Drunkard's Walk

Isaque Araújo Nogueira
Jhonatan De Sousa Carvalho
Jonnas Christian Sousa De Paiva
Paulo Victor Braga Castro

Fevereiro de 2021

1 Resumo

Neste presente trabalho, abordamos a Caminhada do Bêbado com utilização de Cadeia de Markov, caso absorvente, tendo como objetivo principal a resolução desta problemática. Com isso, foi implementado um algoritmo em Python capaz de calcular a probabilidade dos passos do bêbado, levando em conta que o mesmo pode chegar tanto em casa, como no bar. Para o mesmo, foi realizado o cálculo da Forma Canônica, Matriz Fundamental e da Decomposição Espectral. Por conseguinte, após análise dos resultados obtidos, foi possível saber a maior probabilidade da posição do bêbado a longo prazo.

Palavras-chaves: Cadeia de Markov, Caso Absorvente, Caminhada do bêbado.

2 Abstract

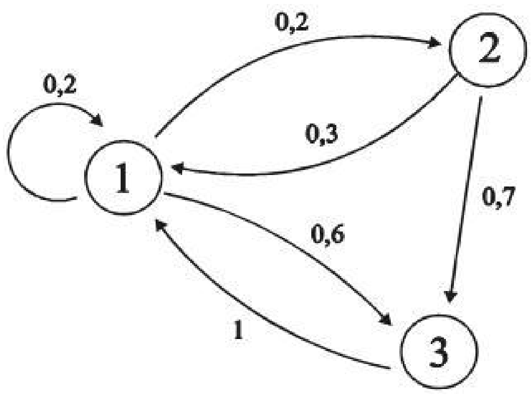
This present work, we approach the Walk of the Drunk using Markov Chain, absorbent case, having as main objective the resolution of this problem. With that, an algorithm was implemented in Python capable of calculating the probability of the drunk's steps, taking into account that he can arrive both at home and at the bar. For the same, the Canonical, Fundamental Matrix and Spectral Decomposition was calculated. Therefore, after analyzing the results obtained, it was possible to know the highest probability of the drunk's position in the long run.

Keywords: Markov Chain, Absorbent Case, Drunk's Walk.

3 Introdução

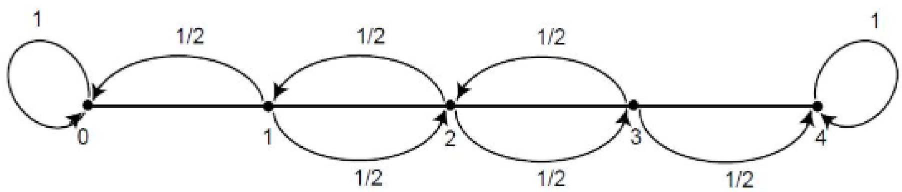
3.1 Cadeia de Markov

Em 1907, Andrei Markov iniciou um estudo sobre um modelo onde o resultado de um experimento depende do resultado de um experimento anterior. Este processo de modelagem é conhecido atualmente como Cadeias de Markov (Markov Chain). Em matemática, uma Cadeia de Markov é um caso particular de processo estocástico com estados discretos (o parâmetro, em geral o tempo, pode ser discreto ou contínuo) com a propriedade de que a distribuição de probabilidade do próximo estado depende apenas do estado atual e não na sequência de eventos que precederam. Existe uma propriedade chamada de Markoviana, chamada assim em homenagem ao matemático Andrei Andreyevich Markov. A definição dessa propriedade, também chamada de memória markoviana, é que os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. Cadeias de Markov têm muitas aplicações como modelos estatísticos de processos do mundo real.



3.1.1 Caso absorvente

De forma geral as Cadeias de Markov são estudadas a partir de características específicas que elas possuem em seus estados ou em sua matriz de transição. Dessa forma, analisando o caso absorvente, especificamente, é visto que na teoria matemática da probabilidade, uma cadeia de Markov absorvente é uma cadeia na qual cada estado pode alcançar um estado absorvente, um estado que, uma vez inserido, não pode ser deixado.



3.1.2 Modelando problemas reais

As cadeias de Markov são bastante gerais e desfrutam de uma ampla gama de aplicações. Por exemplo, na física, são amplamente utilizados na mecânica estatística. Nas ciências da informação, elas são usadas no processamento de sinais, codificação, compactação de dados e reconhecimento de padrões. Na teoria da fila, eles fornecem o backbone analítico para a análise de filas. Nos aplicativos da internet, eles usaram para classificar páginas da web. Nas estatísticas, muitas vezes são usadas para tornar a inferência bayesiana mais prática sob o nome da cadeia de Markov Monte Carlo. Em finanças, eles são usados para descrever a evolução dos preços dos ativos. Eles também são usados em jogos, música, genética, beisebol, história e assim por diante.

