ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20109

אלגברה לינארית 1

חוברת הקורס-קיץ 2017ג

כתבה: ד"ר מרים רוסט

יולי 2017 - סמסטר קיץ- תשע"ז

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם בברכה עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית 1".

כדי להקל עליכם את לימוד הקורס, שאינו קל, השקענו מאמץ ניכר בבניית מערכת מסייעת ללימוד העצמי. תיאור המערכת כלול בחוברת זו. אנו ממליצים שתקראו את החוברת עוד בטרם תיגשו ללימוד עצמו.

בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham.

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

לתשומת לבכם:

סמסטר הקיץ נמשך 9 שבועות בלבד ולכן יידרש מכם מאמץ ניכר לעמוד בעומס ובלוח הזמנים של הקורס. חשוב להקפיד על לימוד החומר והגשת המטלות בקצב שקבענו, כדי להבטיח סיום מוצלח של הקורס. בגלל משך הסמסטר הקצר, אין אפשרות לפגר בהגשת מטלות.

מרכזת ההוראה בקורס היא ד"ר מרים רוסט.

ניתן לפנות אליה באופן הבא:

- בטלפון 09-7781423, בימי ג', בין השעות 10:00-12:00.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - myriamr@openu.ac.il.
- פקס: 09-7780631.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיך.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (20109 /ג2017)

שבוע הלימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי הנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ״ח (לאו״פ)	ממ״ן (למנחה)
1	28.7.2017-19.7.2017	פרק1- פרק 5 : סעיפים 5.1 ו- 5.2 פרק 2			
2	4.8.2017-30.7.2017 (ג צום ט׳ באב)	פרקים 2, 3		מומלץ להתחיל לפתור ממ״ן 11 וממ״ח 01	
3	11.8.2017-6.8.2017	פרקים 3, 4			ממ״ן 11 13.8.2017
4	18.8.2017-13.8.2017	פרקים 4, 6, 7			
5	25.8.2017-20.8.2017	פרקים 7, 8			ממ״ן 12 27.8.2017
6	1.9.2017-27.8.2017	פרק 8		ממ״ח 01 30.8.2017	
7	8.9.2017-3.9.2017	פרק 9			ממ״ן 13 10.9.2017
8	15.9.2017-10.9.2017	פרקים 10, 11		ממ״ח 02 17.9.2017	ממ״ן 14 17.9.2017
9	19.9.2017-17.9.2017	פרקים, 11, 12		ממ״ח 03 23.9.2017	ממ״ן 15 21.9.2017

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב״לוח מפגשים ומנחים״.*

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס זה עליכם :

1. להגיש מטלות במשקל כולל של **16 נקודות לפחות**.
2. לקבל בבחינת הגמר ציון **60 לפחות**.
3. לקבל בציון הסופי של הקורס **60 נקודות לפחות**.

פירוט המטלות בקורס

בקורס אלגברה לינארית 1, 3 ממ״חים ו-5 ממ״נים.
בטבלה שלפניכם מופיעה רשימת הממ״נים והממ״חים, סימוליהם, היחידות בהן הם עוסקים ומשקליהם. אין מטלות העוסקות בפרק ההכנה.

	נושא המטלה	משקל המטלה
ממ״ח 01	פרקים 4-1	2 נקודות
ממ״ח 02	פרקים 8-6	2 נקודות
ממ״ח 03	פרקים 12-9	2 נקודות
ממ״ן 11	פרקים 2,1	4 נקודות
ממ״ן 12	פרקים 4,3	5 נקודות
ממ״ן 13	פרקים 8-6	5 נקודות
ממ״ן 14	פרקים 10,9	5 נקודות
ממ״ן 15	פרקים 12,11	5 נקודות

תאריכי הגשת המטלות מופיעים בלוח זמנים ופעילויות וכן על גבי המטלות עצמן. שימו לב כי תאריכים אלה הם תאריכים אחרונים למשלוח. מטלות שיישלחו לאחר המועד שנקבע בלוח הזמנים של הקורס, לא תילקחנה בחשבון בחישוב הציון הסופי. המטלות תיבדקנה על ידי המנחים כדי שהסטודנטים יוכלו לקבל משוב על עבודתם. במקרים מיוחדים של אי עמידה בלוח הזמנים, ניתן לפנות אל מרכז ההוראה.

חשוב לדעת!

- **פרק ההכנה בקורס** מיועד ללימוד עצמי. לא יהיה תרגול על החומר הזה במסגרת המפגש.
- **למפגש הראשון** יש לקרוא באופן מעמיק את **פרק 1.**
- **פתרון המטלות** הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

  כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:
  בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר.
  ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
  ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

  זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

- **מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.**

עליכם להשאיר לעצמך העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1, 2

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2017ג **מועד אחרון להגשה:** 13.8.2017

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

נתונה המערכת הלינארית הבאה מעל $\mathbf{Z}_7$:

$$\begin{cases}(3a^2-b)x-2y=5\\ by=2\end{cases}$$

מצאו את כל הזוגות (a,b) כך שיש יותר מפתרון אחד. לכל זוג, כמה פתרונות יש למערכת?

