungsschraube am Viskosimeter gelockert werden.

4 Auswertung

4.1 Berechnung der Apparaturkonstanten

Um die mit der Viskosität zusammenhängenden Werte berechnen zu können, müssen zunächst die Dichten der beiden Kugeln bestimmt werden. Dazu werden die gegebenen Massen der Kugeln

$$m_{\mathrm{kl}} = 4{,}5\,\mathrm{g}$$
$$m_{\mathrm{gr}} = 5{,}0\,\mathrm{g}$$

und die mit einer Schieblehre gemessenen Werten für die Radien der großen und kleinen Kugel

$$r_{\mathrm{kl}} = (1{,}560 \pm 0{,}005)\,\mathrm{cm}$$
$$r_{\mathrm{gr}} = (1{,}580 \pm 0{,}005)\,\mathrm{cm}$$

verwendet. Mithilfe der Radien wird dann zunächst das Volumen der beidem Glaskugeln über die Formel für das Kugelvolumen

$$V_{\mathrm{Kugel}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{\mathrm{Kugel}}$$

zu

$$V_{\mathrm{kl}} = (1{,}988 \pm 0{,}019)\,\mathrm{cm}^3$$
$$V_{\mathrm{gr}} = (2{,}065 \pm 0{,}020)\,\mathrm{cm}^3$$

bestimmt. Über die Formel

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ergeben sich die Werte

$$\rho_{\mathrm{kl}} = (2{,}240 \pm 0{,}022)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{gr}} = (2{,}398 \pm 0{,}023)\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$$

für die Dichten. Nun gilt es mit Hilfe von Gleichung (2), der gegebenen Apparaturkonstante für die kleine Kugel $K_{\mathrm{kl}} = 0{,}076\,\mathrm{mPa\,cm^3/g}$ und dem Mittelwert der in Tabelle 1 dargestellten Messwerte für die Fallzeit t der Kugel die Viskosität η des Wassers auszurechnen.

Tabelle 1: Messdaten der Fallzeit der kleinen Kugel

t_{hin} / s	t_{rueck} / s
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12
12	12

Der Mittelwert der Zeiten für die kleine Kugel ergibt sich dann zu

$$t_{\text{kl, hin}} = (11{,}8 \pm 0{,}3)\,\text{s}$$
$$t_{\text{kl, rück}} = (11{,}8 \pm 0{,}4)\,\text{s}.$$

Die hier angegebene Unsicherheit ist dabei die Summe der mit $\Delta t = 250\,\text{ms}$ abgeschätzten Reaktionszeit und der Unsicherheit des Mittelwertes. Damit und mit einer Dichte von Wasser bei Raumtemperatur von $\rho_{\text{Fl}} = 1{,}0\,\text{g/cm}^3$ ergeben sich die Viskositäten dann schließlich zu

$$\eta_{\text{kl, hin}} = (1{,}12 \pm 0{,}03)\,\text{mPa s}$$

und

$$\eta_{\text{kl, rück}} = (1{,}12 \pm 0{,}03)\,\text{mPa s}.$$

Um die Apparaturkonstante für die große Kugel zu berechnen, werden die Mittelwerte der Zeiten aus Tabelle 2 berechnet.

Tabelle 2: Messdaten der Fallzeit der großen Kugel

t_{hin} / s	t_{rueck} / s
38	36
38	39
39	39
39	39
38	40
38	39

Gemessen wurde hierbei die Fallzeit über die Hälfte der Strecke, also $s = 50\,\text{mm}$, somit müssen alle Zeiten für die große Kugel mit 2 multipliziert werden, bevor die Mittelwerte bildet werden. So ergeben sich die Mittelwerte für die gesamte Fallstrecke von $x = 100\,\text{mm}$ zu

$$t_{\text{gr, hin}} = (76{,}6 \pm 1{,}1)\,\text{s}$$
$$t_{\text{gr, rück}} = (77{,}2 \pm 2{,}3)\,\text{s}$$

