חשבון אינפיניטסימלי 1 – סיכום*

יונתן אוחיון

10 בפברואר 2018

המספרים הממשיים

אקסיומות השדה

השלשה $(\mathbb{R},\cdot,+)$ הינה **שדה** עם הפעולות $(\cdot,+)$ מעל $\mathbb{R}$, כלומר מתקיימות התכונות הבאות:

פעולת החיבור $(+)$

- קומוטטיביות (חילופיות):
$\forall x,y\in\mathbb{R}, x+y=y+x$
- אסוציאטיביות (קיבוץ):
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x+(y+z)=(x+y)+z$
- קיום איבר ניטרלי (1):
$\forall x\in\mathbb{R}, x+0=0+x=x$
- קיום איבר נגדי:
$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}, x+y=0$

פעולת הכפל $(\cdot)$

- קומוטטיביות (חילופיות):
$\forall x,y\in\mathbb{R}, x\cdot y=y\cdot x$
- אסוציאטיביות (קיבוץ):
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- קיום איבר ניטרלי (1):
$\forall x\in\mathbb{R}, x\cdot 1=1\cdot x=x$
- קיום איבר הופכי:
$\forall 0\neq x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}, x\cdot y=1$

בנוסף, שתי הפעולות ביחד מקיימות את תכונת הדיסטריבוטיביות (פילוג), המוגדרת כך:

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

*נכתב לפי ההרצאות של אורי ברזנר באליאנס בסמסטר 2018א + תוספות מהספרים החדשים

המספרים הממשיים – המשך

אקסיומות ותכונות

אקסיומה 1 (אקסיומת השלמות) יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ ו-$b \in B$ מתקיים $a \leq b$. אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq c \leq b$ לכל $a \in A, b \in B$.

תכונה 1 (תכונת ארכימדס) לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$x < n$ $\Longleftarrow$ לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < x$.

תכונה 2 (צפיפות הרציונליים בממשיים) לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq y$) קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < q < y$.

הערך השלם, הערך השברי ותכונותיהם

- $\lfloor x \rfloor$ – הערך השלם ה"תחתון"
- $\lceil x \rceil$ – הערך השלם ה"עליון"
- $\langle x \rangle$ – החלק השברי, מוגדר כך: $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

אי שוויונות שימושיים

- אי שוויון ברנולי: $\forall -1 \leq x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$
- אי שוויון המשולש: $\forall a, b \in \mathbb{R},\ |a+b| \leq |a| + |b|$

סדרות

הגדרה: סדרה היא קבוצת מספרים (ממשיים), המסודרת לפי $\mathbb{N}$.

סימון:
$a_1, a_2, a_3, \ldots \equiv (a_n)_{n=1}^{\infty} \equiv (a_n)$ במקרים בהם ידוע ההקשר,

דוגמאות:

- $(17, 17, 17, \ldots)$ $a_n = 17$, סדרה קבועה
- $(1, 2, 3, \ldots)$ $a_n = n$
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ $a_n = \frac{1}{n}$, הסדרה ההרמונית, שואפת לאפס

גבול של סדרה

הגדרה: תהי (a_n) סדרה. אזי L ייקרא גבול הסדרה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
בכתיב כמתים, ההגדרה נראית כך:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

שלילת ההגדרה נראית כך:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N, |a_n - L| \geq \varepsilon$$

שלילה זו למעשה מראה שL נתון אינו גבול של הסדרה. אם ברצוננו להראות שהסדרה מתבדרת (כלומר אין לה גבול), נצטרך להראות שהביטוי מתקיים <u>לכל</u> $L \in \mathbb{R}$.

סימון:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$$

משפט 1 (משפט הסנדוויץ') יהיו $(a_n), (b_n), (c_n)$ שלוש סדרות כך ש$a_n \leq b_n \leq c_n$ כמעט לכל n וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$. אזי גם b_n מתכנסת ו$\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

סדרות חסומות, סדרות אפסות

הגדרה: סדרה (a_n) תיקרא סדרה חסומה אם קיים $M > 0$ כך ש$|a_n| < M$.
הגדרה: סדרה (a_n) תיקרא סדרה אפסה אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

משפט 2 כל סדרה מתכנסת היא חסומה, כלומר אם סדרה אינה חסומה היא אינה מתכנסת. הערה: לא כל סדרה חסומה מתכנסת.

משפט 3 תהי (a_n) סדרה חסומה, (b_n) סדרה אפסה. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

אריתמטיקה של גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך שמתקיים $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L, \ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M$. אזי מתקיימים:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M \tag{2}$$

גבול של סדרה – המשך

התכנסות במובן הרחב

הגדרה: סדרה תיקרא מתכנסת ל∞ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n > M$. סדרה תיקרא מתכנסת ל$-\infty$ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $a_n < M$. סדרה נקראת מתכנסת במובן הרחב אם היא מתכנסת ל$\pm\infty$.

