

## ממך 13

יונתן אוּחיון

13 בספטמבר 2017

### 1 שאלה 1

ראשית, נפתח את הסוגריים ונגיע לערכו של  $z^4$ :

$$\begin{aligned} z^4 &= (1+i)^6 - (1-i)^6 \\ &= ((1+i)(1+i)^2)^2 - ((1-i)(1-i)^2)^2 \\ &= ((1+i)(1+2i-i^2))^2 - ((1-i)(1-2i-i^2))^2 \\ &= (2i-2)^2 - (2-2i)^2 \\ &= -4-8i+4 - (4+8i-4) \\ &= -8i-8i \\ &= -16i \end{aligned}$$

לפיכך,  $z^4 = -16i$ . כעת נסתכל על מיקום הנקודה  $0 - 16i$  על מישור המספרים המרוכבים ונגלה שהיא נמצאת  $-16$  יחידות על ציר המרוכבים ו $0$  יחידות על ציר הממשיים, כלומר ההצגה הקוטבית שלה הינה  $16 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$  (שכן  $0 - i = -i = \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$ ). כעת, נוכל למצוא את השורשים של  $z^4$  בעזרת הנוסחה בעמוד 87:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{16} \left( \operatorname{cis} \frac{\alpha + 2\pi k}{4} \right) \\ &= 2 \operatorname{cis} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} \\ &= 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi + 2\pi k}{8} \end{aligned}$$

כעת, נציב  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ :

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8} & z_1 &= 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{8} \\ z_2 &= -2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8} & z_3 &= -2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{8} \end{aligned}$$

ואלו הם ערכי  $z$ .



## 2 שאלה 2

### 2.1 סעיף א

#### 2.1.1 K

כל איברי  $K$  שייכים למרחב הלינארי  $M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$  (לפי שאלה 7.1.3). נוכיח ש- $K$  הינו תת-מרחב לינארי של  $M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$ :

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{bmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c & c \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת ל- $K$ . לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא ל- $K$  קבוצה פורשת הוא תת-מרחב לינארי.

#### 2.1.2 L

ראשית, נגיע לביטוי של  $L$  בעזרת  $x_2, x_3$ :

$$x_1 = 2x_1 - 4x_2 - 5 \rightarrow -x_1 = -4x_2 - 5 \rightarrow x_1 = 4x_2 + 5$$

↓

$$L = \{(4x_2 + 5, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

נניח בשלילה ש- $L$  מרחב לינארי. ננסה להוכיח סגירות של הפעולה  $+_L$  (שהיא חיבור  $n$ -יות) ונגיע לסתירה:

$$\begin{aligned} (4t + 5, t, s) +_L (4x + 5, x, y) &= (4t + 4x + 10, t + x, s + y) \\ &= (4(t + x) + 10, t + x, s + y) \end{aligned}$$

מכיוון ש- $4(t + x) + 10$  אינו ביטוי מהצורה  $4x + 5$ , הפעולה  $+_L$  אינה סגורה ביחס ל- $L$  והוא אינו מרחב לינארי.

#### 2.1.3 M

כל איברי  $M$  שייכים למרחב הלינארי  $\mathbb{R}_4[x]$  (לפי שאלה 7.1.9). נוכיח ש- $M$  הינו תת-מרחב לינארי של  $\mathbb{R}_4[x]$ .

לפי סימון 6.7.4 ולפי הגדרת  $M$ , ניתן לרשום את  $p(x)$  בצורה הבאה:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

כעת, נציב  $x = 0$  ונקבל  $p(0) = a_0$ . באופן דומה, נוכל להציב  $x = 1$  ו- $x = -1$  ולקבל את המערכת הלינארית הבאה (לפי הגדרת  $M$ ):

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= a_0 & \rightarrow & 0a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= a_0 & \rightarrow & 0a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג אותה עד להגעה למטריצת מדרגות קונונית ולקבל את הצורה הכללית של איבר ב- $M$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_3 \\ a_2 = t \end{cases} \end{aligned}$$

לכן, כל  $p(x) \in M$  הינו מהצורה  $0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3$ . נוכל לסמן את  $M$  כך כעת:

$$\begin{aligned} M &= \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3\} \\ &= \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1(x - x^3) + a_2x^2\} \\ &= \text{Sp} \{x - x^3, x^2\} \end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת ל- $M$ . לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא ל- $M$  קבוצה פורשת הוא תת-מרחב לינארי. ■