4 Trabalhos relacionados

Em [Shannon, 1948], o autor trata do uso de cadeia de Markov para modelar a língua inglesa com uma sequência de letras que têm um certo grau de aleatoriedade e dependências entre si.

Em [PERERA, 1998], o autor trata de Cadeia de Markov aplicada a processos estocásticos, de forma simples e eficaz, podendo avaliar carteiras de crédito com base, apenas, em sua performance no último período.

Em [Azran, 2007], o autor trata da cadeia de Markov com uso de uma matriz de probabilidade de transição de estados para uma caminhada aleatória.

5 Fundamentação teórica

5.1 Estados

Uma importante caracterização da cadeia de markov seria a classificação dos estados. Será comentado sobre dois, especificamente, que se encontra em nosso projeto.

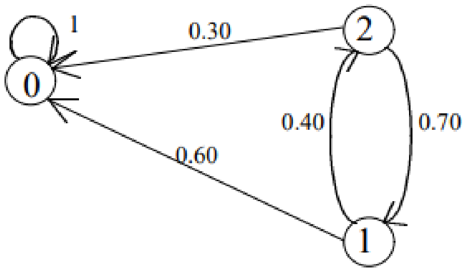
5.1.1 Estado Transiente

Um estado é dito *transiente* se, após entrar nesse estado, existe a possibilidade do processo jamais retornar a esse estado novamente. Portanto o estado s_i é transiente se, e somente se, existir um estado s_j ($s_j \neq s_i$) que seja acessível do estado s_i, mas não o contrário, isto é o estado s_i não é acessível a partir do estado s_j. Note que se um estado é transiente isto significa que ele será visitado apenas um número finito de vezes, pois existe a possibilidade de que ele passe para o estado s_j e não retorne mais para o estado s_i.

5.1.2 Estado Absorvente

Um estado é dito como *absorvente* se, entrando neste estado, o processo jamais irá deixa-lo. Portanto, um estado i é dito absorvente se, e somente se, $P_{ii} = 1$.

No mesmo diagrama de Markov pode se encontrar os dois estados definidos anteriormente. No exemplo seguinte, o estado 0 é absorvente enquanto os estados 1 e 2 são transientes.



Como já definimos o que são estados transientes e absorventes podemos definir o que é uma cadeia de Markov Absorvente. Vejamos, uma cadeia de Markov é chamada de absorvente se, e somente se, ela contiver pelo menos um estado absorvente e se for possível ir de qualquer estado não absorvente para um estado absorvente em um número finito de etapas.

5.2 Forma Canônica

Seja uma cadeia de Markov absorvente com matriz de transição P, estados transitórios e estados absorventes, onde Q é uma matriz transiente para transiente, R é uma matriz transiente para absorvente, 0 é uma matriz absorvente para transiente, como as ligações de absorvente para transiente não existem, logo essa matriz é formada somente com zeros, e i é uma matriz de absorvente para absorvente, vimos que um estado é absorvente quando $P_{ii} = 1$ e qualquer outro elemento é 0, então os estados absorventes só tem conexão para eles mesmos, portanto i é uma matriz identidade.

Com isso, Q descreve a probabilidade de transição de algum estado transitório para outro, enquanto R descreve a probabilidade de transição de algum estado transitório para algum estado absorvente.

$$P = \begin{array}{c} \\ \scriptstyle Trans \\ \scriptstyle Absor \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle Trans & \scriptstyle Absor \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I_r \end{array}\right] \end{array}.$$

5.3 Matriz Fundamental

Para uma cadeia de Markov absorvente, chamamos de matriz fundamental F a matriz de $(I_{ij} - Q)^{-1}$, o elemento (i, j) representa o número esperado de vezes que o estado transiente j é visitado antes de o processo entrar num estado absorvente qualquer, partindo do estado transiente i. Através da matriz fundamental F, podemos saber quanto a caminhada duraria a partir do ponto inicial do bêbado. Para isso, basta somar as entradas em cada linha da matriz. Assim, isso irá gerar o vetor t.

Além disso, podemos obter a probabilidade de se mover para a direita ou para a esquerda, levando em consideração a atual posição dele. Para isso, basta fazer o produto entre a matriz fundamental F e a matriz R, que é a matriz que na forma canônica ocupa o canto superior direito, gerando assim a matriz B.

