

**VERSUCH NUMMER 204**

## **Wärmeleitung von Metallen**

Irgendjemand

irgend.jemand@tu-dortmund.de

Someone

some.one@tu-dortmund.de

Durchführung: 21.12.21

Abgabe: 11.01.22

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1 Wärmetransport . . . . .	1
2.2 Dynamischer Temperaturwechsel . . . . .	1
2.3 Berechnung der Messunsicherheiten . . . . .	2
<b>3 Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>2</b>
3.1 Versuchsaufbau . . . . .	2
3.2 Statische Methode . . . . .	3
3.3 Dynamische Methode . . . . .	3
<b>4 Auswertung</b>	<b>3</b>
4.1 Statische Methode . . . . .	3
4.2 Dynamische Methode . . . . .	6
4.3 Bestimmung der Wärmekapazität . . . . .	7
<b>5 Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>Literatur</b>	<b>11</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll, durch verschiedene Methoden, die Wärmeleitfähigkeit von unterschiedlichen Materialien bestimmt und untersucht werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Wärmetransport

Hat ein Körper nicht überall die selbe Temperatur, befindet er sich nicht in einem Temperaturgleichgewicht, so kommt es in diesem Körper zu einem Wärmetransport entlang des Temperaturgefälles, von warm nach kalt. Dies kann auf drei verschiedene Arten geschehen: Durch Wärmestrahlung, Konvektion oder Wärmeleitung. In diesem Versuch wird sich auf Letzteres beschränkt. In festen Körpern sorgen Phononen und frei bewegliche Elektronen für den Wärmetransport. Der Gitterbeitrag, also die Wärmeübertragung durch eine Erhöhung der mittleren Amplituden Gitterschwingung, ist dabei in Metallen vernachlässigbar.

Hat ein Stab die Länge  $L$  und die Querschnittsfläche  $A$  und ist aus einem Material mit der Dichte  $\rho$  und der spezifischen Wärme  $c$ , so fließt in der Zeit  $dt$  durch die Fläche  $A$  des Stabes die Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt, \quad (1)$$

falls das eine Ende des Stabes wärmer als das andere ist.

Dabei beschreibt der Proportionalitätsfaktor  $\kappa$  die materialabhängige **Wärmeleitfähigkeit**. Es ist Konvention, dass der Wärmestrom immer in Richtung abnehmender Temperatur fließt, dies wird durch das negative Vorzeichen in der Gleichung angezeigt. Für die Wärmestromdichte  $j_w$  gilt entsprechend

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2)$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung kann man daraus die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

ableiten, die beschreibt, wie sich die Temperaturverteilung in Raum und Zeit entwickelt. Dabei wird sich hier auf eine Raumdimension begrenzt. Die Größe  $\sigma_T = \kappa/\rho c$  ist als **Temperaturleitfähigkeit** definiert. Sie gibt die „Geschwindigkeit“ an, mit welcher sich ein Temperaturunterschied ausgleicht. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3) hängt dabei von der Geometrie des Stabes und den Anfangsbedingungen ab.

### 2.2 Dynamischer Temperaturwechsel

Wird ein sehr langer Stab mit der Periode  $T$  abwechselnd gewärmt und gekühlt, so erfolgt die Temperaturänderung in Form einer räumlichen und zeitlichen Temperaturwelle der Form

$$T(x, t) = T_{\max} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right). \quad (4)$$

Diese Welle bewegt sich mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\kappa\omega}{\rho c}}. \quad (5)$$

Die Dämpfung der Welle ergibt sich aus dem Amplitudenverhältnis  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  an zwei Messstellen  $x_{\text{nah}}$  und  $x_{\text{fern}}$ . Unter Nutzung von  $\omega = 2\pi/T_*$  und  $\varphi = 2\pi\Delta t/T_*$  mit der Phase  $\varphi$  und Periodendauer  $T_*$  lässt sich die Wärmeleitfähigkeit aus Gleichung 3 zu

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2\Delta t \ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)} \quad (6)$$

umformen. Dabei ist  $\Delta t$  die Phasendifferenz der Temperaturwelle zwischen den beiden Messstellen. Der Abstand dieser Messstellen wird durch  $\Delta x$  ausgedrückt.

## 2.3 Berechnung der Messunsicherheiten

Alle Mittelwerte einer  $N$ -fach gemessenen Größe  $x$  werden über die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7)$$

berechnet. Der zugehörige Fehler des Messwertes berechnet sich dann über

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Setzt sich eine zu berechnende Größe aus mehreren mit Unsicherheit behafteten Messwerten zusammen, so ist die Unsicherheit dieser Größe über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung gegeben

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2 \right]}. \quad (9)$$

Bei der Angabe des Endergebnisses wird schließlich der sich aus den Unsicherheiten ergebene systematische Fehler mit dem sich aus der Mittelwertberechnung ergebenden statistischen Fehler addiert. Alle Berechnungen, Graphen sowie das Bestimmen der Unsicherheiten werden mit Python 3.8.8 und entsprechenden Bibliotheken<sup>1</sup> durchgeführt.

## 3 Versuchsaufbau und Durchführung

Die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Metallen erfolgt auf zwei verschiedenen Wegen. Um die Metalle zu wärmen oder zu kühlen wird ein Peltier-Element verwendet. Die Daten werden von einem Xplorer GLX Datenlogger aufgenommen.

