# ממן 13

יונתן אוחיון

2 בספטמבר 2017

## 1 שאלה 1

### 1.1 הקבוצות

$$A = [-1, 1]$$
$$B = [0, 2]$$
$$A - B = [-1, 0)$$
$$A \oplus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 2] \ \wedge \ x \notin (0, 1)\}$$
$$A \cup B = [-1, 2]$$

### 1.2 עוצמת הקבוצות

לפי משפט 4.5, ניתן להסיק כי העוצמה של קטעים פתוחים וסגורים הינה $C$. לפיכך, כל הקבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ הינם שוות־עוצמה ועוצמתן הינה $C$.

### 1.3 שונות הקבוצות

א. נראה ש$A$ שונה משאר הקבוצות:

$$-1 \in A \wedge -1 \notin B \to A \neq B$$

$$0 \in A \wedge 0 \notin A - B \to A \neq A - B$$

$$0.5 \in A \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to A \neq A \oplus B$$

$$2 \notin A \wedge 2 \in A \cup B \to A \neq A \cup B$$

ב. נראה ש$B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq B$ (לפי סעיף א)

$$0 \in B \wedge 0 \notin A - B \to B \neq A - B$$

$$0.5 \in B \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to B \neq A \oplus B$$

$$-1 \notin B \wedge -1 \in A \cup B \to B \neq A \cup B$$

ג. נראה ש$A-B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A-B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A-B$ (לפי סעיף ב)
$2 \notin A-B \wedge 2 \in A \oplus B \to A-B \neq A \oplus B$
$2 \notin A-B \wedge 2 \in A \cup B \to A-B \neq A \cup B$

ד. נראה ש$A \oplus B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \oplus B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ב)
$A-B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ג)
$0.5 \notin A \oplus B \wedge 0.5 \in A \cup B \to A \oplus B \neq A \cup B$

ה. נראה ש$A \cup B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \cup B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ב)
$A-B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ג)
$A-B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ד)

לפיכך, הצלחנו למצוא קבוצות $A, B, A-B, A \oplus B, A \cup B$ כך שעוצמותיהן שוות אך הן שונות אחת מהשנייה.

$\blacksquare$

# 2 שאלה 2

## 2.1 סעיף א

יהי $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$.

תהי $T_n$ קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ באורך $n$ (כלומר, $T_n = \{X \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge |X| = n\}$). תהי $F_n$ קבוצת הסדרות באורך $n$ מעל $\mathbb{N}$ (כלומר, $F_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$). לפיכך, קיימת פונקציה $f: T_n \to F_n$ המתאימה לכל קבוצה ב$T_n$ את סדרת המספרים הנמצאים בה בסדר עולה ב$F_n$.

פונקציה זו הינה חח"ע, שכן לכל קבוצה $P$ ב$T_n$ נוכל להתאים סדרה של איברה בסדר עולה, ולכן $|T_n| \leq |F_n|$ (פונקציה זו אינה על, שכן לכל קבוצה תותאם רק סדרה אחת עם איבריה אך קיימות יותר מסדרה אחת שכזו ב$F_n$). הקבוצה $T_n$ הינה אינסופית, מכיוון שלכל $P \in T_n$ קיימת $M \in T_n$ כך ש $|P| = |M| - 1$, ולכן עוצמתה היא לפחות $\aleph_0$ והיא בת מנייה.

$\blacksquare$