

**VERSUCH NUMMER 401**

## **Das Michelson-Interferometer**

Irgendjemand

irgend.jemand@tu-dortmund.de

Someone

some.one@tu-dortmund.de

Durchführung: 26.04.2022

Abgabe: 03.05.2022

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1 Überlagerung von Lichtwellen - Interferenz . . . . .	1
2.2 Kohärenz - Interferenzfähigkeit des Lichtes . . . . .	2
2.3 Einfluss der Polarisierung . . . . .	5
2.4 Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers . . . . .	5
2.5 Messung des Brechungsindex von Gasen . . . . .	7
<b>3 Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>8</b>
3.1 Wellenlängen Bestimmung . . . . .	9
3.2 Brechungsindexmessung . . . . .	9
3.3 Bestimmung des Abstandes der beiden Komponenten einer Dublettlinie . . . . .	9
<b>4 Auswertung</b>	<b>9</b>
4.1 Wellenlängen Bestimmung . . . . .	9
4.2 Bestimmung des Brechungsindex von Luft . . . . .	10
<b>5 Diskussion</b>	<b>11</b>
<b>Literatur</b>	<b>11</b>

## 1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen durch die experimentelle Untersuchung von Licht mit Hilfe eines Michelson-Interferometers die Wellenlängen einiger Laser, sowie der Brechungsindex von Luft bestimmt werden.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Überlagerung von Lichtwellen - Interferenz

Um Interferenzerscheinungen zu erklären eignet es sich gut, Licht durch eine elektromagnetische Welle zu beschreiben. Im Fall einer ebenen Welle lässt sich die Abhängigkeit von Ort und Zeit der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}$  darstellen als

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E} \cos(kx - \omega t - \delta) \quad (1)$$

( $x$  = Ortskoordinate,  $t$  = Zeit,  $k = 2\pi/\lambda$  = Wellenzahl,  $\lambda$  = Wellenlänge,  $\omega$  = Kreisfrequenz,  $\delta$  = Phasenwinkel im Bezug auf einen festen Zeit- und Ortsnullpunkt)

Es sei weiterhin gegeben, dass die Lichtausbreitungen den Prinzipien der Maxwellschen Gleichungen genügt. Da dies lineare Differentialgleichungen sind lässt sich folgern, dass für die Lichtwellen das Prinzip der **linearen Superposition** gilt (sofern nicht sehr hohe Feldstärken in Materie betrachtet werden). Somit folgt für ein elektrisches Feld  $\vec{E}$ , welches sich aus mehreren Lichtwellen mit den Feldstärken  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$  zusammensetzt

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

Aufgrund von technischen Beschränkungen lässt sich allerdings nur die Lichtintensität  $I$  messen, also der Zeitmittelwert der Lichtleistung auf einer gewissen Fläche. Aus den Maxwellschen Gleichungen folgt

$$I = c \cdot |\vec{E}|^2, \quad (2)$$

wobei  $c$  = konstant gilt. Mit

$$I_{\text{ges}} = \frac{c}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\vec{E}|^2(x, t) dt = \frac{c}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2(x, t) dt$$

lässt sich die Lichtintensität  $I_{\text{ges}}$  an einem Ort  $x$ , auf welchen zwei Lichtwellen mit den Feldstärken  $\vec{E}_1$  und  $\vec{E}_2$  einfallen, beschreiben. Dabei sei der Beobachtungszeitraum  $t_2 - t_1$  groß gegenüber der Periodendauer  $T = 2\pi/\omega$  der Lichtwellen sein soll. Daraus ergibt sich unter Nutzung von (1)

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 \exp(i(kx - \omega t - \delta_1)) \quad \text{und} \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_0 \exp(i(kx - \omega t - \delta_2))$$

und somit

$$I_{\text{ges}} = 2c\vec{E}_0^2 (1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)). \quad (3)$$

Daraus lässt sich folgern, dass die Lichtintensitäten sich nicht einfach addieren, sondern, dass diese noch durch einen sogenannten **Interferenzterm** beeinflusst werden:

$$2c\vec{E}_0^2 \cos(\delta_2 - \delta_1).$$

Je nach Phasenlage kann die Gesamtintensität also bis zu  $\pm 2c\vec{E}_0^2$  vom Mittelwert  $2c\vec{E}_0^2$  abweichen. Sie kann sogar verschwinden, was als **destruktive** Interferenz bezeichnet wird. Dies ist der Fall wenn

$$\delta_2 - \delta_1 = (2n + 1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Als **konstruktive** Interferenz bezeichnet man den Fall, dass die Intensität in einem Punkt größer ist als das Mittel. Das Maximum wird bei

$$\delta_2 - \delta_1 = (2n)\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

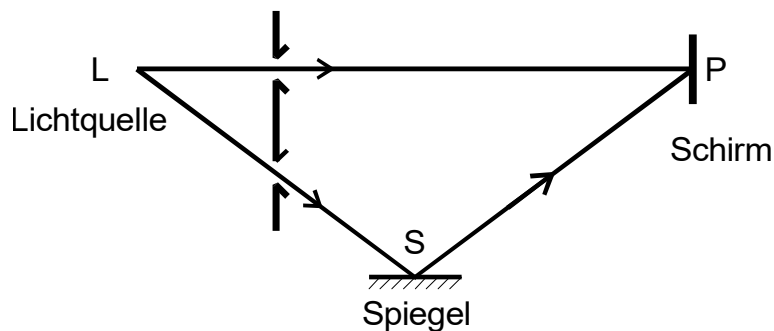
erreicht.

## 2.2 Kohärenz - Interferenzfähigkeit des Lichtes

Bei konventionellen Lichtquellen wie der Sonne oder Glühlampen sind allerdings keine Interferenzerscheinungen festzustellen, da die Phasenkonstanten  $\delta_i$  dieser statistischen Funktionen der Zeit sind, sodass die Differenz  $\delta_2(t) - \delta_1(t)$  während der Beobachtungsdauer beliebige positive und negative Werte annimmt. Mittelt man daher über einen Zeitraum der groß gegenüber der periodendauer  $T$  ist, so verschwindet der Interferenzterm. Dieses Verhalten liegt in der Entstehung des Lichtes begründet. So sind nämlich die Emissionszentren die Elektronenhüllen der Atome und Moleküle. Wenn in diesen ein Elektron aus einem angeregten Zustand in den Grundzustand zurückkehrt, so wird die Energiedifferenz dieser Zustände als Wellenzug **endlicher** Länge (= Wellengruppe) emittiert. Da diese Emissionen statistisch verteilt erfolgen haben die Wellenzüge wechselnde Phasenkonstanten. Solches Licht wird als **inkohärent** bezeichnet.