### 3.1 Versuchsaufbau

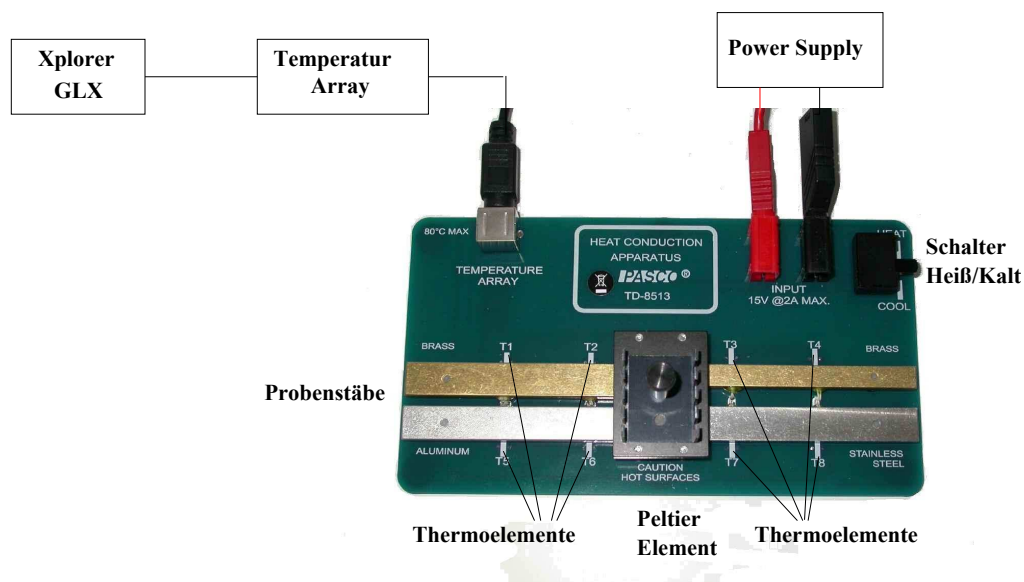


Abbildung 1: Peltier Element und Metallstäbe

In Abbildung 1 wird der Aufbau des Versuchs dargestellt. In der Mitte der Platine befindet sich das Peltier-Element, welches für das Wärmen oder Kühlen der Metalle zuständig ist. Des weiteren gibt es zwei Anschlüsse für die

<sup>1</sup>Numpy [1], Uncertainties [2] and Matplotlib [3]

Stromversorgung und einen Ausgang in den Datenlogger. Die Stromversorgung wird durch das Power Supply eingestellt. Die Temperaturen werden an den Stellen  $T_1, \dots, T_8$  gemessen und gespeichert. Auf der Platine ist auch zu erkennen, welche Messpunkte zu welchen Metallen gehören. Während der Messung wird eine Isolierung auf die Metallstäbe gelegt, um Abweichungen zu minimieren.

### 3.2 Statistische Methode

Bei der statischen Methode wird das Peltier-Element eingeschaltet und die Messpunkte werden aufgenommen, bis eine bestimmte Temperatur erreicht wurde. Am Datenlogger wird eine Abtastzeit von  $\Delta t_{GLX} = 5,0 \text{ s}$  eingestellt. Durch das Power Supply wird eine Spannung von  $U_p = 5,0 \text{ V}$  angelegt. Die Stromstärke wird nicht eingeschränkt. Das Peltier-Element wird eingeschaltet und alle acht Messpunkte werden gespeichert. Es wird solange gemessen, bis  $T_7$   $45^\circ \text{C}$  erreicht. Die Metallstäbe werden nun wieder abgekühlt, um den nächsten Versuch nicht zu verfälschen.

### 3.3 Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird das Peltier Element nicht nur eingeschaltet, es wird auch in bestimmten Zeitintervallen zwischen Kühlen und Erhitzen gewechselt. Dazu wird zunächst der Datenlogger auf eine Abtastzeit von  $\Delta t_{GLX} = 2,0 \text{ s}$  gestellt und eine Spannung von  $U_p = 8,0 \text{ V}$  eingestellt. Auch hier wird die Stromstärke nicht eingeschränkt. Die Messung wird mit zwei verschiedenen Periodendauern durchgeführt. Zunächst wird alle 40 Sekunden der Schalter umgelegt. Es werden mindestens zehn Perioden gemessen. Die Metallstäbe werden auf unter  $30^\circ \text{C}$  herabgekühlt. Dies wird mit einer Periodendauer von 200 s wiederholt bis eins der Thermometer über  $80^\circ \text{C}$  anzeigt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Statische Methode

Zuerst werden in Abbildung 2 und Abbildung 3 die Temperaturverläufe der statischen Messung grafisch dargestellt. Die Daten stammen dabei von den Temperatursensoren, die weiter weg von der Temperaturquelle liegen. Alle Verläufe zeigen hier ein beschränktes Wachstum und sind im gesamten Bereich monoton steigend.

