ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΗΜΜΥ ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1Η ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Δεϊρμεντζόγλου 10015

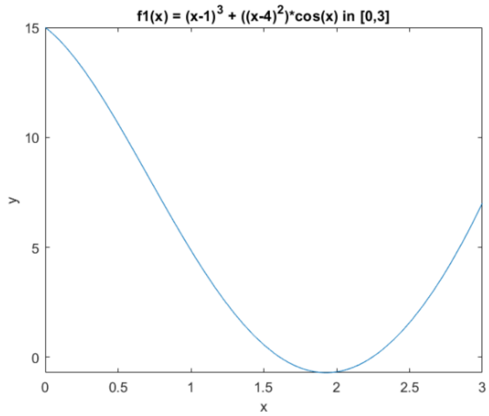
ΑΕΜ 10015 Email : deirmentz@ece.auth.gr

1. Task 1 – Μέθοδος της Διχοτόμου.

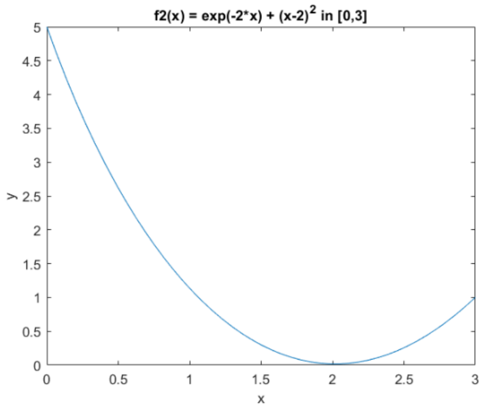
Στην μέθοδο αυτή υπάρχουν δύο παράμετροι, το e (απόσταση από την διχοτόμο) και το l (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης).

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να υλοποιηθεί στο MATLAB ο αλγόριθμος για την μέθοδο της διχοτόμου και να εφαρμοστεί στις 3 συναρτήσεις. Ο κώδικας στο σύνολο του περιέχεται στα αρχεία **functionSelector.m BisectionMethod.m** και **Task1.m** .

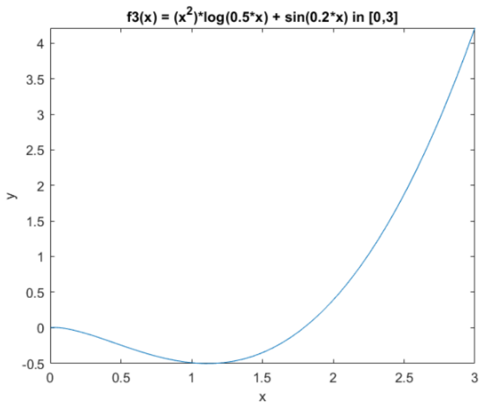
Πριν τις γραφικές παραστάσεις που ζητούνται και τις παρατηρήσεις πάνω σε αυτές παρατίθενται τα plots για κάθε μια από τις 3 συναρτήσεις της εργασίας στο διάστημα [0,3] .



Σχήμα 1.1 : f1(x)



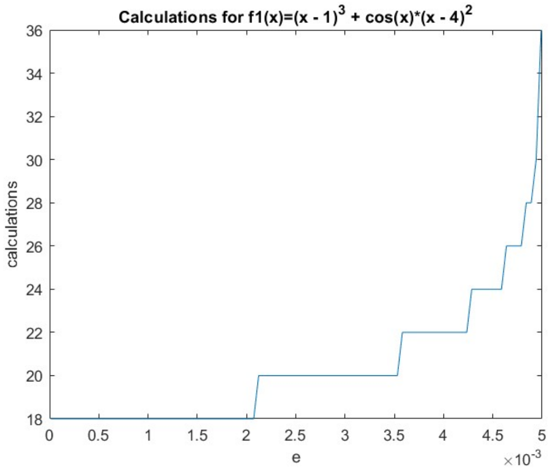
Σχήμα 1.2 : f2(x)



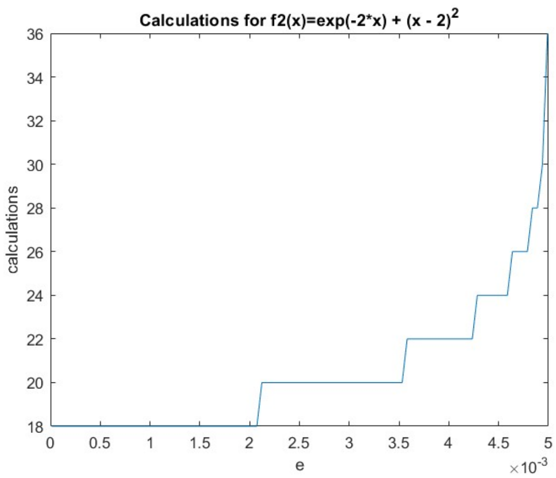
Σχήμα 1.3 : f3(x)

Αρχικά , διατηρώντας σταθερό εύρος αναζήτησης l = 0.001 γίνεται μελέτη κατά την μεταβολή της σταθεράς **ϵ > 0**, για τιμές **από 10^{-5} έως 0.0050**. Η σταθερά ε μεταβάλλεται έως την τιμή $l/2 - 10^{-5} = 0.0050$, καθώς πρέπει να είναι ε<λ/2, ειδάλλως η μέθοδος δεν συγκλίνει.

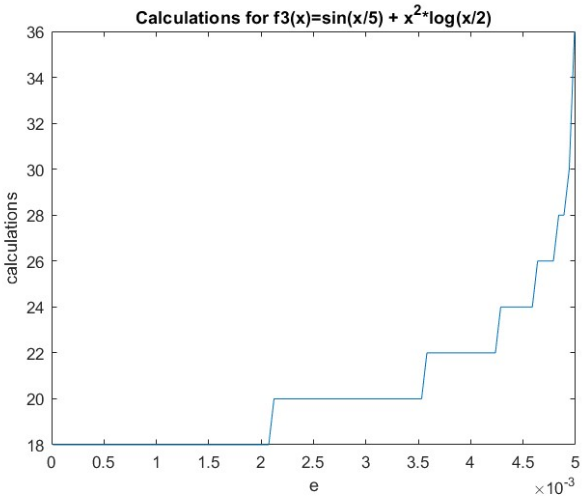
Ακολουθεί από μία γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των 3 αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 1.4 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— e =variable , l=0.001



Σχήμα 1.5 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f2(x)— e =variable , l=0.001