שאלה 2 (20 נקודות)

א. פתור את המערכת הבאה ב- 4 נעלמים :

$$\begin{cases}2y+2z+4w=0\\ x-z-3w=0\\ 2x+3y+z+w=0\\ -2x+y+3z-2w=0\end{cases}$$

1. מעל $\mathbf{R}$
2. מעל $\mathbf{Z}_5$

ב. פתור מעל $\mathbf{R}$ את המערכת הלא לינארית ב- 3 נעלמים :

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x^2-y^2+2z^2=2\\ 2x^2+y^2-z^2=3\end{cases}$$

רמז : השתמש במשתני עזר.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x - ky + (1-k)z = 2 \\ kx - 4y - 6z = k^2 + 2k - 9 \\ (k-2)x + (2k-4)y + (3k-8)z = k^2 + 2k - 12 \end{cases}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

עבור אילו ערכי b, a יש למערכת הנתונה פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון?
במקרה שיש אינסוף פתרונות, רשום את הפתרון הכללי למערכת.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ קבוצה בלתי תלויה לינארית של וקטורים ב - $\mathbf{R}^5$.

נגדיר $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^5$ באופן הבא:

$$\mathbf{v}_1 = 2\alpha\,\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_4$$
$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 + \alpha\,\mathbf{u}_4$$
$$\mathbf{v}_3 = \alpha\,\mathbf{u}_1 + \alpha\,\mathbf{u}_2 + \alpha\,\mathbf{u}_4$$

כאשר α מספר ממשי. נסמן $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

א. מצא את כל ערכי α שעבורם הקבוצה A תלויה ליניארית.

ב. עבור כל ערך של α שמצאת בסעיף א', בדוק האם ניתן לרשום את $\mathbf{v}_2$ כצירוף ליניארי של $\mathbf{v}_1$ ו- $\mathbf{v}_3$. אם כן- מצא את הצירוף, אם לא- נמק.

ג. האם ניתן לצרף את $\mathbf{v}_i$, אחד הווקטורים מהקבוצה A, לווקטורים שב- U כך שהקבוצה בת חמשת הווקטורים, $U \cup \{\mathbf{v}_i\}$, תהיה בסיס של $\mathbf{R}^5$?

שאלה 5 (25 נקודות)

יהיו $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_m, \underline{b}$ וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$.

א. הוכח כי אם $m \geq n$ ואם למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{b}$ יש פתרון יחיד, אז הקבוצה $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

ב. הוכח כי אם $m \leq n$ ואם לכל $\underline{c} \in \mathbf{R}^n$ יש פתרון למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{c}$, אז הקבוצה $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ היא בסיס ל- $\mathbf{R}^n$.

ג. הוכח כי אם למשוואה $x_1\underline{a}_1 + \ldots + x_m\underline{a}_m = \underline{b}$ יש פתרון ואם הקבוצה $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ היא בלתי תלויה לינארית, אז הפתרון הוא יחיד.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3, 4

מספר השאלות: 7 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2017ג **מועד אחרון להגשה:** 27.8.2017

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

תהיינה A,B מטריצות ב- $M_n(F)$ המקיימות $AB=BA$.

הוכח, על-ידי אינדוקציה על k שלכל $k\in\mathbf{N}$, $k\geq 1$, מתקיים ש- $(AB)^k = A^kB^k$.

שאלה 2 (10 נקודות)

נתונה המטריצה הבאה מעל $\mathbf{Z}_7$

$$A=\begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -k \end{pmatrix}.$$

מצא את כל הערכים של k עבורם A הפיכה ומתקיים $A=A^{-1}$.

שאלה 3 (20 נקודות)

אין קשר בין הסעיפים השונים.

א. הוכח שאם B,A מטריצות מסדר $n\times n$ ואם $A^2+AB+I=0$, אז $AB=BA$.

ב. תהיינה B,A מטריצות מסדר $n\times n$, כאשר n אי-זוגי.

הוכח שאם מתקיים $AB+BA=0$, אז לפחות אחת המטריצות B,A סינגולרית.

ג. תהי A מטריצה ריבועית מסדר n כך שלכל מטריצה ריבועית $B\neq 0$ מסדר n מתקיים $AB\neq 0$. הוכיחו ש- A הפיכה.

<u>רמז</u>: ניתן להעזר בטענה 3.6.8 וגם במשפט 3.10.6

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה A מטריצה מסדר $m\times n$ ו- B מטריצה מסדר $n\times m$ כאשר $n<m$.

הוכח כי AB אינה הפיכה.

