

**VERSUCH NUMMER 103**

## **Biegung elastischer Stäbe**

Maximilian Freiheit  
maximilian.freiheit@tu-dortmund.de

Jonas Alexander Minor  
jonas.minor@tu-dortmund.de

Durchführung: 14.12.2021

Abgabe: 21.12.2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
2.1 Spannung, Elastizitätsmodul und Hooksches Gesetz . . . . .	1
2.2 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung . . . . .	1
2.3 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage . . . . .	4
2.4 Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes . . . . .	5
2.5 Berechnung der Messunsicherheiten . . . . .	6
<b>3 Versuchsaufbau und Durchführung</b>	<b>6</b>
3.1 Messapparatur . . . . .	6
3.2 Einseitige Einspannung des Stabes . . . . .	7
3.3 Zweiseitige Auflage des Stabes . . . . .	7
<b>4 Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1 Berechnung der benötigten Größen . . . . .	7
4.2 Einseitig eingespannter runder Stab . . . . .	8
4.3 Einseitig eingespannter eckiger Stab . . . . .	10
4.4 Zweiseitig aufgelegter runder Stab . . . . .	13
4.4.1 Rechte Seite . . . . .	13
4.4.2 Linke Seite . . . . .	15
4.5 Zweiseitig aufgelegter eckiger Stab . . . . .	17
4.5.1 Rechte Seite . . . . .	17
4.5.2 Linke Seite . . . . .	19
<b>5 Diskussion</b>	<b>20</b>
<b>Literatur</b>	<b>21</b>

## 1 Zielsetzung

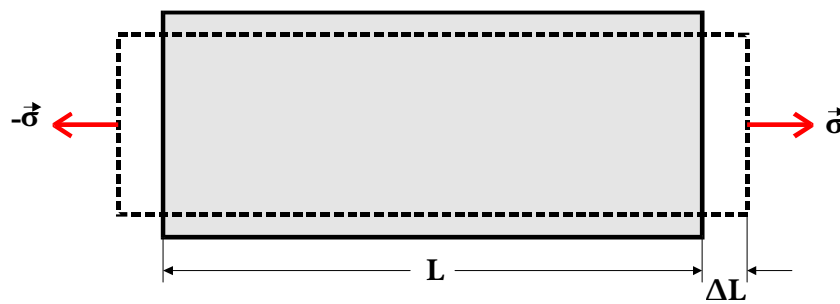
In diesem Versuch soll die Biegung elastischer homogener Stäbe untersucht werden. Dabei werden jeweils die Elastizitätsmodule bestimmt. Es werden sowohl runde als auch eckige Stäbe bei ein- und beidseitigen Einspannungen gebogen.

## 2 Theoretische Grundlagen

Zunächst sollen die benötigten Grundlagen dargestellt werden.

### 2.1 Spannung, Elastizitätsmodul und Hooksches Gesetz

Durch Kräfte auf der Oberfläche eines Körpers werden Gestalts- und Volumenänderungen hervorgerufen. Diese Kräfte werden meistens in Bezug zur Fläche des Körpers gestellt. Die sich so ergebende physikalische Größe wird als **Spannung** bezeichnet. Dabei wird die zur Oberfläche orthogonal stehende Komponente dieser Kraft als **Normalspannung**  $\sigma$  oder Druck genannt, die zur Fläche parallel laufende Komponente heißt **Tangential-** oder **Schubspannung**.



**Abbildung 1:** Dehnung einer stabförmigen Probe unter dem Einfluss einer Normalspannung [1]

Wird die Körperdimension  $L$  um eine hinreichend kleine relative Änderung  $\Delta L$  geändert, so folgt bei den meisten Festkörpern eine lineare Abhängigkeit der Spannung  $\sigma$  und der Deformation  $\Delta L/L$ . Diese wird in der Literatur als **Hooksches Gesetz** bezeichnet. Es lautet

$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta L}{L}. \quad (1)$$

Der Faktor  $E$  aus Gleichung (1) wird dabei als **Elastizitätsmodul** bezeichnet und stellt eine wichtige Materialkonstante dar. Ist eine geeignete Messvorrichtung vorhanden, mit der eine kleine Längenänderung  $\Delta L$  zuverlässig gemessen werden kann, so kann der Elastizitätsmodul durch eine Dehnung (oder Stauchung) eines stabförmigen Körpers wie in Abbildung 1 bestimmt werden. Da solche Messvorrichtungen häufig nicht zur Verfügung stehen, wird in diesem Versuch eine andere Deformation verwendet: Die **Biegung**. Sie bietet den Vorteil, dass bereits bei geringen Kräften, im Vergleich mit der Dehnung, eine leicht messbare Änderung am Probestab hervorgerufen wird.

### 2.2 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei einseitiger Einspannung

Die Biegung eines Stabes lässt sich auf die in Unterabschnitt 2.1 beschriebene Dehnung zurückführen. Um eine Biegung hervorzurufen, kann beispielsweise, wie in Abbildung 2 dargestellt, eine Kraft auf einen einseitig eingespannten Stab wirken.

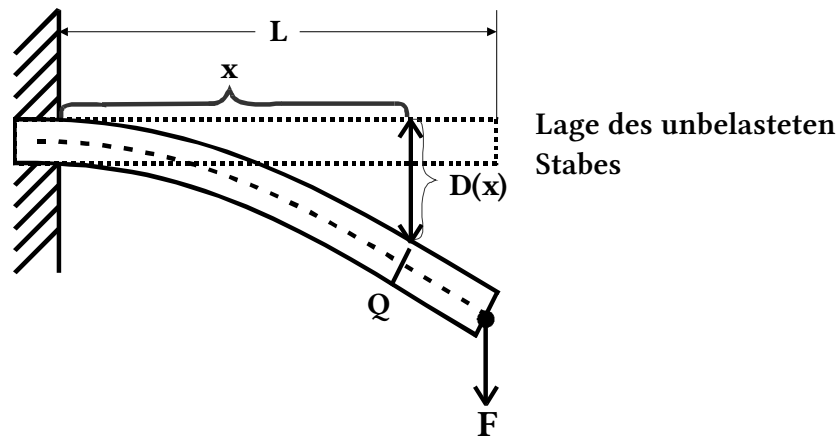


Abbildung 2: Durchbiegung eines elastischen Stabes bei einseitiger Einspannung [1]

Ein Unterschied zur Dehnung ist, dass die Längenänderungen über den Querschnitt  $Q$  der Probe nicht mehr konstant sind. Es treten auch Stauchungen auf, also Änderungen kleiner null. Die Durchbiegung  $D$ , also die Verschiebung eines Oberflächenpunktes an der Stelle  $x$  gegenüber dem unbelastetem Zustand, kann als Funktion  $D(x)$  dargestellt werden. Da diese Funktion vom Elastizitätsmodul  $E$  abhängt, lässt sich dieses durch Messen von  $D$  und  $x$  bestimmen. An Abbildung 2 ist erkennbar, dass am gebogenen Stab Kräftepaare angreifen, deshalb muss eine Drehmomentgleichung aufgestellt werden, um  $D(x)$  zu bestimmen. Die Kraft  $F$  verursacht an einem senkrecht zur Stabachse stehenden Querschnitt  $Q$  an der Stelle  $x$  vom Einspannungspunkt aus gemessen ein Drehmoment  $M_F$ , welches  $Q$  aus der ursprünglich vertikalen Lage verdreht. Dadurch werden bei einseitiger Einspannung die oberen Schichten des Stabes gedehnt und die unteren gestaucht. Durch die elastischen Eigenschaften des Stabes entsteht so eine Normalspannung, die dieser Auslenkung entgegenwirkt. Es entsteht ein Gleichgewichtszustand mit einer messbaren, endlichen Durchbiegung  $D$ . Im hier gewählten Beispiel treten in den oberen Schichten Zug- und in den unteren Schichten Druckspannungen auf. Als **neutrale Faser** wird dabei die Fläche dazwischen bezeichnet, in der keine Spannungen auftreten und welche entsprechend ihre ursprüngliche Länge beibehält. Diese neutrale Faser ist in Abbildung 2 gestrichelt dargestellt. Zur Herleitung der Formel für  $D$  wird nun ein beliebiges Flächenelement  $dq$  betrachtet.

