

## ממך 12

יונתן אוּחיון

28 באוגוסט 2017

### 1 שאלה 1

#### 1.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר  $A^k B = B^k A$  לכל  $AB = BA$  באינדוקציה:

$$n = 1 \quad 1.0.1$$

$$A^1 B = BA^1 \rightarrow AB = BA$$

נכון לפי הנתון.

$$n = k + 1 \text{ ונוכיח } n = k \text{ נניח שנכון } 1.0.2$$

$$A^{k+1} B \stackrel{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^k AB \stackrel{\text{הנתון}}{=} A^k BA \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} BA^k A \stackrel{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} BA^{k+1}$$

עכשיו נוכל להשתמש בטענת העזר על מנת להוכיח את הטענה בשאלה.

#### 1.1 הוכחה באינדוקציה

$$n = 1 \quad 1.1.1$$

$$(AB)^1 = A^1 B^1 \rightarrow AB = AB$$

$$n = k + 1 \text{ ונוכיח } n = k \text{ נניח שנכון } 1.1.2$$

$$(AB)^{k+1} \stackrel{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} AB(AB)^k \stackrel{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} ABA^k B^k \stackrel{\text{טענת העזר}}{=} AA^k B^k B \stackrel{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^{k+1} B^{k+1}$$

לכן, לכל  $AB = BA$  מתקיים  $(AB)^k = A^k B^k$ .



## 2 שאלה 2

נניח ש  $A$  הפיכה ומתקיים  $A = A^{-1}$ . לפיכך,  $A^2 = I$ , כלומר נצטרך למצוא את ערכי  $k$  שבהם  $A^2 = I$ . ראשית, נכפיל את המטריצה  $A$  בעצמה:

$$\begin{aligned} [A^2]_{11} &= [k \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = k^2 - 1 \\ [A^2]_{12} &= [k \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{13} &= [k \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{21} &= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{22} &= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \\ [A^2]_{23} &= [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{31} &= [-1 \ 0 \ -k] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{32} &= [-1 \ 0 \ -k] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ [A^2]_{33} &= [-1 \ 0 \ -k] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = k^2 - 1 \\ A^2 &= \begin{bmatrix} k^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

כלומר, נצטרך למצוא את ערכי  $k$  הפותרים את המשוואה  $k^2 = 2 \rightarrow k^2 - 1 = 1$ . מכיוון שהמטריצה מעל השדה הסופי  $\mathbb{Z}_7$  נצטרך לבדוק את הריבוע של כל איבר בשדה. לאחר הבדיקה נמצא כי  $k \in \{3, 4\}$ . לפיכך, כאשר  $k \in \{3, 4\}$ , המטריצה  $A$  הפיכה ומתקיים  $A^{-1} = A$ .

■

### 3 שאלה 3

#### 3.1 סעיף א

הוכחה:

$$\begin{aligned} A^2 + AB + I &= 0 \\ AB &= -A^2 - I \\ A^{-1} \cdot AB &= A^{-1}(-A^2 - I) \\ B &= -A - A^{-1} \\ B &= (-A^2 - I)A^{-1} \cdot A \\ BA &= -A^2 - I \\ A^2 + BA + I &= 0 \end{aligned}$$

כעת, מכיוון ששתי המשוואות שוות ל-0 נוכל להשוות אותם ולהגיע ל- $AB = BA$ :

$$A^2 + BA + I = A^2 + AB + I \rightarrow BA = AB$$

■

#### 3.2 סעיף ב

הוכחה:

$$AB = -BA \rightarrow |AB| = |-BA| \xrightarrow{\text{משפט 4.5.1}} (|A||B| = \overbrace{-|B||A|}^{(*)} \leftrightarrow |A| = 0 \vee |B| = 0)$$

מכיוון שלפחות אחת מהמטריצות סינגולרית,  $|A| = 0 \vee |B| = 0$  והתנאי תמיד מתקיים. יש לציין שב(\*) הסימן של הדטרמיננטה תמיד שווה למינוס, שכן הגורם המשותף  $(-1)^n$  תמיד בחזקה אי זוגית (לפי הנתון בשאלה).

■

#### 3.3 סעיף ג

נניח ש- $A$  סינגולרית ונגיע לסתירה:

לפי למה 3.4.3,  $AB = [A[B]_1^c \ A[B]_2^c \ \dots \ A[B]_n^c]$ , לפי מסקנה 3.10.2, קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת  $Ax = 0$  (כלומר קיים  $x \neq 0$  הפותר את המערכת הזאת). מכיוון ש- $AB \neq 0$  (לפי הנתון בשאלה) ולפי (\*), מתקיים גם  $A[B]_k^c \neq 0$ . לפיכך, לא קיימת מטריצה  $B \neq 0$  בעלת וקטור עמודה אחד לפחות שונה מ-0 הפותרת את המערכת  $Ax = 0$  ו- $A$  הפיכה.