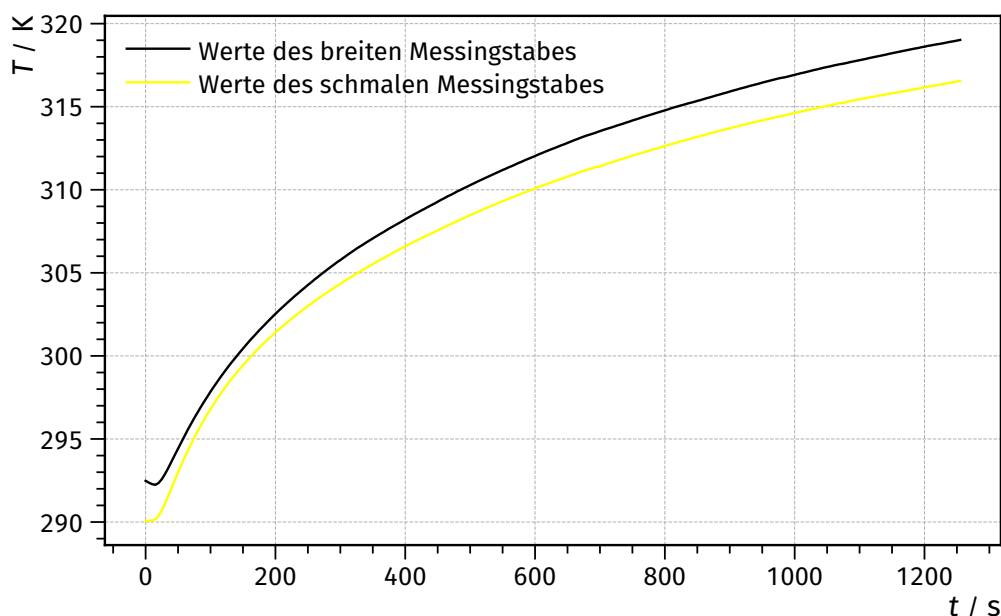
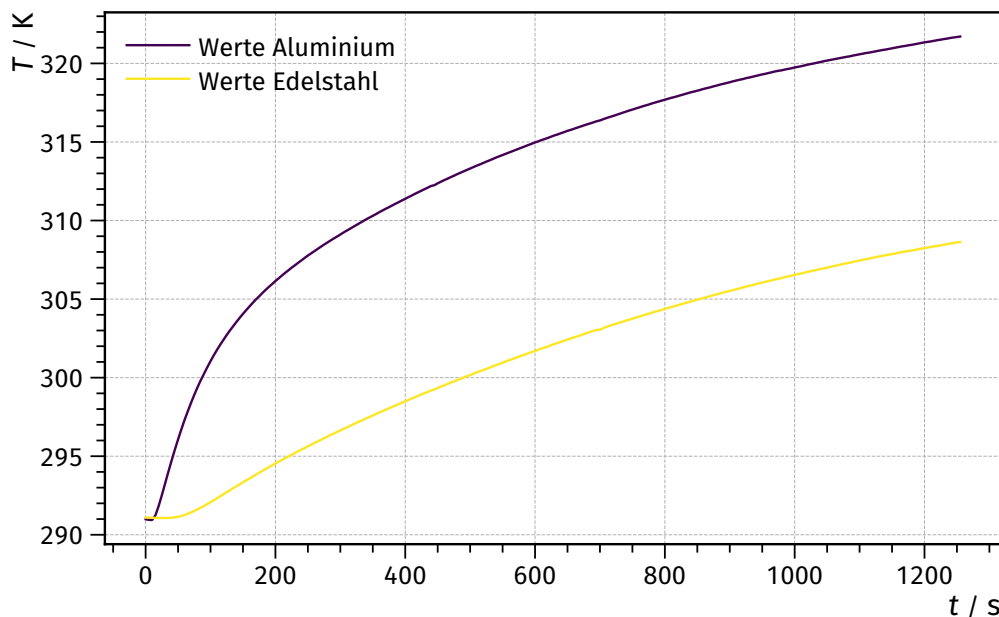


Abbildung 2: Darstellung der Temperaturverläufe der beiden Messing-Stäbe



**Abbildung 3:** Darstellung der Temperaturverläufe vom Aluminium- und Edelstahlstab

Betrachtet man die Verläufe der Temperaturen, so ist festzustellen, dass bei Aluminium das schnellste Wachstum vorliegt. Danach folgt Messing, zuerst mit dem breiten stab, dann mit dem dünnen Stab. Am langsamsten steigt die Temperatur im Messing. In Tabelle 1 werden zum Vergleich Werte nach  $t = 700$  s ausgewertet. Die Werte bestätigen, was an den Graphen abzulesen ist.

**Tabelle 1:** Temperaturen am hinteren Sensor nach  $t = 700$  s

Messing, schmal in K	Messing, breit in K	Aluminium in K	Edelstahl in K
310	310	320	300

Mit Hilfe von Gleichung 1 lässt sich der Wärmestrom  $dQ/dt$  bestimmen. Dabei werden die in Tabelle 2 angegebenen Literaturwerte [4] [5, S. 292] [6], sowie einige Wertepaare aus den Temperaturverläufen verwendet.