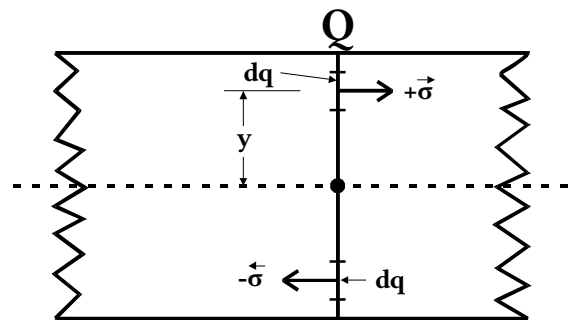


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung des Drehmomentes  $M_Q$  [1]

Wie in Abbildung 3 erkennbar, wirken die Zug- und Druckspannungen, welche am Querschnitt  $Q$  angreifen, entgegengesetzt gleich. Es entsteht dadurch ein Drehmoment  $M_Q$ , welches durch eine Integration über  $Q$

$$\int_Q y \sigma(y) dq \quad (2)$$

errechnet werden kann, wobei  $y$  für den Abstand des Flächenelements  $dq$  zur neutralen Faser steht. Die Deformation des Stabes ist dann so im Gleichgewichtszustand, dass die beiden Drehmomente übereinstimmen. Es gilt also

$$M_F = M_Q. \quad (3)$$

Ein weiteres Drehmoment, welches vom Eigengewicht vom Stab verursacht wird, wird hier vernachlässigt. Im Fall der hier gewählten einseitigen Einspannung, wirkt die Kraft  $F$  über den Hebelarm  $L - x$  an  $Q$  an (siehe Abbildung 2). Daher gilt für das Drehmoment

$$M_F = F \cdot (L - x). \quad (4)$$

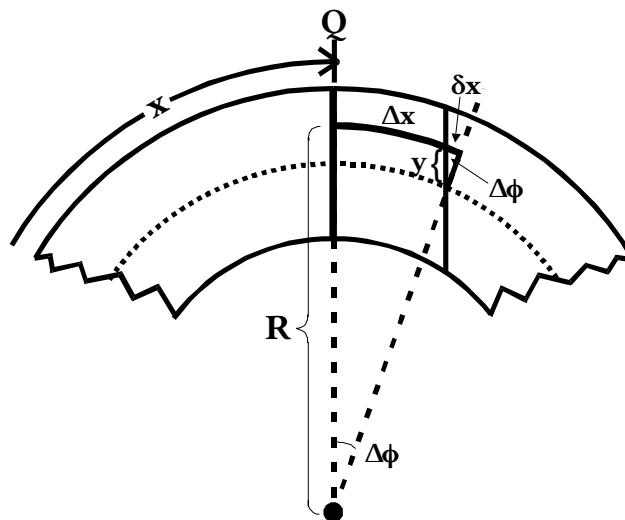
Entsprechend folgt für das Gleichgewicht der Momente aus Gleichung 3

$$\int_Q y \sigma(y) dq = F \cdot (L - x). \quad (5)$$

Nach dem Hookschen Gesetz (1) folgt für die Normalspannung

$$\sigma(y) = E \cdot \frac{\delta x}{\Delta x}.$$

Dabei steht  $y$  für den Abstand zur neutralen Faser,  $\Delta x$  steht für eine kurze Länge des Stabes.  $\delta x$  gibt die Längenänderung gegenüber  $\Delta x$  infolge der Durchbiegung an.



**Abbildung 4:** Skizze zur Berechnung der Normalspannung  $\sigma(y)$  in einem gebogenen Stab [1]

Anhand von Abbildung 4 wird die Beziehung

$$\delta x = y \Delta \varphi = y \frac{\Delta x}{R}$$

mit  $R$  als Krümmungsradius der Faser an der Stelle  $x$  deutlich. Außerdem gilt  $\delta x \ll \Delta x$ . Daraus ergibt sich

$$\sigma(y) = E \cdot \frac{y}{R}. \quad (6)$$

Für geringe Kurvenkrümmungen und damit großes  $R$ , liefert die Differentialgeometrie die Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 D}{dx^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dD}{dx}\right)^2}}.$$

Mit

$$\left(\frac{dD}{dx}\right)^2 \ll 1$$

lässt sich die Gleichung approximieren mit

$$\frac{1}{R} \approx \frac{d^2 D}{dx^2}.$$

Damit lässt sich Gleichung 6 ausdrücken als

$$\sigma(y) = Ey \frac{d^2 D}{dx^2}$$

und die Momentengleichung (5) wird zu

$$E \frac{d^2 D}{dx^2} \int_Q y^2 dq = F(L - x) \quad (7)$$

umgeschrieben, wobei der Ausdruck

$$I_A := \int_Q y^2 dq(y) \quad (8)$$

auch als **Flächenträgheitsmoment** bezeichnet wird, da er in Analogie zum Massenträgheitsmoment  $\theta$  steht. Durch Integration der Gleichung (7) lässt sich nun das anfangs gestellte Problem lösen und  $D$  wird ausgedrückt über

$$D(x) = \frac{F}{2EI_A} \left( Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad (\text{für } 0 \leq x \leq L). \quad (9)$$

Durch die einseitige Einspannung gegebenen Anfangsbedingungen, verschwinden die Integrationskonstanten in Gleichung 9. An der Einspannstelle ist der Stab horizontal eingespannt, es gilt also  $D(0) = 0$ . Außerdem ist dort auch die Änderung der Durchbiegung null, das heißt, es gilt  $dD/dx = 0$ .

### 2.3 Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage

Ein anderer Weg, eine Durchbiegung zu erzeugen, ist es, den Stab an beiden Enden aufzulegen und in der Stabmitte eine Kraft  $F$  wirken zu lassen.

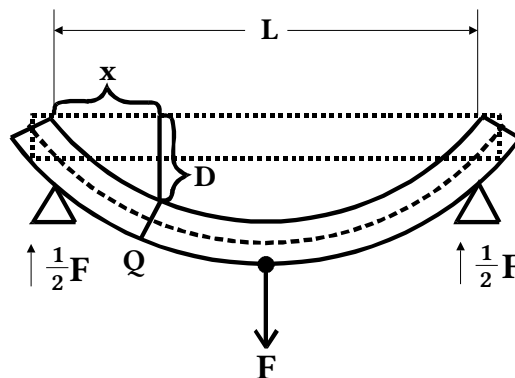


Abbildung 5: Durchbiegung eines homogenen Stabes bei zweiseitiger Auflage [1]

Bei der Versuchsanordnung aus Abbildung 5 greift die Kraft  $F/2$  mit dem Hebelarm  $x$  an der Querschnittsfläche  $Q$  an. Daher gilt für das Drehmoment  $M_F$  im Bereich  $0 \leq x \leq L/2$  die Abhängigkeit

$$M_F = -\frac{F}{2}x.$$

Entsprechend gilt auf der anderen Stabhälfte  $L/2 \leq x \leq L$

$$M_F = -\frac{F}{2}(L - x).$$

Damit ergibt sich für die Momentengleichung (6)

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F}{EI_A} \frac{x}{2} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

bzw.

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F}{EI_A} \frac{L - x}{2} \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

Die Integration beider Gleichungen liefert dann

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI_A} \frac{x^2}{4} + C \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}$$

und

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{EI_A} \frac{2Lx - x^2}{4} + \tilde{C} \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L.$$

In der Stabmitte muss, wie in Abbildung 5 erkennbar, die Biegelinie eine horizontale Tangente besitzen. Diese Bedingung liefert als Werte für die Integrationskonstanten

$$C = \frac{F}{EI_A} \frac{3L^2}{16}$$

und

$$\tilde{C} = \frac{F}{EI_A} \frac{L^2}{16}.$$

Durch eine weitere Integration ergibt sich schließlich für die linke Hälfte des Stabes

$$D(x) = \frac{F}{48EI_A} (3L^2x - 4x^3) \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (10)$$

Die Integrationskonstante in Gleichung 10 verschwindet, da die Durchbiegung an der linken Auflagestelle null ist. Für die rechte Stabhälfte ( $L/2 \leq x \leq L$ ) folgt mit  $D(L) = 0$

$$D(x) = \frac{F}{48EI_A} (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \quad \text{für } \frac{L}{2} \leq x \leq L. \quad (11)$$

Damit werden auch für die zweiseitige Auflagen die Funktionen für die Durchbiegung  $D$  gefunden.