Bei **kohärentem Licht** dagegen lässt sich Licht von sämtlichen Quellen durch eine einheitliche Gleichung 1 mit festem  $k$ ,  $\omega$  und  $\delta$  darstellen. Dies wird häufig durch **Laser** (= light amplification by stimulated emission of radiation) realisiert. Hier emittieren die Atome nämlich im „Gleichtakt“.

Es ist jedoch auch mit Licht von konventionellen Quellen möglich Interferenzeffekte zu erzeugen. Dies lässt sich erreichen, indem Licht aus derselben Quelle interferiert. Um dies zu erreichen wird das Licht mit einem Strahlteiler oder, wie in Abbildung 1 mit einer Doppelblende in 2 getrennte Strahlenbündel aufgeteilt.



**Abbildung 1:** Prinzipielle Versuchsanordnung zur Erzeugung von Interferenzerscheinungen unter der Verwendung einer konventionellen Lichtquelle [1].

Diese getrennten Strahlenbündel müssen anschließend durch ein geeignetes Spiegelsystem wieder in einem Punkt  $P$  zusammengeführt werden. Im allgemeinen treten an diesem Punkt Phasenverschiebungen zwischen den Teilwellen auf, da die Strahlwege verschieden sind. Ist der Wegunterschied  $\Delta s = \overline{LSP} - \overline{LP}$  beispielsweise ein ungerades Vielfaches von  $\lambda/2$ , also

$$\Delta s = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$\Delta s = n \cdot d$  beschreibt die optische Weglänge ( $d$  = räumlicher Wegunterschied), da sich Phasenunterschiede auch durch das Laufen eines Bündels durch ein Medium mit einem andern Brechungsindex  $n$  einstellen können

so findet in  $P$  destruktive Interferenz statt. Es gilt zu beachten, dass der Emissionsakt nur eine endliche Zeit  $\tau$  währt, was zur Folge hat, dass der emittierte Wellenzug auch endlich ist. Ist  $\Delta s$  deutlich größer als diese Länge, so verschwinden die Interferenzeffekte da die Züge dann zu einer unterschiedlichen Zeit in  $P$  eintreffen, da die Lichtgeschwindigkeit endlich ist. Wellenzüge aus verschiedenen Emissionsakten haben keine Phasenlage und können somit nicht interferieren. Daraus folgt direkt, dass Wegunterschiede der überlagerten Teilbündel nicht zu groß werden darf. Der Wegunterschied bei dem die Interferenzerscheinungen gerade verschwinden wird als **Kohärenzlänge**  $\ell$  bezeichnet. Sie kann über die maximal bei  $P$  beobachtbaren Intensitätsmaxima ermittelt werden, indem man ihre Anzahl  $N$  mit der Wellenlänge multipliziert:

$$\ell = N\lambda.$$

Um Interferenzeffekte beobachten zu können darf der optische Wegunterschied also nicht größer sein als die Kohärenzlänge ( $\Delta s \leq \ell$ ). Die Einschränkung der Interferenzfähigkeit des Lichtes durch die Endlichkeit eines Wellenzuges in Raum ( $\ell$ ) und Zeit ( $\tau$ ) lässt sich auch anders herleiten: Aus dem **Fourierschen Theorem** folgt, dass ein Wellenzug

endlicher Länge nicht monochromatisch sein kann, sondern ein Wellenlängenspektrum besitzen muss. Wie weiter oben im Kapitel erwähnt ist nicht monochromatisches Licht aber im Allgemeinen nicht interferenzfähig. Sie sind nur dann zu beobachten, wenn das Frequenzspektrum so schmal ist oder die Wegunterschiede so klein, dass die Maximums- und Minimumsbedingungen für zwei Wellenlängen nicht an einem Ort realisiert werden können. Im Folgenden wird der Zusammenhang zwischen der Kohärenzlänge  $l$  beziehungsweise der Zeitdauer  $\tau$  des Emissionsaktes und der „Breite“  $\Delta\lambda$  der Wellenlängen- beziehungsweise Frequenzverteilung  $\Delta\omega$  abgeleitet werden. Es sei ein sinusförmiger Wellenzug endlicher Dauer, dessen Feldstärke durch

$$E(t) = \begin{cases} E_0 \exp(i\omega_0 t) & \text{für } -\frac{\tau}{2} < t < \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Funktion ist an den Stellen  $t = \pm\tau/2$  unstetig, dies tritt in der Natur nicht auf und ist nur eine Näherung. Dadurch kann es zu Abweichungen der Größenordnung 1 kommen.

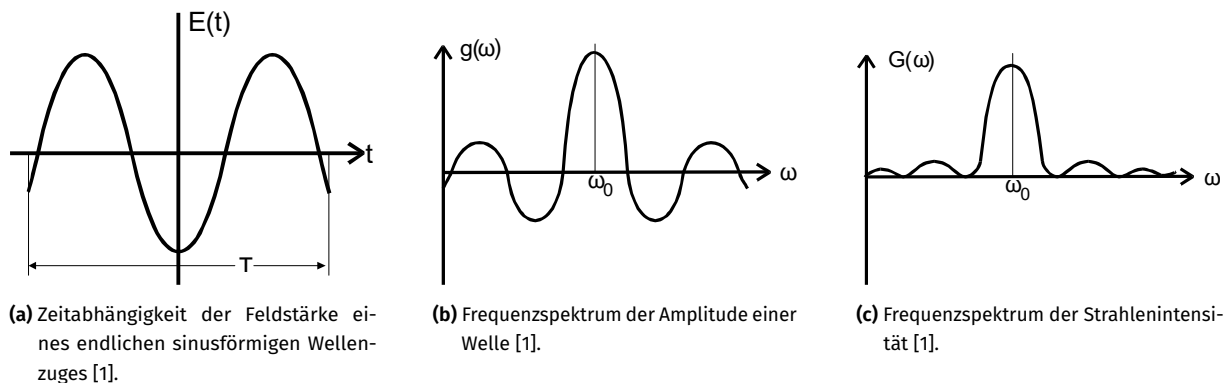
gegeben ist. Das Frequenzspektrum  $g(\omega)$  dieser Funktion kann man durch eine Fourier-Transformation berechnen. Also

