

## ממ"ן 12

יונתן אוהיון

22 באוגוסט 2017

### 1 שאלה 1

#### 1.1 סעיף א

$$|A| = 3 \rightarrow |A \times A| = 3^2 \rightarrow |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{3^2} = 512$$

■

#### 1.2 סעיף ב

ננסה להוכיח ש'  $S$  יחס שקילות ונגיע לסתירה:

##### 1.2.1 רפלקסיביות

רלציה  $R$  על  $A$  הינה רפלקסיבית אם מתקיים  $I_A \subseteq R$  (כלומר  $(x, x) \in R$ ). נראה ש'  $S$  רפלקסיבית:

$$\forall R \in M \rightarrow RR = R^2 \rightarrow R^2 = R^2 \rightarrow (R, R) \in S$$

##### 1.2.2 סימטריות

לפי הגדרת  $S$ ,  $(R_1, R_2) \in S$  אם  $R_1 R_2 = R_2 R_1$ . לפיכך,  $(R_2, R_1) \in S$  גם כן שכן  $R_2 R_1 = R_1 R_2$  לפי ההגדרה.

##### 1.2.3 טרנזיטיביות

נראה ש'  $S$  אינו טרנזיטיבי באמצעות דוגמה נגדית:

$$R_1 = \{(2, 3)\}, R_2 = \emptyset, R_3 = \{(3, 2)\}$$

$$R_1 R_2 = R_2 R_1 = \emptyset \rightarrow (R_1, R_2) \in S$$

$$R_3 R_2 = R_2 R_3 = \emptyset \rightarrow (R_3, R_2) \in S$$

$$R_1 R_3 = \{(2, 2)\}, R_3 R_1 = \{(3, 3)\}$$

$$R_3 R_1 \neq R_1 R_3 \rightarrow (R_1, R_3) \notin S$$

לכן,  $S$  אינו יחס שקילות. ■

## 2 שאלה 2

### 2.1 סעיף א

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(2, 3)\} \\ R_2 &= \{(3, 2)\} \\ s(R_1) &= s(R_2) = \{(2, 3), (3, 2)\} \\ R_1 &\neq R_2 \end{aligned}$$

■

### 2.2 סעיף ב

לא נכון, מכיוון שכל  $R \in \text{Range}(S)$  הינו יחס סימטרי אך היחס מוגדר על  $M$  (שאיבריה אינם בהכרח יחסים סימטריים). ■

### 2.3 סעיף ג

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(3, 2)\} \\ R_2 &= \{(2, 3)\} \\ R_1 R_2 &= \{(3, 3)\} \\ s(R_1) &= \{(2, 3), (3, 2)\} \\ s(R_2) &= \{(3, 2), (2, 3)\} \\ s(R_1 R_2) &= \{(3, 3)\} \\ s(R_1) s(R_2) &= \{(2, 2), (3, 3)\} \\ s(R_1 R_2) &\neq s(R_1) s(R_2) \end{aligned}$$

■

### 2.4 סעיף ד

נכון. הוכחה:

$$\begin{aligned} s(R_1) &\stackrel{\text{שאלה 2.43}}{=} R \cup R^{-1} \\ s(s(R)) &\stackrel{\text{סעיף קודם}}{=} s(R) \cup (s(R))^{-1} \stackrel{\text{הצבה}}{=} R \cup R^{-1} \cup (R \cup R^{-1})^{-1} \\ s(s(R)) &\stackrel{\text{שאלה 2.6.3}}{=} R \cup R^{-1} \cup R \cup R^{-1} \stackrel{\text{קומוטטיביות}}{=} R \cup R \cup R^{-1} \cup R^{-1} \\ s(s(R)) &\stackrel{\text{אידמפוטנטיות}}{=} R \cup \cancel{R} \cup R^{-1} \cup \cancel{R^{-1}} = R \cup R^{-1} \\ s(s(R)) &= s(R) \end{aligned}$$

■

### 3 שאלה 3

#### 3.1 סעיף א

נוכיח ש- $K$  סדר חלקי מעל  $F$ :

##### 3.1.1 רפלקסיביות

נראה ש- $K$  רפלקסיבי:

$$\forall f \in F \rightarrow f(n) = f(n) \xrightarrow{\text{הגדרת גדול שווה}} f(n) \leq g(n) \xrightarrow{\text{הגדרת היחס}} (f, f) \in K$$