**Tabelle 2:** Literaturwerte und Größe der Metallstäbe

Material	Querschnittsfläche $A / m^2$	$\rho / kg/m^3$	$c / J/(kg K)$	$\kappa / W/(m K)$
Messing, breit	$480 \cdot 10^{-5}$	8500	390	110
Messing, schmal	$280 \cdot 10^{-5}$	8500	390	110
Aluminium	$480 \cdot 10^{-5}$	2800	830	240
Edelstahl	$480 \cdot 10^{-5}$	8000	400	15

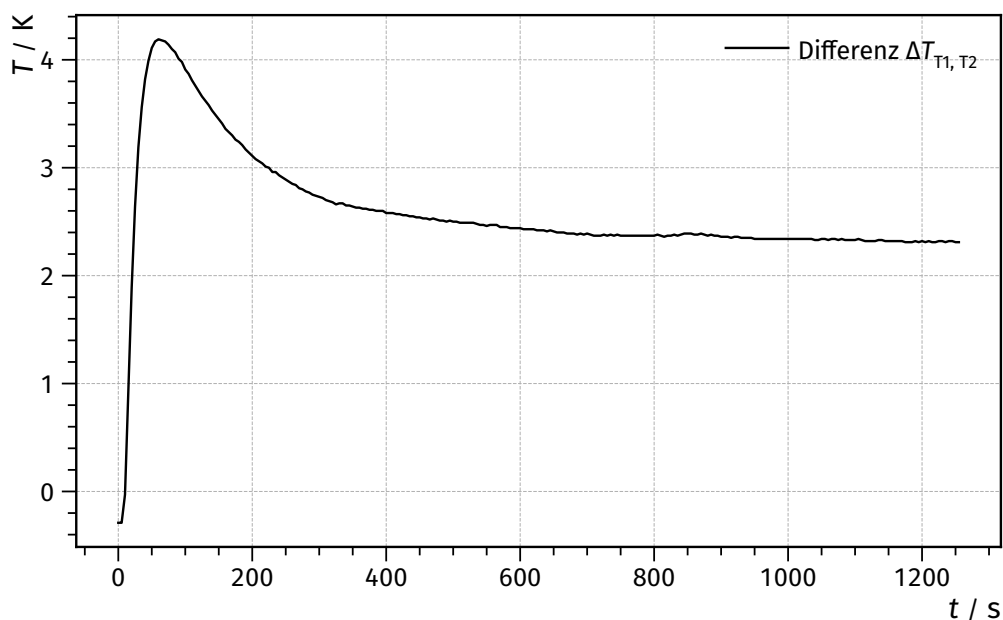
$\partial T / \partial x$  beschreibt in Gleichung 1 den Temperaturgradient innerhalb des Stabes. Hier wird gerechnet mit  $\Delta T / \Delta x$ .  $\Delta T$  ist hierbei die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Thermometern an einem Stab. Der Abstand zwischen diesen wird durch  $\Delta x$  beschrieben. Die berechneten Werte für den Wärmestrom werden in Tabelle 3 eingetragen.

**Tabelle 3:** Berechnete Werte für den Wärmestrom bei verschiedenen Zeiten

Zeit in s	Wärmestrom $\frac{\partial T}{\partial x}$ / J/s			
	Messing, schmal	Messing, breit	Aluminium	Edelstahl
100	-0,5554±0,0009	-0,7201±0,0012	-1,0816±0,0018	-0,202 68±0,000 34
250	-0,4179±0,0007	-0,5323±0,0009	-0,7185±0,0012	-0,225 70±0,000 40
400	-0,3943±0,0007	-0,4752±0,0008	-0,6567±0,0011	-0,230 30±0,000 40
550	-0,3900±0,0007	-0,4531±0,0008	-0,6335±0,0011	-0,233 00±0,000 40
700	-0,3921±0,0007	-0,4402±0,0007	-0,6258±0,0011	-0,234 00±0,000 40

In Abbildung 4 ist die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Thermometern am breiten Messingstab aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Kurve am Anfang sehr stark ansteigt und ein globales Maximum erreicht, das bei etwa 4,1 K liegt. Danach fällt die Differenz bis zu einem Grenzwert von etwa 2,3 K exponentiell ab.

In Abbildung 5 ist die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Thermometern am Edelstahlstab aufgetragen. Die Kurve beschreibt näherungsweise ein beschränktes Wachstum und erreicht einen Wert von etwa 9,5 K.



**Abbildung 4:** Temperaturdifferenz der beiden beim Breiten Messingstab

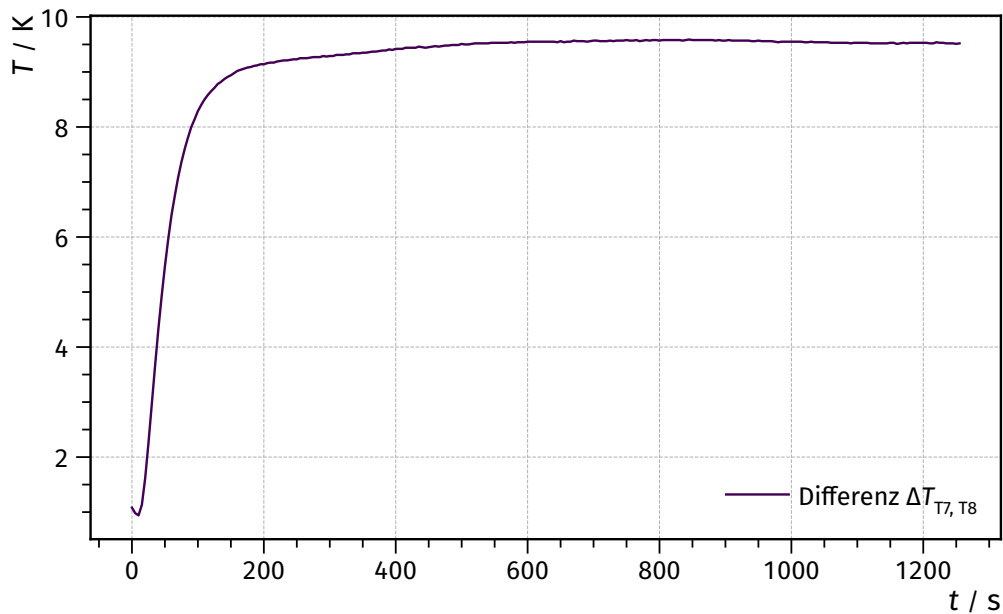


Abbildung 5: Temperaturdifferenz der beiden Thermometer beim Edelstahlstab

#### 4.2 Dynamische Methode

Die Diagramme in Abbildung 6 und in Abbildung 7 zeigen bei periodischer Anregung einer Temperaturwelle mit einer Periodendauer von  $T = 80$  s den Temperaturverlauf an den jeweiligen Enden. Zusätzlich zu den Messwerten sind auch die lokalen Minima eingezeichnet.