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \cdot \exp(i\omega t) dt = 2E_0\tau \frac{\sin(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0}.$$

Die Intensität  $G$ , mit der die Schwingung auftritt ist entsprechend gegeben durch

$$G(\omega) = |g(\omega)|^2 = 4E_0^2\tau^2 \frac{\sin^2(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2}.$$

Darstellungen der Funktionen sind in Abbildung 2 zu finden. Anhand von Abbildung 2c ist zu erkennen, dass  $G(\omega)$



**Abbildung 2:** Darstellungen der Funktionen

ein Maximum bei  $\omega = \omega_0$  besitzt und an den Stellen

$$\omega_N = \omega_0 \pm 2\frac{\pi}{\tau} \quad (4)$$

bis auf null absinkt. Außerhalb des durch (4) festgelegten Intervalles erscheinen weitere lokale Maxima, deren Höhe jedoch schnell gegen null geht. Somit lässt sich folgern, dass der größte Teil der Energie im Bereich

$$\omega_0 - 2\frac{\pi}{\tau} < \omega < \omega_0 + 2\frac{\pi}{\tau}$$

liegt. Die Größe  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$  wird nun als „Breite“ der Verteilungsfunktion  $G(\omega)$  bezeichnet. Die Breite  $\Delta\lambda$  ergibt sich daraus direkt zu

$$\lambda_0 := \frac{2\pi c}{\omega_0}$$

( $c$  = Lichtgeschwindigkeit,  $\lambda_0$  = Lage des Maximums der Wellenlängenverteilung)

Daraus folgt durch Differentiation und Einsetzen von  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$

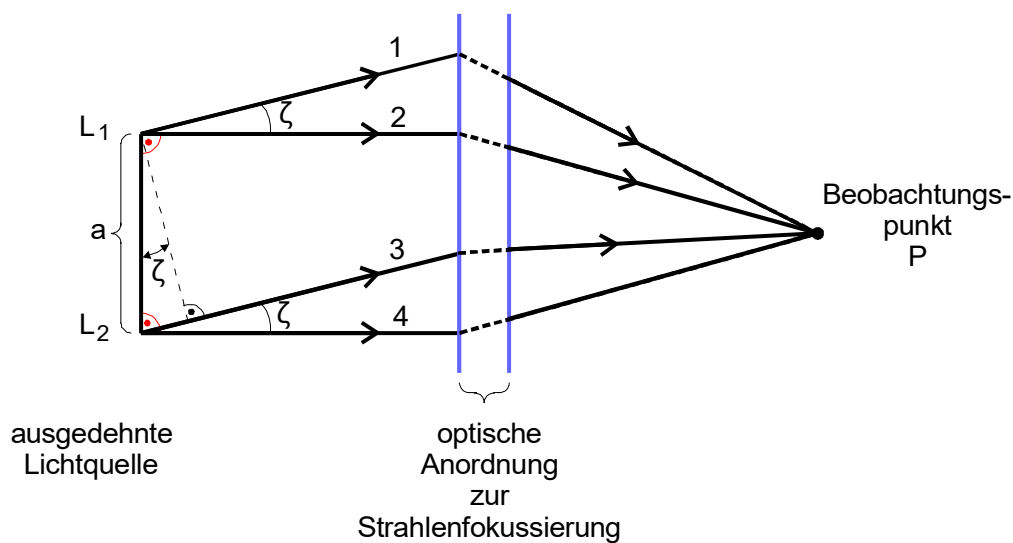
$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2\pi c} \Delta\omega.$$

Unter Verwendung der **Kohärenzzeit**  $\tau = \ell/c$  (Dauer des Wellenzuges) lässt sich schließlich

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\ell} \quad (5)$$

herleiten. Sollte eine Lichtquelle zwei monochromatische Wellenzüge emittieren, die sich in der Weglänge um  $\Delta\lambda$  unterscheiden, so beobachtet man in den durch (5) gegebenen Abständen Schwebungsextrema.

Die bisherigen Überlegungen waren auf idealisierte, punktförmige Lichtquellen bezogen und werden jetzt auf die in Interferenzexperimenten auftretenden leuchtenden Flächen **endlicher** Ausdehnung erweitert. Dadurch wird sich allerdings der Kontrast des Interferenzmusters verschlechtern. Wird die Ausdehnung der Lichtquelle zu groß, so kann er sogar ganz verschwinden.



**Abbildung 3:** Prinzipielle Versuchsanordnung zur Ableitung der Kohärenzbedingung bei einer ausgedehnten Lichtquelle [1].

In Abbildung 3 wird eine eindimensional ausgedehnte Lichtquelle mit den Endpunkten  $L_1$  und  $L_2$  ( $\overline{L_1 L_2} = a$ ) betrachtet, zwischen denen sich Flächenelemente befinden, die unabhängig voneinander Licht emittieren. Das gesamte Licht dieser Anordnung wird dann in einem Beobachtungspunkt  $P$  fokussiert. Dabei liege  $P$  so, dass von dort aus senkrecht auf die Mitte der Strecke  $a$  geblickt wird. Dadurch sind die Strahlenwege 2 und 4 exakt gleich lang. Ihre Länge möge beispielsweise  $N\lambda$  ( $N \gg 1$ ) betragen. Sind sonst alle Voraussetzungen erfüllt, so sind die Strahlen 1 und 2, sowie 3 und 4 paarweise interferenzfähig, da sie von den als punktförmig angenommenen Lichtquellen  $L_1$  und  $L_2$  stammen. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit möge der Wegunterschied zwischen 1 und 2 beispielsweise  $\lambda/2$  betragen. Ist dies der Fall löschen sich beide in  $P$  durch destruktive Interferenz aus. Die beiden Strahlen 3 und 4 sind ebenfalls interferenzfähig, besitzen allerdings eine zeitlich schwankende Phasenverschiebung  $\delta(t)$  gegenüber 1 und 2. Nach Voraussetzung sind die Weglängen von 2 und 4 gleich lang, somit würden sich 3 und 4 unabhängig von  $\delta(t)$  ebenfalls bei  $P$  auslöschen, wenn nicht, durch den Richtungsunterschied  $\zeta$  bedingt, eine weitere Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  zwischen 3 und 4 aufträte. Ist  $\Delta\varphi$  beispielsweise nahe  $\pi$ , dann wird die Interferenzerscheinung bei  $P$  zerstört, da 1 und 2 maximale und 3 und 4 minimale Intensität bewirken würden. Um also in  $P$  Interferenzeffekte einer ausgedehnten Lichtquelle zu beobachten muss die durch die Richtungsänderung  $\zeta$  hervorgerufene Phasenverschiebung klein gegen  $\pi$  bleiben. Aus Abbildung 3 folgt