<u>הדרכה</u>: משפט 3.10.6 סיף ז'

שאלה 5 (15 נקודות)

נתונות המטריצות הבאות, מעל $\mathbf{R}$:

$$A=\begin{pmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{pmatrix} \quad \text{ו-} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & b & 4 & 1 \\ 2a+6 & a-1 & 2a-2 & 2b+4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5-3b & 1-b & 2-3b & 8-3a \end{pmatrix}.$$

נתון כי $\det A=\frac{1}{3}$ חשב את $\det B$ וגם $\det(-2B^{-1})$.

שאלה 6 (15 נקודות)

חשב את הדטרמיננטה הבאות מסדר n, $n>1$, מעל $\mathbf{R}$:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & n & n & \cdots & \cdots & n \\ n & 1 & 1 & n & \cdots & \cdots & n \\ n & n & 1 & 1 & n & \cdots & n \\ \vdots & n & n & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 & n \\ n & n & \cdots & \cdots & n & 1 & 1 \\ n & n & \cdots & \cdots & n & n & 1 \end{vmatrix}$$

כלומר, $D=(d_{ij})_{1\le i,j\le n}$ לכל i, $1\le i\le n$, $a_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{if } j=i \text{ or } j=i+1 \\ n & \text{if } j\ne i \text{ and } j\ne i+1 \end{cases}$.

שאלה 7 (10 נקודות)

תהי $\mathbf{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים ותהי $A\in M_n(\mathbf{Q})$. אז $A\in M_n(\mathbf{R})$.

הוכח שאם המטריצה A הפיכה ב- $M_n(\mathbf{R})$ אז היא הפיכה גם ב- $M_n(\mathbf{Q})$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20109 **-אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1- 4

מספר השאלות: 19 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: **2017ג** **מועד אחרון להגשה:** 30.8.2017

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ב** – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות. **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

נתונה המערכת הלינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ -x + y + z = -3 \\ 3x - 2y + 5z = 1 \\ x + 2y - 2z = 4 \end{cases}$$

1. למערכת זו יש פתרון יחיד.
2. אם מוחקים את המשוואה הראשונה יש אינסוף פתרונות למערכת המתקבלת.

שאלה 2

נתונה המערכת הלינארית ב-4 נעלמים מעל $\mathbf{Z}_{11}$:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ -x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

1. למערכת זו 11 פתרונות.
2. למערכת זו אין פתרון.

שאלה 3

נתונה מערכת לינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:
$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ 2x+6y-11z=b \\ x-2y+7z=c \end{cases}$$

1. אם $5a-2b-c=0$, אז למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות.
2. ניתן למצוא a,b,c שעבורם למערכת אין פתרון.

שאלה 4

למערכת הלינארית ב-3 נעלמים מעל $\mathbf{R}$:
$$\begin{cases} 4ax+2a^2y-z=4 \\ 4ay-z=a \\ -4a^2y+(4-3a^2)z=4a-5 \end{cases}$$

1. לכל $a\neq 1,-\frac{4}{3}$ יש פתרון יחיד .
2. לא קיים a עבורו אין פתרון למערכת.

שאלה 5

תהי מערכת משוואות הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים.

1. אם $k>n$, אז למערכת יש פתרון יחיד.
2. אם $k\leq n$, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

שאלה 6

תהי מערכת לינארית (M) של k משוואות ב- n נעלמים. נניח כי ל- (M) קיים פתרון אחד לפחות.

1. אם $k<n$, אז למערכת יש אינסוף פתרונות.
2. אם $k=n$ אז לכל מערכת לינארית עם אותה מטריצת מקדמים מצומצמת קיים פתרון.

שאלה 7

תהי מערכת משוואות אי-הומוגנית של k משוואות ב- n נעלמים, אשר מטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא מטריצת מדרגות בלי שורות אפסים.

1. $k\leq n$.
2. אם יש פתרון יחיד, אז $k=n$.

שאלה 8

תהי $A=\{(1,0,1,0),(0,1,1,1),(2,3,5,3),(0,0,1,0),(1,1,3,1)\}$ מוכלת ב- $\mathbf{R}^4$.

1. הקבוצה A פורשת את $\mathbf{R}^4$.
2. $(1,1,1,1)$ הוא צרוף לינארי של הווקטורים $(1,1,3,1),(0,0,1,0),(2,3,5,3),(0,1,1,1)$.

שאלה 9

תהי $A=\{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k\}$ קבוצת וקטורים תלויה לינארית ב- $\mathbf{R}^n$, $k \geq 2$.

1. אם $\underline{a}_1$ צירוף לינארי של $\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k$ אז $A'=\{\underline{a}_2,\underline{a}_3,\ldots,\underline{a}_k\}$ בלתי תלויה לינארית.
2. אם A פורשת את $\mathbf{R}^n$ אז $k>n$.

בשאלות 10- 14 , המטריצות מעל שדה F .