## 2.4 Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes

Das Flächenträgheitsmoment  $I_A$  wird für den runden Stab in Polarkoordinaten berechnet. Entsprechend wird aus Gleichung 8

$$\begin{aligned} I_A &= \int_Q y^2 dq(y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^r r' (r' \sin(\varphi))^2 dr' d\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

Damit ergibt sich als Flächenträgheitsmoment für die Stäbe

$$I_A = \frac{\pi}{4} r^4. \quad (12)$$

Für den eckigen Stab wird das Flächenträgheitsmoment in kartesischen Koordinaten bestimmt. Entsprechend gilt für einen Stab mit der Seitenlänge  $a$

$$\begin{aligned} I_A &= \int_Q y^2 dq(y) \\ &= \int_0^a \int_0^a y^2 dy dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Somit wird als Flächenträgheitsmoment für die Stäbe

$$I_A = \frac{a^4}{12} \quad (13)$$

berechnet.

## 2.5 Berechnung der Messunsicherheiten

Alle Mittelwerte einer  $N$ -fach gemessenen Größe  $x$  werden über die Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (14)$$

berechnet. Der zugehörige Fehler des Messwertes berechnet sich dann über

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (15)$$

Setzt sich eine zu berechnende Größe aus mehreren mit Unsicherheit behafteten Messwerten zusammen, so ist die Unsicherheit dieser Größe über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung gegeben

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2 \right]}. \quad (16)$$

Ausgleichsgraden lassen sich wie folgt berechnen:

$$y = m \cdot x + b \quad (17a)$$

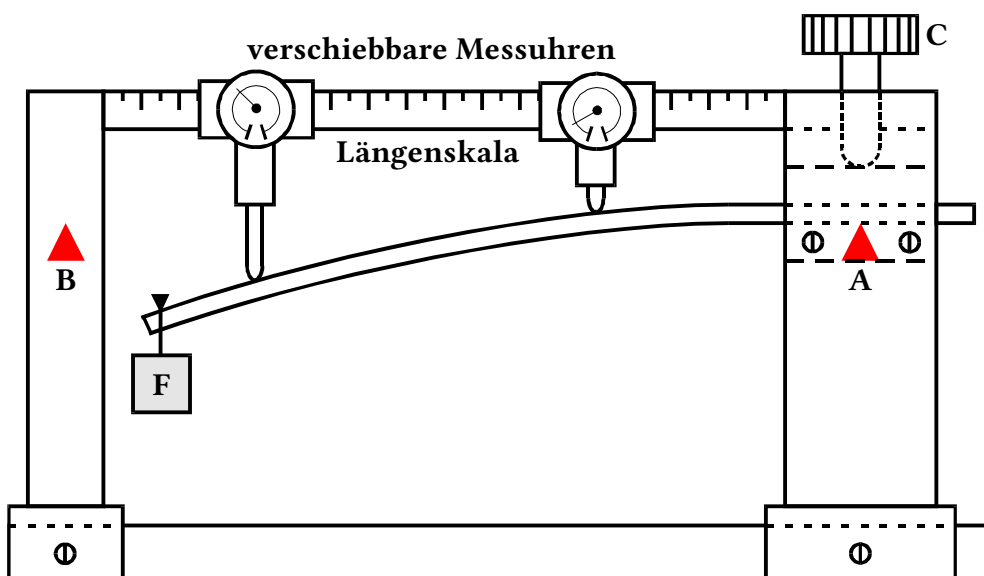
$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (17b)$$

$$b = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (17c)$$

Bei der Angabe des Endergebnisses wird schließlich der sich aus den Unsicherheiten ergebende systematische Fehler mit dem sich aus der Mittelwertberechnung ergebenden statistischen Fehler addiert. Alle Berechnungen, Graphen sowie das Bestimmen der Unsicherheiten werden mit Python 3.8.8 und entsprechenden Bibliotheken<sup>1</sup> durchgeführt.

## 3 Versuchsaufbau und Durchführung

### 3.1 Messapparatur



**Abbildung 6:** Schematische Darstellung einer Apparatur zur Vermessung elastisch gebogener Stäbe [1]

<sup>1</sup>Numpy [2], Uncertainties [3] and Matplotlib [4]



In der in Abbildung 6 dargestellten Messapparatur können Stäbe sowohl einseitig mit Hilfe der Spannvorrichtung C geklemmt, als auch zweiseitig auf den Fußpunkten A und B gelagert werden. Die Kraft wird dabei jeweils durch ein Gewicht  $F$  ausgeübt, welches an geeigneter Stelle angehängt wird. Zur Messung der Durchbiegung werden zwei Messuhren verwendet. Messuhren sind Längenmessinstrumente, welche mit Hilfe eines federnden Taststiftes Auslenkungen eines Objektes messen. Die Uhren sind dabei so angebracht, dass sie auf einer horizontalen Längenskala verschoben werden können. Auf dieser Skala lässt sich dabei so die Position  $x$  ablesen. Ein Teilstrich auf der Skala der Messuhren entspricht einer Verschiebung von  $10\text{ }\mu\text{m}$ . Da nicht davon auszugehen ist, dass die Stäbe ohne Last exakt grade sind und die Messuhrführung exakt parallel zur Probenachse verläuft, muss zuerst eine Messung ohne Last durchgeführt werden, mit welcher die Ursprungsdurchbiegung des Stabes bestimmt wird. Zweckmäßig wird an einer Stelle  $x$  immer zunächst die Durchbiegung  $D_0(x)$  ohne Last gemessen. Danach wird das Gewicht  $F$  eingehangen und die Durchbiegung  $D_M(x)$  abgelesen. Die tatsächliche Durchbiegung ergibt sich dann als Differenz. Sie beträgt also

$$D(x) = D_M(x) - D_0(x).$$

Das Gewicht  $F$  sollte im Versuch so gewählt werden, dass die Durchbiegung zwischen 3 und 7,0 mm liegt.

### 3.2 Einseitige Einspannung des Stabes

Die im Folgenden beschriebene Messung wird einmal für einen runden und einmal für einen eckigen Stab durchgeführt. Zuerst werden die Flächenträgheitsmomente der Stäbe, indem ihre Ausmaße mit Hilfe einer Schieblehre vermessen werden, bestimmt. Außerdem muss dazu auch ihr Gewicht mittels einer Waage bestimmt werden. Mit dieser Waage wird auch das Gewicht der Belastungsgewichte ermittelt. Der Stab wird in die Spannvorrichtung C aus Abbildung 6 eingespannt. Die eine Messuhr wird auf den Anfang der Messskala geschoben, die andere wird in diesem Teil des Versuches nicht benötigt. Das Gewicht wird nach Messung der Durchbiegung in der Ruhelage angehängt. Nun wird die Messuhr in regelmäßigen Abständen an der Skala entlang bewegt und die Messwertpaare  $D$  und  $x$  werden notiert.

### 3.3 Zweiseitige Auflage des Stabes

Nach der selben Vorgehensweise wie in Unterabschnitt 3.2 beschrieben, wird das Flächenträgheitsmoment des Stabes bestimmt. Außerdem wird das Gewicht der Belastungsgewichte bestimmt. Zuerst wird ein runder Stab an den Punkten A und B aufgelegt. Dann werden die Messuhren an die Enden der Skala beziehungsweise des Stabes bewegt. Um die Durchbiegung des Stabes zu messen, werden die Messuhren in regelmäßigen Abständen auf die Mitte des Stabes zubewegt. Auch hier muss an jeder Stelle  $x$  erst die Durchbiegung in Ruhelage gemessen werden.