Durch Umstellen von Gleichung (2) zur Apparaturkonstanten ergibt sich folgende Formel für die Apparaturkonstante

$$K_{\text{gr}} = \left(\rho_{\text{gr}} - \rho_{\text{Fl}}\right) \cdot \frac{t_{\text{gr}}}{\eta}.$$

Die Apparaturkonstanten von Hin- und Rückweg berechnen sich dann zu

$$K_{\text{gr, hin}} = (0{,}0105 \pm 0{,}0004)\,\frac{\text{mPa cm}^3}{\text{g}}$$
$$K_{\text{gr, rück}} = (0{,}0104 \pm 0{,}0005)\,\frac{\text{mPa cm}^3}{\text{g}}$$

4.2 Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der Viskosität

In Unterabschnitt 2.1 wurde hergeleitet, dass die Viskosität in folgender Form von der Temperatur abhängt

$$\eta(T) = A \exp \frac{B}{T}. \qquad ((3))$$

Um die Parameter A und B zu bestimmen, wird eine Regressionsgerade verwendet. Dazu wird die Gleichung (3) umgestellt zu

$$\ln(\eta(T)) = \ln(A) + \frac{B}{T}. \qquad (9)$$

Es wird nun also der Logarithmus der Viskosität gegen die Reziproke der Temperatur aufgetragen. Dazu werden zunächst die Mittelwerte der Zeiten für die einzelnen Temperaturen aus Tabelle 3 gebildet. Auch hier wurde nur die Hälfte der Strecke gemessen und die Zeiten müssen somit wieder mit 2 multipliziert werden (siehe Unterabschnitt 4.1).

Tabelle 3: Messdaten der Fallzeit für verschiedene Temperaturen

T / °C	t_{hin} / s	t_{rueck} / s
26	33	34
26	34	33
29	33	33
29	31	32
32	31	31
32	30	30
34	29	29
34	29	30
36	28	28
36	28	28
38	27	27
38	27	27
40	26	26
40	26	26
42	25	25
42	25	25
44	24	24
44	25	24
46	24	24
46	23	24
48	23	23
48	23	22
50	22	22
50	21	22

Die Viskositäten η berechnen sich nach Gleichung (2). Neben den Mittelwerten der Zeiten wird dazu auch die temperaturabhängige Dichte des Wassers gemäß der Literaturwerte [6] verwendet. Zur Umrechnung von °C zu K werden die Messwerte um $273,15$ erhöht.

Tabelle 4: Messdaten der Fallzeit für verschiedene Temperaturen

T / K	$\frac{1}{T}$ / 10^{-3} 1/K	ρ_{Fl} / g/cm^3	t_{hin} / s	η_{hin} / mPa s	$\ln\left(\frac{\eta_{hin}}{\mathrm{Pa\,s}}\right)$
300	3,3	1,0	67,00±0,80	0,980±0,040	−6,92±0,04
300	3,3	1,0	63,80±2,00	0,940±0,050	−6,97±0,05
310	3,3	1,0	61,20±0,60	0,900±0,034	−7,01±0,04
310	3,3	0,99	58,68±0,27	0,862±0,032	−7,06±0,04
310	3,2	0,99	56,20±0,40	0,827±0,031	−7,10±0,04
310	3,2	0,99	54,20±0,90	0,797±0,032	−7,13±0,04
310	3,2	0,99	52,00±0,50	0,766±0,029	−7,17±0,04
320	3,2	0,99	50,60±0,50	0,746±0,028	−7,20±0,04
320	3,2	0,99	48,60±1,00	0,716±0,030	−7,24±0,04
320	3,1	0,99	47,00±0,40	0,693±0,026	−7,27±0,04
320	3,1	0,99	45,36±0,35	0,669±0,025	−7,31±0,04
320	3,1	0,99	43,30±0,90	0,640±0,027	−7,35±0,04