שאלה 10

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם קיים מספר k טבעי כך ש- A^k רגולרית אז A רגולרית.
2. אם $A^2=0$ אז $A=0$.

שאלה 11

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם $A+A^2=I$ אז A הפיכה.
2. אם A סינגולרית אז A^3+A^2+A סינגולרית.

שאלה 12

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$.

1. אם A סינגולרית, אז יש בה שורת אפסים.
2. אם יש ב- A עמודת אפסים, אז A שקולת שורות למטריצה בעלת שורת אפסים אחת לפחות.

שאלה 13

יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$.

1. אם לכל $\underline{c}\in F^n$ יש פתרון למערכת $AB\underline{x}=\underline{c}$, אז לכל $\underline{c}\in F^n$ יש פתרון למערכת $B\underline{x}=\underline{c}$.
2. אם B,A מטריצות סימטריות אז גם AB סימטרית.

שאלה 14

1. אם קבוצת העמודות של מטריצת המקדמים של מערכת משוואות לינארית היא בלתי תלויה לינארית, אז למערכת פתרון יחיד.
2. אם למערכת משוואות לינאריות יש יותר מפתרון אחד, אז קבוצת העמודות של מטריצת המקדמים המצומצמת שלה תלויה לינארית.

שאלה 15

1. המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbf{Z}_7$ היא סינגולרית.

2. מעל $\mathbf{R}$, אם $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 2$ אז $\begin{vmatrix} f & k-4c & 2k+f \\ d & g-4a & 2g+d \\ e & h-4b & 2h+e \end{vmatrix} = -16$.

בשאלות 16- 19, המטריצות מעל שדה המספרים הממשיים $\mathbf{R}$.

שאלה 16

1. נניח כי C, B מטריצות ריבועיות מסדר 5 כך ש- $|B| = \frac{1}{2}$, $|C| = 4$. אז $\left|-2B^t (C^{-1})^2\right| = -1$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = -(n-2)!$.

שאלה 17

תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר 3 כך ש- $\det A = 3$ ו- $\det B = \frac{1}{2}$. אז:

1. $\det(2BA)^2 = 9$.
2. $\det(A + B^{-1}) = 5$.

שאלה 18

תהי A מטריצה מסדר $n \times n$.

1. אם $\det A = 1$ וכל איברי A ואיברי $\underline{b}$ הם מספרים שלמים אז האיברים c_i של הפתרון $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ הם מספרים שלמים.
2. אם $\det A = 2$ וכל איברי A הם מספרים שלמים ואיברי $\underline{b}$ הם מספרים זוגיים אז האיברים c_i של הפתרון $\underline{c} = (c_1, \dots, c_n)$ למערכת $A\underline{x} = \underline{b}$ הם מספרים זוגיים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6- 8

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: **2017ג** **מועד אחרון להגשה:** 10.9.2017

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
• שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
• שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

פתור ב- $\mathbf{C}$ את המשוואה $z^4 = (1+i)^6 - (1-i)^6$.

שאלה 2 (20 נקודות)

א. קבע אלו מהקבוצות הבאות הן מרחבים לינאריים מעל $\mathbf{R}$, ביחס לפעולות הרגילות.

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \right\}$$

$$L = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2x_1 - 3x_2 - 5\}$$

$$M = \{ p(x) \in \mathbf{R}_4[x] \mid p(-1) = p(1) = p(0) \}$$

$$S = \{ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(-x) = f(x) \ , x \in \mathbf{R} \text{ לכל} \}$$

ב. עבור כל אחד מהמרחבים שמצאת, הצג קבוצה פורשת סופית.

שאלה 3 (15 נקודות)

א. מצא את המימד של המרחב הנפרש על-ידי $(3,1,2,1)$, $(2,3,1,4)$, $(1,2,1,2)$ ב- $\mathbf{Z}_5^4$ מעל $\mathbf{Z}_5$.

ב. מצא את המימד של התת- מרחב של $\mathbf{C}^3$ הנפרש על-ידי הקבוצה

$A = \{(1+i, 3+i, 1-i) \ , (1-i, 1, -1) \ , (1+i, 4i, 0)\}$ כאשר:

1. מסתכלים על כתת-מרחב מעל $\mathbf{C}$

2. מסתכלים על כתת-מרחב מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהיו U ו- W הקבוצות הבאות ב- $\mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathrm{R}}$:

$$U = Sp\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\} \text{ ו- } W = Sp\left\{\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}.$$

א. מצא בסיס עבור U, W ו- $U+W$.

ב. מצא בסיס עבור $U\cap W$.

ג. מצא תת-מרחב T של $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ כך שמתקיים $M_{2\times 2}(\mathbf{R}) = W \oplus T$.

שאלה 5 (15 נקודות)

יהי V מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$.

נתונים $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ וקטורים ב- V כך ש- $u_1, u_2, u_3 \in U = Sp\{v_1, v_2, v_3\}$ וכך שהקבוצה $B = \{u_1 - u_2, u_1 + 3u_3, 4u_2 + 5u_3\}$ בלתי תלויה לינארית.