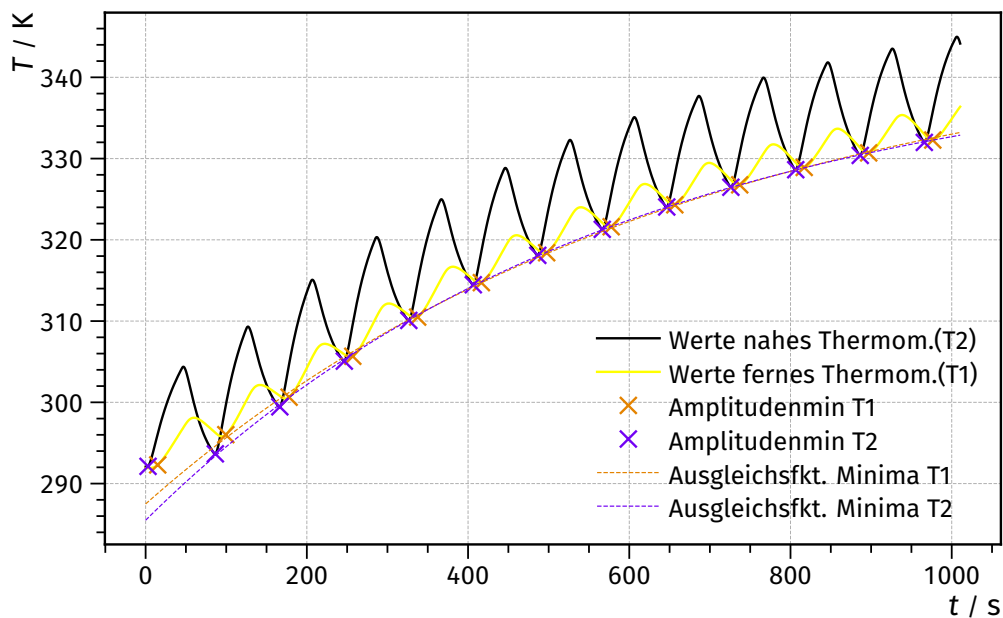


Abbildung 6: Temperaturwelle im Breiten Messingstab mit der Periodendauer  $t = 80$  s



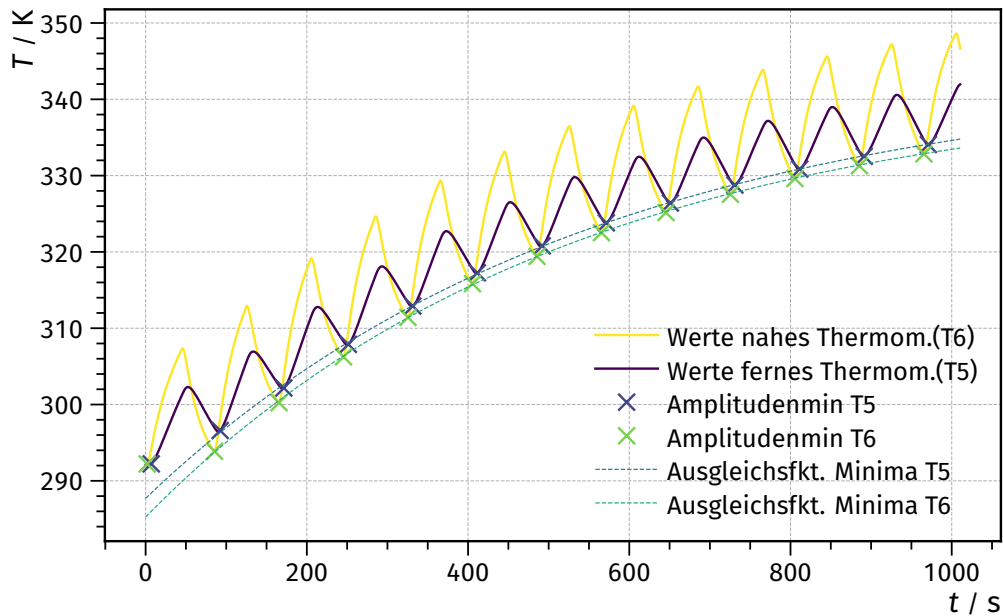


Abbildung 7: Temperaturwelle im Aluminiumstab mit der Periodendauer  $t = 80$  s

In Abbildung 8 wurden die Messwerte der Temperaturwelle für den Edelstahlstab mit einer Periodendauer von  $T = 200$  s eingetragen. Wie bei den Diagrammen für die Periodendauer von  $T = 80$  s wurden auch hier die relativen Extrema eingezeichnet.