## 2.2 סעיף ב

לפי תוצאות סעיף א, נוכל לראות שמצאנו ש- $K$  ו- $M$  הינם מרחבים לינאריים (ובפרט תת-מרחבים של  $M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$  ושל  $\mathbb{R}_4[x]$ , בהתאמה), בעזרת מציאת קבוצות הפורשות אותם. לפיכך הקבוצות הפורשות הן:

- הקבוצה הפורשת של  $K$ :  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$
- הקבוצה הפורשת של  $M$ :  $\{x - x^3, x^2\}$

■

### 3 שאלה 3

#### 3.1 סעיף א

יהי  $U$  תת מרחב לינארי של  $\mathbb{Z}_5^4$  מעל  $\mathbb{Z}_5$  הנפרש ע"י קבוצה  $P$ :

$$P = \{(1, 2, 1, 2), (2, 3, 1, 4), (3, 1, 2, 1)\}$$

$$U = \text{Sp } P$$

נרצה להוכיח ש  $P$  הינה בסיס של  $U$ , כלומר פורשת את  $U$  ובת"ל בו. מכיוון שנתון ש  $P$  פורשת את  $U$ , נוכיח ש  $P$  הינה בת"ל ב  $U$ :

$$Px = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{4}R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 3R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 5R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

מכיוון שהפתרון למערכת הלינארית  $Px = 0$  הינו הפתרון הטריוויאלי,  $P$  הינה בת"ל. לפיכך,  $P$  בסיס של  $U$  ולפי הגדרה 8.3.3 מתקיים

$$\dim U = |P| = 3$$

כנדרש. ■

#### 3.2 סעיף ב

##### 3.2.1 תת סעיף 1

נמצא את הבסיס של  $\text{Sp } A$  מעל  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{bmatrix} 1+i & 3+i & 1-i \\ 1-i & 1 & -1 \\ 1+i & 4i & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \rightarrow iR_1 \\ R_3 \rightarrow iR_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 3i & i \\ 1-i & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \leftrightarrow R_2 \\ R_2 \rightarrow iR_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_2 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \begin{bmatrix} 1-i & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לפיכך, הבסיס של  $\text{Sp } A$  הינו  $((1-i, 1, -1), (0, 3, 1))$ . לפי הגדרה 8.3.3 מתקיים

$$\dim \text{Sp } A = |B_{\text{Sp } A}| = 2$$

כנדרש. ■

### 3.2.3 תת סעיף 2

נבדוק את התלות הלינארית של  $A$  מעל  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i & 1+i \\ 3+i & 1 & 4i \\ 1-i & -1 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_1 \rightarrow \frac{(1-i)}{2} R_1}]{R_3 \rightarrow iR_3} \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ 3+i & 1 & 4i \\ 0 & 1 & 1+i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - (3+i)R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 - iR_2}]{R_2 \rightarrow R_2 - (3+i)R_1} \begin{bmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & -i & i-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_1 \rightarrow R_1 + iR_2}]{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \beta = \begin{matrix} \alpha = -it \\ -(1+i)t \\ \gamma = t \end{matrix} \end{aligned}$$

והפתרון הכללי:

$$(-it, -(1+i)t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

לפיכך, לא קיים  $t \in \mathbb{R}$  ש  $0 \neq t$  כך ש  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  והווקטורים בת"ל מעל  $\mathbb{R}$ . מכיון ש  $A$  גם פורשת וגם בת"ל, היא הינה בסיס ולפי הגדרה 8.3.3 מתקיים

$$\dim \operatorname{Sp} A = |B_{\operatorname{Sp} A}| = 3$$

כנדרש. ■

## 4 שאלה 4

### 4.1 סעיף א

#### 4.1.0 הגדרות

יהי  $E$  הבסיס הסטנדרטי של  $M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$ :

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

#### 4.1.1 בסיס ל $U$

תהי  $K$  קבוצה פורשת של  $U$ :

$$K = \left\{ k_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, k_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, k_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי  $E$ :

$$\begin{aligned} [k_1]_E &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & [k_2]_E &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [k_3]_E &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & [k_4]_E &= \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1}]{\phantom{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow -R_2 \\ R_3 \rightarrow R_3 + 2R_2 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 4R_2}]{\phantom{R_2 \rightarrow -R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{4}R_4 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_3}]{\phantom{R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\substack{R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_1 \rightarrow R_1 - R_2}]{\phantom{R_3 \rightarrow -R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נבחר את שורות המטריצה המדורגת השונות מ 0 ונקבל את הבסיס  $U$ :

$$B_U = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

■

#### 4.1.2 בסיס ל- $W$

תהי  $G$  קבוצה פורשת של  $W$ :