מצא את מימדו של התת-מרחב U.

שאלה 6 (15 נקודות)

תהי A מטריצה מעל $\mathbf{R}$ מסדר 4×4 בעלת דרגה 2.

נניח שהווקטורים $u = (2,1,2,0)$, $v = (1,-1,2,4)$, $w = (1,0,2,-1)$ הם פתרונות למערכת לינארית $A\underline{x} = \underline{b}$.

מצא את מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\underline{x} = \underline{0}$ ואת הפתרון הכללי של המערכת $A\underline{x} = \underline{b}$.

<u>הדרכה</u>: שאלה 3.7.1

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: **20109- אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 6-8

מספר השאלות: 20 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: **2017ג** **מועד אחרון להגשה:** 17.9.2017

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ב** – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות. **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

1. הקבוצה $\{a+bi \mid a,b \in \mathbf{Q}\}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל הרגילות.
2. קבוצת כל המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbf{R}$ היא שדה ביחס לפעולות החיבור והכפל של מטריצות.

שאלה 2

לכל מספר מרוכב z מתקיים:

1. המספר $z^3\bar{z}+\bar{z}^3 z$ הוא מספר ממשי.
2. $|1+iz|=|1-iz|$.

שאלה 3

1. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{16}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
2. $\left|\frac{(3+i)^4}{(1-2i)^5}\right|=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

שאלה 4

1. ההצגה הטריגונומטרית של $-1+i\sqrt{3}$ היא $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$.

2. $\frac{1+i}{1-\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})$.

שאלה 5

1. אם $w\in\mathbf{C}$ הוא פתרון של המשוואה $z^4+2z^3+2z+6=0$ אז גם $\bar{w}$ הוא פתרון של המשוואה.

2. אם w הוא פתרון של המשוואה $z^2+iz=0$ אז גם $\bar{w}$ הוא פתרון שלה.

שאלה 6

1. ההצגה הטריגונומטרית של $\sin\alpha-i\cos\alpha$ היא $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})+i\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})$.

2. ההצגה הטריגונומטרית של $-1+i$ היא $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

שאלה 7

1. כל הפתרונות של המשוואה $z^4=-4$ הם $1+i$, $1-i$, $-1+i$ ו- $-1-i$.

2. כל הפתרונות של המשוואה $z^3=i$ הם $-i$, $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$ ו- $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$.

שאלה 8

1. הקבוצה $\mathbf{R}^2$ הוא שדה עבור הפעולות הבאות:
   חיבור: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ כפל: $(a,b)(c,d)=(ac,bd)$.

2. הקבוצה $\mathbf{R}^2$ הוא מרחב לינארי מעל $\mathbf{R}$ ביחס לפעולות הבאות:
   לכל $(a,b),(c,d)\in\mathbf{R}^2$ ו- $k\in\mathbf{R}$
   החיבור מוגדר ע"י $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$ והכפל בסקלר ע"י $k*(a,b)=(ka,b)$.

שאלה 9

1. אם U ו- W הם מרחבים לינאריים מעל שדה F אז $V=\{(u,w)\mid u\in U,\ w\in W\}$ הוא מרחב לינארי ביחס לפעולות החיבור והכפל המוגדרים על-ידי:
   $(u_1,w_1)+(u_2,w_2)=(u_1+u_2,\ w_1+w_2)$ ו- $\lambda(u,w)=(\lambda u,\lambda w)$

2. $W=\{p(x)\in\mathbf{R}_5[x]\mid p(-1)=p(1)=2\}$ הוא תת-מרחב של $\mathbf{R}_5[x]$.

שאלה 10

1. $v=(a,b,c)\in Sp\{(1,-2,0),(0,2,-1)\}$ אם ורק אם $2a+b=0$ וגם $c=0$.
2. $Sp\{(1,-1,2,1),(3,-1,0,1),(0,-1,3,1)\}=Sp\{(1,0,-1,0),(1,-3,8,3)\}$.

שאלה 11

1. קבוצת המטריצות $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\right\}$ תלויה לינארית.
2. הקבוצה $\{x^3+x^2,x^3+1,x^2-x+1,x^3-2x^2+2x-1,2x^2-3x+4\}$ פורשת את $\mathbf{R}_4[x]$.

שאלה 12

יהיו $v_1,v_2,...,v_n,u$ וקטורים במרחב לינארי V, $n\geq 2$.

1. אם הקבוצה $\{v_1,,...,v_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית ו- $u\notin Sp\{v_1,,...,v_n\}$, אז גם הקבוצה $\{v_1,v_2,...,v_n,u\}$ בלתי תלויה לינארית.
2. אם $u\in Sp\{v_1,v_2,...,v_n\}$ אך $u\notin Sp\{v_1,v_2,...,v_{n-1}\}$, אז קיים סקלר λ כך ש- $u=\lambda v_n$.