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin(\zeta). \quad (6)$$

Aus (6) und der Forderung  $\Delta\lambda$  ergibt sich als **Kohärenzbedingung für ausgedehnte Lichtquellen** die Ungleichung

$$a \sin(\zeta) \ll \frac{\lambda}{2}, \quad (7)$$

denn wenn (7) für die Extrempunkte  $L_1$  und  $L_2$  erfüllt ist, so ist sie auch für alle dazwischen liegenden Emissionszentren gültig. Entsprechend müssen die Abmessungen der Lichtquelle oder der Öffnungswinkel, unter dem sie beobachtet wird, sehr klein sein, damit Interferenzeffekte erzeugt werden können.

### 2.3 Einfluss der Polarisation

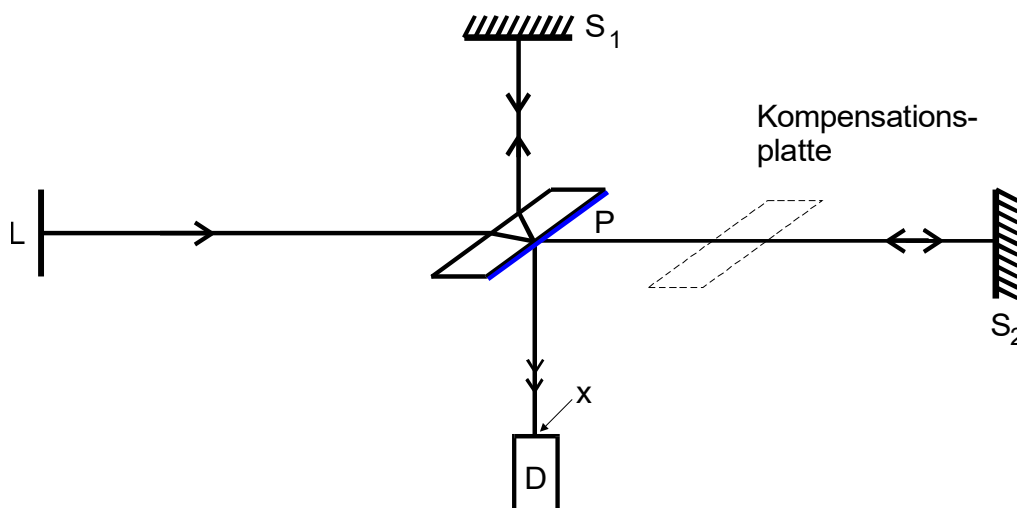
Sind die beiden Teilbündel eines Interferenzexperimentes linear polarisiert und stehen die Polarisationsvektoren senkrecht aufeinander, so verschwindet wegen

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = 0$$

der Interferenzterm in Gleichung 3 und die Intensitäten verhalten sich additiv. Somit können Interferenzen zwischen linear polarisierten Teilbündeln nur dann auftreten, wenn die Komponenten nicht senkrecht zueinander polarisiert sind.

### 2.4 Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers

Ein Interferometer ist allgemein ein Gerät, dass unter Ausnutzung von Interferenzeffekten die Messung optischer Größen erlaubt. Zur Erzeugung dieser Interferenzen wird dabei der Lichtstrahl in mindestens zwei Teilbündel aufgeteilt, verändert eines dieser Teilbündel und führt sie anschließend wieder zusammen. Die Bündel lassen sich beispielsweise durch eine semipermeablen Platte aufspalten. Dies ist sowohl bei punktförmigen, als auch bei ausgedehnten Lichtquellen möglich. In Abbildung 4 ist ein Interferometer nach A. Michelson's Idee dargestellt. Dieses verwendet eine semipermeable Platte.



**Abbildung 4:** Prinzipieller Aufbau eines Michelson-Interferometers ( $L$  = Lichtquelle,  $S_1$  und  $S_2$  Spiegel,  $P$  = semipermeable Spiegel,  $D$  = Lichtdetektor) [1].

In Abbildung 4 ist zu erkennen, dass ein Teil des der Lichtquelle  $L$  emittierten Lichtes ohne Richtungsänderung durch die semipermeable Platte  $P$  hindurchgeht, während der Rest in eine zur Einfallsrichtung senkrechte Richtung reflektiert wird. Danach fallen beide Teilbündel senkrecht auf verschiedene Spiegel  $S_1$  und  $S_2$ , wo sie in sich zurückgeworfen werden. Diese zurückkommenden Strahlen treffen dann in  $P$  wieder zusammen und werden dort erneut geteilt. Je ein von  $S_1$  und  $S_2$  kommendes Teilbündel läuft jedoch parallel zum anderen zum Beobachtungsort  $D$  weiter. Ist ihr optischer Wegunterschied kleiner als die Kohärenzlänge  $l$  der benutzten Lichtquelle, so sind diese Bündel kohärent. Dies wird realisiert indem die Abstände  $\overline{S_1P}$  und  $\overline{S_2P}$  praktisch gleich gewählt werden. Da der Strahl zum Spiegel  $S_2$  die Platte bei  $P$  nur einmal durchläuft, während der von  $S_1$  kommende Strahl diese zweimal passiert bevor er auf  $D$  trifft, wird in den Strahlenweg zum Spiegel  $S_2$  eine Kompensationsplatte gestellt, die die gleiche Dicke und den gleichen Brechungsindex wie der semipermeable Spiegel  $P$  besitzt.

