מתמטיקה בדידה – סיכום*

שירה ברמן (נערך ע"י יונתן אוחיון)

21 בנובמבר 2017

לוגיקה

הגדרות

- **הצרנה**: תרגום משפה טבעית לשפה פורמלית.
- **טאוטולוגיה**: פסוק המקבל ארך אמת ללא תלות בערך האמת של הפסוקים האטומים שלו.
- **סתירה**: פסוק המקבל ערך שקרי ללא תלות בערכי האמת של הפסוקים האטומים שלו.
- **שקילות (טאוטולוגית)**: שני פסוקים בעלי אותה טבלת אמת ייקראו שקולים או שקולים טאוטולוגית.

טבלה 1 – הקשרים והכמתים הלוגיים וסימונם

שם בעברית	הסימן
שלילה	$\neg$
וגם	$\wedge$
או	$\vee$
גרירה	$\Rightarrow, \rightarrow$
אממ	$\Leftrightarrow, \leftrightarrow$
לכל	$\forall$
קיים	$\exists$
שקילות לוגית	$\equiv$

טבלה 2 – טבלת האמת עבור הקשרים

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

*נכתב לצורך הקורס באוניברסיטת תל אביב ונערך לתכני הקורס באוניברסיטה הפתוחה.

לוגיקה – המשך

שקילויות לוגיות

חוק החילוף (קומוטטיביות)

- $a \vee b \equiv b \vee a$
- $a \wedge b \equiv b \wedge a$
- $a \Leftrightarrow b \equiv b \Leftrightarrow a$

חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)

- $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$
- $a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$

חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות)

- $a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
- $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

חוקי דה־מורגן

- $\neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b$
- $\neg(a \vee b) \equiv \neg a \wedge \neg b$

גרירה

- $(a \vee b) \Rightarrow c \equiv (a \Rightarrow c) \wedge (b \Rightarrow c)$
- $a \Rightarrow (b \wedge c) \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow c)$

כללים נוספים

- $\neg(\neg a) \equiv a$
- $a \Rightarrow b \equiv \neg b \Rightarrow \neg a$
- $a \Leftrightarrow b \equiv b \Leftrightarrow a$
- $a \Rightarrow b \equiv (\neg a) \vee b$
- $a \vee (a \wedge b) \equiv a \equiv a \wedge (a \vee b)$

נביעה לוגית: טענה b נובעת מטענות $a_1, a_2, \ldots, a_k$ אם b נכונה בכל פירוש שבו $a_1, \ldots, a_k$ נכונות.
קבוצה שלמה: קבוצת קשרים נקראת שלמה אם ניתן לבטא בעזרתה כל פסוק.

לוגיקה – המשך

כמתים

כשמוכיחים נכונות של פסוק עם $\exists$ (קיים) מתחילים ב – נבחר $x\ldots$
כשמוכיחים נכונות של פסוק עם $\forall$ (לכל) מתחילים ב – יהי $x\ldots$

שלילת פסוק

- $\neg(\forall a, P) \equiv \exists a, \neg P$
- $\neg(\exists a, P) \equiv \forall a, \neg P$

שקילויות

- $\forall a, (P \wedge Q) \equiv (\forall a, P) \wedge (\forall a, Q)$
- $\exists a, (P \vee Q) \equiv (\exists a, P) \vee (\exists a, Q)$

החלפת סדר

- $\forall a \forall b, P \equiv \forall b \forall a, P \equiv \forall (a,b), P$
- $\exists a \exists b, P \equiv \exists b \exists a, P \equiv \exists (a,b), P$

תורת הקבוצות

הגדרות

- **קבוצה**: אוסף של עצמים (המהווה עצם בעצמה). אין חשיבות לסדר האיסרים בקבוצה ואין חשיבות למספר המופעים של איבר בייצוג הקבוצה.
- **שייכות לקבוצה**: תהי A קבוצה וx איבר בה. אזי x ייקרא שייך לA ויסומן כך: $x \in A$.
- **הכלה**: קבוצה A תיקרא מוכלת בקבוצה B אם כל איבר של A שייך גם לB. פורמלית: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$

  הכלה הינה טרנזיטיבית, כלומר $\forall A, B, C((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C)$.
- **הכלה ממש**: קבוצה A תיקרא מוכלת ממש בקבוצה B אם היא מוכלת בB אך אינה שווה לה. פורמלית:
  $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$.
- **שוויון קבוצות**: קבוצה A תיקרא שווה לB (או B שווה לA) אמ"מ מתקיימת הכלה דו כיוונית ביניהן, כלומר $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
- **הקבוצה הריקה**: הקבוצה הריקה הנה קבוצה שאין בה איברים והיא מסומנת ב$\emptyset$. הגדרה פורמלית: $\forall x, x \notin \emptyset$. יש לציין שהקבוצה הריקה מוכלת בתוך כל קבוצה A (כלומר $\forall A, \emptyset \subseteq A$).
- **קבוצת החזקה**: תהי A קבוצה. קבוצת החזקה של A (המסומנת כך: $\mathcal{P}(A)$) היא קבוצת תת־הקבוצות של A: $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. עוצמת קבוצה זו הינה $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

פעולות יסודיות על קבוצות

- **איחוד קבוצות** – $A \cup B$: $\forall x, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.
- **חיתוך קבוצות** – $A \cap B$: $\forall x, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
- **הפרש קבוצות** – $A - B, A \setminus B$: $\forall x, x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.
- **הפרש סימטרי של קבוצות** – $A \oplus B$: $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