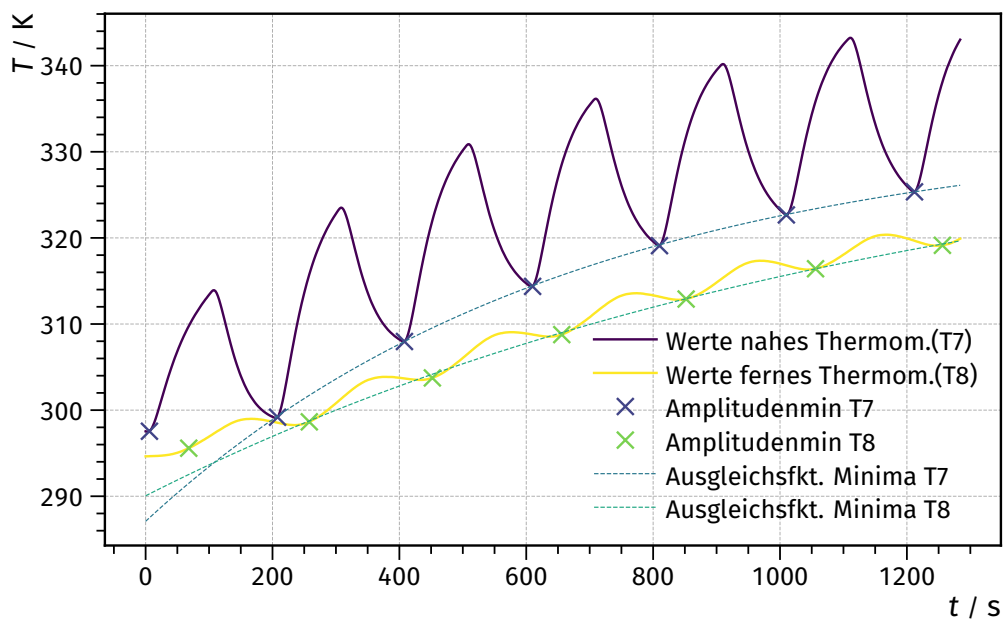


Abbildung 8: Temperaturwelle im Edelstahlstab mit der Periodendauer  $t = 200$  s

#### 4.3 Bestimmung der Wärmekapazität

Aus den Graphen in Unterabschnitt 4.2 lässt sich folgern, dass sich die Wellenfunktionen aus zwei Teilen zusammen setzen. Dabei ergibt sich die Funktion der Schwingung wie folgt

$$f_{\text{Schwingung}} = f_{\text{Grundschiwingung}} + f_{\text{Amplitude}}$$

Um nun eine höhere Fehlersicherheit bei den Werten zu erlangen, sollte deshalb die Funktion für die Grundschwung isoliert werden. Dazu werden ausgezeichnete Punkte ausgewählt, um die Amplitudenentwicklung der Funktion abziehen zu können. Dazu werden hier die Minima der Schwingungsfunktion verwendet. Die sich ergebenden Ausgleichsfunktionen sind bereits in die Graphen aus Unterabschnitt 4.2 eingezeichnet. Als Funktionstyp wurde eine Exponentialfunktion wie die Folgende verwendet

$$f(x) = a \cdot \exp(b \cdot x) + c.$$

Zieht man diese nun von den Schwingungsfunktionen ab, erhält man die in Abbildung 9, Abbildung 10 und Abbildung 11 dargestellten Graphen für die Grundschwung. In die Grafiken werden außerdem die Minima und Maxima eingezeichnet, die später verwendet werden, um die Amplitudendifferenz und Phasendifferenz zu bestimmen. Einige Punkte am Anfang werden dabei ausgelassen, dass die Grundschwung etwa in einer Ebene liegen sollte und diese Werte offensichtlich abweichen. Nur die verwendeten Punkte sind eingezeichnet.