Sind die Abstände  $\overline{S_1P}$  und  $\overline{S_2P}$  exakt gleich, so besteht unter den erwähnten Voraussetzungen ein Gangunterschied von  $\lambda/2$  (wegen des Phasensprunges bei der Reflexion des von  $S_2$  kommenden Strahles an  $P$ ) zwischen den beiden

in  $D$  eintreffenden Strahlenbündeln. Sie löschen sich deshalb durch Überlagerung aus. Wird nun einer der Spiegel um ein Stück  $d$  verschoben, so stellt sich ein Wegunterschied von  $w = 2d$  ein und die am Detektor registrierte Intensität ändert sich. Sie lässt sich mit den Gleichungen aus Unterabschnitt 2.1 berechnen. Hier spielt nur die Ortsabhängigkeit der elektrischen Feldstärke eine Rolle und somit lassen sich folgende Ansätze für die am Ort  $x$  des Detektors  $D$  eintreffenden Wellen verwenden

$$\vec{E}_1(x) = \vec{E}_0 \exp(ikx) \quad \text{und} \quad \vec{E}_2(x) = \vec{E}_0 \exp(ik(x + 2d + \pi)).$$

Daraus folgt nach (2), (3), sowie  $k = 2\pi/\lambda$

$$I(d) = 2c\vec{E}_0^2 \left( 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}2d + \pi\right) \right).$$

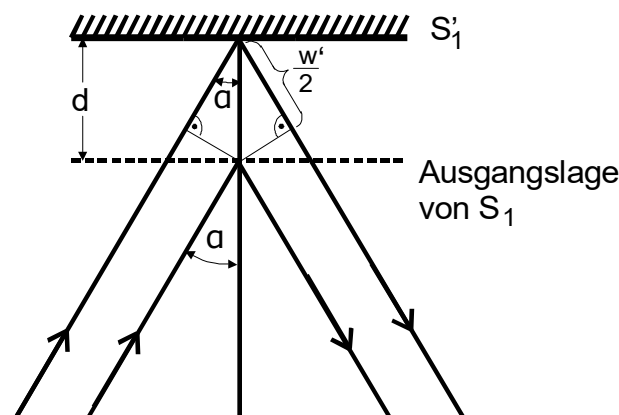
Bei kontinuierlicher Vergrößerung von  $d$  schwankt  $I(d)$  demnach periodisch zwischen Null und einem Maximalwert. Die räumliche Periode beträgt dabei  $\lambda/2$ . Damit lässt sich die in Abbildung 4 skizzierte Versuchsanordnung zur unmittelbaren Wellenlängenmessung nutzen. Dazu verschiebt man den Spiegel in Strahlrichtung um  $\Delta d$  und zählt dabei die auftretenden Helligkeitsmaxima. Dann gilt

$$\Delta d = z \cdot \frac{\lambda}{2}. \quad (8)$$

Dabei kann  $\Delta d$  bequem mit einer Mikrometerschraube eingestellt werden, falls  $z \gg 1$  ist.

Meist arbeitet man beim Michelson-Interferometer mit einem divergenten Strahlenbündel. In diesem Fall hängt der Wegunterschied  $w$  auch vom Winkel  $\alpha$  zwischen Spiegelnormalen und Einfallsrichtung des Strahles ab. Entsprechend lautet der Wegunterschied  $w'$  für zwei Strahlen bei einer Spiegelverschiebung um das Stück  $d$  unter dem Winkel  $\alpha$  zur Spiegelnormalen (siehe Abbildung 5)

$$w' = 2d \cos(\alpha).$$



**Abbildung 5:** Verwendung divergenter Strahlenbündel beim Michelson-Interferometer [1].

Für eine feste Verschiebung  $d$  können je nach Größe von  $\alpha$  Interferenzmaxima und -minima auftreten. Dabei tritt bei

$$\alpha = 0 \quad \text{und} \quad d = n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

in jedem Fall Auslöschung der Strahlen auf. Nach (2.4) erscheinen weitere Intensitätsminima für festes  $d$  unter den Winkeln

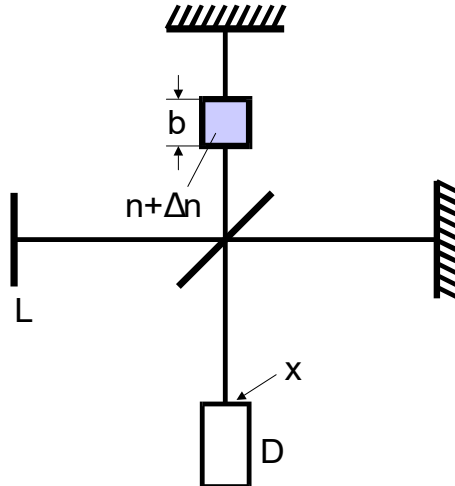
$$\alpha_k = \arccos\left(\frac{k\lambda}{2d}\right), \quad \left(k = 1, 2, \dots, \frac{2d}{\lambda}\right).$$

Zwischen diesen Winkeln liegen Interferenzmaxima. Entsprechend ist bei divergenten Strahlenbündeln ein System aus konzentrischen Kreisen, welche abwechselnd hell und dunkel sind, am Detektor zu sehen. Sie werden als **Interferenzkurven gleicher Neigung** bezeichnet. Während der Bewegung des Spiegels scheinen diese Ringe aus dem Zentrum der Figur hervorzuströmen oder in ihm zu verschwinden.



## 2.5 Messung des Brechungsindex von Gasen

Der in Unterabschnitt 2.4 beschriebene optische Wegunterschied zwischen zwei Strahlenbündeln kann auch durch das Leiten eines Bündels durch ein Medium mit geänderten Brechungsindex erreicht werden. Im Folgenden geht das eine Strahlenbündel auf einem Wegstück  $b$  durch ein Medium mit dem Brechungsindex  $n + \Delta n$  hindurch. An allen anderen Orten habe der Brechungsindex  $n$ .