שאלה 13

תהיינה A,B תת-קבוצות של מרחב לינארי V.

1. אם $A\subset B$ (חלקית ממש) ו- $Sp(A)=Sp(B)$ אז B תלויה לינארית.
2. אם $A+A=A$ אז A תת-מרחב של V. (<u>תזכורת</u>: $A+A=\{a_1+a_2\mid a_1,a_2\in A\}$)

שאלה 14

1. אם U תת-מרחב של מרחב לינארי נוצר סופית V אז קיים תת-מרחב יחיד W של V כך ש- $U\oplus W=V$.
2. אם $A=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V ו- U תת-מרחב של V ממימד k, $0<k<n$, אז קיימים k וקטורים ב- A המהווים בסיס ל- U.

שאלה 15

1. מתקיים $\mathbf{R}^3=\{(\alpha,\alpha-2\beta,\beta)\mid\alpha,\beta\in\mathbf{R}\}\oplus\{(3\delta,-\delta,2\delta)\mid\delta\in\mathbf{R}\}$.
2. אם $W_1=\left\{\begin{pmatrix}a+b&b\\a&0\end{pmatrix}\middle|a,b\in\mathbf{R}\right\}$ ו- $W_2=\left\{\begin{pmatrix}c&0\\d&d-c\end{pmatrix}\middle|c,d\in\mathbf{R}\right\}$ אז $M_{2\times2}^{\mathbf{R}}=W_1\oplus W_2$.

שאלה 16

יהיו U ,W תת-מרחבים של $\mathbf{R}^8$.

1. אם $\dim U = 6$ ו- $\dim W = 4$ אז $\dim(U \cap W) \geq 2$.
2. אם $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ ו- U לא מוכל ב- W אז $\dim(U \cap W) = 2$.

שאלה 17

1. וקטור הקואורדינטות של $(1,0,3,2)$ בבסיס הסדור $((1,0,1,1),\ (1,1,0,1),\ (1,1,1,0),\ (0,1,1,1))$ הוא $(2,-1,0,1)^t$.
2. מטריצת המעבר מהבסיס $(x^2-1, x+1, 3)$ לבסיס $(x^2, x, 1)$ של $\mathbf{R}_3[x]$ היא $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

שאלה 18

1. יהיו $B = ((1,2),(3,-1))$ ו- $C = ((0,1),(1,0))$ בסיסים של $\mathbf{R}^2$.
   אם $[u]_B = (3,4)^t$ אז $[u]_C = (15,2)^t$.
2. מטריצת המעבר מהבסיס $(v_1 + v_2,\ v_2 + v_3,\ v_3 + v_1)$ לבסיס $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ של מרחב לינארי ממימד 3 היא $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

שאלה 19

1. אם A ו- B מטריצות מסדר $n \times n$ אז מרחב העמודות של AB מוכל במרחב העמודות של A.
2. מרחב העמודות של מטריצה ריבועית שווה למרחב השורות שלה.

שאלה 20

1. אם A, B מטריצות ריבועיות מסדר n אז $\rho(A+B) = \rho(A) + \rho(B)$.
2. אם A מטריצה מסדר 5×7 אז מימדו של מרחב הפתרונות של המערכת $A\underline{x} = \underline{0}$ גדול או שווה ל- 2.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: **20109 - אלגברה לינארית 1**

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9, 10

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: **2017ג** **מועד אחרון להגשה:** 17.9.2017

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (15 נקודות)

בדוק האם ההעתקות הבאות לינאריות:

א. $T:\mathbf{R}_n[x]\to\mathbf{R}_n[x]$ המוגדרת על-ידי $T(p(x))=(x+1)p'(x)$, כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת של $p(x)$.

ב. $T:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ המוגדרת על- ידי $T(x,y)=(2x-y,3|x|,y)$.

ג. $T:M_{n\times n}^{\mathbf{R}}\to M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת על-ידי $T(X)=X^2-X$.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה ההעתקה הלינארית $T:M_{2\times 2}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}_3[x]$ המוגדרת על-ידי:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(a-d)x^2+(b+c)x+5a-5d \quad \text{לכל} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$$

א. מצאו בסיס ל- $\operatorname{Im}T$ ובסיס ל- $\ker T$.

ב. האם מתקיים $M_{2\times 2}(\mathbf{R})=\ker T+\operatorname{Im}T$? האם מתקיים $M_{2\times 2}(\mathbf{R})=\ker T\oplus\operatorname{Im}T$?

ג. 1. נניח ש- $A\in\ker T$. האם מתקיים $A^2\in\ker T$?

2. נניח ש- $p(x)\in\operatorname{Im}T$. האם מתקיים $q(x)=p(x)+3x^2+2x+5\in\operatorname{Im}T$?

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי V מרחב לינארי ממימד n ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית המקיימת $T^2=0$.