##### 3.1.2 טרנזיטיביות

נניח שקיימים  $f, g, h \in F \rightarrow (f, g) \in K \wedge (g, f) \in K$  ונראה ש- $(f, h) \in K$ . ע"פ הגדרת היחס  $K$ , מכיוון ש- $(f, g) \in K$ , בהכרח  $f(n) \leq g(n)$ . בנוסף, מכיוון ש- $(g, f) \in K$ , בהכרח  $g(n) \leq f(n)$ . לפיכך ולפי הגדרת גדול שווה,  $f(n) \leq g(n) \leq h(n) \rightarrow f(n) \leq h(n)$  ולכן  $(f, h) \in K$  גם כן.

##### 3.1.3 אנטיסימטריות

אם קיימות  $f, g \in F$  כך ש- $(f, g) \in K \wedge (g, f) \in K$ , הרי  $f(n) \leq g(n) \wedge g(n) \leq f(n)$ , מה שאומר שבהכרח  $f(n) = g(n)$ . לפיכך, היחס  $K$  אנטיסימטרי. ■  
לכן,  $K$  יחס חלקי מעל  $F$ . ■

#### 3.2 סעיף ב

נניח ש- $K$  סדר מלא, ניתן דוגמה נגדית ונגיע לסתירה:

$$\begin{aligned} f(n) &= n \\ g(n) &= 2 \end{aligned}$$

לפי ההנחה,  $K$  סדר מלא ועבור כל  $f, g \in F$  מתקיים  $(f, g) \in K \vee (g, f) \in K$ . אך מכיוון שהפונקציה  $g$  מחזירה לכל  $n \in \mathbb{N}$  את המספר 2, לא מתקיים  $(f, g) \in K$  וגם לא  $(g, f) \in K$  (שכן הראשון מתקיים רק כאשר  $f(n) \leq 2$  והשני כאשר  $f(n) \geq 2$  אך הם אינם מוגדרים כך). לפיכך, הגענו לסתירה להנחה ו- $K$  אינו סדר מלא. ■

## 4 שאלה 4

### 4.1 סעיף א

מכיוון שנתונים לנו שני מקרי בסיס, נרצה לבדוק את נכונות שניהם (ואז נוכל להשתמש גם ב  $n = k$  וגם ב  $n = k - 1$  בהוכחה).

$$n = 0 \quad 4.1.1$$

$$2 * 3^0 + (-2)^1 = 2 * 1 - 2 = 0 = f(0)$$

$$n = 1 \quad 4.1.2$$

$$2 * 3^1 + (-2)^2 = 6 + 4 = 10 = f(1)$$

כעת, נוכל להניח שהתנאי מתקיים ל  $n = k$  וגם ל  $n = k - 1$  ונוכיח שהוא מתקיים גם ל  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 * 3^n + (-2)^{n+1} \\ f(n-1) &= 2 * 3^{n-1} + (-2)^n \end{aligned}$$

מההגדרה הרקורסיבית נובע:

$$f(n+1) = f(n) + 6f(n-1)$$

עכשיו נוכל להציב את ערכי  $f(n)$  ו  $f(n-1)$  בפונקציה הרקורסיבית ולהוכיח:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2 * 3^n + (-2)^{n+1} + 6(2 * 3^{n-1} + (-2)^n) \\ &= 6 * 3^{n-1} + -2(-2)^n + 12 * 3^{n-1} + 6(-2)^n \\ &= 6 * 3^{n-1} + 12 * 3^{n-1} + -2(-2)^n + 6(-2)^n \\ &= 18 * 3^{n-1} + 4(-2)^n \\ &= 2 * 3^{n+1} + (-2)^{n+2} \end{aligned}$$

לפי עקרון האינדוקציה השלמה, הבדיקה והמעבר, התנאי נכון לכל  $n$  טבעי.

■

### 4.1.3 סעיף ב

הפונקציה  $f$  אינה על מכיוון שהיא מתאימה לכל  $n$  מספר זוגי, ו  $\mathbb{N}$  כולל בתוכו את כל המספרים הטבעיים (ולא רק את הזוגיים):

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 * 3^n + (-2)^n - 2 \\ &= 2 * 3^n - 2 * (-2)^n \\ &= 2 * (3^n - (-2)^n) \end{aligned}$$

■