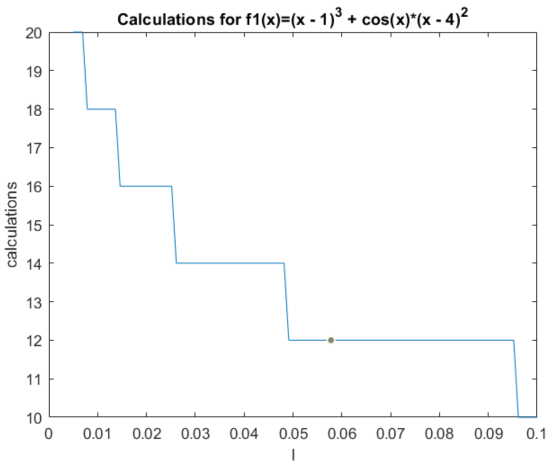
Σχήμα 1.6 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— e =variable , l=0.001

Παρατηρήσεις

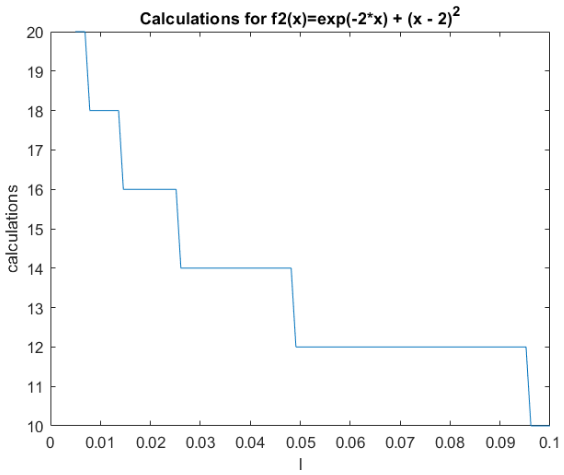
- Η γραφική παράσταση είναι ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό έχει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδιες παραμέτρους που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης (l , e και διάστημα αναζήτησης [0,3]).
- Όπως βλέπουμε από την γραφική παράσταση όσο αυξάνεται το e, τόσο αυξάνονται και οι κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x). Αυτό συμβαίνει γιατί με την αύξηση της σταθεράς e, τα x1(k) και x2(k) υπολογίζονται πιο μακριά από τη διχοτόμο του διαστήματος [a(k),b(k)] και άρα κατά συνέπεια πιο κοντά στα άκρα του, με αποτέλεσμα το διάστημα [a(k+1),b(k+1)] που προκύπτει μετά από κάθε επανάληψη k να είναι μεγαλύτερο. Έτσι, χρειάζονται παραπάνω βήματα του αλγορίθμου για να φτάσουμε στο επιθυμητό εύρος διαστήματος l, άρα και περισσότερες κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x).

Στην συνέχεια , κρατώντας σταθερό το ε = 0.001, μελετάμε το πόσες φορές υπολογίζεται τιμή της συνάρτησης f για διάφορες τιμές του τελικού εύρους διαστήματος l . Το τελικό εύρος διαστήματος **l** μεταβάλλεται **από 0.005 έως 0.1** καθώς για **e = 0.001** θα πρέπει l >0.002 ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη l>2e .

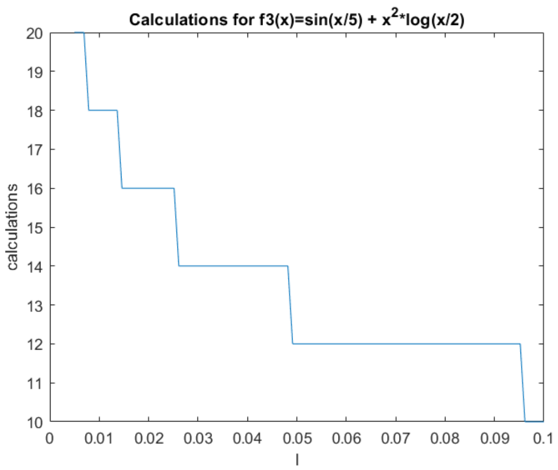
Ακολουθεί από μία γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των 3 αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 1.7 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— l =variable , e=0.001



Σχήμα 1.8 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f2(x)— l =variable , e=0.001



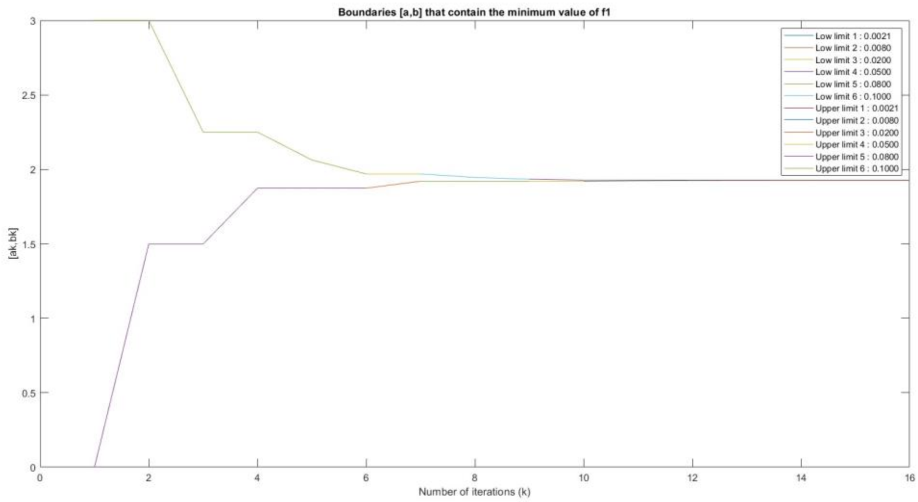
Σχήμα 1.9 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f3(x)— l =variable , e=0.001