**Abbildung 6:** Prinzipielle Versuchsanordnung zur Messung kleiner Brechungsindexunterschiede mit dem Michelson-Interferometer [1].

In einem Versuchsaufbau wie in Abbildung 6 beträgt der optische Wegunterschied zwischen den beiden interferierenden Strahlenbündeln gerade  $b\Delta n$ . Wird nun  $\Delta n b$  vergrößert, so laufen am Ort  $x$  nacheinander  $z$  Intensitätsmaxima durch. Diese Vergrößerung lässt sich beispielsweise durch das Ändern des Gasdruckes in einer Messzelle mit der Länge  $b$  erreichen. Es gilt dann

$$b \cdot \Delta n = \frac{z\lambda}{2}. \quad (9)$$

So lassen sich mit dem Interferometer Brechungsindexunterschiede  $\Delta n$  der Größenordnung  $1,0 \cdot 10^{-5}$  ausmessen, da im Allgemeinen  $\lambda \ll b$ .

Aus der klassischen Dispersionstheorie folgt, dass zwischen dem Brechungsindex  $n$  und der Zahl  $N$  der von der Lichtwelle erzwungenen Schwingungen pro Volumeneinheit angeregten Dipole folgender Zusammenhang besteht

$$n = \sqrt{1 + f(\lambda)N}$$

Die Gleichung lässt sich über

$$n = 1 + \frac{f}{2}N - \dots \quad (10)$$

nähern, da im Bereich des sichtbaren Lichtes  $fN \ll 1$  gilt. Außerdem darf vorausgesetzt werden, dass Gase im Bereich  $\ll 100\,000$  Pa als ideal angesehen werden können. Somit gilt die Ideale Gasgleichung

$$pV = RT,$$

wobei die Zahl  $N(p, T)$  der bei der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  vorhandenen Moleküle pro Volumen proportional zum Druck und umgekehrt proportional zur Temperatur ist. Es gilt

$$N(p, T) = \frac{p}{T} \frac{T_0}{p_0} N_L \quad \text{sowie} \quad N(p', T) = \frac{p'}{T} \frac{T_0}{p_0} N_L, \quad (11)$$

( $N_L$  = Loschmidtsche Zahl)

da unter Normalbedingungen ( $p_0 = 100\,000$  Pa und  $T_0 = 270$  K) genau  $N_L$  Moleküle in 1,0 mol eines Gases enthalten sind. Für die Messung des Brechungsindexunterschiedes  $\Delta n(p, p')$ , welcher sich einstellt, wenn der Gasdruck in der Messzelle von  $p$  auf  $p'$  geändert wird, gilt nach (10)

$$\Delta n(p, p') = \frac{f}{2} (N(p, T) - N(p', T)).$$

Mit Hilfe von (11), sowie der Konvention den Brechungsindex eines Gases unter Normalbedingungen anzugeben ergibt sich schließlich

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n(p, p') \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'}. \quad (12)$$

Die Brechungsindexänderung  $\Delta n(p, p')$  ergibt sich gemäß (9) aus der Zahl  $Z$  der durchlaufenen Interferenzringe während der Druckänderung von  $p$  auf  $p'$  oder umgekehrt.

### 3 Versuchsaufbau und Durchführung

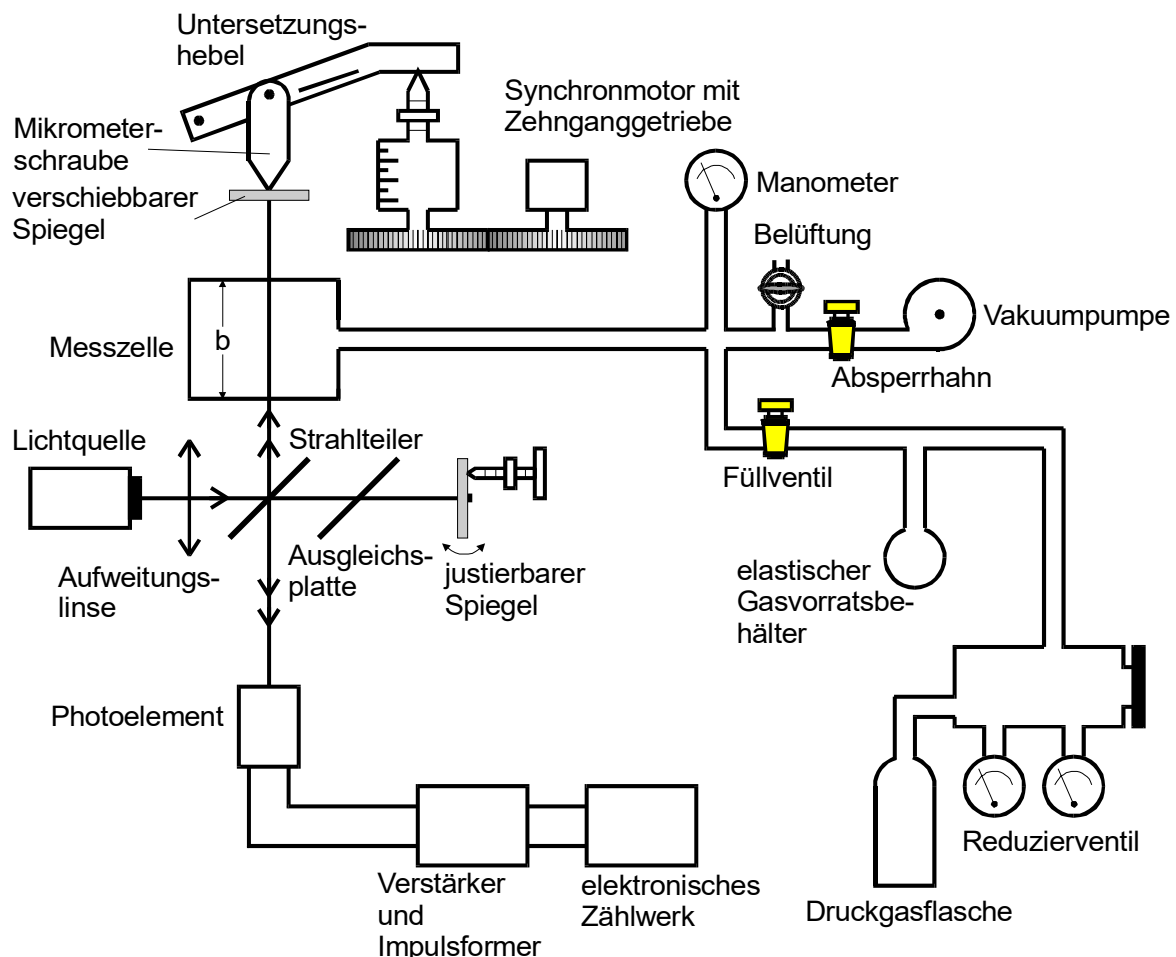


Abbildung 7: Schematische Darstellung der kompletten Messapparatur [1].