תכונות הפעולות

- **קומוטטיביות**: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- **אסוציאטיביות**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- **דיסטריבוטיביות 1**: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- **דיסטריבוטיביות 2**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

תורת הקבוצות – המשך

המשלים

תהי A קבוצה המוכלת בקבוצת עולם U. אזי נגדיר את המשלים של A כך: $\overline{A} = A' = U - A$

חיתוך ואיחוד קבוצות מוכללים

איחוד:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

חיתוך:

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

רלציות (יחסים) – הקדמה

זוגות סדורים

אוסף של שני איברים אשר אחד מהם נקבע כאיבר הראשון והשני כאיבר השני: (α, β). במקרה זה, α הוא האיבר הראשון וβ הוא השני. שני זוגות סדורים $(\alpha,\beta),(\gamma,\delta)$ שווים זה לזה אמ"מ $\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$. ניתן להכליל מושג זה למושג n־יה, שהיא אוסף של איברים המסודרים לפי $\mathbb{N}$:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

כאשר λ_1 האיבר הראשון וλ_n האחרון. שוויון הזוגות הסדורים פועל גם פה: בהינתן שתי n־יות $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, הן ייקראו שוות זו לזו אמ"מ

$$\forall i \in \mathbb{N}, 1 \le i \le n, (\alpha_i = \beta_i)$$

מכפלה קרטזית

יהיו A, B קבוצות. המכפלה הקרטזית של A וB מוגדרת בתור קבוצת כל הזוגות הסדורים של איברי A, B ומסומנת כך:

$$A \times B = \big\{(\alpha,\beta) \mid \alpha \in A, \beta \in B\big\}$$

פעולה זו אינה אסוציאטיבית ואם $A \neq B$ היא אינה קומוטטיבית. בנוסף, ניתן לבצע את הפעולה ככל שנרצה ולקבל n־יות בגדלים שונים:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \big\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \mid \lambda_i \in A_i\big\}$$

כתיבה אחרת היא "חזקה" של קבוצה והיא נראית כך:

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ פעמים}} = \big\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \mid \lambda_i \in A\big\}$$

רלציות (יחסים)

רלציה (יחס) בינארית R מהקבוצה A לקבוצה B הינה תת־קבוצה של $A\times B$ (כלומר $R\in\mathcal{P}(A\times B)$).
נסמן זוג סדור השייך לרלציה R באופנים הבאים: $\alpha R\beta \iff (\alpha,\beta)\in R$. ניתן לתאר רלציות כקבוצות, גרף מכוון (דיגרף) או טבלה. אם $A=B$ אזי הרלציה מעל הקבוצה A.

תחום וטווח

תהי R רלציה מA לB. אזי התחום של R (מסומן $\mathrm{Domain}(R)$) הינו תת־קבוצה של A אשר בתוכה נמצאים כל האיברים של A שמיוחסים לאיבר/ים כלשהם בB, והוא מוגדרת כך:

$$\mathrm{Domain}(R)=\big\{\alpha\in A \mid \exists\beta\in B,(\alpha,\beta)\in R\big\}$$

בדומה, הטווח של R (מסומן $\mathrm{Range}(R)$) הינו תת־קבוצה של B אשר בתוכה נמצאים כל האיברים של B אשר מיוחסים לאיבר/ים כלשהם בA, והוא מוגדרת כך:

$$\mathrm{Range}(R)=\big\{\beta\in B \mid \exists\alpha\in A,(\alpha,\beta)\in R\big\}$$

הרלציה ההופכית

תהי R רלציה מA לB. אזי קיימת רלציה R^{-1} מB לA כך שלכל $\alpha R\beta$ מתקיים $\beta R^{-1}\alpha$ והיא מוגדרת כך:

$$R^{-1}=\big\{(\beta,\alpha) \mid (\alpha,\beta)\in R\big\}$$

הרכבת / כפל רלציות

יהיו S,R רלציות, כאשר R מהקבוצה A לקבוצה B וS מהקבוצה B לקבוצה C. אזי מכפלת הרלציות (נקראת גם הרכבת הרלציות) מסומנת $R\circ S$ או RS ומוגדרת כך:

$$RS=R\circ S=\big\{(\alpha,\gamma) \mid \exists\beta\in B,(\alpha,\beta)\in R\land(\beta,\gamma)\in S\big\}$$

כפל רלציות הוא אסוציאטיבי, כלומר עבור שלוש רלציות R,S,T (כאשר כמובן מוגדרות המכפלות ביניהן) מתקיים $R(ST)=(RS)T$. בנוסף, הרלציה ההופכית של מכפלת רלציות נראית כך:

$$(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$$

רלציית הזהות

יחס הזהות על קבוצה A יסומן בI_A ומוגדר כך:

$$I_A=\big\{(\lambda,\lambda) \mid \lambda\in A\big\}\equiv\forall\alpha,\beta\in A,(\alpha,\beta)\in I_A \iff \alpha=\beta$$

רלציות – המשך

תכונות של רלציות

- **רפלקסיביות**: $\forall a \in A,\ (aRa) \equiv I_A \subseteq R$.
- **סימטריות**: $\forall a,b \in A,\ (aRb \Leftrightarrow bRa) \equiv R = R^{-1}$.
- **אנטי־סימטריות**: $\forall a,b \in A,\ (aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b)$.
- **טרנזיטיביות**: $\forall a,b,c \in A,\ (aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc) \equiv R^2 \subseteq R$.