Tabelle 5: Messdaten der Fallzeit für verschiedene Temperaturen

T / K	$\frac{1}{T}$ / 10^{-3} 1/K	ρ_{Fl} / g/cm^3	$t_{rück}$ / s	$\eta_{rück}$ / mPa s	$\ln\left(\frac{\eta_{rück}}{\mathrm{Pa\,s}}\right)$
300	3,3	1,0	66,80±1,20	0,970±0,050	−6,94±0,05
300	3,3	1,0	64,50±1,70	0,940±0,050	−6,97±0,05
310	3,3	1,0	60,80±0,60	0,890±0,040	−7,03±0,05
310	3,3	0,99	59,20±0,60	0,860±0,040	−7,05±0,05
310	3,2	0,99	56,40±0,50	0,820±0,040	−7,10±0,05
310	3,2	0,99	54,20±0,40	0,790±0,040	−7,14±0,05
310	3,2	0,99	51,70±0,70	0,760±0,040	−7,19±0,05
320	3,2	0,99	50,41±0,28	0,737±0,034	−7,21±0,05
320	3,2	0,99	48,71±0,26	0,712±0,033	−7,25±0,05
320	3,1	0,99	47,14±0,29	0,690±0,032	−7,28±0,05
320	3,1	0,99	45,20±0,50	0,662±0,032	−7,32±0,05
320	3,1	0,99	43,40±0,40	0,636±0,030	−7,36±0,05

Die in den Tabellen berechneten Werte werden nun in ein Diagramm eingetragen und dann wird für beide Messungen eine lineare Regression durchgeführt.

Maximilian Freiheit
Jonas Alexander Minor

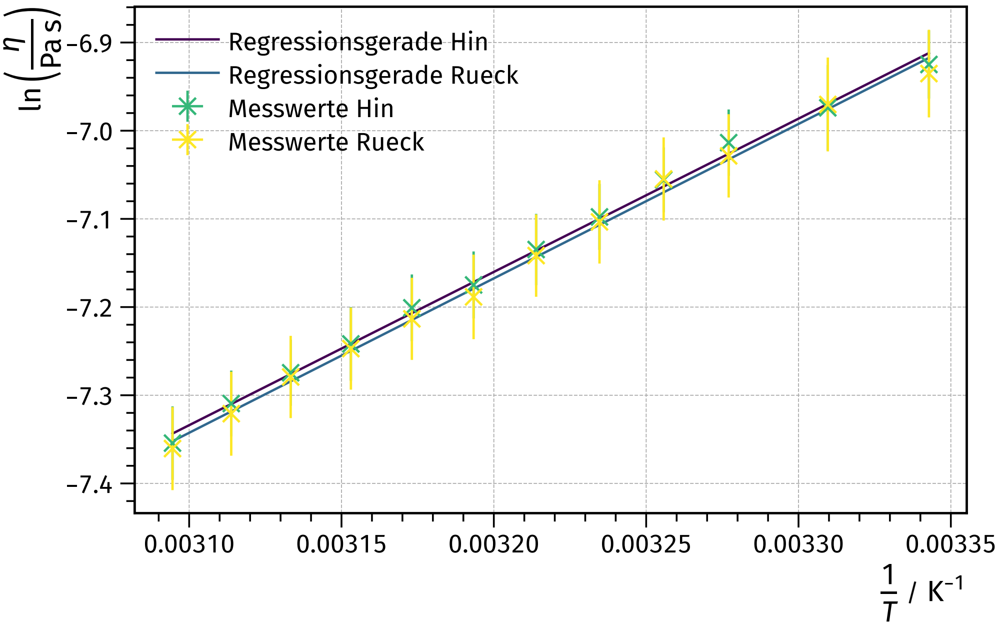

Abbildung 2: Ausgleichsgrade

Die Regression liefert für den Hinweg die Werte

$$m_{\text{hin}} = (1738 \pm 29)\,\text{K}$$
$$b_{\text{hin}} = -12{,}72 \pm 0{,}09.$$

Daraus folgt dann für A_{hin} und B_{hin}

$$B_{\text{hin}} = (1738 \pm 29)\,\text{K}$$
$$A_{\text{hin}} = (-2{,}98 \pm 0{,}28) \cdot 10^{-6}\,\text{Pa s}.$$

Für den Rückweg liefert die Regression die Werte

$$m_{\text{rück}} = (1751 \pm 34)\,\text{K}$$
$$b_{\text{rück}} = -12{,}77 \pm 0{,}11.$$