Kernstück der Messapparatur ist das Michelson-Interferometer. Vor Beginn der Messungen muss der Strahlengang genau justiert werden. Wichtig ist hier vor allem, dass die von den Spiegeln  $S_1$  und  $S_2$  kommenden und zum Detektor gehenden Achsen der Teilbündel parallel sind. Für den Justiervorgang wird ein Laser als Lichtquelle verwendet, der wegen seiner großen Kohärenzlänge besonders gut geeignet ist. Dabei werden die aus dem Interferometer austretenden Strahlenbündel mit einer Mattscheibe aufgefangen und es werden durch vorsichtiges Verstellen der beiden Rändelschrauben des justierbaren Spiegels die beiden hellsten Lichtpunkte auf der Mattscheibe möglichst genau zur Deckung gebracht. Dann soll das enge parallele Lichtbündel des Lasers mit einer kurzbrennweitigen Sammell- oder Zerstreuungslinse geweitet werden. Es muss nun ein konzentrisches Ringsystem auf der Mattscheibe erschienen. Nun werde das Interferenzbild mit den Rändelschrauben so ausgerichtet, dass das Zentrum auf den Eintrittsspalt des Photoelements fällt, welches jetzt an Stelle der Mattscheibe gesetzt wird. Bei allen Messungen ist außerdem darauf zu achten, dass die Vorschubgeschwindigkeit des Spiegels so angepasst wird, dass die Wechselfrequenz der Interferenzringe zwischen 1,0 Hz und 20 Hz liegt, da alle anderen Frequenzen von einem Filter unterdrückt werden.

### 3.1 Wellenlängen Bestimmung

Nach den Vorbereitungen lassen sich nun Wellenlängenmessungen mit dem Michelson-Interferometer durchführen. Dazu wird der an einen Untersetzungshebel gekoppelte Spiegel mittels einer Mikrometerschraube in Strahlrichtung verschoben. An der Mikrometerschraube lässt sich nun die Verschiebung ablesen und es werden die während des Vorschubs am Eintrittsfenster des Photoelements vorbeiwandernden Interferenzringe abgezählt. Aufgrund der hohen Empfindlichkeit der Apparatur wird ein hoch untersetztes Zehnganggetriebe mit einem Synchronmotor verwendet um die Schraube zu verstellen. Die Interferenzringe werden dabei von einem elektronischem Zählwerk gezählt. Dies funktioniert über ein Photoelement, welches die Lichtintensitätsschwankungen in Stromimpulse verwandelt, welche dann verstärkt und zu Rechteckimpulsen transformiert werden. Diese werden schließlich gezählt. Da die Lichtwellenlänge klein gegenüber der Teilung der Mikrometerschraube ist, kann nur dann hinreichend genau gemessen werden, wenn eine Große Zahl von Interferenzringen gezählt wird. Dabei sollten hier mindestens 3000 Messungen gemacht werden. Weiterhin sollte der Tisch während der Messung nicht berührt werden.

### 3.2 Brechungsindexmessung

Um den Brechungsindex von Gasen zu messen, muss die Apparatur nicht umgebaut werden. Am Manometer wird der Innendruck  $p$  der Messzelle mit der Schichtdicke  $b = 50 \text{ mm}$  abgelesen. Dann soll mit Hilfe der Vakuumpumpe der Innendruck auf den Wert  $p'$  gesenkt werden. Während des Evakuierens wandern eine Reihe von Interferenzstreifen über das Eintrittsfenster des Photoelements, welche wieder elektronisch gezählt werden. Entsprechend wird gemessen, wenn der Druck von  $p'$  auf  $p$  erhöht wird. Soll ein anders Gas als Luft untersucht werden, so muss die Messzelle zunächst evakuiert werden. Dazu wird die Vakuumpumpe solange laufen gelassen, bis der Druck auf einen Minimalwert abgesunken ist. Dann wird das Füllventil geöffnet, bis in der Messzelle ein Druck von knapp  $100\,000 \text{ Pa}$  erreicht ist. Danach wird wieder die Vakuumpumpe verwendet um den Druck auf einen Wert  $p'$  zu senken. Die Messung muss hier einige Male wiederholt werden, da eventuelle Restluft in der Messzelle die Ergebnisse verfälschen kann.

### 3.3 Bestimmung des Abstandes der beiden Komponenten einer Dublettlinie

Als Messobjekt zur Bestimmung des Wellenlängenunterschiedes  $\Delta\lambda$  einer Dublett-Linie dient eine Spektrallampe. Geeignet sind zum Beispiel die gelbe Linie des Na- oder Hg-Spektrums, wobei es beim Hg-Spektrum sinnvoll ist, mit einem Interferenzfilter die restlichen Linien des Spektrums zu unterdrücken. Bei der Messung wird der bewegliche Spiegel solange bewegt, bis mehrere Schwebungsminima zu sehen waren. Dabei ist es zweckmäßig, das Detektorsignal mit einem Speicheroszilloskop aufzuzeichnen. Zu messen sind der räumliche Abstand der Schwebungsminima und die mittlere Wellenlänge. Aufgrund der relativ geringen Kohärenzlänge sind hier allerdings keine großen Spiegelverschiebungen möglich, weshalb deutlich weniger Interferenzringe gezählt werden können. Wird mit einer Spektrallampe gearbeitet, so wird die Interferenzfigur mittels einer Sammellinse ( $f = 20 \text{ cm}$ ) auf das Photoelement abgebildet. Da das Licht einer solchen Lampe mit  $100 \text{ Hz}$  moduliert ist, muss zwischen Photoelement und Zählwerk ein Selektiv-Verstärker geschaltet werden, welcher diese Störfrequenz wirksam unterdrückt.