## 4 Auswertung

### 4.1 Berechnung der benötigten Größen

Zunächst soll durch die Längen

$$L_{\text{rund}} = (0,580 \pm 0,001) \text{ m}$$

$$L_{\text{eck}} = (0,600 \pm 0,001) \text{ m}$$

und den Radius beziehungsweise der Breite der Stäbe das Volumen und damit die Dichte der Stäbe bestimmt werden. Der Durchmesser des runden Stabs beträgt  $d = 1,0 \text{ cm}$ . Die Breite des eckigen Stabs beträgt  $a = 1,0 \text{ cm}$ . Mit den gemessenen Massen

$$m_r = (0,4119 \pm 0,0001) \text{ kg}$$

$$m_e = (0,5362 \pm 0,0001) \text{ kg}$$

werden die Dichten zu

$$\rho_r = (9040,0 \pm 180,0) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (18)$$

$$\rho_e = (8940,0 \pm 90,0) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad (19)$$

berechnet. Die Fehler werden wie in Unterabschnitt 2.5 beschrieben bestimmt. Für die weitere Auswertung werden auch die Flächenträgheitsmomente

$$I_r = (4,90 \pm 0,20) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$I_a = (8,33 \pm 0,17) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

nach Gleichung 12 beziehungsweise Gleichung 13 berechnet. Die Regressionsgerade wird im Folgenden wie in Unterabschnitt 2.5 beschrieben bestimmt.

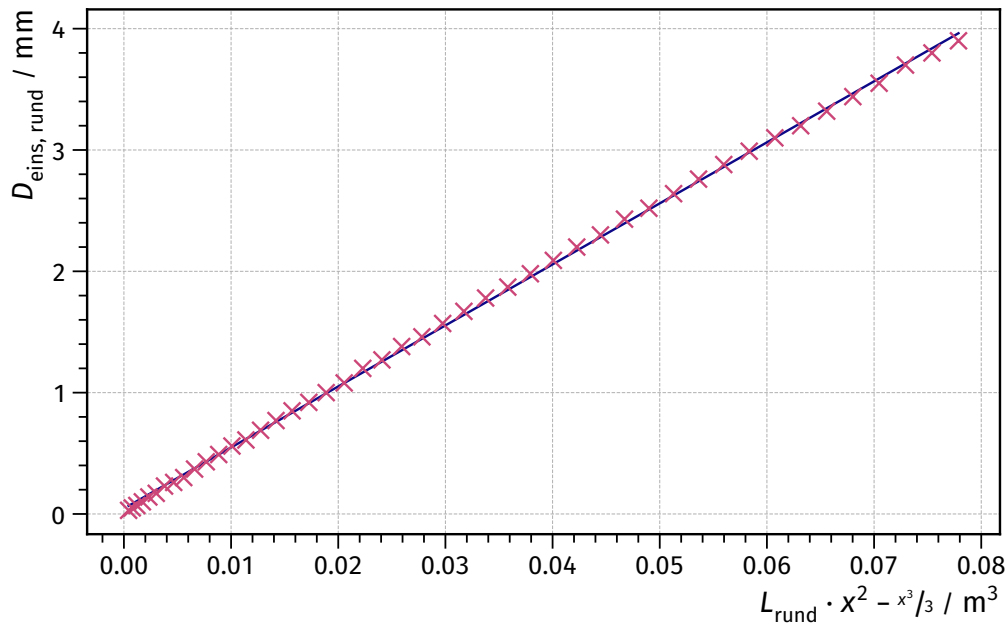
#### 4.2 Einseitig eingespannter runder Stab

In Tabelle 1 werden die gemessenen Daten für den runden Stab bei einseitiger Einspannung dargestellt. Dabei ist  $D_{\text{eins, rund, 0}}$  die Auslenkung des Stabes ohne Last und  $D_{\text{eins, rund, M}}$  die Auslenkung mit Last.  $D_{\text{eins, rund}}$  beschreibt die Differenz dieser also die tatsächliche Auslenkung. Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls wird auch noch  $L_{\text{rund}} \cdot x^2 - x^3/3$  bestimmt und in die Tabelle eingetragen.

**Tabelle 1:** Messdaten der Auslenkungen eines einseitig befestigten, runden Stab mit und ohne Last.

$x$ / cm	$D_{\text{eins, rund, 0}}$ / mm	$D_{\text{eins, rund, M}}$ / mm	$L_{\text{rund}} \cdot x^2 - x^3/3$ / m <sup>3</sup>	$D_{\text{eins, rund}}$ / mm
3,0	0,000	0,030	0,000 44	0,030±0,014
4,0	0,010	0,060	0,000 78	0,050±0,014
5,0	0,040	0,11	0,0012	0,070±0,014
6,0	0,070	0,17	0,0017	0,100±0,014
7,0	0,10	0,24	0,0023	0,140±0,014
8,0	0,14	0,31	0,0030	0,170±0,014
9,0	0,18	0,41	0,0038	0,230±0,014
10,0	0,24	0,50	0,0046	0,260±0,014
11,0	0,30	0,60	0,0056	0,300±0,014
12,0	0,36	0,73	0,0066	0,370±0,014
13,0	0,43	0,86	0,0077	0,430±0,014
14,0	0,50	0,99	0,0088	0,490±0,014
15,0	0,56	1,1	0,010	0,560±0,014
16,0	0,65	1,3	0,011	0,610±0,014
17,0	0,73	1,4	0,013	0,690±0,014
18,0	0,84	1,6	0,014	0,770±0,014
19,0	0,90	1,8	0,016	0,850±0,014
20,0	0,98	1,9	0,017	0,920±0,014
21,0	1,1	2,1	0,019	1,000±0,014
22,0	1,2	2,2	0,021	1,080±0,014
23,0	1,2	2,4	0,022	1,200±0,014
24,0	1,3	2,6	0,024	1,270±0,014
25,0	1,4	2,8	0,026	1,380±0,014
26,0	1,5	3,0	0,028	1,460±0,014
27,0	1,6	3,2	0,030	1,570±0,014
28,0	1,7	3,4	0,032	1,670±0,014
28,0	1,8	3,6	0,034	1,780±0,014
30,0	1,9	3,8	0,036	1,870±0,014
31,0	2,0	4,0	0,038	1,980±0,014
32,0	2,1	4,2	0,040	2,090±0,014
33,0	2,2	4,4	0,042	2,200±0,014
34,0	2,3	4,6	0,044	2,300±0,014
35,0	2,4	4,8	0,047	2,430±0,014
36,0	2,5	5,1	0,049	2,520±0,014
37,0	2,6	5,3	0,051	2,640±0,014
38,0	2,8	5,5	0,054	2,760±0,014
39,0	2,9	5,8	0,056	2,880±0,014
40,0	3,0	6,0	0,058	2,990±0,014
41,0	3,1	6,2	0,061	3,100±0,014
42,0	3,3	6,5	0,063	3,200±0,014
43,0	3,4	6,7	0,066	3,320±0,014
44,0	3,5	6,9	0,068	3,440±0,014
45,0	3,6	7,2	0,070	3,550±0,014
46,0	3,8	7,5	0,073	3,700±0,014
47,0	3,9	7,7	0,075	3,800±0,014
48,0	4,0	7,9	0,078	3,900±0,014

Diese Daten werden dann in Abbildung 7 graphisch dargestellt.