סגור של רלציה ביחס לתכונה מסויימת

תהי R רלציה מעל A. הסגור של R ביחס לתכונה מסויימת הוא רלציה S מעל A המקיימת את התכונה הזאת, מכילה את R ומוכלת בכל רלציה מעל A המקיימת את התכונה ומכילה את R. הסגור הטרנזיטיבי של רלציה R הוא:

$$S = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \bigcup_{1 \le i \in \mathbb{N}}^{\infty} R^i$$

סוגים שונים של רלציות

- **רלציית שקילות**: רלציה רפלקסיבית, טרנזיטיבית וסימטרית.
- **רלציית קומפטיביליות**: רלציה רפלקסיבית וסימטרית.
- **רלציית סדר חלקי**: רלציה רפלקסיבית, טרנזיטיבית ואנטיסימטרית. קבוצה עם רלציית סדר חלקי מעליה נקראת קבוצה סדורה חלקית. מסומנת לרוב ב$\le$.
- **רלציית סדר מלא**: סדר מלא הינו סדר חלקי אשר פועל על כל זוג איברים בקבוצה, כלומר אין איברים בה שאינם ניתנים להשוואה.

קבוצה עם סדר חלקי מעליה נקראת קבוצה סדורה חלקית.

איברים מינימליים ומקסימליים, האיבר הקטן ביותר והגדול ביותר

תהי קבוצה A עם רלציית סדר חלקי מעליה המסומנת ב$\le$. האיבר $\alpha \in A$ ייקרא

- **איבר מינימלי של** A: אם מתקיים $\forall \lambda \in A,\ (\lambda \le \alpha \Rightarrow \lambda = \alpha)$.
- **איבר מקסימלי של** A: אם מתקיים $\forall \lambda \in A,\ (\alpha \le \lambda \Rightarrow \lambda = \alpha)$.
- **האיבר הקטן ביותר ב**A: אם α קיים ואם מתקיים $\forall \lambda \in A,\ (\alpha \le \lambda)$.
- **האיבר הגדול ביותר ב**A: אם α קיים ואם מתקיים $\forall \lambda \in A,\ (\lambda \le \alpha)$.

בקבוצה סדורה חלקית סופית קיימים איבר מינימלי אחד לפחות ואיבר מקסימלי אחד לפחות. בנוסף, בקבוצה סדורה חלקית יכולים להיות לכל היותר איבר קטן ביותר אחד ואיבר גדול ביותר אחד.

חלוקות

חלוקה

תהי A קבוצה. $\pi \subseteq \mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$ תיקרא חלוקה של A אם איבריה הינן תת־קבוצות זרות זו לזו של A אשר איחודן הוא A, או:

$$\pi = \left\{ X \subseteq A \mid \forall Y \in \pi, X \cap Y \neq \emptyset \iff X = Y \right\}$$

איברי החלוקה π (אשר הינן תת־קבוצות של A) נקראים המחלקות או הבלוקים של החלוקה. בנוסף, בהינתן n מחלקות של π מתקיים $\bigcup_{i=1}^{n} Q_i = A$.

מחלקת שקילות וקבוצת מנה

תהי E רלציית שקילות מעל A. אזי מחלקת השקילות של $\alpha \in A$ הינה קבוצת כל האיברים של A הנמצאים ביחס עם α, מסומנת ב$\overline{\alpha}$ ומוגדרת כך:

$$\overline{\alpha} = \left\{ \beta \in A \mid \alpha R \beta \right\}$$

בנוסף, קבוצת מחלקות השקילות של E נקראת קבוצת המנה של A מעל E ומסומנת כך:

$$A/E = \left\{ \overline{\alpha} \mid \alpha \in A \right\}$$

משפט

כל חלוקה π של קבוצה A משרה רלציית שקילות E מעל A המוגדרת כך:

$$E = \left\{ (\alpha, \beta) \mid \exists Q \in \pi, (\alpha, \beta \in Q) \right\}$$

משפט זה מתקיים גם בכיוון ההפוך, כלומר כל רלציית שקילות E מעל A משרה חלוקה π של A למחלקות שקילות.

עידון של חלוקה

יהיו π_1, π_2 חלוקות של A. החלוקה π_2 תיקרא עידון של π_1 אם מתקיים

$$\forall Q \in \pi_2 \; \exists G \in \pi_1, \; Q \subseteq G$$

כלומר שעבור כל מחלקה של π_2 קיימת מחלקה של π_1 אשר היא מוכלת בה.

מחלקת קומפטיביליות, מחלקת קומפטיביליות מקסימלית

תהי R רלציית קומפטיביליות מעל A. אזי נגדיר תת־קבוצה $Q \subseteq A$ להיות מחלקת קומפטיביליות אם כל שניים מאיבריה נמצאים בR, או פורמלית $\forall \alpha, \beta \in Q, \alpha R \beta$. מחלקת קומפטיביליות תיקרא מחלקת קומפטיביליות מקסימלית אם אין אף מחלקת קומפטיביליות אחרת שמכילה אותה באופן אמיתי[1].

[1] ככה כתוב בספר. אין לי מושג מה זה אומר "הכלה באופן שאינו אמיתי".