## 4 Auswertung

Es werden 2 Messungen wie in Abschnitt 3 beschrieben durchgeführt.

### 4.1 Wellenlängen Bestimmung

Zur Bestimmung der Wellenlänge werden die in Tabelle 1 dargestellten Daten verwendet. Es wird ihnen dabei ein Fehler von 25 Zählerpunkten zugeordnet. Mit Hilfe von Gleichung 8 kann so die Wellenlänge aus der Zählrate bestimmt werden. Für den Abstand  $d$  muss beachtet werden das der Motor einen Übersetzungsfaktor von 5,0 besitzt. Da die Mikrometerschraube um  $5,0 \text{ mm}$  verschoben wurde kann so  $\Delta d = 0,99 \text{ mm}$  bestimmt werden. Für die Bestimmung der Fehler wird folgendermaßen vorgegangen. Alle Mittelwerte einer  $N$ -fach gemessenen Größe  $x$

werden über die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (13)$$

berechnet. Der zugehörige Fehler des Messwertes berechnet sich dann über

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

Setzt sich eine zu berechnende Größe aus mehreren mit Unsicherheit behafteten Messwerten zusammen, so ist die Unsicherheit dieser Größe über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung gegeben

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2 \right]}. \quad (15)$$

Bei der Angabe des Endergebnisses werden schließlich alle statistischen Teilfehler addiert. Alle Berechnungen sowie das Bestimmen der Unsicherheiten werden mit Python 3.8.8 und entsprechenden Bibliotheken<sup>1</sup> durchgeführt.

**Tabelle 1:** Zählerrate der Verschiebung um 5,0 mm und berechnete Wellenlänge.

Zählerrate	$\lambda$ / nm
3100	647,4±5,3
3000	658,6±5,5
3000	655,3±5,4
3000	653,2±5,4
3000	653,2±5,4
3000	653,0±5,4
3000	660,1±5,5
3000	658,0±5,5
3000	658,8±5,5
3000	661,3±5,5

Für den Mittelwert gilt  $\lambda_{\text{mess}} = (655,9 \pm 1,7) \text{ nm}$ .

#### 4.2 Bestimmung des Brechungsindex von Luft

Durch die Gleichung 12 wird der Brechungsindex von Luft aus den Daten in Tabelle 2 bestimmt. Jedem wird ein Fehler von 2,0 zugeordnet. Dazu sind einige Konstanten bekannt:

$$\begin{aligned} T_0 &= 270 \text{ K} \\ p_0 &= 1,0 \text{ bar} \\ b &= 50 \text{ mm} \\ p - p' &= 0,80 \text{ bar} \\ \lambda_{\text{lit}} &= 640 \text{ nm} \end{aligned}$$

Außerdem wird von einer Raumtemperatur von  $T = 20^\circ \text{C} = 290 \text{ K}$  ausgegangen. Mit diesen werden die  $n$  berechnet und auch in Tabelle 2 eingetragen.

<sup>1</sup>Numpy [2], Uncertainties [3] and Matplotlib [4]

**Tabelle 2:** Zählerrate und Druckänderung mit den berechneten  $n$ .

Druckänderung / bar	Zählerrate	$n$
-0,80	42	1,000 360±0,000 017
0,80	28	1,000 240±0,000 017
-0,80	57	1,000 490±0,000 017
0,80	28	1,000 240±0,000 017
-0,80	39	1,000 340±0,000 017
0,80	27	1,000 230±0,000 017

Für den Brechungsindex  $n$  von Luft gilt so  $n = 1,000\,318 \pm 0,000\,007$ .

## 5 Diskussion

Für die berechneten Werte wird die Abweichung zu den Literaturwerten bestimmt. Für die Wellenlänge gilt  $\lambda_{\text{lit}} = 640\text{ nm}$ . Dies konnte der Aufschrift des Lasers entnommen werden. Die Abweichung beträgt  $(3,29 \pm 0,27)\%$ . Ähnlich wird für den Literaturwert  $n_{\text{lit}} = 1,0[5]$  eine Abweichung von  $(0,0048 \pm 0,0007)\%$ . Auch wenn die Abweichungen nur relativ gering sind gibt es durchaus Fehlerquellen in der Messung. Vor Beginn des Versuchs wurde die Breite der Minima möglichst groß eingestellt damit alle Impulse gezählt werden können. Das heisst es kann dazu kommen das mal ein Impuls nicht gezählt wird und es zu Verfälschungen kommt. Ein weiteres Problem ist aber auch wenn der Sensor zu viele Schritte zählt. Dazu kann es kommen wenn der Verstärker am Photosensor zu stark eingestellt ist. Auch durch das Wackeln am Tisch oder durch das Vorbeilaufen können Schatten auf den Sensor gelangen die den Zähler auslösen. Außerdem konnte beim löschen des Zählers immer eine geringe Anzahl von Ausschlägen beobachtet werden. Diese haben in der Messung der Wellenlänge einen relativ geringen Einfluss. Allerdings können diese bei den kleinen Zählerraten der Brechungsindexmessung zu Fehlern führen. In den Werten der Tabelle 2 fällt auf, dass beim Pumpen des Vakuums ein grösserer Wert gezählt wurde als bei dem Einlassen des Gases. Dies deutet daraufhin, dass die Handpumpe nicht sehr genau ist und besser eine kontrollierbare Pumpe verwendet werden sollte. Um die Genauigkeit zu verbessern können mehr Werte aufgenommen werden. Doch den grössten Einfluss scheint das Bewegen des Tisches zu sein. Wird dieser also besser stabilisiert sollten geringe Abweichungen möglich sein. Da diese aber relativ gering waren ist der Versuch gut geeignet um sowohl die Wellenlänge als auch den Brechungsindex zu bestimmen.

## Literatur

- [1] Versuch Nr. 401. Das Michelson-Interferometer. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2022.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Refractive index database. Mikhail Polyanskiy. URL: <https://refractiveindex.info/> (besucht am 30.04.2022).