$$G = \left\{ g_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

לפי שאלה 8.2.5, נוכל להכפיל את איברי הקבוצה הפורשת במשתנים  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , לייצג כמערכת משוואות ולדרג:

$$\alpha \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4\alpha + 2\beta & 2\alpha + 1\beta \\ 1\alpha + 0\beta & 0\alpha + (-1)\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$4\alpha + 2\beta = 0$$

$$2\alpha + 1\beta = 0$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ -\beta = 0 \end{array} \rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$$(*) \quad 1\alpha + 0\beta = 0$$

$$(*) \quad 0\alpha + (-1)\beta = 0$$

לפיכך, הפתרון היחיד למערכת המשוואות הינו הפתרון הטריטוריאלי והווקטורים בת"ל. מכיון ש- $G$  פורשת את  $W$  ובת"ל, היא גם בסיס שלו, כלומר

$$B_W = G = \left( \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

■

#### 4.1.3 בסיס ל- $U + W$

לפי שאלה 7.6.5, מתקיים  $U + W = \text{Sp } B_U \cup B_W$ , כלומר הקבוצה

$$Y = \left\{ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, y_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, y_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

פורשת את  $U + W$ . נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי  $E$ :

$$\begin{array}{lll} [y_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & [y_2]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [y_3]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \\ [y_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & [y_5]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

בעמוד הבא נעבור להצגה מטריציונית ונדרג.

#### 4.1.3 בסיס ל- $U + W$ (המשך)

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_4 \rightarrow R_4 - 4R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_2 \\ R_5 \rightarrow R_5 - R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_5 \\ R_5 \rightarrow \frac{1}{5}R_5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_3 \leftrightarrow R_4 \\ R_4 \leftrightarrow R_5 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 8R_5 \\ R_1 \rightarrow R_1 - 2R_5}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

נבחר את שורות המטריצה המדורגת השונות מ-0 ונקבל את הבסיס ל- $U + W$ :

$$B_{U+W} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = E$$

■

#### 4.2 סעיף ב - בסיס ל- $U \cap W$

ראשית, נחשב את המימד של החיתוך:

$$\begin{aligned}
 \dim U \cap W &= \dim U + \dim W - \dim U + W \\
 &= 3 + 2 - 4 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

לפיכך, קיים רק ווקטור אחד בבסיס החיתוך. ידוע לנו שאיברי החיתוך שייכים גם ל- $U$  וגם ל- $W$ , ולכן בסיס האיחוד הינו צירוף לינארי של בסיסי  $U$  ו- $W$ , כלומר מתקיים:

$$\begin{aligned}
 \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} &= \delta \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 \downarrow \\
 \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned}$$

בעמוד הבא נעביר להצגה מטריציונית ונדרג.



## 4.2 סעיף ב (המשך)

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 3R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{5}R_4}]{\substack{R_4 \rightarrow R_4 - 2R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 + 3R_3 \\ R_4 \rightarrow \frac{1}{5}R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 2R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_4}]{\substack{R_1 \rightarrow R_1 + 4R_4 \\ R_2 \rightarrow R_2 + 2R_4 \\ R_3 \rightarrow R_3 + R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \downarrow \\ \alpha &= -2\lambda \\ \beta &= -\lambda \\ \gamma &= -\lambda \\ \delta &= -\lambda \\ \lambda &= t \end{aligned}$$

על מנת להגיע לווקטור הבסיס, נציב  $\lambda = 1$ :

$$-2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, הבסיס לחיתוך הוא

$$B_{U \cap W} = \left( \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

כנדרש. ■

## 4.3 סעיף ג

על מנת למצוא מ"ל  $T$  כך ש  $W \oplus T = M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$ , נוכל להשלים את  $B_w$  בעזרת ווקטורי הבסיס הסטנדרטי וכך לכל איבר ב  $W \oplus T$  תהיה הצגה יחידה, כפי שדרוש בהגדרת הסכום הישר. ראשית, נדרג את  $B_w$  ונשלים אותו בעזרת איברים מ  $E$ :

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}]{\substack{R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \\ R_1 \leftrightarrow R_2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

### 4.3 סעיף ג (המשך)

כעת, לפי משפט 8.3.5 נוכל להשלים את ווקטורי כך שיהוו בסיס ל- $M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$  (ועקב כך גם הצגה יחידה) בעזרת איברי  $E$  כך:

$$B_{W \oplus T} = \left( \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

נדרג לצורך בדיקה שאנו אכן מגיעים ל- $E$ :

$$B_{W \oplus T} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \leftrightarrow R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4}]{\substack{R_3 \leftrightarrow R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - 2R_1 \\ R_3 \rightarrow R_3 - R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_4 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}]{\substack{R_3 \rightarrow -R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - 2R_3 \\ R_4 \leftrightarrow R_2 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow E$$