<u>Παρατηρήσεις</u>

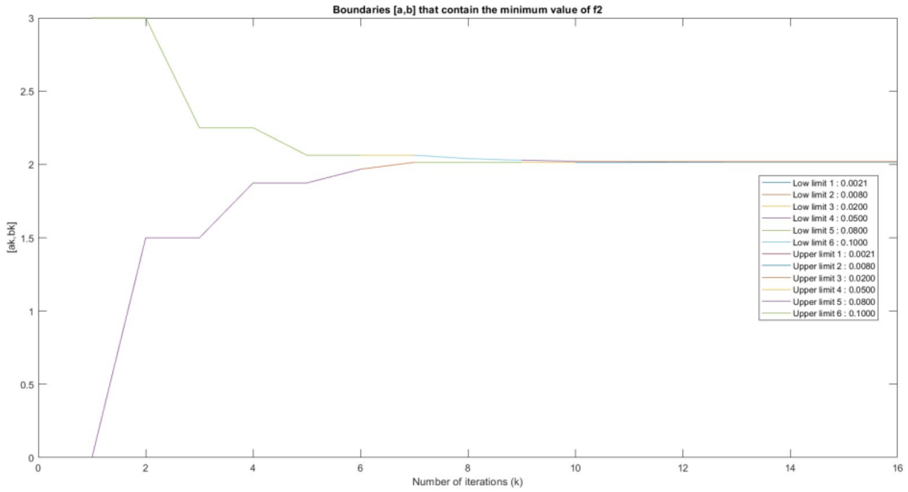
- Η γραφική παράσταση είναι ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις Αυτό έχει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδιες παραμέτρους που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης (l , e και διάστημα αναζήτησης [0,3]).
- Από τις γραφικές παράσταση έχουμε πως όσο αυξάνεται το τελικό εύρος διαστήματος l , τόσο μειώνονται οι κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x). Αυτό συμβαίνει επειδή όσο αυξάνουμε το τελικό εύρος διαστήματος l, τόσα λιγότερα βήματα – διαμερίσεις θα χρειαστούν να γίνουν στο αρχικό διάστημα αναζήτησης ώστε να φτάσουμε σε λύση επιθυμητής ακρίβειας. Ως εκ τούτου, θα έχουμε και λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης.

Τέλος ζητήθηκε για διάφορα l να αποτυπωθούν τα ζεύγη $[ακ,bκ]$ συναρτήσει του δείκτη k. Οι τιμές l που επιλέχθηκαν ήταν οι εξής : 0.0021, 0.008, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1 ενώ το e παρέμεινε σταθερό 0.001 .

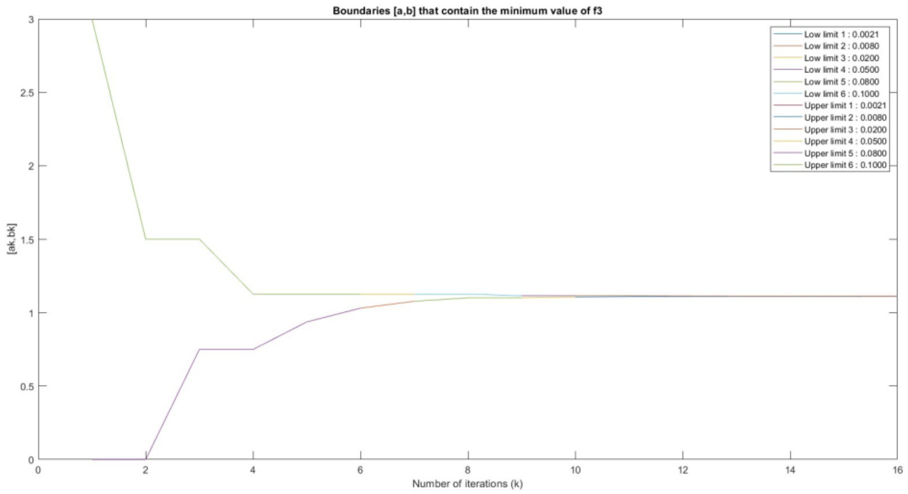
Ακολουθούν τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, που παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις (k , ak) και (k , bk).



Σχήμα 1.10 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f1(x)— l =variable , e=0.001



Σχήμα 1.11 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f2(x)— l =variable , e=0.001



Σχήμα 1.12 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f3(x)— l =variable , e=0.001

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα, και όπως λογικά περιμέναμε, όσο παραπάνω μειώνεται το εύρος του τελικού διαστήματος [a(k),b(k)], χρειάζονται παραπάνω βήματα του αλγορίθμου για να το φτάσουμε. Μετά , από έναν αριθμό επαναλήψεων το διάστημα αυτό μικραίνει κατά πολύ και η μεταβολή δεν διακρίνεται με γυμνό μάτι .

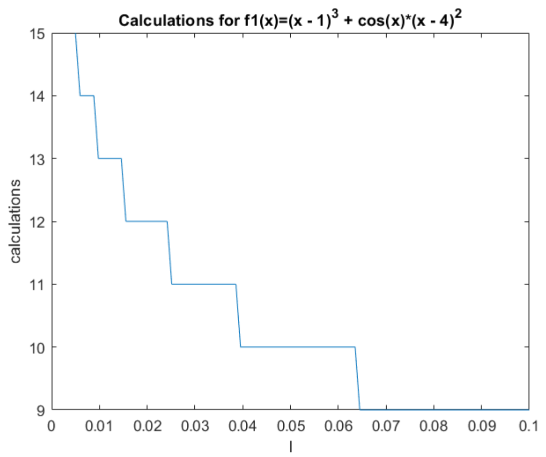
2. Task 2 – Μέθοδος Χρυσού Τομέα.

Στην μέθοδο αυτή υπάρχουν μια παράμετρος το l (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης, δεν υπάρχει το e).

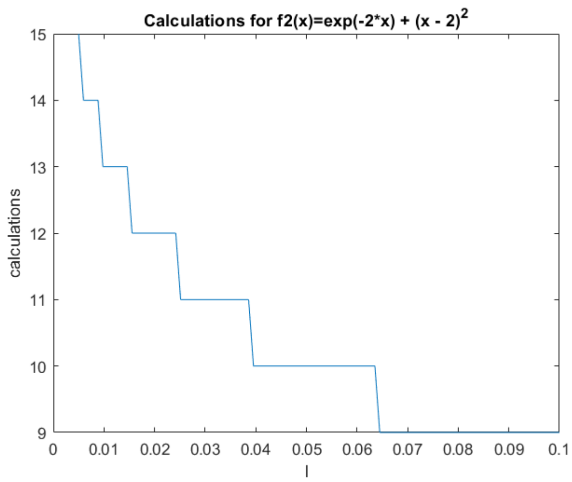
Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να υλοποιηθεί στο MATLAB ο αλγόριθμος για την μέθοδο του χρυσού τομέα και να εφαρμοστεί στις 3 συναρτήσεις. Ο κώδικας στο σύνολο του περιέχεται στα αρχεία **functionSelector.m goldenRatioMethod.m** και **Task2.m** .

Αρχικά , μελετάται ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f για διάφορες τιμές του τελικού εύρους διαστήματος l. Το τελικό εύρος διαστήματος l μεταβάλλεται από 0.001 μέχρι 0.1 . Αυτό γίνεται και για τις 3 συναρτήσεις της εκφώνησης.