פונקציות (העתקות)

הגדרה

פונקציה f (העתקה) מקבוצה A לקבוצה B (מסומנת כך: $f : A \to B$) היא רלציה מA לB המקיימת

$$\forall \alpha \in A,\ \beta, \gamma \in B,\ ((\alpha, \beta) \in f \wedge (\alpha, \gamma) \in f \Rightarrow \beta = \gamma)$$

תחום ותמונה של פונקציה

תהי $f : A \to B$. אזי התחום של f מוגדר כך:

$$\mathrm{Domain}(f) = \big\{\alpha \in A \mid \exists \beta \in B, f(\alpha) = \beta\big\}$$

התמונה של f הינה קבוצת האיברים בB אשר עבורם קיים איבר בA כך שהם שניהם נמצאים בf, או פורמלית:

$$\mathrm{Im}(f) = \big\{f(\alpha) \mid \alpha \in A\big\}$$

פונקציות חח"ע ועל

תהי $f : A \to B$. הפונקציה f תיקרא חד חד ערכית (בקיצור - חח"ע) אם ורק אם מתקיים

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in A, (f(\lambda_1) = f(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2)$$

הפונקציה f תיקרא על אם ורק אם מתקיים

$$B = \mathrm{Im}(f) \equiv \forall \beta \in B \exists \alpha \in A, \beta = f(\alpha)$$

פונקציה חח"ע ועל נקראת פונקציית שקילות.

הרכבת / מכפלת פונקציות

יהיו $f : A \to B, g : B \to C$ פונקציות ונניח ש$\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Domain}(g)$. אזי ההרכבה של f, g מוגדרת כך:

$$g \circ f = \big\{(\alpha, \gamma) \mid \exists \beta \in B, \beta = f(\alpha) \wedge g(\beta) = \gamma\big\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

תכונות ההרכבה:

- **אי קומוטטיביות:** בדרך כלל, הרכבת פונקציות אינה קומוטטיבית, כלומר $f \circ g \neq g \circ f$.
- **אסוציאטיביות:** $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- **איבר ניטרלי:** בהינתן העתקות זהות $id_A : A \to A, id_B : B \to B$ מתקיים $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.

פונקציות – המשך

פונקציה הופכית

תהי $f:A\to B$ פונקציה חח"ע. אזי הפונקציה $f^{-1}:B\to A$ קיימת, ומתקיים

$$\forall\alpha\in A,\beta=f(\alpha)\in B,(f^{-1}(\beta)=\alpha)\equiv f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=id_A$$

בנוסף, בדומה לרלציות ורלציות הופכיות מתקיימות גם התכונות הבאות:

- $(f^{-1})^{-1}=f$
- $(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$

איזומורפיזם בין קבוצות

יהיו $(A,\leq_A),(B,\leq_B)$ שתי קבוצות סדורות חלקית ויחסיהן בהתאמה. A וB ייקראו איזומורפיות אחת לשנייה אם קיימת העתקה חד חד ערכית $f:A\to B$ כך שמתקיים

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in A,\ (\lambda_1\leq_A\lambda_2\Rightarrow f(\lambda_1)\leq_B f(\lambda_2))$$

פונקציות מיוחדות

- **פונקצית הזהות**: $id:A\to A,\forall x\in A,id(x)=x$.
- **פונקציה קבועה**: $f:A\to\{k\},\forall x\in A,f(x)=k$.
- **פונקציה אופיינית של A**: בהינתן קבוצת עולם U ותת קבוצה שלה $A\subseteq U$,

$$\forall x\in U,\varphi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\in A'\end{cases}$$

  פונקציה זו נקראת הפונקציה האופיינית של A.
- **סדרות**: סדרה היא פונקציה שתחומה הוא $\mathbb{N}$ או $\mathbb{N}^+$.

עוצמות

הגדרה

העוצמה (נקראת גם המספר הקרדינלי) של קבוצה A הינה גודל הקבוצה, בין אם היא סופית ובין אם היא "אין־סופית". העוצמה של הקבוצה מסומנת כך: $|A|$ או כך: $\operatorname{card} A$. אם הקבוצה A סופית, אזי העוצמה שלה הינה מספר טבעי, כאשר מתקיים $\left|\emptyset\right| = 0$.

שוויון עוצמות

יהיו A, B קבוצות. A וB ייקראו שוות עצמה אם ורק אם קיימת פונקציית שקילות מA על B (כלומר מתקיים $A \sim B$).

קבוצות בנות מנייה

קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ נקראת קבוצה בת מנייה ועוצמתה מסומנת ב$\aleph_0$. בנוסף, לפי הגדרת שוויון העוצמות, העוצמה של כל קבוצה עבורה מתקיים $A \sim \mathbb{N}$ הינה גם $\aleph_0$. דוגמאות לקבוצות שכאלו: $\mathbb{N}^+, \mathbb{N}_{even}, \mathbb{N}_{odd}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^k (k \in \mathbb{N})$ וכו'. איחוד קבוצות בנות מנייה הינו קבוצת בת מנייה בעצמו.

קבוצות שאינן בנות מנייה

קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ אינה בת מנייה ואנו מסמנים את עוצמתה באות C. בנוסף, לפי הגדרת שוויון העוצמות, העוצמה של כל קבוצה עבורה מתקיים $A \sim \mathbb{R}$ הינה גם C. דוגמאות לקבוצות שכאלו: $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b], \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$ וכו'.

היחס $\leq$ לעוצמות

יהיו A, B קבוצות. אזי נאמר ש$|A| \leq |B|$ אם קיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$. יחס זה הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי ולפי משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין גם אנטיסימטרי.

משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין

יהיו k, m עוצמות. אם $k \leq m$ וגם $m \leq k$, אז $k = m$.

משפט קנטור

תהי A קבוצה. אזי $|A| < \left|\mathcal{P}(A)\right|$.

עוצמות – המשך

אריתמטיקה של עוצמות

חיבור

יהיו A, B קבוצות זרות ו$|A| = k, |B| = m$. אזי סכום העוצמות יסומן ויוגדר כך:

$$k + m = |A \cup B|$$

דוגמאות לחיבור עוצמות:

- $k + 0 = k$
- $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
- $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
- $C + C = C$

בנוסף, בהינתן k עוצמה **אינסופית** כלשהי מתקיים $k + \aleph_0 = k$. חיבור עוצמות הוא קומוטטיבי ואסוציאטיבי.

כפל

יהיו A, B קבוצות ו$|A| = k, |B| = m$. אזי כפל העוצמות יסומן ויוגדר כך:

$$k \cdot m = km = |A \times B|$$

דוגמאות לכפל עוצמות:

- $k \cdot 0 = 0$
- $k \cdot 1 = 1$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $C \cdot C = C$
- בממ"ן 14 של 2017ג נוכל לראות כי מתקיים $C \cdot \aleph_0 = C$.

כפל עוצמות הוא קומוטטיבי ואסוציאטיבי. בנוסף, קיימת דיסטריבוטיביות של הכפל מעל החיבור כך: יהיו k, m, n עוצמות. אזי $k \cdot (m + n) = km + kn$.

חזקה

יהיו A, B קבוצות המקיימות $|A| = k, |B| = m$. נסמן את קבוצת הפונקציות מA לB כך: B^A. נגדיר את העוצמה m^k להיות $\left|B^A\right|$. אם הקבוצות הללו סופיות אז עוצמה זו הינה כמות הפונקציות מA לB. בנוסף, מתקיים

$$\left|\mathcal{P}(A)\right| = 2^k,\ \left|\mathcal{P}(\mathbb{N})\right| = 2^{\aleph_0} = C,\ C^{\aleph_0} = C$$

ובממ"ן 14 של 2017ג נוכל לראות כי מתקיים $C^C = 2^C$.

קומבינטוריקה

עקרונות ומושגים קומבינטוריים בסיסיים

- **עקרון החיבור**: אם ניתן לבחור עצם a_1 בk_1 דרכים, $\ldots$, עצם a_n בk_n דרכים ואי אפשר לבחור יותר מעצם אחד אז קיימות $\sum_{i=1}^{n} k_i$ דרכים לבחירת עצם.
- **עקרון הכפל**: אם ניתן לבחור עצם a_1 בk_1 דרכים, עצם a_n בk_n דרכים כאשר כל בחירה לא תלויה בבחירה הקודמת אז קיימות $\prod_{i=1}^{n} k_i$ דרכים לבחירת עצם.
- **מספר האופנים לסידור n אובייקטים בשורה**: מספר זה הינו $n!$, או $\prod_{i=1}^{n} i$.
- **סידור בשורה של n רכיבים המכילים קבוצות של אובייקטים מאותו הסוג**: בהינתן m קבוצות, בכל אחת k_m איברים זהים:
$$\frac{n!}{k_1! * \cdots * k_m!}$$
- **פרמוטציות**: בחירה של k איברים שונים מתוך n איברים שונים, כאשר יש חשיבות לסדר הבחירה:
$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$
- **קומבינציות**: בחירה של k איברים מתוך n איברים, ללא חשיבות לסדר הבחירה:
$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

הבינום של ניוטון

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

כמות פונקציות

כפי שדובר בפרק על עוצמות, מספר הפונקציות $f : A \to B$ הינו $|B|^{|A|}$. בהנחה ו$A = B$, מספר הפונקציות החח"ע הינו $|A|!$ (בעיה שקולה לסידור איברי A בשורה מול עצמם), מספר הפונקציות החח"ע ועל הינו $|A|!$ (אין הבדל שכן הקבוצה A סופית ושווה לעצמה), מספר הפונקציות שאינן חח"ע הינו $|A|^{|A|} - |A|!$ (סך כל הפונקציות פחות הפונקציות החח"ע).

עקרון שובך היונים

עקרון שובך היונים מנוסח כך: אם $n+1$ יונים נכנסות לn שובכים, אזי בתא אחד לפחות יש יותר מיונה אחת. פורמלית: בחלוקה π של קבוצה סופית A לn מחלקות, קיימת לפחות מחלקה אחת שמספר איבריה גדול או שווה ל$\frac{|A|}{n}$.