כעת, הגענו ל- $E$  ולכן השלמתנו עבדה. לפיכך, מצאנו את  $T$  והוא שווה למימד הבא:

$$T = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

כנדרש. ■

### 5 שאלה 5

(\*) לפי משפט 7.5.1, אנו יודעים שמכיוון ש- $B \subseteq U$  גם  $W = \text{Sp } B \subseteq U$ , דבר הגורר  $\dim W = 3$ . לפי משפט 8.3.4 מתקיים  $3 \leq \dim U \rightarrow \dim W \leq \dim U$ . נוכיח ש- $\dim U = 3$ :

ראשית, נסמן את הקבוצה הפורשת של  $U$  ב- $K$  (כלומר,  $U = \text{Sp } K$ ). מכיוון ש- $|K| = 3$ , מתקיים  $\dim K \leq 3$  (שכן ב- $K$  שלושה איברים אך היא אינה בהכרח בסיס). נניח בשלילה שרק ווקטור אחד  $v_i \in K$  הינו בת"ל. לפיכך,

$$U = \text{Sp } K - \{v_i\} \rightarrow \dim U = |K - \{v_i\}| = 3 - 1 = 2$$

כלומר,  $\dim U = 2$ . ב(\*) הוכחנו ש- $3 \leq \dim U$  והגענו לסתירה. כעת, נניח בשלילה שרק שני ווקטורים  $v_i, v_j \in K$  הינם בת"ל. לפיכך,

$$U = \text{Sp } K - \{v_i, v_j\} \rightarrow \dim U = |K - \{v_i, v_j\}| = 1$$

כלומר,  $\dim U = 1$ . ב(\*) הוכחנו ש- $3 \leq \dim U$  והגענו לסתירה. לפיכך, מצאנו את המימד של  $U$  והוא בהכרח 3. ■

## 6 שאלה 6

לפי שאלה 3.7.1, נוכל לראות שלכל  $v, w$  המקיימים  $Av = Aw = b$ , מתקיים גם  $A(v-w) = 0$ . לפיכך, נוכל לחסר את הווקטורים הנתונים בזוגות ולקבל פתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= A(u-v) = A((2, 1, 2, 0) - (1, -1, 2, 4)) = A(1, 2, 0, -4) \\ 0 &= A(u-w) = A((2, 1, 2, 0) - (1, 0, 2, -1)) = A(1, 1, 0, 1) \\ 0 &= A(v-u) = A((1, -1, 2, 4) - (2, 1, 2, 0)) = A(-1, -2, 0, 4) \\ 0 &= A(v-w) = A((1, -1, 2, 4) - (1, 0, 2, -1)) = A(0, -1, 0, 5) \\ 0 &= A(w-u) = A((1, 0, 2, -1) - (2, 1, 2, 0)) = A(-1, -1, 0, -1) \\ 0 &= A(w-v) = A((1, 0, 2, -1) - (1, -1, 2, 4)) = A(0, 1, 0, -5) \end{aligned}$$

כעת, נמצא את הווקטורים הבלתי-לויים באוסף הפתרונות למשוואה ההומוגנית ע"י דירוג:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ R_5 \rightarrow R_5 + R_2 \\ R_6 \rightarrow R_6 + R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_2 \\ R_2 \rightarrow -R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

שורות המטריצה המדורגת השונות מאפס הינם הפתרונות למערכת ההומוגנית  $Ax = 0$ . לפיכך, מימד הפתרונות של המערכת ההומוגנית  $Ax = 0$  הינו

$$V = \text{Sp} \{(1, 2, 0, -4), (0, 1, 0, -5)\}$$

כנדרש. כעת, נמצא את מרחב הפתרונות ל  $Ax = b$  ובעזרתו נגיע לפתרון הכללי למערכת:

$$\begin{aligned} W &= \text{Sp} \{u, v, w\} \\ &= \text{Sp} \{(2, 1, 2, 0), (1, -1, 2, 4), (1, 0, 2, -1)\} \\ &= \{a(2, 1, 2, 0) + b(1, -1, 2, 4) + c(1, 0, 2, -1) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2a + b + c, a - b, 2a + 2b + 2c, 4b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

לפיכך, הפתרון הכללי למערכת  $Ax = b$  הינו

$$a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (2a + b + c, a - b, 2a + 2b + 2c, 4b - c)$$

כנדרש. ■