**Abbildung 7:** Plot der Daten aus Tabelle 1

Um den Elastizitätsmodul zu bestimmen, wird nun eine lineare Regression der Form

$$D(x) = m \cdot (L_{\text{rund}} \cdot x^2 - x^3/3) + b$$

verwendet. Dabei beschreibt  $L_{\text{rund}} = (0,498 \pm 0,001)$  m die Länge, die der Stab aus der Halterung heraus ragt und damit nicht die gesamte Länge des Stabs. Es ergeben sich die Werte

$$m = (0,050\,29 \pm 0,000\,15) \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (4,5 \pm 0,6) \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Nun wird die Gleichung 9 nach dem Elastizitätsmodul umgestellt zu

$$E_{\text{eins, rund}} = \frac{F}{2 \cdot m \cdot l_r}.$$

Dabei beschreibt  $F$  die Kraft die das Gewicht auf den Stab auswirkt. Diese berechnet sich mit der Masse des Gewichts  $m_g = (0,6499 \pm 0,0001)$  kg und der Erdbeschleunigung von  $9,8 \text{ N/kg}$ . So ergibt sich

$$E_{\text{eins, rund}} = (129 \pm 5) \text{ GPa}.$$

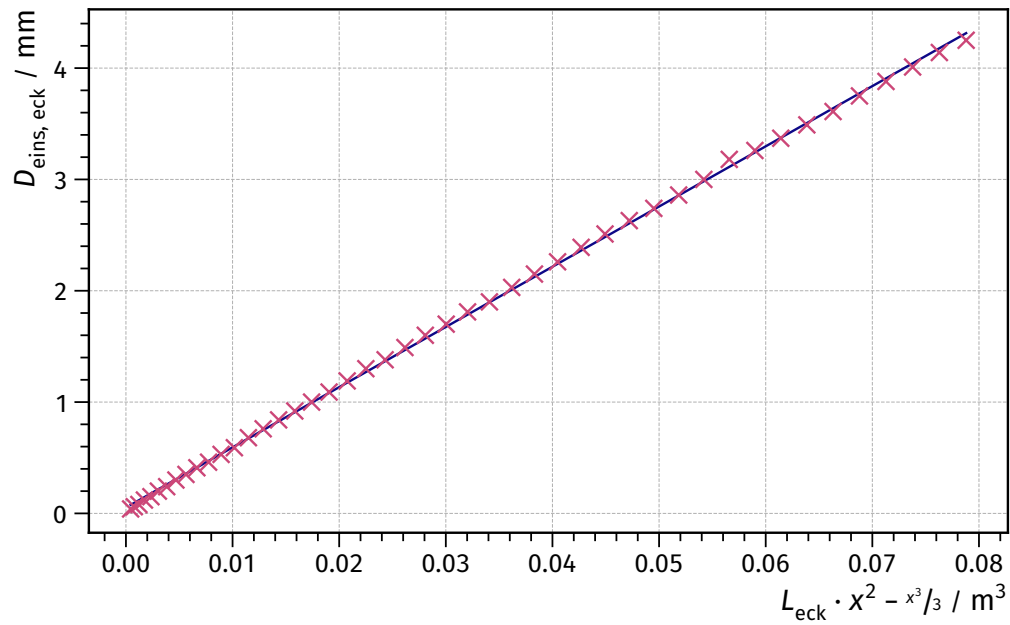
### 4.3 Einseitig eingespannter eckiger Stab

Für den eckigen Stab wird nun genauso vorgegangen, wie für den runden Stab. In Tabelle 2 sind die gemessenen Daten mit und ohne Last, sowie die daraus berechnete tatsächliche Auslenkung dargestellt. Zur einfachen Berechnung des Elastizitätsmoduls wird auch hier  $L_{\text{eck}} \cdot x^2 - x^3/3$  mit dem gemessenen  $L_{\text{eck}} = (0,502 \pm 0,001)$  m bestimmt.

**Tabelle 2:** Messdaten der Auslenkungen eines einseitig befestigten, eckigem Stab mit und ohne Last.

$x$ / cm	$D_{\text{eins, eckig, 0}}$ / mm	$D_{\text{eins, eckig, M}}$ / mm	$L_{\text{eckig}} \cdot x^2 - x^3/3$ / m <sup>3</sup>	$D_{\text{eins, eckig}}$ / mm
3,0	0,000	0,040	0,000 44	0,040±0,014
4,0	0,000	0,060	0,000 78	0,060±0,014
5,0	0,000	0,080	0,001 2	0,080±0,014
6,0	0,000	0,12	0,001 7	0,120±0,014
7,0	0,000	0,15	0,002 3	0,150±0,014
8,0	0,000	0,20	0,003 0	0,200±0,014
9,0	0,010	0,25	0,003 8	0,240±0,014
10,0	0,020	0,32	0,004 7	0,300±0,014
11,0	0,030	0,38	0,005 6	0,350±0,014
12,0	0,050	0,46	0,006 7	0,410±0,014
13,0	0,070	0,53	0,007 8	0,460±0,014
14,0	0,090	0,62	0,008 9	0,530±0,014
15,0	0,11	0,70	0,010	0,590±0,014
16,0	0,11	0,79	0,011	0,680±0,014
17,0	0,14	0,90	0,013	0,760±0,014
18,0	0,18	1,0	0,014	0,840±0,014
19,0	0,19	1,1	0,016	0,920±0,014
20,0	0,20	1,2	0,017	1,000±0,014
21,0	0,20	1,3	0,019	1,090±0,014
22,0	0,24	1,4	0,021	1,190±0,014
23,0	0,26	1,6	0,023	1,300±0,014
24,0	0,32	1,7	0,024	1,380±0,014
25,0	0,35	1,8	0,026	1,490±0,014
26,0	0,38	2,0	0,028	1,600±0,014
27,0	0,41	2,1	0,030	1,700±0,014
28,0	0,44	2,3	0,032	1,810±0,014
28,0	0,47	2,4	0,034	1,900±0,014
30,0	0,50	2,5	0,036	2,030±0,014
31,0	0,52	2,7	0,038	2,150±0,014
32,0	0,54	2,8	0,040	2,260±0,014
33,0	0,56	3,0	0,043	2,390±0,014
34,0	0,59	3,1	0,045	2,510±0,014
35,0	0,62	3,3	0,047	2,630±0,014
36,0	0,66	3,4	0,050	2,740±0,014
37,0	0,70	3,6	0,052	2,860±0,014
38,0	0,74	3,7	0,054	3,000±0,014
39,0	0,79	4,0	0,057	3,180±0,014
40,0	0,84	4,1	0,059	3,260±0,014
41,0	0,90	4,3	0,061	3,370±0,014
42,0	0,95	4,4	0,064	3,490±0,014
43,0	1,0	4,6	0,066	3,610±0,014
44,0	1,0	4,8	0,069	3,750±0,014
45,0	1,1	5,0	0,071	3,880±0,014
46,0	1,1	5,2	0,074	4,010±0,014
47,0	1,2	5,3	0,076	4,140±0,014
48,0	1,2	5,5	0,079	4,250±0,014

Diese Daten werden zusammen mit der Regressionsgeraden in Abbildung 8 dargestellt.



**Abbildung 8:** Plot der Daten aus Tabelle 2

Die lineare Regression hat die selbe Form, wie bereits in Unterabschnitt 4.2. Es ergeben sich also die Werte

$$m = (0,054\,08 \pm 0,000\,15) \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (5,2 \pm 0,6) \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Für den eckigen Stab wird ein Gewicht mit der Masse  $(1,052 \pm 0,001) \text{ kg}$  verwendet. Mit der Formel aus Unterabschnitt 4.2 und  $I_a$  ergibt sich

$$E_{\text{eins, eck}} = (114,0 \pm 2,3) \text{ GPa}.$$

#### 4.4 Zweiseitig aufgelegter runder Stab

Für den beidseitig eingespannten Stab werden zunächst alle Daten in Tabelle 3 dargestellt. Auch hier beschreiben  $D_{\text{zwei, eck, 0}}$  und  $D_{\text{zwei, eck, M}}$  die gemessenen Auslenkungen mit und ohne Last. Für die Berechnungen wird allerdings zwischen rechter und linker Seite unterschieden (siehe Unterabschnitt 2.3).  $L_{\text{rund}} = (0,550 \pm 0,001) \text{ m}$  beschreibt dabei die Länge zwischen den Auflagepunkten.