משפט 4 (סדרות הממוצעים) תהי (a_n) סדרה מתכנסת במובן הצר או במובן הרחב, ותהי (A_n) סדרת הממוצעים החשבוניים של איברי a_n, (G_n) סדרת הממוצעים ההנדסיים של a_n ו(H_n) סדרת הממוצעים ההרמוניים של a_n. אזי סדרות הממוצעים מתכנסות לאותו הגבול של a_n.

מבחן המנה לגבול של סדרה

תהי (a_n) סדרה.

- אם קיים $0 \le r < 1$ כך ש$r > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ כמעט לכל n, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- אם $a_n > 0$ לכל n, ומתקיים $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ (גם במובן הרחב), אז $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

אריתמטיקה של גבולות אינסופיים

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות, $a_n \to \infty$. אזי:

- אם $b_n \to \infty$ או $b_n \to B \in \mathbb{R}$ אז $(a_n + b_n) \to \infty$.
- אם $b_n \to B > 0$ או $b_n \to \infty$ אז $(a_n \cdot b_n) \to \infty$.
- אם $b_n = \frac{1}{a_n}$ אז $b_n \to 0$.
- אם $b_n \to 0$ וגם $b_n > 0$ לכל n אז $\frac{1}{b_n} \to \infty$.

משפט 5 (גבול של הזזה) תהי (a_n) סדרה המתכנסת במובן הצר/רחב ויהי $k \in \mathbb{N}$. אזי סדרת ההזזה $b_n = a_{n+k}$ מתכנסת לאותו הגבול.

מינימום, מקסימום, אינפימום וסופרימום

מינימום ומקסימום

הגדרה: תהי A קבוצה סופית. המינימום של A הוא איבר בA (נסמן בx) כך שלכל $a \in A$ מתקיים $x \leq a$. המקסימום של A הוא איבר בA כך שלכל $a \in A$ מתקיים $x \geq a$. המינימום יסומן ב$\min A$ והמקסימום יסומן ב$\max A$.

חסמים עליונים ותחתונים

הגדרה: מספר $M \in \mathbb{R}$ ייקרא חסם מלעיל/מלמעלה של קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ אם $\forall a \in A, a \leq M$. בדומה M ייקרא חסם מלרע/מלמטה אם $\forall a \in A, a \geq M$.

נסמן בU_A את קבוצת כל החסמים מלמעלה של קבוצה נתונה A ובL_A את קבוצת החסמים מלמטה שלה, כלומר מתקיים

$$U_A = \{M \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \leq M\},\ L_A = \{m \in \mathbb{R} : \forall a \in A, a \geq m\}$$

מאקסיומת השלמות נובע כי קיים $M_0 \in U_A$ כך ש$\forall a \in A \forall M \in U_A, a \leq M_0 \leq M$. מכך נובע ש$M_0$ גם חסם מלעיל של A אך קטן מכל $M \in U_A$ ולכן מתקיים $M_0 = \min U_A$. M_0 הנ"ל נקרא הסופרימום (החסם העליון) של A ומסומן $M_0 = \sup A$.

באופן שקול, קיים $m_0 \in L_A$ כך ש$m_0 = \min L_A$ והוא נקרא האינפימום (החסם התחתון) של A ומסומן $m_0 = \inf A$. במקרה שבו לקבוצה קיים מקסימום מתקיים $\sup A = \max A$ ובאופן דומה אם יש לה מינימום, $\inf A = \min A$.

משפט 6 (הגדרה שקולה להגדרת החסם העליון) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה וs חסם מלעיל שלה. אזי התנאים הבאים שקולים:

- $s = \sup A$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, s - \varepsilon < a$

משפט 7 (הגדרה שקולה להגדרת החסם התחתון) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה וs חסם מלרע שלה. אזי התנאים הבאים שקולים:

- $s = \inf A$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, a < s + \varepsilon$

משפט 8 (אפיון החסמים בעזרת סדרות) תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל/מלרע ויהי m חסם מלעיל/מלרע של A. אזי m הוא החסם העליון/התחתון של A אמ"מ קיימת סדרה של איברי A כך ש$\lim_{n\to\infty} a_n = m$.[1]

תכונה 3 אם A, B קבוצות חסומות מלעיל אז $\sup A + B = \sup A + \sup B$. אם $A \subset B$ אז $\sup A \leq \sup B$. מתקיים $\inf(-A) = -\sup A$.

[1] אפיון החסם התחתון בעזרת סדרות וההגדרה השקולה נמצאות בספר בתור שאלות ולא בתור משפטים, כלומר במבחן עלינו לכתוב "לפי טענה שהוכחה בספר" על מנת להשתמש בהן.

סדרות מונוטוניות