5.4 Autovalores e Autovetores

Seja A uma matriz n x n. Denomina-se autovalor de A um escalar λ que satisfaz a equação,

$$\mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x}$$

para algum vetor não nulo **x**, chamado, por sua vez, de autovetor associado ao autovalor.

5.5 Decomposição Espectral

Se uma matriz A n x n possuir n autovetores linearmente independentes, então A será diagonalizável. A decomposição

$$\mathrm{A} = S\Lambda \mathrm{S}^{-1}$$

é chamada de decomposição espectral (ou de autovalor) da matriz A, onde S é uma matriz invertível com os autovetores de A, $\wedge$ uma matriz diagonal com os autovalores de A e S^{-1} a inversa de S. Com isso obtemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Seu polinômio característico é $P_A(\lambda) = \lambda - 2)^2(\lambda - 1)$ e disso obtemos os autovalores $\lambda_1 = 2$ com autovalores associados $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, para $\lambda = 1$, o autovetor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim, fazendo $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, e

dessa forma, $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ D, donde concluímos que,

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6 Metodologia e Experimentos

Para a realização do estudo, foi utilizado o livro *The Drunkard's Walk: How Randomness Rules Our Lives.* Após a leitura do livro, tivemos a percepção da problemática que era como nossas vidas são profundamente informadas pelo acaso e aleatoriedade.

Primeiramente foi importado os módulos numpy, matplotlib.pyplot e random:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
```

Segundamente, fizemos uma função para gerar **Matriz de Transição:**

```
def Gera_MatrizTransicao(direito, dimensao):
    esquerdo = 1 - direito
    MatrizTransicao = np.diag(esquerdo*np.ones(dimensao), k=-1) + np.diag(direito*np.ones(dimensao), k=1)
    MatrizTransicao[0, :] = 0
    MatrizTransicao[0, 0] = 1
    MatrizTransicao[dimensao, :] = 0
    MatrizTransicao[dimensao, dimensao] = 1
    return MatrizTransicao
```

Ademais, conseguimos obter a **Forma canônica** que é composta pela matriz transiente, absorvente, nula e identidade:

```
A = [0, Y]
B = range(1, Y)
P = Gera_MatrizTransicao(X,Y)
Matriz_Identidade = P[np.ix_(A, A)]
Matriz_Absorvente = P[np.ix_(B, A)]
Matriz_Transiente = P[np.ix_(B, B)]
Matriz_nula = np.zeros([len(Matriz_Identidade),len(Matriz_Transiente)])
```

Em seguida, fizemos uma matriz identidade do mesmo tamanho da matriz transiente para podermos fazer a subtração entre elas $(I_{ij} - Q)$. Sem demora, pegamos a **Matriz Fundamental** achando a inversa da subtração da identidade pela matriz transiente $(I_{ij} - Q)^{-1}$:

```
Matriz_indent_fundamental= (np.eye(len(Matriz_Transiente)))
Subtracao = np.subtract(Matriz_indent_fundamental,Matriz_Transiente)
matriz_fundamental = np.linalg.inv(Subtracao)
```

Logo após, calculamos os **autovetores** normalizados, e **autovalores:**

```
np.set_printoptions(suppress= True,precision=3)
autovalor, autovetor = np.linalg.eig(Matriz_trans.T)
```

Posteriormente, calculamos a **Decomposição Espectral** (ou de autovalor) :