**Tabelle 3:** Messdaten der Auslenkungen eines beidseitig befestigten, runden Stab mit und ohne Last

(a) $0 \leq x \leq L/2$			(b) $L/2 \leq x \leq L$		
$x / \text{cm}$	$D_{\text{zwei, rund, 0}} / \text{mm}$	$D_{\text{zwei, rund, M}} / \text{mm}$	$x / \text{cm}$	$D_{\text{zwei, rund, 0}} / \text{mm}$	$D_{\text{zwei, rund, M}} / \text{mm}$
3,0	0,00	0,17	30	0,14	1,1
4,0	0,080	0,29	31	0,15	1,1
5,0	0,15	0,41	32	0,15	1,1
6,0	0,22	0,53	33	0,17	1,1
7,0	0,30	0,64	34	0,17	1,0
8,0	0,38	0,77	35	0,18	1,0
9,0	0,44	0,89	36	0,17	0,99
10	0,51	0,99	37	0,16	0,96
11	0,58	1,1	38	0,17	0,93
12	0,64	1,2	39	0,17	0,90
13	0,72	1,3	40	0,17	0,96
14	0,79	1,4	41	0,17	0,83
15	0,84	1,5	42	0,17	0,79
16	0,90	1,6	43	0,16	0,74
17	0,97	1,7	44	0,15	0,69
18	1,0	1,8	45	0,15	0,64
19	1,1	1,9	46	0,13	0,59
20	1,1	1,9	47	0,13	0,54
21	1,1	2,0	48	0,13	0,50
22	1,2	2,0	49	0,13	0,45
23	1,2	2,1	50	0,11	0,54
24	1,2	2,1	51	0,080	0,30
25	1,3	2,2	52	0,060	0,23
26	1,3	2,2	53	0,050	0,17
			54	0,030	0,10
			55	0,00	0,020

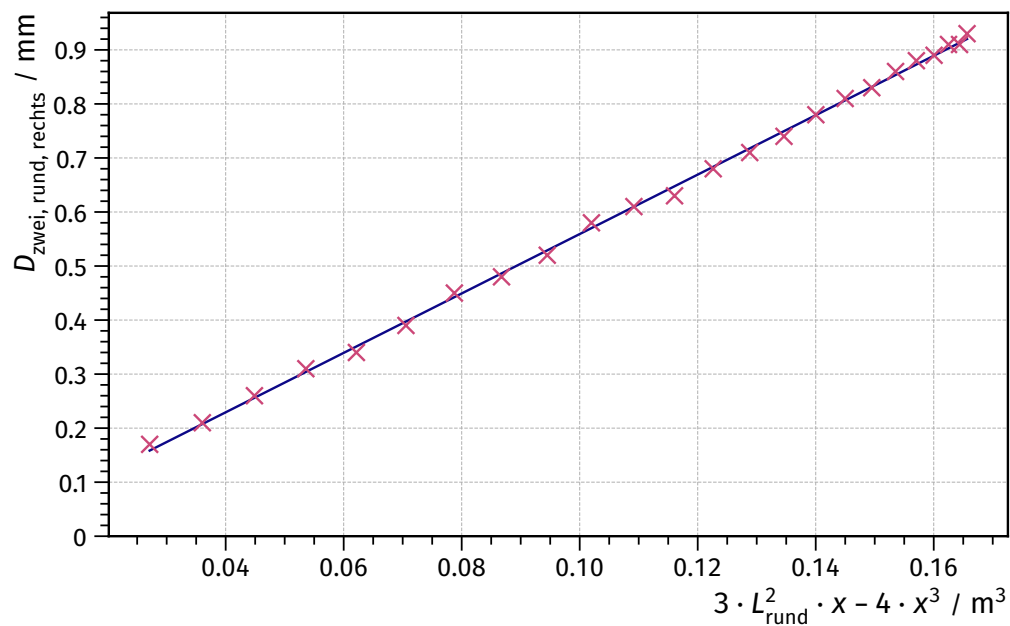
##### 4.4.1 Rechte Seite

Für die rechte Seite wird also auch noch  $3 \cdot L_{\text{rund}}^2 \cdot x - 4 \cdot x^3$  bestimmt und eingetragen.

**Tabelle 4:** Daten für den Plot der rechten Seite eines beidseitig befestigten, runden Stab.

$x / \text{cm}$	$3 \cdot L_{\text{rund}}^2 \cdot x - 4 \cdot x^3 / \text{m}^3$	$D_{\text{zwei, rund, rechts}} / \text{mm}$
3,0	0,027	0,170±0,014
4,0	0,036	0,210±0,014
5,0	0,045	0,260±0,014
6,0	0,054	0,310±0,014
7,0	0,062	0,340±0,014
8,0	0,071	0,390±0,014
9,0	0,079	0,450±0,014
10,0	0,087	0,480±0,014
11,0	0,095	0,520±0,014
12,0	0,10	0,580±0,014
13,0	0,11	0,610±0,014
14,0	0,12	0,630±0,014
15,0	0,12	0,680±0,014
16,0	0,13	0,710±0,014
17,0	0,13	0,740±0,014
18,0	0,14	0,780±0,014
19,0	0,14	0,810±0,014
20,0	0,15	0,830±0,014
21,0	0,15	0,860±0,014
22,0	0,16	0,880±0,014
23,0	0,16	0,890±0,014
24,0	0,16	0,910±0,014
25,0	0,16	0,910±0,014
26,0	0,17	0,930±0,014

Nun werden die Daten wieder im Plot dargestellt.



**Abbildung 9:** Plot der Daten aus Tabelle 4



Die Regressionsgerade hat die Form

$$D(x) = m \cdot (3 \cdot L_{\text{eck}}^2 \cdot x - 4 \cdot x^3) + b$$

Es werden die Werte

$$m = (549,0 \pm 3,7) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (9 \pm 4) \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

bestimmt. Das verwendete Gewicht besitzt die Masse  $M_g = (1,754 \pm 0,001) \text{ kg}$ . Mit Gleichung 10 nach dem Elastizitätsmodul  $E_{\text{beid, rund, rechts}}$  umgestellt liefert

$$E_{\text{zwei, rund, rechts}} = (133 \pm 5) \text{ GPa.}$$

#### 4.4.2 Linke Seite

Für die linke Seite werden entsprechenden die Daten in Tabelle 5 dargestellt. Es wird wie in Abschnitt 2 beschrieben, auch noch  $4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot L_{\text{rund}} + 9 \cdot x \cdot L_{\text{rund}}^2 - L_{\text{rund}}^3$  bestimmt.

**Tabelle 5:** Daten für den Plot der linken Seite eines beidseitig befestigten, runden Stab.

$x / \text{cm}$	$4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot L_{\text{rund}} + 9 \cdot x \cdot L_{\text{rund}}^2 - L_{\text{rund}}^3 / \text{m}^3$	$D_{\text{zwei, rund, links}} / \text{mm}$
30,0	0,16	0,920±0,014
31,0	0,16	0,910±0,014
32,0	0,16	0,900±0,014
33,0	0,16	0,880±0,014
34,0	0,15	0,860±0,014
35,0	0,15	0,830±0,014
36,0	0,14	0,820±0,014
37,0	0,14	0,800±0,014
38,0	0,13	0,760±0,014
39,0	0,13	0,730±0,014
40,0	0,12	0,790±0,014
41,0	0,12	0,660±0,014
42,0	0,11	0,620±0,014
43,0	0,10	0,580±0,014
44,0	0,095	0,540±0,014
45,0	0,087	0,490±0,014
46,0	0,079	0,460±0,014
47,0	0,071	0,410±0,014
48,0	0,062	0,370±0,014
49,0	0,054	0,320±0,014
50,0	0,045	0,430±0,014
51,0	0,036	0,220±0,014
52,0	0,027	0,170±0,014
53,0	0,018	0,120±0,014
54,0	0,0091	0,070±0,014
55,0	0,000 000	0,020±0,014

Mit diesen Daten ergibt sich Abbildung 10.