קומבינטוריקה – נוסחאות חשובות

תמורות, חליפות וצירופים

	תמורה עם חשיבות לסדר **Permutation** סידור n איברים מתוך n בשורה	**חליפה עם חשיבות לסדר** **Permutation** בחירת k איברים מתוך n	**צירוף בלי חשיבות לסדר** **Combination**
עם חזרות (איבר יכול להיבחר עד k פעמים)	$P(n;k_1,\ldots,k_m)$ $=\dfrac{n!}{k_1!*\cdots*k_m!}$ כאשר $k_1+\ldots+k_m=n$ והאיברים $k_1,\ldots,k_m$ זהים.	n^k גם מספר הפונקציות מקבוצה A שעוצמתה k לקבוצה B שעוצמתה n.	בחירת k איברים מתוך n סוגים שונים של איברים: $D(n,k)=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$ שקול למספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $x_1+\cdots+x_n=k$ או לפיזור k איברים זהים לתוך n תאים שונים.
בלי חזרות (איבר יכול להיבחר עד פעם אחת) מגבלה: $k\le n$	$P(n,n)=P(n)=n!$ סידור n איברים שונים במעגל: $(n-1)!$	$P(n,k)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$	בחירת k איברים מתוך n: $C(n,k)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

עקרון ההכלה וההפרדה

תהי U קבוצת עולם, $A_1,\ldots,A_n\subseteq U$ קבוצות סופיות. נסמן:

$$S_i=\sum_{1\le k_1\le\ldots\le k_n\le n}^{i}|\bigcap_{i=1}^{n}A_i|$$

כלומר $S_1=\sum|A_i|, S_2=\sum_{1\le i\le j}|A_i\cap A_j|$ וכו'. אזי לפי עקרון ההכלה וההפרדה נוכל לחשב את עוצמת איחודן של A_i באופן הבא:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n|=|\bigcup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i=S_1-S_2+S_3-S_4+\ldots+(-1)^{n-1}S_n$$

צורת רישום אחרת (מציאת עוצמת חיתוך המשלימים של A_i לפי U):

$$|A_i'\cap\ldots\cap A_n'|=|U|-\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

קומבינטוריקה – פונקציות יוצרות

כדי למצוא את מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה $t_1+\ldots+t_n=k$ המקיימים את ההגבלות $0\le t_i\le b_i$, יש לחשב את המקדם של x^k בפולינום הבא:

$$f(x)=(1+x+\ldots+x^{b_1})(1+x+\ldots+x^{b_2})\ldots(1+x+\ldots+x^{b_n})$$

הפונקציה $f(x)$ היא הפונקציה היוצרת של הסדרה $a_0,a_1,\ldots,a_k,\ldots$, כאשר a_k הוא מספר הפתרונות בטבעיים של המשוואה הנ"ל, המקיימים את ההגבלות הנתונות.

נוסחאות שימושיות

סכום טור הנדסי סופי: $\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ואינסופי: $\sum_{i=0}^{\infty}x^i=\frac{1}{1-x}$.

כפל פונקציות יוצרות: אם $f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ ו-$g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}b_ix^i$, $f(x)\cdot g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}c_ix^i$, אז מתקיים $c_k=\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$.

$\sum_{k=0}^{\infty}D(n,k)x^k=(1+x+x^2+\ldots)^n=\frac{1}{(1-x)^n}$ ובמילים אחרות: המקדם של x^k בפיתוח הביטוי $\frac{1}{(1-x)^n}$ הוא $D(n,k)$.

קומבינטוריקה – יחסי נסיגה

פתרון יחסי נסיגה לינאריים הומוגניים

עבור יחס הנסיגה

$$a_n=k_1a_{n-1}+k_2a_{n-2}+\ldots+k_ka_{n-k}$$

נגדיר את הפולינום הבא ע"י הצבת $a_n=\lambda^n$:

$$\lambda^n=k_1\lambda^{n-1}+k_2\lambda^{n-2}+\ldots+k_k\lambda^{n-k}$$

פולינום זה נקרא המשוואה האופיינית / הפולינום האופייני של יחס הנסיגה. נעביר אגפים, נצמצם ב-λ^{n-k} ונקבל:

$$\lambda^k-k_1\lambda^{k-1}-k_2\lambda^{k-2}-\ldots-k_k\lambda^{n-k}=0$$

נסמן ב-λ_i את שורשי פולינום זה. אזי נוכל למצוא צירוף לינארי ליחס הנסיגה באופן הבא:

$$a_n=A_1\lambda_1^n+A_2\lambda_2^n+\ldots+A_k\lambda_k^n$$

כאשר קובעים את המקדמים A_i לפי הצבה של התנאים התחיליים (בדר"כ a_0,a_1,a_2). יש לשים לב שבחרנו נכון את תנאי ההתחלה.