א. הוכח כי $\operatorname{Im}T\subseteq\ker T$ וכי $\dim(\ker T)\geq n/2$.

ב. נניח כי $n=3$ ו- $T\neq 0$. הוכח כי קיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(**רמז:** השלם בסיס של $\ker T$ לבסיס של V)

שאלה 4 (25 נקודות)

א. מצא העתקה ליניארית $T:\mathbf{R}_4[x]\to\mathbf{R}_4[x]$ כך ש- $\operatorname{Im}T=\ker T=Sp\{1-x,x-x^3\}$.

רשום נוסחה מפורשת עבור $T(ax^3+bx^2+cx+d)$, a,b,c,d מספרים ממשיים.

ב. תהי $T:M_{2\times3}(\mathbf{R})\to M_{3\times3}(\mathbf{R})$ העתקה לינארית.

ענה על כל אחת השאלות הבאות ונמק היטב:

1. האם יתכן ש- T על?
2. האם יתכן ש- T חד- חד- ערכית?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית לא הפיכה המיוצגת בבסיס הסדור

$B=((1,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0))$ על ידי המטריצה $[T]_B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&a&2a\\a&1&2a\end{pmatrix}$.

א. מצא את ערך הקבוע a וחשב את $T(x_1,x_2,x_3)$ לכל $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbf{R}^3$.

ב. מצא בסיס ל- $\operatorname{Im}T$ ובסיס ל- $\ker T$.

ג. מצא את וקטור הקואורדינטות של $T(2,-2,1)$ לפי הבסיס B.

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20109 - אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 11, 12

מספר השאלות: 6 **משקל המטלה:** 5 נקודות

סמסטר: 2017ג **מועד אחרון להגשה:** 21.9.2017

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס.
  קראו בעיון באתר הקורס הנחיות הגשה במערכת המקוונת.

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה".

שאלה 1 (20 נקודות)

א. הוכח כי המטריצה $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$ לכסינה ומצא מטריצה אלכסונית B הדומה ל- A

ומטריצה P המלכסנת אותה.

ב. תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת על ידי

$T(x,y,z)=(3x-4z,x+y-2z,2x-3z)$ לכל $(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$.

היעזר בסעיף א' כדי לחשב את $T^{2020}(x,y,z)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית.

נתון כי $T(1,1,1)=(2,2,2)$, $T(1,1,0)=(-5,-5,0)$ ו- $T(1,-1,0)=(a-4,a+6,0)$.

מצא את כל הערכים של a שעבורם T לכסינה ואת כל הערכים של a שעבורם T לא לכסינה.

נמק היטב את כל טענותיך.

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $T(1,2,3)=(-2,-4,-6)$ וגם

$\dim\mathrm{Im}T<\dim\ker T$.

הוכח שהטרנספורמציה הלינארית $T-2I$ איזומורפיזם.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי A מטריצה מסדר 5×5 כך ש- $trA = 0$ ו- $\rho(A) = 1$.

מצא את כל הערכים העצמיים שלה. האם A לכסינה?

<u>רמז</u> : שאלה 11.4.6

שאלה 5 (15 נקודות)

יהי $W = Sp\{(1,-1,-1,1)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{R}^4$.

א. מצא בסיס אורתונורמלי למשלים $W^{\perp}$ של W.

ב. מצא את ההיטל האורתוגונלי של $v = (1,0,1,1)$ על W.

שאלה 6 (10 נקודות)

יהיו u, v וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$, שונים מוקטור האפס וגם שונים זה מזה.

הוכיחו שאם $\{u,v\}^{\perp} = \{u\}^{\perp}$ אז הקבוצה $\{u,v\}$ תלויה לינארית.

מטלת מחשב (ממ"ח) 03

הקורס: 20109- אלגברה לינארית 1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 9- 12

מספר השאלות: 17 **משקל המטלה:** 2 נקודות

סמסטר: 2017ג **מועד אחרון להגשה:** 23.9.2017

מומלץ לשלוח את התשובות לממ"ח באמצעות מערכת **שאילתא** בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בכל אחת מן השאלות הבאות סמן:

א – אם רק טענה 1 נכונה. **ב** – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות. **ד** – אם שתי הטענות לא נכונות.

שאלה 1

1. $T:\mathbf{R}_3[x]\to\mathbf{R}_4[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x))=xf(x)+2$ היא טרנספורמציה לינארית.
2. נסתכל על $\mathbf{C}$ כמרחב לינארי מעל עצמו.
אז $T:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ המוגדרת על-ידי $T(z)=\bar{z}$ היא טרנספורמציה לינארית.

שאלה 2

1. קיימת טרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ כך ש- $T(1,2,3)=(0,1,2)$, $T(2,3,1)=(1,1,1)$
ו- $T(1,0,1)=(1,0,2)$.
2. קיימת טרנספורמציה לינארית $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ כך ש- $T(1,-1,1)=(1,0)$, $T(-1,1,1)=(0,1)$
ו- $T(1,-1,-5)=(2,1)$.