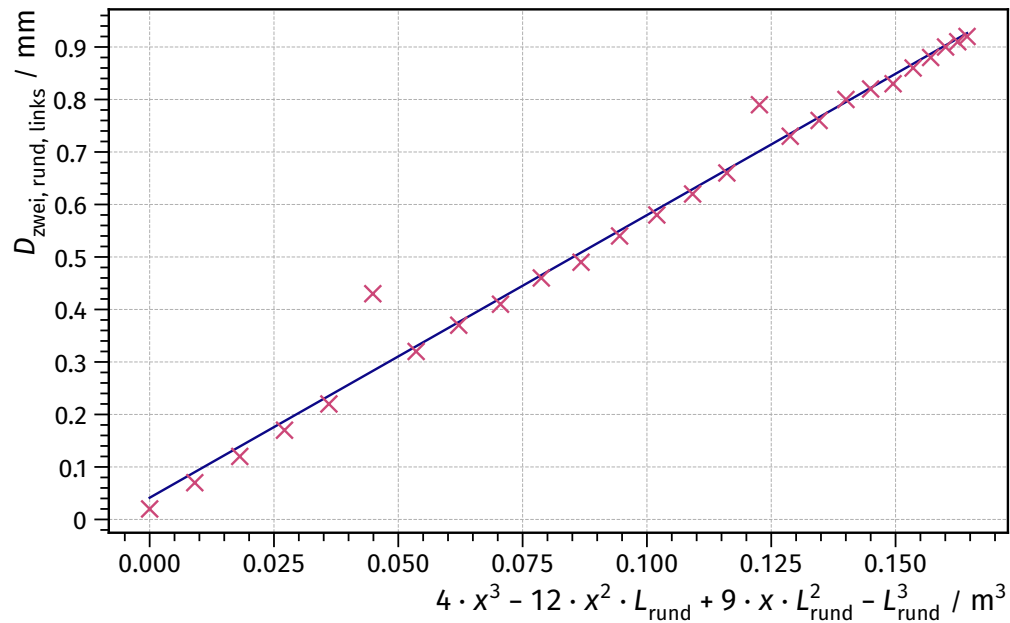


Abbildung 10: Plot der Daten aus Tabelle 5

Die verwendete Regressionsgerade hat nun die Form

$$D(x) = m \cdot (4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot L_{\text{rund}} + 9 \cdot x \cdot L_{\text{rund}}^2 - L_{\text{rund}}^3) + b.$$

Es ergeben sich so die Werte

$$m = (0,005\,30 \pm 0,000\,14) \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (4,0 \pm 1,5) \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Wird nun Gleichung 11 umgestellt, folgt mit der Masse des Gewichts  $M_g = (1,7540 \pm 0,0001) \text{ kg}$  und  $I_r$

$$E_{\text{zwei, rund, links}} = (136 \pm 5) \text{ GPa}.$$

#### 4.5 Zweiseitig aufgelegter eckiger Stab

Für den eckigen Stab wird genauso vorgegangen, wie für den runden Stab. Es wurde das gleiche Gewicht  $M_g = (1,754 \pm 0,001) \text{ kg}$  und die gleiche Länge  $L_{\text{eckig}} = (0,550 \pm 0,001) \text{ m}$  verwendet. Die gemessenen Daten werden in Tabelle 6 dargestellt.

**Tabelle 6:** Messdaten der Auslenkungen eines beidseitig befestigten, eckigen Stab mit und ohne Last

(a) $0 \leq x \leq l/2$			(b) $l/2 \leq x \leq L$		
$x / \text{cm}$	$D_{\text{zwei, eck, 0}} / \text{mm}$	$D_{\text{zwei, eck, M}} / \text{mm}$	$x / \text{cm}$	$D_{\text{zwei, eck, 0}} / \text{mm}$	$D_{\text{zwei, eck, M}} / \text{mm}$
3,0	0,00	0,16	30	—	0,70
4,0	0,00	0,18	31	0,12	0,67
5,0	-0,010	0,20	32	0,12	0,66
6,0	-0,030	0,22	33	0,12	0,65
7,0	-0,030	0,25	34	0,12	0,64
8,0	-0,030	0,28	35	0,12	0,63
9,0	-0,020	0,31	36	0,11	0,61
10	-0,010	0,37	37	0,11	0,60
11	0,00	0,41	38	0,12	0,58
12	-0,010	0,45	39	0,13	0,56
13	0,010	0,50	40	0,13	0,54
14	0,040	0,54	41	0,14	0,52
15	0,090	0,56	42	0,090	0,50
16	0,10	0,60	43	0,13	0,47
17	0,14	0,66	44	0,12	0,43
18	0,18	0,71	45	0,11	0,40
19	0,19	0,73	46	0,10	0,36
20	0,18	0,76	47	0,090	0,32
21	0,17	0,76	48	0,12	0,29
22	0,19	0,79	49	0,080	0,25
23	0,20	0,81	50	0,080	0,21
24	0,21	0,81	51	0,070	0,16
25	0,20	0,82	52	0,040	0,12
			53	0,010	0,070
			54	0,010	0,020
			55	0,00	-0,020

Es muss wieder in rechte und linke Seite unterschieden werden.

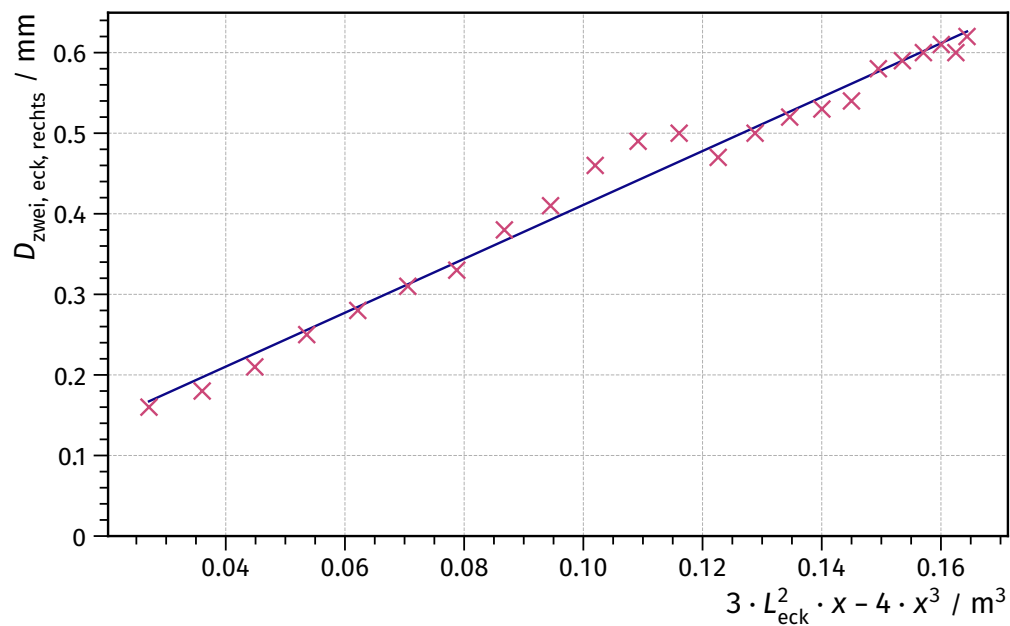
##### 4.5.1 Rechte Seite

Für die rechte Seite ergeben sich die Werte in Tabelle 7.

**Tabelle 7:** Daten für den Plot der rechten Seite eines beidseitig befestigten, eckigen Stab.

$x / \text{cm}$	$3 \cdot L_{\text{eck}}^2 \cdot x - 4 \cdot x^3 / \text{m}^3$	$D_{\text{zwei, eck, rechts}} / \text{mm}$
3,0	0,027	0,160±0,014
4,0	0,036	0,180±0,014
5,0	0,045	0,210±0,014
6,0	0,054	0,250±0,014
7,0	0,062	0,280±0,014
8,0	0,071	0,310±0,014
9,0	0,079	0,330±0,014
10,0	0,087	0,380±0,014
11,0	0,095	0,410±0,014
12,0	0,10	0,460±0,014
13,0	0,11	0,490±0,014
14,0	0,12	0,500±0,014
15,0	0,12	0,470±0,014
16,0	0,13	0,500±0,014
17,0	0,13	0,520±0,014
18,0	0,14	0,530±0,014
19,0	0,14	0,540±0,014
20,0	0,15	0,580±0,014
21,0	0,15	0,590±0,014
22,0	0,16	0,600±0,014
23,0	0,16	0,610±0,014
24,0	0,16	0,600±0,014
25,0	0,16	0,620±0,014

Diese werden in Abbildung 11 dargestellt.