תורת הגרפים

הגדרות וכללים חשובים

- **גרף**: גרף $G = (V, E)$ הוא שלשה המחזיקה בתוכה קבוצה סופית V של איברים הנקראים צמתים, קבוצה סופית E של איברים הנקראים קשתות ופונקציה $f : E \to \mathcal{P}(V)$ המתאימה לכל קשת תת־קבוצה של צמתים מתוך V, ובה צומת אחד או שניים.
- **גרף מכוון**: גרף מכוון הוא גרף אשר הפונקציה שלו היא $f : E \to V \times V$ והיא מתאימה זוג סדור של צמתים לכל קשת (במקום תת־קבוצה של V), ולכן יש הבדל בין סדר הצמתים בגרף מכוון.
- **צמתים שכנים**: יהיו $v_1, v_2 \in V$. אם קיימת קשת $e \in E$ כך ש־$e = v_1v_2$, כלומר אם קיימת קשת המחברת בין שני הצמתים.
- **קשת סמוכה**: תהי $e = v_iv_j \in E$. אזי הקשת e סמוכה לצמתים v_i ו־v_j.
- **לולאה**: קשת המחברת בין צומת לעצמו.
- **קשתות מקבילות**: קשתות המחברות את אותו זוג צמתים.
- **צומת מבודד**: צומת שאין לו צמתים שכנים.
- **גרף פשוט**: גרף שאינו מכיל לולאות וקשתות מקבילות.
- **דרגה של צומת**: מספר הקשתות ב־E הסמוכות לצומת, כאשר לולאה נספרת פעמיים. מסומנת ב־$\deg_G(v)$.
- **טענה – סכום הדרגות**: בכל גרף $G = (V, E)$ מתקיים $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E|$, כלומר סכום הדרגות בגרף שווה לכפליים מספר הקשתות. בנוסף, בכל גרף מספר הצמתים שדרגתם אי־זוגית הוא זוגי.
- **מסלול; מעגל**: מסלול בגרף הוא סדרה $P = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ כאשר v_i הם צמתים, e_i הם קשתות ו־$\forall 1 \le i \le k, e_i = v_{i-1}v_i$. מעגל הוא מסלול שבו $v_0 = v_k$.
- **צמתי קצה; צמתים פנימיים**: במסלול P הקודקודים v_0, v_k נקראים צמתי הקצה של המסלול ושאר הצמתים נקראים הצמתים הפנימיים.
- **אורך של מסלול**: נסמן את האורך של מסלול P ב־$|P|$ והוא מספר הקשתות במסלול.
- **מסלול פשוט; מעגל פשוט**: מסלול פשוט הוא מסלול שבו כל הצמתים שונים. מעגל פשוט הוא מסלול פשוט שבו צמתי הקצה שווים.
- **מרחק**: המרחק $\text{dist}_G(u, v)$ הוא אורך המסלול הקצר ביותר בין u ל־v. אם אין מסלול כזה, $\text{dist}_G(u, v) = \infty$ ואם $u = v$ אז $\text{dist}_G(u, v) = 0$.
- **גרף קשיר**: גרף קשיר הוא גרף שבו יש מסלול בין כל שני צמתים.
- **רכיב קשירות**: תת־קבוצה מקסימלית של V שבין בין כל שני צמתים יש מסלול.

תורת הגרפים – המשך

הגדרות וכללים חשובים – המשך

- **תת־גרף**: גרף $G' = (V', E')$ ייקרא תת־גרף של G אם $V' \subseteq V_G, E' \subseteq E_G$ וכל קשת ב־E' מחברת בין שני צמתים של V'.
- **תת־גרף פורש**: תת־גרף $G' = (V', E')$ של G ייקרא תת־גרף פורש אם $V' = V$.
- **תת־גרף מושרה**: בהניתן תת קבוצה $U \subseteq V$ של צמתי G, התת־גרף המושרה על ידי U ב־G הוא תת־גרף של G שקבוצת הצמתים שלו היא U וקבוצת הקשתות שלו היא כל הקשתות של G שקצוותיהן ב־U.
- **גרף מלא או קליק**: גרף G ייקרא גרף מלא או קליק אם הוא גרף פשוט שכל זוג צמתים בו מחובר על ידי קשת. הגרף המלא על n צמתים יסומן ב־K_n.
- **גרף משלים**: הגרף המשלים של G יסומן $\overline{G} = (V, \overline{E})$ הוא בעל אותה קבוצת צמתים כמו G וקבוצת הקשתות שלו היא $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E, u \neq v \in V\}$, כלומר שני צמתים יהיו מחוברים יהיו מחוברים בקשת ב־$\overline{G}$ אם ורק אם הם אינם מחוברים בקשת ב־G.
- **גרף דו צדדי**: גרף שניתן לחלק את צמתיו לשתי קבוצות לא ריקות A, B כך שלכל קשת של G יש קצה אחד ב־A וקצה אחד ב־B. שתי הקבוצות נקראות הצדדים של הגרף.
- **גרף דו צדדי מלא**: גרף דו צדדי פשוט בעל p צמתים בצד אחד ו־q צמתים בצד השני, אשר מכיל את כל $p \cdot q$ הקשתות האפשריות. מסומן $K_{p,q}$.
- **משפט**: גרף G בעל שני צמתים הוא לפחות דו־צדדי אם ורק אם אין בו מעגל באורך אי־זוגי.
- **יער; עץ; עלה**: גרף ייקרא יער אם אין בו מעגל. גרף ייקרא עץ אם הוא יער קשיר. צומת בעץ נקרא עלה אם דרגתו היא בדיוק 1.
- **טענה**: כל גרף קשיר מכיל תת־גרף פורש שהוא עץ.
- **גרף מתוייג**: גרף G נקרא גרף מתוייג אם לכל צומת בו יש תג $t(u)$ שהוא מספר טבעי, ולכל שני צמתים שונים יש תגים שונים.

משפט 2.5

יהי $G = (V, E)$ גרף. הטענות הבאות שקולות:

1. G הוא עץ.
2. בין כל שני צמתים של G יש מסלול יחיד.
3. G הוא גרף קשיר מינימלי (במובן זה שהוא גרף קשיר ועם השמטת כל קשת ממנו מתקבל גרף לא קשיר).
4. G קשיר ו־$|E| = |V| - 1$.
5. G אינו מכיל מעגלים ו־$|E| = |V| - 1$.
6. G אינו מכיל מעגלים, אבל כל קשת שנוסיף בין הצמתים הקיימים בגרף תיצור מעגל.