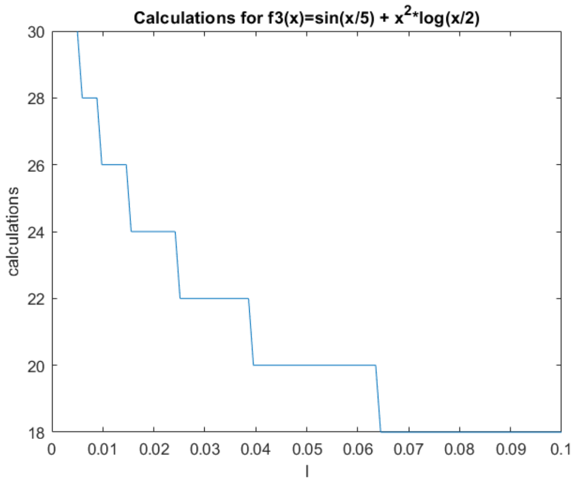
Ακολουθεί από μία γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των 3 αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 2.1 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— l =variable



Σχήμα 2.2 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f2(x)— l =variable



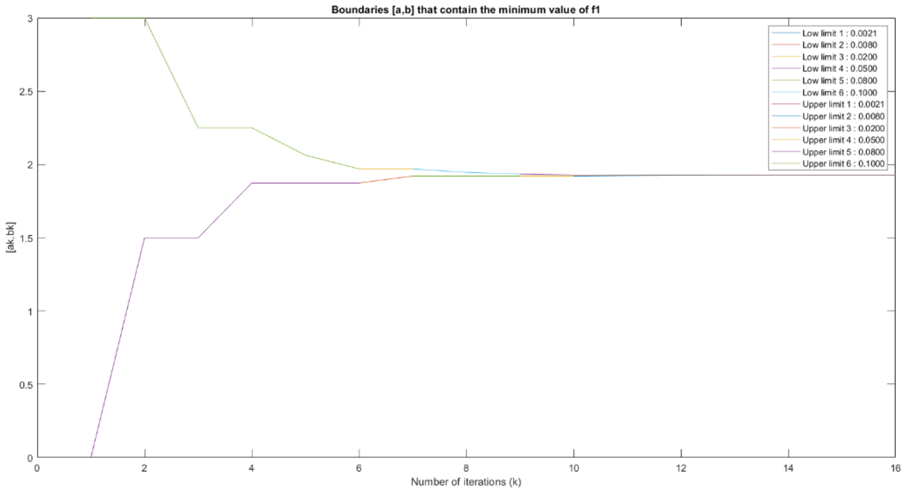
Σχήμα 2.3 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f3(x)— l =variable

<u>Παρατηρήσεις</u>

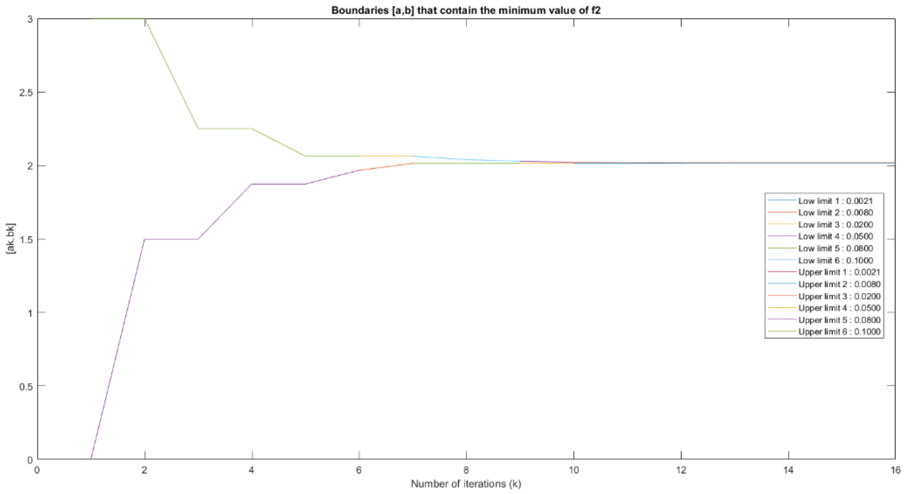
- Η γραφική παράσταση είναι ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις . Αυτό έχει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδιες παραμέτρους που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης (l και διάστημα αναζήτησης [0,3]).
- Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το τελικό εύρος διαστήματος l , τόσο μειώνονται οι κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x). Αυτό συμβαίνει επειδή όσο αυξάνουμε το τελικό εύρος διαστήματος l, τόσα λιγότερα βήματα – διαμερίσεις θα χρειαστούν να γίνουν στο αρχικό διάστημα αναζήτησης ώστε να φτάσουμε σε λύση επιθυμητής ακρίβειας. Ως εκ τούτου, θα έχουμε και λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης.

Τέλος ζητήθηκε για διάφορα l να αποτυπωθούν τα ζεύγη $[a\kappa, b\kappa]$ συναρτήσει του δείκτη k. Οι τιμές l που επιλέχθηκαν ήταν οι εξής : 0.0021, 0.008, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1 ενώ το e παρέμεινε σταθερό 0.001 .

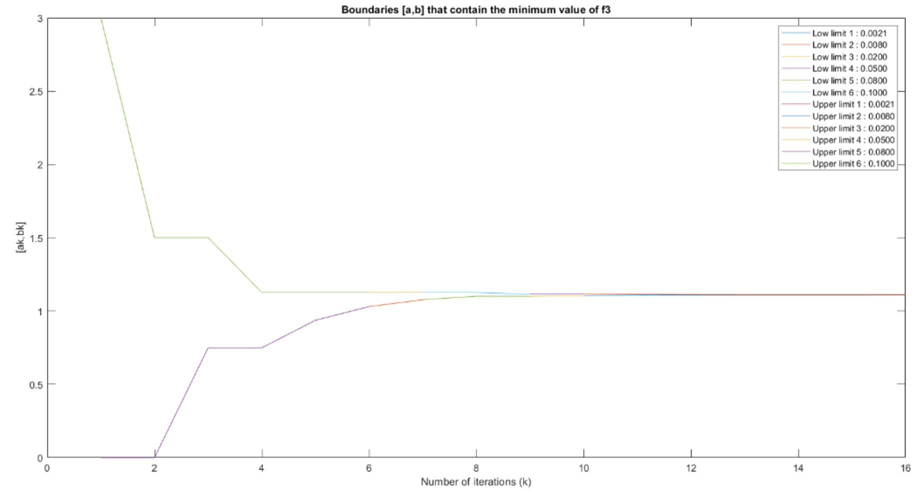
Ακολουθούν τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, που παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις (k , ak) και (k , bk) .



