ממן 13

יונתן אוחיון

3 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

1.1 הקבוצות

$$
\begin{aligned}
&A = [-1, 1] \\
&B = [0, 2] \\
&A - B = [-1, 0) \\
&A \oplus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 2] \ \wedge \ x \notin (0, 1)\} \\
&A \cup B = [-1, 2]
\end{aligned}
$$

1.2 עוצמת הקבוצות

לפי משפט 4.5, ניתן להסיק כי העוצמה של קטעים פתוחים וסגורים הינה C. לפיכך, כל הקבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ הינם שוות־עוצמה ועוצמתן הינה C.

1.3 שונות הקבוצות

א. נראה שA שונה משאר הקבוצות:

$$-1 \in A \wedge -1 \notin B \to A \neq B$$

$$0 \in A \wedge 0 \notin A - B \to A \neq A - B$$

$$0.5 \in A \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to A \neq A \oplus B$$

$$2 \notin A \wedge 2 \in A \cup B \to A \neq A \cup B$$

ב. נראה שB שונה משאר הקבוצות:

$A \neq B$ (לפי סעיף א)

$$0 \in B \wedge 0 \notin A - B \to B \neq A - B$$

$$0.5 \in B \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to B \neq A \oplus B$$

$$-1 \notin B \wedge -1 \in A \cup B \to B \neq A \cup B$$

ג. נראה ש$A - B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A - B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A - B$ (לפי סעיף ב)
$2 \notin A - B \wedge 2 \in A \oplus B \rightarrow A - B \neq A \oplus B$

$2 \notin A - B \wedge 2 \in A \cup B \rightarrow A - B \neq A \cup B$

ד. נראה ש$A \oplus B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \oplus B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ב)
$A - B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ג)
$0.5 \notin A \oplus B \wedge 0.5 \in A \cup B \rightarrow A \oplus B \neq A \cup B$

ה. נראה ש$A \cup B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \cup B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ב)
$A - B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ג)
$A - B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ד)

לפיכך, הצלחנו למצוא קבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ כך שעוצמותיהן שוות אך הן שונות אחת מהשנייה.

■

2 שאלה 2

2.1 סעיף א

יהי $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$.

תהי T_n קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ באורך n (כלומר, $T_n = \{X \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge |X| = n\}$). תהי F_n קבוצת הסדרות באורך n מעל $\mathbb{N}$ (כלומר, $F_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$). לפיכך, קיימת פונקציה $f : T_n \to F_n$ המתאימה לכל קבוצה בT_n את סדרת המספרים הנמצאים בה בסדר עולה בF_n.

פונקציה זו הינה חח"ע, שכן לכל קבוצה P בT_n נוכל להתאים סדרה של איברה בסדר עולה, ולכן $|T_n| \leq |F_n|$ (פונקציה זו אינה על, שכן לכל קבוצה תותאם רק סדרה אחת עם איבריה אך קיימות יותר מסדרה אחת שכזו בF_n). הקבוצה T_n הינה אינסופית, מכיוון שלכל $P \in T_n$ קיימת $M \in T_n$ כך ש$|P| = |M| - 1$, ולכן עוצמתה היא לפחות $\aleph_0$ והיא בת מנייה.

■

2.2 סעיף ב

לפי סעיף א, הוכחנו שלכל $n > 0$, קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ באורך n (מסומנת בT_n) היא בת מנייה. מכיוון שאיחוד של קבוצות בנות מנייה הינו קבוצה בת מנייה בעצמו, נוכל לייצג את קבוצת תת הקבוצות בנות המנייה כך:

$$M = \bigcup_{0<i\leq n}^{\infty} T_i$$

נוכל להבחין ש$i > 0$, ולכן קבוצה זו לא כוללת את קבוצת תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן שווה ל0, כלומר את הקבוצה $\{\emptyset\}$, שהיא כמובן חלק מקבוצות תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$. לפיכך,

$$M = \bigcup_{0\leq i\leq n}^{\infty} T_i$$

לפיכך, קבוצת תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$ הינה בת מנייה.

■

2.3 סעיף ג

תהי L קבוצת תת הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$. נניח בשלילה ש$|L| = \aleph_0$ ונגיע לסתירה:

י$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$. לפיכך, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = M \cup L$. לפיכך,

$$|M| + |L| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \xrightarrow[\text{(לפי סעיף ב)}]{} \aleph_0 + \aleph_0 = C$$

והגענו לסתירה. לפיכך, L היא אינה בת מנייה.

■

2.4 סעיף ד

לפי סעיף ג, נוכל להיווכח בכך שL אינה בת מנייה. לפיכך, $|L| = C$.

■

2.5 סעיף ה

2.5.1 i

$$\aleph_0 = |\{\emptyset\} \cup \{\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = i\} \mid i \in \mathbb{N} \wedge i > 0\}|$$

■

2.5.2 ii

$$C = |\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = \aleph_0\}|$$

■

3 שאלה 3

דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned}
&A = \{1,2,3\},\ B = \{2,3\},\ A \oplus B = \{1\} \\
&|A| = 3,\ |B| = 2,\ |A \oplus B| = 1 \\
&|A| \oplus |B| = (|A| - |B|) + (|B| - |A|) = 1 - 1 = 0 \\
&|A| \oplus |B| \neq |A \oplus B|
\end{aligned}$$

■