```
np.set_printoptions(suppress= True,precision=3) # precisão de casas decimais
matrizdiagonal = np.diag(autovalor)
matrizAutovetoresInversa = p.linalg.inv(autovetor)
decomposição_sas = np.matmul(np.matmul(autovetor,matrizdiagonal),np.linalg.inv(autovetor))
```

Por fim, analisamos os cálculos, obtendo os resultados.

7 Resultados

Após todos os passos realizados, encontramos resultados importantes para a problemática da caminhada do bêbado. Vamos mostrar um exemplo com a probabilidade de o bêbado ir pra direita com 50% de chance, logo a esquerda com 50% de chance.

Matriz de Transição:

$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & .0 \\ 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

Forma canônica:

$$\begin{pmatrix} 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. \\ 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0.5 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

Matriz Fundamental:

$$\begin{pmatrix} 1.714 & 1.429 & 1.143 & 0.857 & 0.571 & 0.286 \\ 1.429 & 2.857 & 2.286 & 1.714 & 1.143 & 0.571 \\ 1.143 & 2.286 & 3.429 & 2.571 & 1.714 & 0.857 \\ 0.857 & 1.714 & 2.571 & 3.429 & 2.286 & 1.143 \\ 0.571 & 1.143 & 1.714 & 2.286 & 2.857 & 1.429 \\ 0.286 & 0.571 & 0.857 & 1.143 & 1.429 & 1.714 \end{pmatrix}$$

Vetor t:

$$\begin{pmatrix} 6. & 10. & 12. & 12. & 10. & 6. \end{pmatrix}$$

Matriz B:

$$\begin{pmatrix} 0.857 & 0.143 \\ 0.714 & 0.286 \\ 0.571 & 0.429 \\ 0.429 & 0.571 \\ 0.286 & 0.714 \\ 0.143 & 0.857 \end{pmatrix}$$

Decomposição Espectral:

$$\textbf{Autovetores(matriz S)} = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0.061 & -0.127 & 0.605 & 0.437 & -0.204 & -0.303 \\ 0. & 0. & -0.231 & 0.411 & -0.12 & -0.329 & 0.499 & 0.471 \\ 0. & 0. & 0.416 & -0.513 & -0.216 & -0.41 & -0.222 & 0.21 \\ 0. & 0. & -0.519 & 0.228 & -0.269 & -0.182 & -0.4 & -0.378 \\ 0. & 0. & 0.519 & 0.228 & -0.269 & 0.182 & 0.4 & -0.378 \\ 0. & 0. & -0.416 & -0.513 & -0.216 & 0.41 & 0.222 & 0.21 \\ 0. & 0. & 0.231 & 0.411 & -0.12 & 0.329 & -0.499 & 0.471 \\ 0. & 1. & -0.061 & -0.127 & 0.605 & -0.437 & 0.204 & -0.303 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Matriz Diagonal(matriz } \boldsymbol{\Lambda}\textbf{)} = \begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0.901 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -0.623 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.901 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.623 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & -0.223 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.223 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovetores inversa ($\mathbf{S^{-1}}$):

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.857 & 0.714 & 0.571 & 0.429 & 0.286 & 0.143 & 0. \\ 0. & 0.143 & 0.286 & 0.429 & 0.571 & 0.714 & 0.857 & 1. \\ 0. & -0.233 & 0.419 & -0.523 & 0.523 & -0.419 & 0.233 & 0. \\ -0. & 0.425 & -0.53 & 0.236 & 0.236 & -0.53 & 0.425 & -0. \\ -0. & -0.449 & -0.808 & -1.008 & -1.008 & -0.808 & -0.449 & -0. \\ 0. & -0.531 & -0.662 & -0.295 & 0.295 & 0.662 & 0.531 & 0. \\ -0. & 0.544 & -0.242 & -0.436 & 0.436 & 0.242 & -0.544 & -0. \\ 0. & 0.577 & 0.257 & -0.462 & -0.462 & 0.257 & 0.577 & 0. \end{pmatrix}$$

Decomposição Espectral ($\mathbf{S\Lambda S^{-1}}$):

$$\begin{pmatrix} 1. & 0.5 & 0. & -0. & -0. & -0. & -0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & -0. & 0.5 & -0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0.5 & -0. & -0. & 0. \\ 0. & 0. & -0. & 0.5 & -0. & 0.5 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -0. & -0. & 0.5 & -0. & 0.5 & 0. \\ 0. & -0. & -0. & 0. & 0. & 0.5 & 0. & 0. \\ 0. & -0. & -0. & -0. & -0. & 0. & 0.5 & 1. \end{pmatrix}$$

Gráficos obtidos pela simulação:

Indo para o bar:

Posição inicial do bêbado: 4

Ele chegou no bar após sete passos.

Indo para casa:

Posição atual do bêbado: 4

Ele chegou em casa após sete passos.

8 Conclusão e trabalhos futuros

Infere-se, portanto, que com Cadeia de Markov, caso absorvente, conseguimos obter, a partir de uma posição inicial, as probabilidades de um bêbado ir até sua casa ou para o bar.

A partir dos resultados obtidos, um possível próximo passo seria exibir a simulação da caminhada do bêbado em 3 dimensões. Ademais, é possível adicionar ainda a probabilidade do bêbado ficar parado.

Referências

[1] V Andarasi. Discrete-time markov chain models.

[2] T de Araujo. Algebra linear: Teoria e aplicações. *SBM, Rio de Janeiro*, 2014.

[3] Tallyta Carolyne Martins. Cadeias de markov: Conceitos e aplicações em modelos de difusão de informação. 2011.

[4] T. E. A. Nascimento. Cadeias de markov absorventes: Uma aplicação para o ensino médio. *Master's thesis, Universidade Federal da Bahia - PROFMAT*, 2019.

[5] Pearson. The problem of the random walk. *Nature, v*, 1905.