■

## 4 שאלה 4

הוכחה:

מכיוון שב- $A$  יש יותר שורות מעמודות, ניתן להפוך אותה למטריצה עם שורת אפסים לאחר מספר של פעולות אלמנטריות:

$$\underbrace{\exists \varphi_1, \dots, \varphi_k}_{\text{מטריצות אלמנטריות}} \rightarrow \underbrace{A \cdot \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_k}_{\text{מטריצה עם שורת אפסים}}$$

לפיכך, מתקיים ש:

$$AB = A \cdot \underbrace{(\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_1^{-1})}_I \cdot B \stackrel{\text{משפט 3.5.1}}{=} \underbrace{(A \cdot \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_k)}_{\text{מטריצה עם שורת אפסים}} \cdot (\varphi_k^{-1} \cdot \dots \cdot \varphi_1^{-1} \cdot B)$$

מאחר ויש במטריצה זו שורת אפסים היא אינה הפיכה.<sup>1</sup>

■

## 5 שאלה 5

5.1  $\det B$

ראשית, נפתח את הדטרמיננטה של  $B$  בעזרת  $R_3$ :

$$\begin{aligned} |B| &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} - a_{34}M_{34} \\ &= 0M_{31} - 2M_{32} + 0M_{33} - 0M_{34} \\ &= 0 - 2M_{32} + 0 - 0 \\ &= -2M_{32} \end{aligned}$$

לפיכך, נצטרך רק לחשב את המינור  $M_{32}$  ולהכפילו ב-2 – ע"מ לקבל את הדטרמיננטה של  $B$ .

כעת, נחשב את  $M_{32}$ :

$$\begin{aligned} M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{משפט 4.3.3}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ -3(b-1) & -3(b+2) & -3(a-2) \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{משפט 4.3.3}}{=} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} 6 \begin{vmatrix} a+3 & a-1 & b+2 \\ 1 & 4 & 1 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\text{משפט 4.3.1}}{=} 6 \begin{vmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{vmatrix} \stackrel{|A|=\frac{1}{3}}{=} 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \end{aligned}$$

לפיכך,  $\det B = -4 \cdot M_{32} = 2$ .

<sup>1</sup>מטריצה בעלת שורת אפסים אינה הפיכה מכיוון שלא קיימת מטריצה  $B$  המקיימת  $AB = I$ . הוכחה לכך תהיה: נניח  $[A]_k^r$  שורת אפסים. לפי הגדרת כפל מטריצות,  $[AB]_{kj} = [A]_k^r [B]_j^c = 0 \cdot [B]_j^c = 0$ . כלומר כל השורה ה- $k$ -ית של  $AB$  תהיה שווה ל-0. לפיכך,  $AB \neq I$  בהכרח ו- $A$  אינה הפיכה.

$$\det -2B^{-1} \quad \mathbf{5.2}$$

נחשב:

$$|-2B^{-1}| \stackrel{\text{משפט 4.3.3}}{=} (-2)^4 |B^{-1}| = 16 |B^{-1}| \stackrel{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}{=} \frac{16}{|B|} = \frac{16}{-4} = -4$$

$$\det -2B^{-1} = \det B = -4, \text{ לכן,}$$

■

## 6 שאלה 6

נחשב את הדטרמיננטה של  $D$ :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & n & n & \dots & n \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\forall 2 \leq i \leq n, \\ R_1 \rightarrow R_1 + R_i}}{=} \begin{vmatrix} n(n-1) & n(n-1) & n(n-1) & \dots & n(n-1) \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\text{משפט 4.3.3}}{=} n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \stackrel{\text{משפט 4.3.3}}{=} n^{n-1} \cdot n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\substack{\forall 2 \leq i \leq n, \\ R_i \rightarrow R_i - R_1}}{=} n^n (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \stackrel{\text{משפט 4.3.8}}{=} n^n (n-1) (-1)^{n-1}$$

■

## 7 שאלה 7

נניח שהמטריצה לא הפיכה ב  $\mathbb{Q}$  ונגיע לסתירה לנתון.

לפי ההנחה ולפי משפט 3.10.6, למערכת המשוואות  $Ax = 0$  קיים פתרון לא טריוויאלי. מכיוון ש  $x \in \mathbb{Q}^n \wedge \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ , מתקיים  $x \in \mathbb{R}^n$  והוא פתרון לא טריוויאלי למשוואה כאשר היא מעל  $\mathbb{R}$ . לפיכך, קיים פתרון לא טריוויאלי ל  $Ax = 0$  מעל  $\mathbb{R}$  והגענו לסתירה לנתון. לפיכך, אם המטריצה הפיכה ב  $\mathbb{R}$  היא הפיכה גם ב  $\mathbb{Q}$ .

■