ממ"ן 13

יונתן אוחיון

28 בנובמבר 2017

שאלה 1

ראשית, נוכיח שהסדרה (a_n) מוגדרת לכל n. נוכל לראות שהסדרה מוגדרת אמ"מ

$$4(1-a_n) \neq 0 \Rightarrow 4-4a_n \neq 0 \Rightarrow 4a_n \neq 4 \Rightarrow a_n \neq 1$$

$(*)$ נוכיח באינדוקציה שמתקיים $0 \leq a_n < \frac{1}{2}$ לכל n. עבור מקרה הבסיס $n=1$ אי־שוויון זה ברור מהגדרת הסדרה (שכן $a_1 = 0$). כעת, נניח נכונות עבור $n=k$ ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
0 \leq a_k < \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < -a_k \leq 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2} < 1-a_k \leq 1 \\
&\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-a_k} < 2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4(1-a_k)} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a_{k+1} < \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

לפיכך ולפי הגדרת הסדרה מתקיים $a_n \neq 1$ ולכן היא מוגדרת לכל n. כעת, נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה. עבור מקרה הבסיס $n=1$, נחשב ונראה שאי־השוויון מתקיים:

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4-a_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 < a_2$$

כעת, נניח נכונות עבור $n=k$ ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned}
a_k < a_{k+1} &\Rightarrow 1-a_k > 1-a_{k+1} \\
&\Rightarrow \frac{1}{1-a_k} < \frac{1}{1-a_{k+1}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{4(1-a_k)} < \frac{1}{4(1-a_{k+1})} \\
&\Rightarrow a_{k+1} < \frac{1}{4(1-a_{k+1})} \Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2}
\end{aligned}$$

לכן הסדרה מונוטונית עולה. לפיכך ולפי $(*)$ הסדרה מונוטונית וחסומה, ולכן לפי משפט 3.16 היא מתכנסת. בעמוד הבא נחשב את גבולה.

שאלה 1 – המשך

כעת, נחשב את גבול הסדרה. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לפי משפט 2.29 מתקיים

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4-4a_n} \\ &= \frac{1}{4-4\lim_{n\to\infty} a_n} \\ &= \frac{1}{4-4L} \end{aligned}$$

נכפול את שני הצדדים ב$4-4L$ ונקבל:

$$\begin{aligned} -4L^2+4L=1 &\Rightarrow -4L^2+4L-1=0 \\ &\Rightarrow 4L^2-4L+1=0 \\ &\Rightarrow (2L-1)^2=0 \\ &\Rightarrow L=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

וזהו גבול הסדרה כנדרש.

■

שאלה 2

סעיף א

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(-4)^n}((\frac{5}{4})^n+2(\frac{3}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}{\cancel{(-4)^n}(1+2(\frac{2}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}((\frac{5}{4})^n+2(\frac{3}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}{\lim_{n\to\infty}(1+2(\frac{2}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}$$
$$=\frac{\infty+2\cdot 0+0}{1+2\cdot 0+0}=\infty$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

סעיף ב

ראשית, נסמן

$$a_n=\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3},\ b_n=\frac{(-4)^n+2(-2)^n+3}{(-5)^n+2(-3)^n+3}$$

נוכל לשים לב ש$a_n=\frac{1}{b_n}$. לפיכך ולפי סעיף א, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\underset{\text{משפט 2.43ה}}{=}0$$

כנדרש.

■

שאלה 2 - המשך

סעיף ג

טענת עזר - $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$**:**

ראשית, נוכיח ש$\frac{1}{e} = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$. נגדיר את הסדרה $b_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{n+1}{n})^n$. אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = e$. נשים לב שלמעשה מתקיים

$$\begin{aligned} b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow b_{n-1} &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \end{aligned}$$

לפי משפט 2.29 מתקיים $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n-1}$. נחשב את הגבול ונקבל:

$$\begin{aligned} e = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \end{aligned}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = e$. כעת, נוכל לראות שמתקיים

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1}$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

כנדרש.

■

שאלה 2 – המשך

סעיף ג – המשך

כעת נחשב את גבול הסדרה. ראשית, נפשט את הביטוי:

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

נניח בשלילה ש(a_n) מתכנסת לגבול L. לכן, לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים לL. נסתכל על שתי תת־סדרות של (a_n):

$$a_{2n} = (-1)^{2n} \left(1 - \tfrac{1}{2n}\right)^{2n}, a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} \left(1 - \tfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$a_{2n} = \left(1 - \tfrac{1}{2n}\right)^{2n}, a_{2n-1} = -\left(1 - \tfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}$$

נשים לב שמתקיים $a_{2n} = b_{2n}$ ולכן היא תת־סדרה של הסדרה b_n (סדרה זו הוגדרה בטענת העזר). הסדרה b_n מתכנסת, ולכן לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים לגבול שלה. לפיכך, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{e}$.

בנוסף, נוכל לשים לב שמתקיים $a_{2n-1} = -b_{2n-1}$ ולכן היא תת־סדרה של $-b_n$. מכיוון שהיא מתכנסת, לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים לגבול שלה ולכן $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\frac{1}{e}$.
לסיכום:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{e},\ \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\frac{1}{e}$$

כמובן ש$\frac{1}{e} \neq -\frac{1}{e}$, ולכן מצאנו שני גבולות חלקיים שונים של (a_n) בסתירה להנחה. לפיכך, הסדרה (a_n) לא מתכנסת. כעת, נסמן ב$\hat{L}$ את קבוצת הגבולות החלקיים של (a_n) ונמצא קבוצה זו:

לפי ממצאינו, $\left\{\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right\} \subseteq \hat{L}$. נוכיח כעת ששני הגבולות החלקיים הללו הינם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה. נוכל לראות ששתי תת־סדרות אלו מכסות את הסדרה (a_n), ולכן לפי משפט 3.30, מתקיים $\hat{L} = \left\{\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right\}$ ומצאנו את כל הגבולות החלקיים של (a_n) כנדרש.

■

סעיף ד

נתון ש(a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים. לפיכך, החל ממקום מסוים N, לכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$. מכיוון שהסדרה הינה סדרה עולה ממש של מספרים שלמים, ובמקרה זה – גם חיוביים, היא תת סדרה של הסדרה $b_n = n$. לפיכך, הסדרה $c_n = (1+\frac{1}{a_n})^{a_n}$ תת־סדרה של הסדרה $d_n = (1+\frac{1}{n})^n$, ולכן גבולן שווה. לפי דוגמה 3.5, מתקיים $\lim_{n\to\infty} d_n = e$, ומכיוון שכל הגבולות החלקיים של סדרה מתכנסת שווים ובפרט שווים לגבולה של הסדרה, גם $\lim_{n\to\infty} c_n = e$ כנדרש.

■

שאלה 3

סעיף א

נוכיח כי $0 \leq a_n \leq 1$ לכל n. מתכונות הערך השלם נובע כי

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n} < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq \langle\sqrt{n}\rangle < 1 \Rightarrow 0 \leq a_n < 1$$

לפיכך, הסדרה (a_n) חסומה כנדרש.

■