ממן 13

יונתן אוחיון

11 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

ראשית, נפתח את הסוגריים ונגיע לערכו של z^4:

$$\begin{aligned}
z^4 &= (1+i)^6 - (1-i)^6 \\
&= ((1+i)(1+i)^2)^2 - ((1-i)(1-i)^2)^2 \\
&= ((1+i)(\cancel{1}+2i-\cancel{1}))^2 - ((1-i)(\cancel{1}-2i-\cancel{1}))^2 \\
&= (2i-2)^2 - (2-2i)^2 \\
&= \cancel{-4} - 8i + \cancel{4} - (\cancel{4} + 8i - \cancel{4}) \\
&= -8i - 8i \\
&= -16i
\end{aligned}$$

לפיכך, $z^4 = -16i$. כעת נסתכל על מיקום הנקודה $0 - 16i$ על מישור המספרים המרוכבים ונגלה שהיא נמצאת $16-$ יחידות על ציר המרוכבים ו0 יחידות על ציר הממשיים, כלומר ההצגה הקוטבית שלה הינה $16\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$ (שכן $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$). כעת, נוכל למצוא את השורשים של z^4 בעזרת הנוסחה בעמוד 87:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt[4]{16}(\operatorname{cis}\frac{\alpha + 2\pi k}{4}) \\
&= 2\operatorname{cis}\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} \\
&= 2\operatorname{cis}\frac{3\pi + 2\pi k}{8}
\end{aligned}$$

כעת, נציב $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$z_0 = 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{8} \qquad z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}$$

$$z_2 = -2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{8} \qquad z_3 = -2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}$$

ואלו הם ערכי z.

■

2 שאלה 2

2.1 סעיף א

2.1.1 K

כל איברי K שייכים למרחב הלינארי $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ (לפי שאלה 7.1.3). נוכיח שK הינו תת־מרחב לינארי של $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{bmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c & c \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת לK. לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא לK קבוצה פורשת הוא תת־מרחב לינארי.

2.1.2 L

ראשית, נגיע לביטוי של L בעזרת x_2, x_3:

$$x_1 = 2x_1 - 4x_2 - 5 \to -x_1 = -4x_2 - 5 \to x_1 = 4x_2 + 5$$

$$\downarrow$$

$$L = \{(4x_2+5, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

נניח בשלילה שL מרחב לינארי. ננסה להוכיח סגירות של הפעולה $+_L$ (שהיא חיבור n־יות) ונגיע לסתירה:

$$\begin{aligned}
(4t+5,t,s) +_L (4x+5,x,y) &= (4t+4x+10, t+x, s+y) \\
&= (4(t+x)+10, t+x, s+y)
\end{aligned}$$

מכיוון ש$4(t+x)+10$ אינו ביטוי מהצורה $4x+5$, הפעולה $+_L$ אינה סגורה ביחס לL והוא אינו מרחב לינארי.

2.1.3 M

כל איברי M שייכים למרחב הלינארי $\mathbb{R}_4[x]$ (לפי שאלה 7.1.9). נוכיח שM הינו תת־מרחב לינארי של $\mathbb{R}_4[x]$.

לפי סימון 6.7.4 ולפי הגדרת M, ניתן לרשום את $p(x)$ בצורה הבאה:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

כעת, נציב $x=0$ ונקבל $p(0)=a_0$. באופן דומה, נוכל להציב $x=1$ ו$x=-1$ ולקבל את המערכת הלינארית הבאה (לפי הגדרת M):

$$\begin{aligned}
\cancel{a_0} + a_1 + a_2 + a_3 &= \cancel{a_0} \\
\cancel{a_0} - a_1 + a_2 - a_3 &= \cancel{a_0}
\end{aligned} \to \begin{aligned}
0a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\
0a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0
\end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג אותה עד להגעה למטריצת מדרגות קנונית ולקבל את הצורה הכללית של איבר בM:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \to \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_3 \\ a_2 = t \end{matrix}$$

לכן, כל $p(x) \in M$ הינו מהצורה $0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3$. נוכל לסמן את M כך כעת:

$$\begin{aligned} M &= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3\right\} \\ &= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1(x - x^3) + a_2x^2\right\} \\ &= \mathrm{Sp}\left\{x - x^3, x^2\right\} \end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת לM. לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא לM קבוצה פורשת הוא תת־מרחב לינארי.

■

2.2 סעיף ב

לפי תוצאות סעיף א, נוכל לראות שמצאנו שK וM הינם מרחבים לינארים (ובפרט תת־מרחבים של $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ ושל $\mathbb{R}_4[x]$, בהתאמה), בעזרת מציאת קבוצות הפורשות אותם. לפיכך הקבוצות הפורשות הן:

- הקבוצה הפורשת של K: $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$
- הקבוצה הפורשת של M: $\left\{x - x^3, x^2\right\}$

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

יהי U תת מרחב לינארי של $\mathbb{Z}_5^4$ מעל $\mathbb{Z}_5$ הנפרש ע"י קבוצה P:

$$P = \{(1,2,1,2),(2,3,1,4),(3,1,2,1)\}$$
$$U = \operatorname{Sp} P$$

נרצה להוכיח ש־P הינה בסיס של U, כלומר פורשת את U ובת"ל בו. מכיוון שנתון ש־P פורשת את U, נוכיח ש־P הינה בת"ל ב־U:

$$Px = 0 \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 4 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_2 \to \frac{1}{4} R_2 \\ R_3 \to \frac{1}{4} R_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_1 \to R_1 - 3R_3 \\ R_4 \to R_4 + 5R_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

מכיוון שהפתרון למערכת הלינארית $Px = 0$ הינו הפתרון הטריוויאלי, P הינה בת"ל. לפיכך, P בסיס של U ולפי הגדרה 8.3.3 מתקיים

$$\dim U = |P| = 3$$

כנדרש.