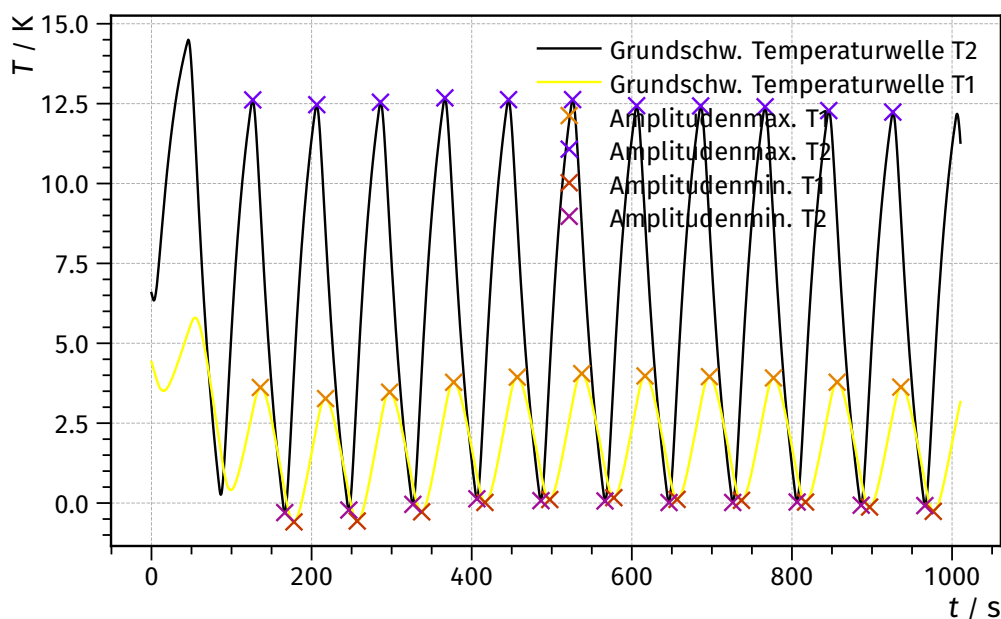


Abbildung 9: Grundschwung Messing

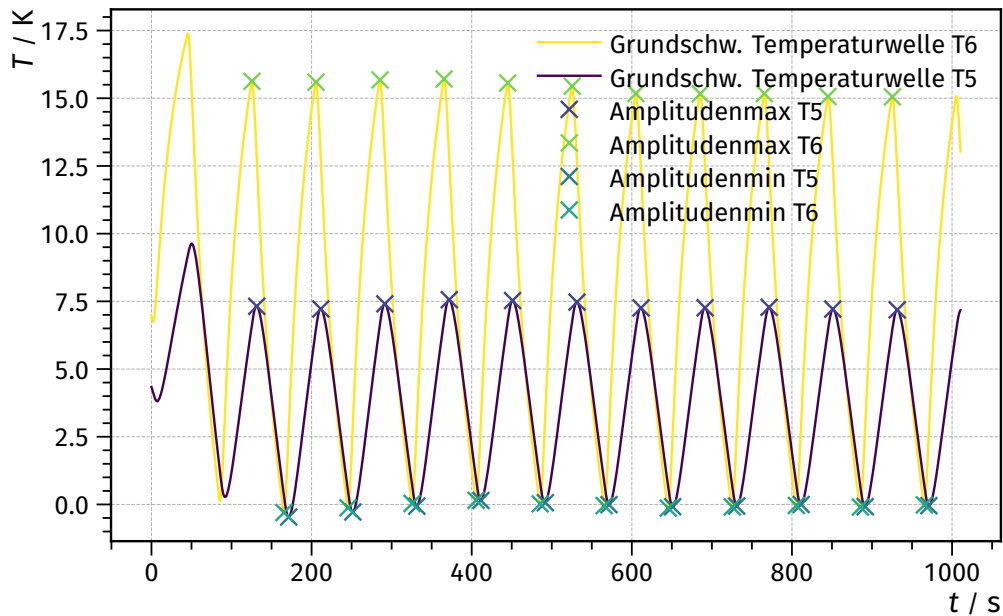


Abbildung 10: Grundschiwingung Aluminium

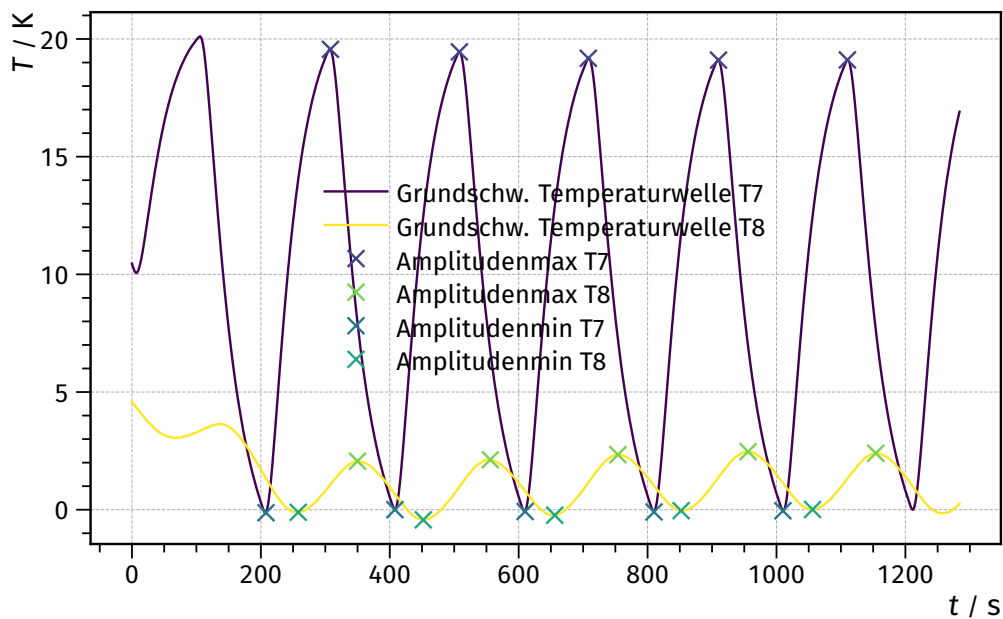


Abbildung 11: Grundschiwingung Edlelsteel

Aus den in den Grafiken zu erkennenden Extrempunkten lassen sich sowohl die Amplituden  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  der Schwingung bestimmen, als auch die Phasendifferenz  $\Delta t$  zwischen den Messpunkten. In den folgenden Tabellen sind diese Werte eingetragen. Die Phasendifferenz ist dabei jeweils der Mittelwert der Phasendifferenzen für ein Hoch-/Tiefpunktpaar. Mit Hilfe von Gleichung 6 und den Daten aus Tabelle 2, sowie dem Abstand der Thermometer, der jeweils  $\Delta x = (29,45 \pm 0,05)$  mm beträgt, lassen sich nun die Wärmeleitfähigkeiten  $\kappa$  bestimmen. Auch diese Werte werden in den folgenden Tabellen eingetragen.