שאלה 3

תהי $A=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ קבוצת וקטורים במרחב לינארי V, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית.

1. אם הקבוצה $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_n\}$ פורשת את V, אז T היא חד-חד-ערכית.
2. אם $\{Tv_1,Tv_2,...,Tv_n\}$ בלתי תלויה לינארית, אז A בלתי תלויה לינארית.

שאלה 4

יהי V מרחב לינארי ויהיו $S,T \in \mathrm{Hom}(V,V)$ טרנספורמציות לינאריות.

1. אם $ST = 0$ אז $TS = 0$

2. אם $\ker S = \ker T$ ו- $\mathrm{Im}\, S = \mathrm{Im}\, T$, אז $S = T$.

שאלה 5

יהיו $S,T \in \mathrm{Hom}(V,V)$.

1. אם V ממימד סופי ו- $\dim \ker S = 0$ אז $\dim \mathrm{Im}\, TS = \dim \mathrm{Im}\, T$.

2. $\ker TS \subseteq \ker S$.

שאלה 6

1. קיימת מטריצה A מסדר 2×2 כך שהטרנספורמציה הלינארית $T : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ המוגדרת ע"י $T(X) = AX - XA$ לכל $X \in M_2(\mathbf{R})$ היא איזומורפיזם.

2. תהי $T : V \to V$ העתקה לינארית שמטריצת הייצוג שלה ביחס לבסיס B של V היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. אז קיים וקטור $v \in V$, $v \neq \underline{0}$ כך ש- $T(v) = 2v$.

שאלה 7

תהי $T : \mathbf{R_4}[x] \to \mathbf{R_4}[x]$ המוגדרת על-ידי $T(f(x)) = f(x+1)$.

1. המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס $B = (1, x, x^2, x^3)$ היא $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. T. היא איזומורפיזם.

בשאלות 8-9, נתייחס לטרנספורמציה הלינארית $T : \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}} \to \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ המוגדרת על-ידי:

$T(X) = X + X^t$ **,** לכל $X \in \mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ **.**

שאלה 8

1. $\ker T = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

שאלה 9

יהיו $B=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ ו- $C=\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

בסיסים ל- $\mathbf{M}_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$.

1. $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

2. $\left[T\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right]_C=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

שאלה 10

יהיו A ו- B מטריצות ריבועיות מסדר $n\times n$.

1. אם A ו- B סינגולריות אז A ו- B דומות.
2. אם A רגולרית אז AB דומה ל- BA.

שאלה 11

יהי V מרחב לינארי ממימד n מעל $\mathbf{R}$ ויהיו $S,T:V\to V$ טרנספורמציות לינאריות.

1. אם v הוא וקטור עצמי של S ושל T אז v הוא גם וקטור עצמי של $S+T$.
2. אם λ_1 הוא ערך עצמי של S ו- λ_2 הוא ערך עצמי של T
   אז $\lambda_1+\lambda_2$ הוא ערך עצמי של $S+T$.

שאלה 12

יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n\times n$.

1. אם A ו- B לכסינות ויש להן אותו פולינום אופייני אז A ו- B דומות.
2. אם A ו- B שקולות שורות ו- A לכסינה אז B לכסינה.

שאלה 13

1. המטריצות $\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}2&0\\0&-2\end{bmatrix}$ דומות.
2. המטריצות $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ ו- $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ דומות.

שאלה 14

תהי $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

1. A לכסינה מעל $\mathbf{C}$.
2. A לכסינה מעל $\mathbf{R}$.

שאלה 15

1. אם K היא קבוצה לא ריקה של וקטורים ב- $\mathbf{R}^n$, אז $(K^{\perp})^{\perp}=K$.
2. תהי $A=\{v_1,v_2\}$ קבוצת וקטורים ב- $\mathbf{R}^4$.

   אם $\left(\mathrm{Sp}(A)\right)^{\perp}=\mathrm{Sp}\{(1,2,1,1),(2,2,2,2),(2,1,2,2)\}$, אז A תלויה לינארית.

שאלה 16

1. יהיו $u,v\in\mathbf{R}^n$.

   $\|u\|=\|v\|$ אם ורק אם $u+v$ ו- $u-v$ אורתוגונליים.
2. לכל $u,v\in\mathbf{R}^n$ ולכל $c\in\mathbf{R}$ מתקיים $\|cu+v\|^2=c^2\|u\|^2+2c(u\bullet v)+\|v\|^2$.

שאלה 17

1. $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ הוא וקטור יחידה האורתוגונלי ל- $\mathrm{Sp}(\{(1,-1,-1),(2,7,4)\})$.
2. אם $U=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x+2y+3z=0\}$ אז $U^{\perp}=\mathrm{Sp}(\{(2,4,6)\})$.