תורת הגרפים – המשך

איזומורפיזם בין גרפים

שני גרפים $G = (V, E)$ ו$G' = (V', E')$ נקראים איזומורפיים אם קיימת העתקה $f : V \to V'$ חח"ע ועל כך שלכל $u, v \in V$ מתקיים $uv \in E$ אם ורק אם $f(u)f(v) \in E'$.
הגדרה נוספת: שני גרפים מתוייגים $G = (V, E)$ ו$G' = (V', E')$ נקראים איזומורפיים אם קיימת העתקה $f : V \to V'$ חחע ועל כך שלכל $u \in V$ התג של u שווה לתג של $f(u)$ ובנוסף מתקיים $uv \in E$ אם ורק אם $f(u)f(v) \in E'$.

משפט קיילי

לכל $n \geq 2$ מספר העצים המתוייגים השונים על קבוצה מתוייגת V של n צמתים הוא n^{n-2}.

סדרת פרופר (Prüfer)

סדרה $S = (s_1, \ldots, s_{n-2})$ באורך $n - 2$ הבנויה באופן הבא:

- **קלט**: עץ T על קבוצת צמתים מתויגת V.
- **אתחול**: $S \to ()$.
- **לולאה**: כל עוד $|V| \geq 2$ בצע:

1. אם $|V| = 2$ עצור והחזר את S.
2. יהי v העלה בעל התג הקטן ביותר ב$L(T)$ (קבוצת העלים).
3. הוסף את השכן s של v לסוף הסדרה S, והוצא את v מT ומV.

מעגלי אוילר והמילטון

- **מסלול (מעגל) אוילר**: מסלול (מעגל) אוילר בגרף G הוא מסלול (מעגל) שבו כל קשת של G מופיעה בדיוק פעם אחת.
- **מסלול (מעגל) המילטון**: מסלול (מעגל) המילטון בגרף G הוא מסלול (מעגל) שבו כל צומת של G מופיע בדיוק פעם אחת.

גרף נקרא אוילרי/המילטוני אם יש בו מעגל אוילר/המילטון.
משפט: גרף קשיר G הוא אוילרי אם ורק אם דרגת כל צומת בו היא זוגית.
משפט אור (Ore): יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט על $|V| = n \geq 3$ צמתים כך שלכל זוג צמתים $u, v \in V$ שאינם שכנים מתקיים $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq n$. אז G הוא המילטוני.
משפט דירק (Dirac): יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט על $|V| = n \geq 3$ צמתים. אם הדרגה של כל צומת היא לפחות $\frac{n}{2}$, אז G המילטוני.

תורת הגרפים – המשך

גרפים מישוריים

- **הגדרה**: גרף ייקרא מישורי אם ניתן לציירו במישור כך שלא יהיו שתי קשתות שיצטלבו.
- **פאות**: הפאות של (השיכון המישורי של) G הן חלקי המישור שהגרף מפריד.
- **נוסחת אוילר**: יהי G גרף מישורי קשיר (לאו דווקא פשוט) בעל n צמתים ו-m קשתות. אז מספר הפאות בכל שיכון מישורי של G הוא: $f = m - n + 2$.
- **עידון של קשת**: עידון של קשת uv של גרף G הוא פעולת ההחלפה של הקשת במסלול $u - x - v$ שאורכו 2, כאשר הצומת x הוא צומת חדש שמוסיפים לגרף.
- **העדנה של גרף**: גרף G' הוא העדנה של גרף G אם ניתן לקבל את G' מ-G על ידי סדרה של עידוני קשתות, כאשר מותר לעדן גם קשתות חדשות שלא היו בגרף ההתחלתי.
- **טענה**: גרף מישורי הוא מישורי אם ורק אם כל העדנה שלו היא גרף מישורי.
- **משפט קורטובסקי (Kuratowski)**: גרף הוא מישורי אם ורק אם הוא לא מכיל כתת־גרף העדנה של K_5 או של $K_{3,3}$.

צביעה של גרף

- **צביעה**: צביעה של גרף היא פונקציה מצומתי הגרף לקבוצה שאיבריה נקראים צבעים (או תגיות).
- **צביעה נאותה**: צביעה של גרף תיקרא צביעה נאותה אם כל שני צמתים סמוכים צבועים בצבעים שונים.
- **מספר הצביעה**: מספר הצביעה של גרף G הוא מספר הצבעים המינימלי בצביעה נאותה של G, והוא מסומן ב-$\chi(G)$. נאמר כי G הוא k־צבוע אם $\chi(G) \leq k$.
- **סימון**: נסמן ב-$\Delta(G)$ את הדרגה המקסימלית של צומת בגרף G.
- **כמה טענות**:
  1. $\chi(K_n) = n$
  2. $\chi(G) = 2$ אם ורק אם G הוא גרף דו־צדדי המכיל לפחות קשת אחת.
  3. אם G מעגל, אזי:
     - $\chi(G) = 2$ אם $|V_G|$ זוגי
     - $\chi(G) = 3$ אם $|V_G|$ אי־זוגי
- **משפט ברוקס (Brooks)**: $\chi(G) \leq \Delta(G)$ פרט לשני המקרים הבאים שבהם $\chi(G) = \Delta(G) + 1$:
  - ל-G יש רכיב קשירות המשרה גרף מלא (קליק) כל $\Delta(G) + 1$ צמתים;
  - $\Delta(G) = 2$ ויש ל-G רכיב קשירות המשרה מעגל באורך אי־זוגי.
- **משפט ארבעת הצבעים**: כל גרף מישורי G הוא 4־צביע (כלומר $\chi(G) \leq 4$).