■

4 שאלה 4

4.1 סעיף א

4.1.0 הגדרות

יהי E הבסיס הסטנדרטי של $M_{2x2}^{\mathbb{R}}$:

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

4.1.1 בסיס לU

תהי K קבוצה פורשת של U:

$$K = \left\{ k_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, k_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, k_4 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי E:

$$[k_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [k_2]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[k_3]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [k_2]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to -R_2 \\ R_3 \to R_3 + 2R_2 \\ R_4 \to R_4 + 4R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{4} R_4 \\ R_4 \to R_4 - R_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3 \to -R_3 \\ R_2 \to R_2 + R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נבחר את שורות המטריצה המדורגת השונות מ0 ונקבל את הבסיס לU:

$$B_U = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

■

4.1.2 בסיס לW

תהי G קבוצה פורשת של W:

$$G = \left\{ g_1 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, g_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

לפי שאלה 8.2.5, נוכל להכפיל את איברי הקבוצה הפורשת במשתנים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, לייצג כמערכת משוואות ולדרג:

$$\alpha \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4\alpha + 2\beta & 2\alpha + 1\beta \\ 1\alpha + 0\beta & 0\alpha + (-1)\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} 4\alpha + 2\beta &= 0 \\ 2\alpha + 1\beta &= 0 \\ (*)\ 1\alpha + 0\beta &= 0 \\ (*)\ 0\alpha + (-1)\beta &= 0 \end{aligned} \to \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ -\beta &= 0 \end{aligned} \to \alpha = \beta = 0$$

לפיכך, הפתרון היחידי למערכת המשוואות הינו הפתרון הטריוויאלי והווקטורים בת"ל. מכיוון שG פורשת את W ובת"ל, היא גם בסיס שלו, כלומר

$$B_W = G = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

■

4.1.3 בסיס ל$U + W$

לפי שאלה 7.6.5, מתקיים $U + W = \operatorname{Sp} B_U \cup B_W$, כלומר הקבוצה

$$Y = \left\{ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, y_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, y_4 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, y_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

פורשת את $U + W$. נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי E:

$$[y_1]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [y_2]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [y_3]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$[y_4]_E = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [y_5]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

בעמוד הבא נעבור להצגה מטריציונית ונדרג.

4.1.3 בסיס ל$U+W$ (המשך)

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&-3\\4&2&1&0\\2&1&0&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\to -R_3\\R_4\to R_4-4R_1\\R_5\to R_5-2R_1}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&-1&3\\0&2&1&-8\\0&1&0&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_4\to R_4-2R_2\\R_5\to R_5-R_2}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&-1&3\\0&0&1&-8\\0&0&0&-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3\to R_3+R_4\\R_3\to R_3-R_5\\R_5\to \frac{1}{5}R_5}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&-8\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3\leftrightarrow R_4\\R_4\leftrightarrow R_5\\R_4\to R_4+8R_5\\R_1\to R_1-2R_5}]{}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

נבחר את שורות המטריצה המדורגת השונות מ0 ונקבל את הבסיס ל$U+W$:

$$B_{U+W}=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=E$$

■

4.2 סעיף ב – בסיס ל$U\cap W$

ראשית, נחשב את המימד של החיתוך:

$$\begin{aligned}\dim U\cap W&=\dim U+\dim W-\dim U+W\\&=3+2-4\\&=1\end{aligned}$$

לפיכך, קיים רק ווקטור אחד בבסיס החיתוך. ידוע לנו שאיברי החיתוך שייכים גם לU וגם לW, ולכן בסיס האיחוד הינו צירוף לינארי של בסיסי U וW, כלומר מתקיים:

$$\alpha\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0&0\\1&-3\end{bmatrix}=\delta\begin{bmatrix}4&2\\1&0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}2&1\\0&-1\end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-3\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}-4\\-2\\-1\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}=0$$

בעמוד הבא נעביר להצגה מטריציונית ונדרג.

4.2 סעיף ב (המשך)

נעבור להצגה מטריציונית ונדרג:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_4 \to R_4 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 + 3R_3 \\ R_4 \to \frac{1}{5} R_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{R_1 \to R_1 + 4R_4 \\ R_2 \to R_2 + 2R_4 \\ R_3 \to R_3 + R_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{gathered} \alpha = -2\lambda \\ \beta = -\lambda \\ \gamma = -\lambda \\ \delta = -\lambda \\ \lambda = t \end{gathered}$$

על מנת להגיע לווקטור הבסיס, נציב $\lambda = 1$:

$$-2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, הבסיס לחיתוך הוא

$$B_{U \cap W} = \left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

כנדרש.

■