**Tabelle 4:** Kenngrößen der Temperaturwelle für den breiten Messingstab

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$\Delta t / \text{s}$	$\kappa / \text{W}/(\text{m K})$
6,5	2,1	11	120,8±0,4
6,3	1,9	11	110,5±0,4
6,3	1,9	11	104,3±0,4
6,3	1,9	11	112,4±0,4
6,3	1,9	11	109,0±0,4
6,3	1,9	11	107,7±0,4
6,2	1,9	10	118,8±0,4
6,2	1,9	11	111,0±0,4
6,2	1,9	11	117,0±0,4
6,2	2,0	11	117,7±0,4
6,2	1,9	10	120,4±0,4

Aus den einzelnen Werten wird der Mittelwert für die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  bestimmt. Damit ergibt sich der experimentell bestimmte Wert für Messing zu

$$\kappa_{\text{mess}} = (114 \pm 5) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

**Tabelle 5:** Kenngrößen der Temperaturwelle für den Aluminiumstab

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$\Delta t / \text{s}$	$\kappa / \text{W}/(\text{m K})$
8,0	3,9	6,0	234,5±0,8
7,9	3,7	6,0	227,0±0,8
7,8	3,7	6,0	227,3±0,8
7,8	3,7	6,3	217,5±0,7
7,8	3,7	6,3	219,9±0,7
7,7	3,7	6,0	230,7±0,8
7,7	3,7	6,0	228,6±0,8
7,6	3,7	5,8	238,6±0,8
7,6	3,6	6,0	228,1±0,8
7,6	3,6	6,0	229,5±0,8
7,5	3,6	5,8	238,8±0,8

Für Aluminium ergibt sich durch Mittelwertbestimmung eine Wärmeleitfähigkeit von

$$\kappa_{\text{alu}} = (229 \pm 6) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

**Tabelle 6:** Kenngrößen der Temperaturwelle für den Edelstahlstab

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$\Delta t / \text{s}$	$\kappa / \text{W}/(\text{m K})$
9,8	1,1	46	13,68±0,05
9,7	1,3	46	14,86±0,05
9,6	1,3	46	14,99±0,05
9,6	1,3	44	15,49±0,05
9,6	1,2	45	14,81±0,05

Entsprechend der vorherigen Berechnungen für Messing und Aluminium folgt für Edelstahl

$$\kappa_{\text{edel}} = (14,8 \pm 0,6) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

## 5 Diskussion

Es ist zu erkennen, dass der Wärmestrom in Unterabschnitt 4.1 nicht bis auf 0 geht. Dies liegt daran, dass die Stäbe nicht vollständig und perfekt isoliert sind. So kann immer etwas Wärme in die Umgebung abgegeben werden. Diese verursacht den noch vorhandenen Wärmestrom.

Um die Daten für die Wärmeleitfähigkeit in Unterabschnitt 4.2 zu vergleichen, wird zunächst die relative Abweichung zu den Literaturwerten in Tabelle 2 berechnet.

**Tabelle 7:** Literaturwerte und relative Abweichungen

Wärmeleitfähigkeit in W/(m K)			
	Messing	Aluminium	Edelstahl
Messung	114±5	229±6	14,8±0,6
Literatur	110	240	15
rel. Abweichung	(1±5) %	(3,3±2,7) %	(2±4) %

Da diese Abweichungen bereits sehr klein sind, ist der Versuch gut geeignet, um die Wärmeleitfähigkeit von Metallen zu bestimmen. Auch wenn der Literaturwert für Aluminium nicht im Vertrauensintervall liegt, hat der Wert eine geringe Abweichung. Die Ungenauigkeiten sind auf mehrere Faktoren zurückzuführen. Wie schon bei der statischen Methode sind die Stäbe nicht vollständig isoliert und wechsel wirken mit der Umgebung. Auch die Thermometer haben einen unbekannten Fehler. Dieser kann die Ergebnisse beeinflussen. Da nur alle 2,0 s Daten aufgenommen werden, wird der Extrempunkt der Schwingung eventuell nicht getroffen und fälschlicherweise ein anderer als Extremum angenommen. Auch diese geringen Veränderungen beeinflussen die berechnete Wärmeleitfähigkeit. Für eine bessere Messung sollten also die Stäbe besser isoliert und mehr Datenpunkte aufgenommen werden. Bei Messing und Edelstahl handelt es sich um Legierungen. Da die Zusammensetzung der Metalle nicht bekannt ist, kann der tatsächliche Wert der vorliegenden Stäbe vom Literaturwert abweichen. Auch können Verunreinigungen im Metall die Messwerte verfälschen.

## Literatur

- [1] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [4] Edelstahl Rostfrei – Eigenschaften. Informationsstelle Edelstahl Rostfrei. URL: [https://www.edelstahl-rostfrei.de/fileadmin/user\\_upload/ISER/downloads/SD\\_863.pdf](https://www.edelstahl-rostfrei.de/fileadmin/user_upload/ISER/downloads/SD_863.pdf) (besucht am 09.01.2022).
- [5] Dieter Geschke. Physikalisches Praktikum. Mit multimedialen ergänzungen. 12. Aufl. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner, 2001. ISBN: 978-3-519-10206-9. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8351-9081-8>.
- [6] Versuch Nr. 204. Wärmeleitung von Metallen. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.