Σχήμα 2.4 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f1(x)— various values for l



Σχήμα 2.5 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f2(x)— various values for l



Σχήμα 2.6 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f3(x)— various values for l

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα, και όπως λογικά περιμέναμε, όσο παραπάνω μειώνεται το εύρος του τελικού διαστήματος [a(k),b(k)], χρειάζονται παραπάνω βήματα του αλγορίθμου για να το φτάσουμε. Μετά , από έναν αριθμό επαναλήψεων το διάστημα αυτό μικραίνει κατά πολύ και η μεταβολή δεν διακρίνεται με γυμνό μάτι .

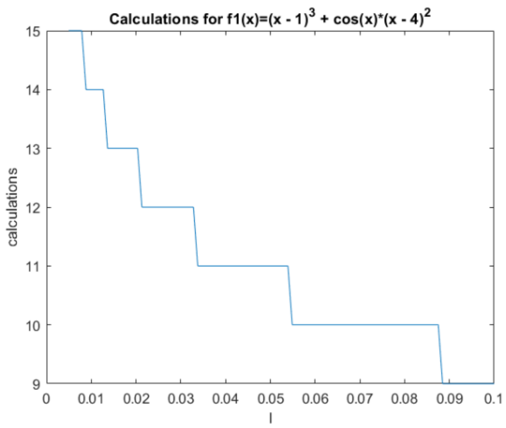
3. Task 3 – Μέθοδος Fibonacci.

Στην μέθοδο αυτή υπάρχουν μια παράμετρος το l (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης, δεν υπάρχει το e).

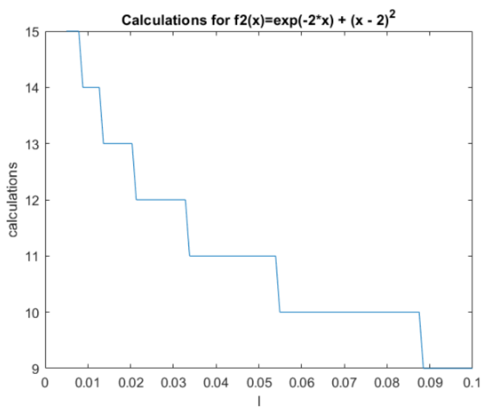
Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να υλοποιηθεί στο MATLAB ο αλγόριθμος για την μέθοδο του χρυσού τομέα και να εφαρμοστεί στις 3 συναρτήσεις. Ο κώδικας στο σύνολο του περιέχεται στα αρχεία **functionSelector.m fibonacciMethod.m** και **Task3.m** .

Αρχικά , μελετάται ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f για διάφορες τιμές του τελικού εύρους διαστήματος l. Το τελικό εύρος διαστήματος l μεταβάλλεται από 0.005 μέχρι 0.1 . Αυτό γίνεται και για τις 3 συναρτήσεις της εκφώνησης.

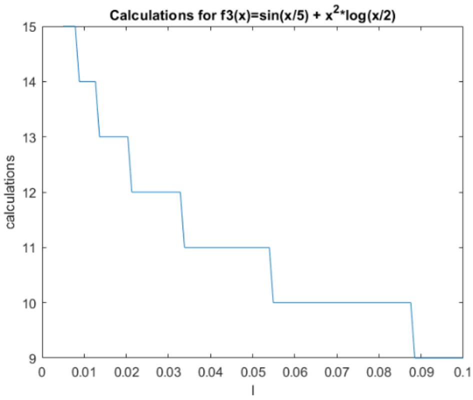
Ακολουθεί από μία γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των 3 αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 3.1 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— l =variable



Σχήμα 3.2 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f2(x)— l =variable



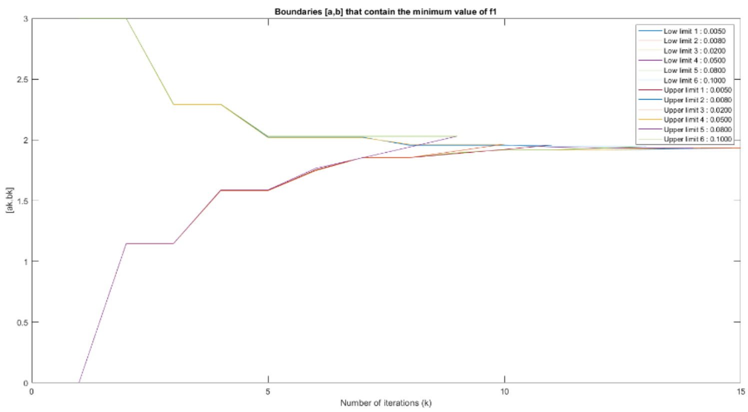
Σχήμα 3.3 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f3(x)— l =variable

<u>Παρατηρήσεις</u>

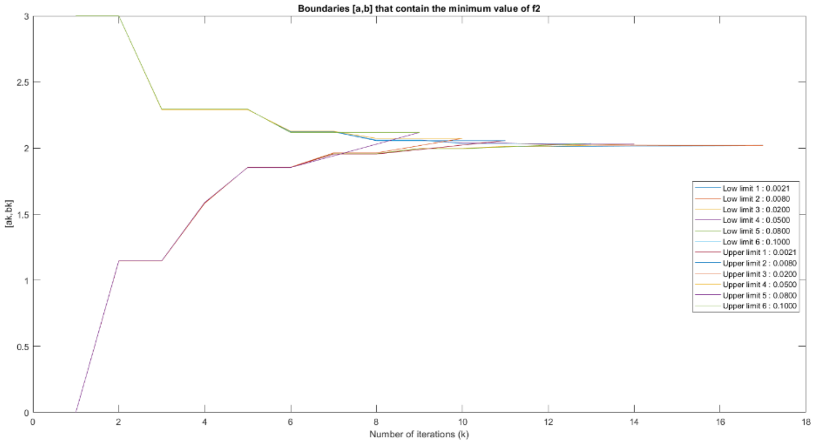
- Η γραφική παράσταση είναι ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις . Αυτό έχει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδιες παραμέτρους που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης (l και διάστημα αναζήτησης [0,3]).
- Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το τελικό εύρος διαστήματος l , τόσο μειώνονται οι κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x). Αυτό συμβαίνει επειδή όσο αυξάνουμε το τελικό εύρος διαστήματος l, τόσα λιγότερα βήματα – διαμερίσεις θα χρειαστούν να γίνουν στο αρχικό διάστημα αναζήτησης ώστε να φτάσουμε σε λύση επιθυμητής ακρίβειας. Ως εκ τούτου, θα έχουμε και λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης.

Τέλος ζητήθηκε για διάφορα l να αποτυπωθούν τα ζεύγη $[\alpha\kappa, b\kappa]$ συναρτήσει του δείκτη k. Οι τιμές l που επιλέχθηκαν ήταν οι εξής : 0.005, 0.008, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1 ενώ το e παρέμεινε σταθερό 0.001 .