Daraus folgt dann für A_{hin} und B_{hin}

$$B_{\text{rück}} = (1751 \pm 34)\,\text{K}$$
$$A_{\text{rück}} = (-2{,}80 \pm 0{,}31) \cdot 10^{-6}\,\text{Pa s}.$$

Zuletzt wird dann noch geprüft, ob das Wasser im Viskosimeter turbolent oder laminar fließt. Dazu werden jeweils die Reynoldsschen Zahlen für die große und kleine Kugel für alle Fallzeiten bestimmt und dann das Maximum davon gebildet. Zum Berechnen wird Gleichung 4 verwendet, wobei die konstante Geschwindigkeit v als $v = {}^{x}/_{t}$ berechnet wird. Damit lautet die Formel

$$Re = \frac{d \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot x}{\eta \cdot t}.$$

Die Fallstrecke x der Kugeln beträgt $x = 100\,\text{mm}$. Das Maximum der Reynoldsschen Zahlen wird für die beiden kleinsten Fallzeiten erreicht, da die Abhängigkeit antiproportional ist. Für Hin- und Rückweg folgen dann die maximalen Reynoldsschen Zahlen für die beiden Kugeln

$$Re_{\text{max, kl, hin}} = 119 \pm 4$$
$$Re_{\text{max, kl, rück}} = 119 \pm 4$$
$$Re_{\text{max, gr, hin}} = 18{,}6 \pm 0{,}6$$
$$Re_{\text{max, gr, rück}} = 18{,}6 \pm 0{,}7.$$

5 Diskussion

Bei Betrachtung der bestimmten Viskositäten bei Raumtemperatur

$$\eta_{\text{kl, hin}} = (1{,}12 \pm 0{,}03)\,\text{mPa s} \tag{10}$$

ist eine Abweichung vom Literaturwert

$$\eta_{\text{Lit}} = 1{,}0\,\text{mPa s}$$

zu bemerken. Dies ist auf einen systematischen Fehler zurückzuführen. Zur Messung der Zeit wurde eine Stoppuhr verwendet, welche einen solchen Fehler aufweisen kann. Auch kann die verwendete Schieblehre kann eine Unsicherheit verursachen.
Weiterhin ist zu beachten, dass der relativ große statistische Fehler der temperaturabhängigen Daten aus den zusammenhängenden Gleichungen folgt. Da alle vorher bestimmten Daten verwendet werden, setzen sich die Fehler durch alle Formeln hindurch und verursachen große Unsicherheiten. Der Durchmesser der Kugeln kann mit einer Schieblehre nur bis auf 0,050 mm bestimmt werden. Diese Größe ist aber für alle weiteren Rechnungen elementar und der Fehler pflanzt sich durch alle Berechnungen fort. Daraus folgen auch die im Vergleich großen Fehler in Abbildung 2. Des Weiteren wurde die Reaktionszeit in den Fehler mitaufgenommen und sorgt für die Ungenauigkeit der Daten. Ähnlich ist die Temperatureinstellung nicht perfekt, was dazu führt, dass das Wasser nicht die exakte Temperatur erreichen kann. Es ist nur die Temperatur im Gerät bekannt aber nicht die tatsächliche Temperatur des Wassers. Dies beeinträchtigt die Messgenauigkeit. Zuletzt fällt auf, dass die Reynoldzahlen deutlich unter dem kritischen Wert liegen. Dies spricht dafür das die Messwerte nicht von turbulenten Strömungen beeinflusst wurden.

Literatur

[1] Dieter Geschke. Physikalisches Praktikum. Mit multimedialen ergänzungen. 12. Aufl. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner, 2001. ISBN: 978-3-519-10206-9. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-8351-9081-8.

[2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: http://www.numpy.org/.

[3] Eric O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Version 2.4.6.1. URL: http://pythonhosted.org/uncertainties/.

[4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: http://matplotlib.org/.

[5] Versuch Nr. 107. Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.

[6] Water Density Calculator. Frostburg State University. URL: https://antoine.frostburg.edu/chem/senese/javascript/water-density.html (besucht am 10. 12. 2021).