**Abbildung 11:** Plot der Daten aus Tabelle 7

Die Regressionsgerade hat die gleiche Form aus Unterunterabschnitt 4.4.1. Daraus folgen die Werte

$$m = (334,0 \pm 9,5) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (7,60 \pm 1,11) \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

Mit  $M_g$  und  $I_a$  folgt

$$E_{\text{zwei, eck, rechts}} = (128,6 \pm 2,6) \text{ GPa.}$$

#### 4.5.2 Linke Seite

Zuletzt werden die Daten für die linke Seite betrachtet.

**Tabelle 8:** Daten für den Plot der linken Seite eines beidseitig befestigten, eckigen Stab.

$x / \text{cm}$	$4 \cdot x^3 - 12 \cdot x^2 \cdot L_{\text{eckig}} + 9 \cdot x \cdot L_{\text{eckig}}^2 - L_{\text{eckig}}^3 / \text{m}^3$	$D_{\text{zwei, eck, links}} / \text{mm}$
31,0	0,16	0,550±0,014
32,0	0,16	0,540±0,014
33,0	0,16	0,530±0,014
34,0	0,15	0,520±0,014
35,0	0,15	0,510±0,014
36,0	0,14	0,500±0,014
37,0	0,14	0,490±0,014
38,0	0,13	0,460±0,014
39,0	0,13	0,430±0,014
40,0	0,12	0,410±0,014
41,0	0,12	0,380±0,014
42,0	0,11	0,410±0,014
43,0	0,10	0,340±0,014
44,0	0,095	0,310±0,014
45,0	0,087	0,290±0,014
46,0	0,079	0,260±0,014
47,0	0,071	0,230±0,014
48,0	0,062	0,170±0,014
49,0	0,054	0,170±0,014
50,0	0,045	0,130±0,014
51,0	0,036	0,090±0,014
52,0	0,027	0,080±0,014
53,0	0,018	0,060±0,014
54,0	0,0091	0,010±0,014
55,0	0,000 000	-0,020±0,014

Wie in Unterunterabschnitt 4.4.2 wird ein Plot erstellt und eine Regressionsgerade bestimmt.

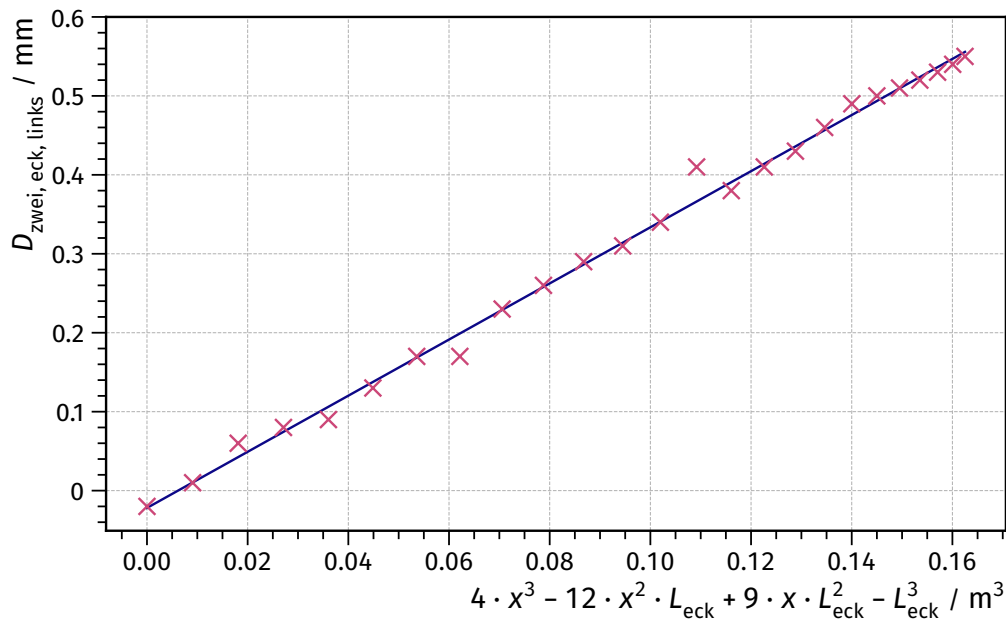


Abbildung 12: Plot der Daten aus Tabelle 8

Es folgen die Werte

$$m = (355,4800 \pm 5,2085) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{m}^2}$$

$$b = (-2,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

Und damit ist nach Gleichung 11

$$E_{\text{zwei, eck, links}} = (121,0 \pm 2,4) \text{ GPa.}$$

## 5 Diskussion

Die durch den Versuch bestimmten Elastizitätsmodule sind somit

$$E_{\text{eins, rund}} = (129 \pm 5) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{eins, eck}} = (114,0 \pm 2,3) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{zwei, rund, rechts}} = (133 \pm 5) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{zwei, rund, links}} = (136 \pm 5) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{zwei, eck, rechts}} = (128,6 \pm 2,6) \text{ GPa}$$

$$E_{\text{zwei, eck, links}} = (121,0 \pm 2,4) \text{ GPa.}$$

Der Literaturwert für Kupfer [5, S. 289] beträgt

$$E_{\text{Lit}} = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ Pa.}$$

Der gemittelte Elastizitätsmodul beträgt

$$E_{\text{mittel}} = (126,9 \pm 2,9) \text{ GPa.}$$

Addiert man dann die Messunsicherheiten die sich aus den Toleranzen der Messungen ergeben haben so erhält man

$$E_{\text{mittel}} = (126,9 \pm 7,9) \text{ GPa.}$$

Somit gibt es eine relativ geringe Abweichung von  $(5 \pm 6) \%$ . Dies lässt in Verbindung mit der braunen Farbe des Stabes darauf schließen, dass es sich um einen Kupferstab handelt. Auch die errechneten Dichten in (18) und (19) haben nur geringe Abweichungen vom Literaturwert [5, S. 288]

$$\rho_{\text{Lit}} = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

In Abbildung 10 fällt auf, dass zwei Werte deutlich von der Gradenzahl abweichen. Dieser Fehler ist wahrscheinlich durch die Messuhren zu erklären. Wenn diese bewegt werden, ist es möglich, dass sie nicht korrekt ausschlagen und erst durch Anstoßen gelockert werden müssen. Solch ein Fehler passiert auch durch inkorrektes Ablesen der Messuhr. Bei Verwicklungen oder Stößen kann diese ausschlagen und einen falschen Wert anzeigen. Dies kann vor allem dadurch vermieden werden, indem der Uhrzeit gegeben wird, sich einzustellen und durch gelegentliches Rütteln um ein Festhängen zu vermeiden. Die Abweichungen von den Literaturwerten ist durch die hohe Anzahl von Messwerten, wahrscheinlich nicht auf einen statistischen Fehler zurückzuführen, sondern auf systematische Fehler der Messuhren. Die gewünschte maximale Auslenkung sollte zwischen 3 und 7,0 mm liegen, um den Elastizitätsmodul bestmöglich zu bestimmen. Bei einseitiger Auflage war dies möglich, doch bei zweiseitiger Auflage könnte nur eine Auslenkung  $< 1,0$  mm erreicht werden, da nicht mehr Gewichte vorhanden waren. Dies kann auch zu einer Erhöhung der Fehler führen. Der Versuch ist aber durchaus nützlich, um den Elastizitätsmodul eines Stoffes zu bestimmen und den Stoff anhand dieser Eigenschaft zu identifizieren.

## Literatur

- [1] Versuch Nr. 103. Biegung elastischer Stäbe. TU Dortmund, Fakultät Physik. 2021.
- [2] Travis E. Oliphant. „NumPy: Python for Scientific Computing“. Version 1.9.2. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://www.numpy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. Version 1.4.3. In: Computing in Science & Engineering 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://matplotlib.org/>.
- [5] Dieter Geschke. Physikalisches Praktikum. Mit multimedialen Ergänzungen. 12. Aufl. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Teubner, 2001. ISBN: 978-3-519-10206-9. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-8351-9081-8>.