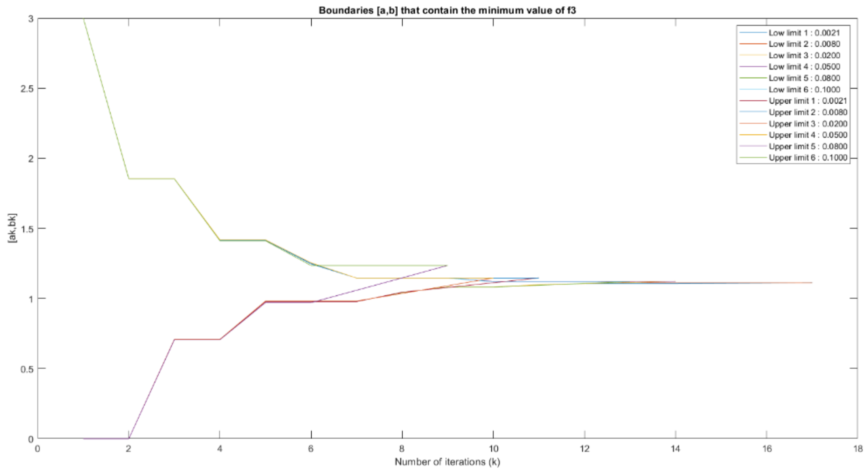
Ακολουθούν τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, που παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις (k , ak) και (k , bk).



Σχήμα 3.4 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f1(x)— various values for l



Σχήμα 3.5 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f2(x)— various values for l



Σχήμα 3.6 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f3(x)— various values for l

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα, και όπως λογικά περιμέναμε, όσο παραπάνω μειώνεται το εύρος του τελικού διαστήματος [a(k),b(k)], χρειάζονται παραπάνω βήματα του αλγορίθμου για να το φτάσουμε. Μετά , από έναν αριθμό επαναλήψεων το διάστημα αυτό μικραίνει κατά πολύ και η μεταβολή δεν διακρίνεται με γυμνό μάτι .

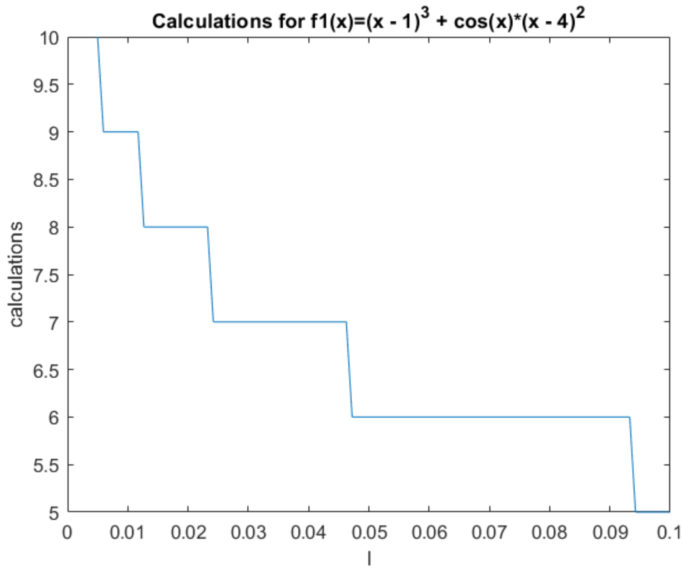
4. Task 4 – Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγου.

Στην μέθοδο αυτή υπάρχουν μια παράμετρος το l (το εύρος του διαστήματος αναζήτησης, δεν υπάρχει το e).

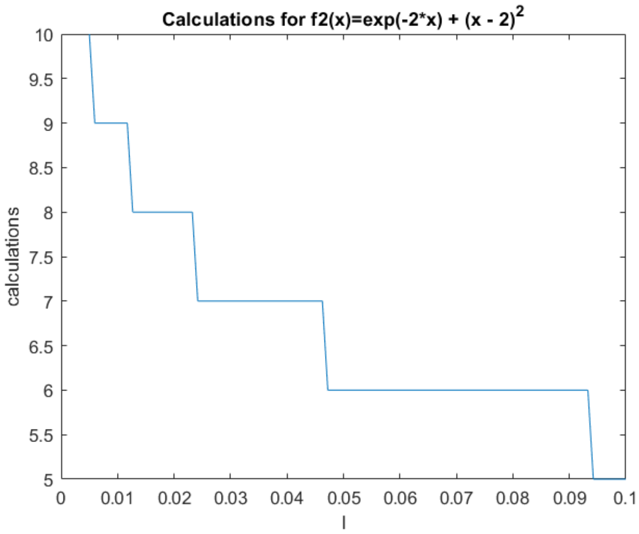
Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να υλοποιηθεί στο MATLAB ο αλγόριθμος για την μέθοδο του χρυσού τομέα και να εφαρμοστεί στις 3 συναρτήσεις. Ο κώδικας στο σύνολο του περιέχεται στα αρχεία **derivativeSelector.m derivativeMethod.m** και **Task4.m** .

Αρχικά , μελετάται ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης f για διάφορες τιμές του τελικού εύρους διαστήματος l. Το τελικό εύρος διαστήματος l μεταβάλλεται από 0.005 μέχρι 0.1 . Αυτό γίνεται και για τις 3 συναρτήσεις της εκφώνησης.

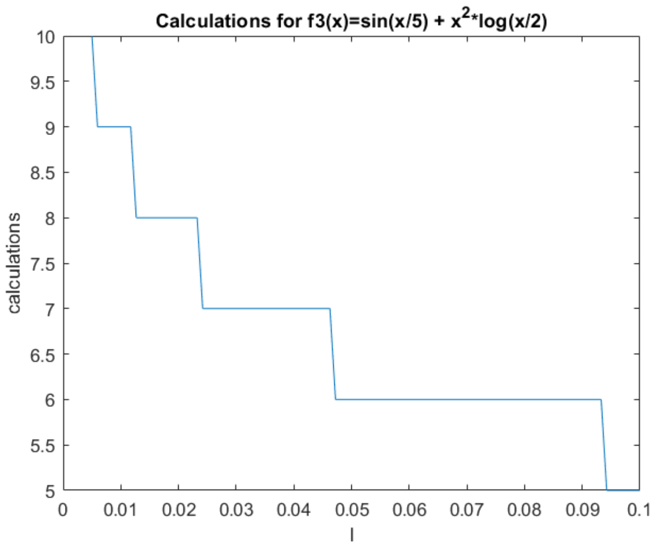
Ακολουθεί από μία γραφική παράσταση από τις τιμές που προκύπτουν από τους υπολογισμούς των 3 αντικειμενικών συναρτήσεων.



Σχήμα 4.1 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f1(x)— l =variable



Σχήμα 4.2 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f2(x)— l =variable



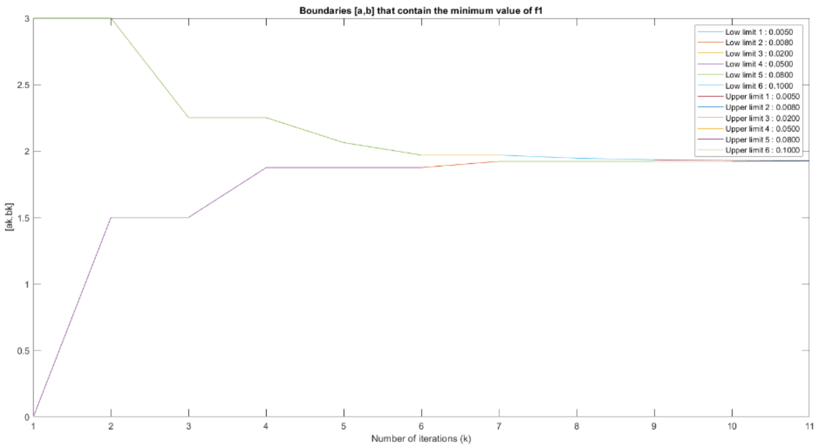
Σχήμα 4.3 : Μεταβολή υπολογισμών αντικειμενικής συνάρτησης για την f3(x)— l =variable

<u>Παρατηρήσεις</u>

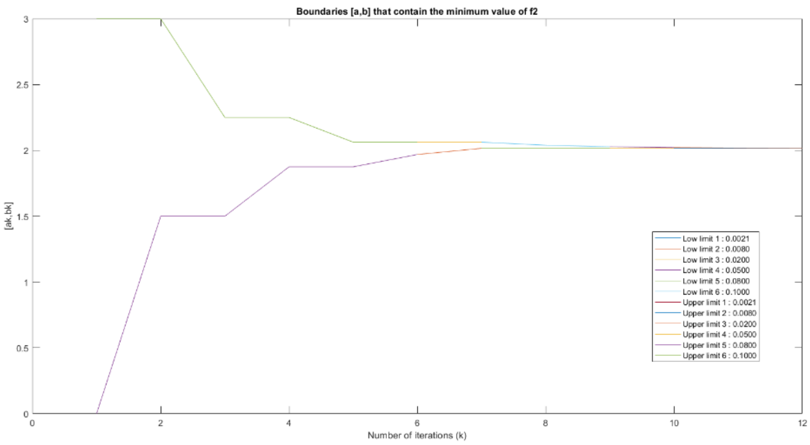
- Η γραφική παράσταση είναι ίδια και για τις τρεις συναρτήσεις . Αυτό έχει νόημα, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις έχουμε ίδιες παραμέτρους που επηρεάζουν τους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης (l και διάστημα αναζήτησης [0,3]).
- Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το τελικό εύρος διαστήματος l , τόσο μειώνονται οι κλήσεις της εκάστοτε συνάρτησης f(x). Αυτό συμβαίνει επειδή όσο αυξάνουμε το τελικό εύρος διαστήματος l, τόσα λιγότερα βήματα – διαμερίσεις θα χρειαστούν να γίνουν στο αρχικό διάστημα αναζήτησης ώστε να φτάσουμε σε λύση επιθυμητής ακρίβειας. Ως εκ τούτου, θα έχουμε και λιγότερες κλήσεις της συνάρτησης.

Τέλος ζητήθηκε για διάφορα l να αποτυπωθούν τα ζεύγη $[\alpha\kappa, b\kappa]$ συναρτήσει του δείκτη k. Οι τιμές l που επιλέχθηκαν ήταν οι εξής : 0.005, 0.008, 0.02, 0.05, 0.08, 0.1 ενώ το e παρέμεινε σταθερό 0.001 .

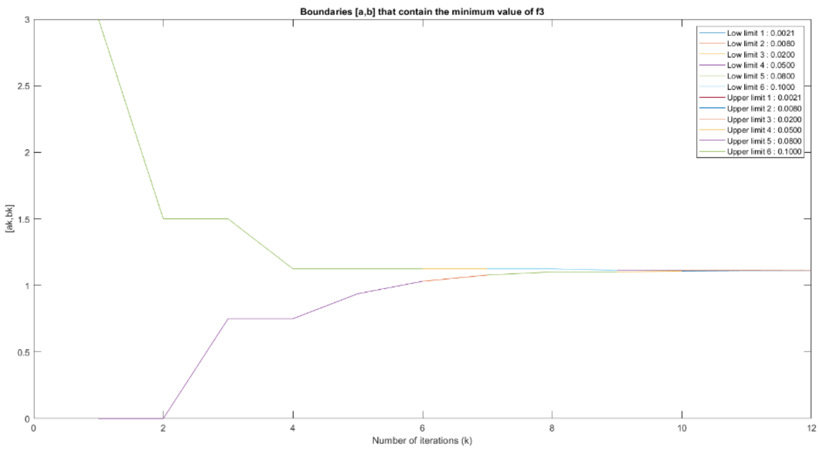
Ακολουθούν τρία διαγράμματα, ένα για κάθε συνάρτηση, που παρουσιάζουν τις γραφικές παραστάσεις (k , ak) και (k , bk).



Σχήμα 4.4 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f1(x)— various values for l



Σχήμα 4.5 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f2(x)— various values for l

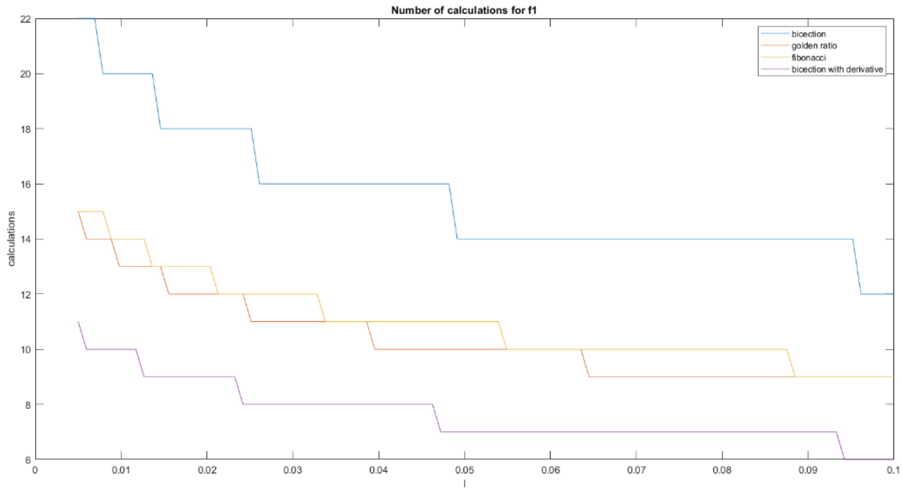


Σχήμα 4.6 : Άκρα του διαστήματος [ak , bk] συναρτήσει του δείκτη βήματος k για την f3(x)— various values for l

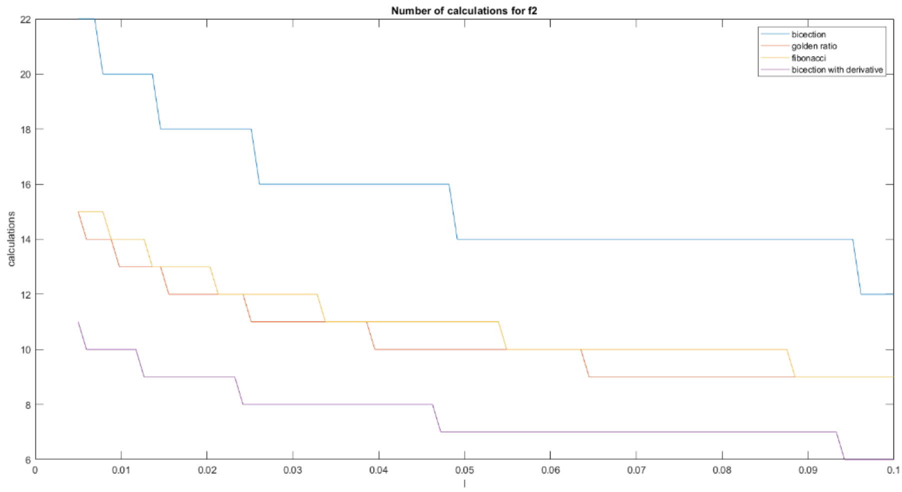
Όπως βλέπουμε στα παραπάνω διαγράμματα, και όπως λογικά περιμέναμε, όσο παραπάνω μειώνεται το εύρος του τελικού διαστήματος [a(k),b(k)], χρειάζονται παραπάνω βήματα του αλγορίθμου για να το φτάσουμε. Μετά , από έναν αριθμό επαναλήψεων το διάστημα αυτό μικραίνει κατά πολύ και η μεταβολή δεν διακρίνεται με γυμνό μάτι .

5. Συγκριτικά Αποτελέσματα

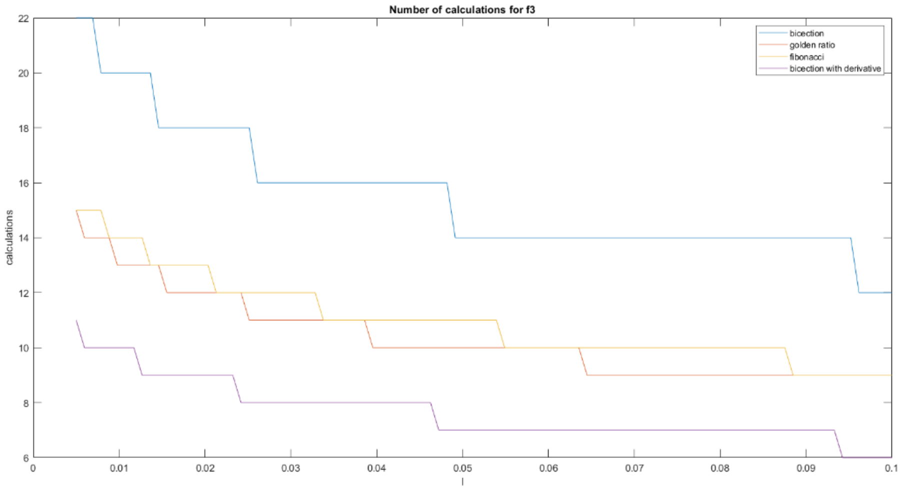
Παρατίθονται τα ακόλουθα διαγράμματα για καθεμιά από τις 3 συναρτήσεις που συγκρίνουν τον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης για καθεμιά από τις τέσσερις μεθόδους που μελετήθηκαν.



Σχήμα 5.1 : Αριθμός υπολογισμών για την f1(x) και με τις 4 μεθόδους



Σχήμα 5.2 : Αριθμός υπολογισμών για την f2(x) και με τις 4 μεθόδους



Σχήμα 5.3 : Αριθμός υπολογισμών για την f1(x) και με τις 4 μεθόδους

Παρατηρείται πως διαφέρουν οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης από αλγόριθμο σε αλγόριθμό. Οι λιγότερες κλίσεις έγιναν, όπως ήταν και αναμενόμενο, στην μέθοδο της διχοτόμου με χρήση παραγώγου. Ακολουθεί η μέθοδος του χρυσού τομέα, μετά η μέθοδος Fibonacci. Τέλος, την χειρότερη επίδοση έχει η απλή μέθοδος της διχοτόμου. Παρατηρούμε ότι η σειρά αποδοτικότητας των μεθόδων χωρίς την χρήση παραγώγων (μέθοδος της διχοτόμου, μέθοδος του χρυσού τομέα και μέθοδος Fibonacci) πειραματικά επιβεβαιώνει την θεωρία (από την λιγότερο προς περισσότερο αποδοτική: διχοτόμος, χρυσός τομέας, Fibonacci). Επιπλέον, φαίνεται η μέθοδος του χρυσού τομέα τείνει να ταυτιστεί με την μέθοδο Fibonacci, όσον αφορά τον αριθμό υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης.

Όσον αφορά το πόσες κλήσεις τις f(x) πραγματοποιεί ο κάθε αλγόριθμος, έχουμε ότι:

- ο αλγόριθμος διχοτόμησης καλεί δύο φορές την συνάρτηση f(x) σε κάθε βήμα,
- οι αλγόριθμοι Χρυσού Τομέα και Fibonacci καλούν την f(x) [2 + (k-1)] φορές (δύο κλήσεις κατά το πρώτο βήμα για να υπολογιστούν τα αρχικά f(x1) και f(x2) και μία κλήση κάθε επόμενο βήμα μέχρι το τέλος),
- ενώ τέλος ο αλγόριθμος διχοτόμησης με χρήση παραγώγου καλεί την συνάρτηση f(x) k φορές.