# ממן 13

יונתן אוחיון

5 בספטמבר 2017

## 1 שאלה 1

### 1.1 הקבוצות

$$
\begin{aligned}
&A = [-1, 1] \\
&B = [0, 2] \\
&A - B = [-1, 0) \\
&A \oplus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-1, 2] \ \wedge \ x \notin (0, 1)\} \\
&A \cup B = [-1, 2]
\end{aligned}
$$

### 1.2 עוצמת הקבוצות

לפי משפט 4.5, ניתן להסיק כי העוצמה של קטעים פתוחים וסגורים הינה $C$. לפיכך, כל הקבוצות $A, B, A - B, A \oplus B, A \cup B$ הינם שוות־עוצמה ועוצמתן הינה $C$.

### 1.3 שונות הקבוצות

א. נראה ש$A$ שונה משאר הקבוצות:

$$-1 \in A \wedge -1 \notin B \to A \neq B$$

$$0 \in A \wedge 0 \notin A - B \to A \neq A - B$$

$$0.5 \in A \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to A \neq A \oplus B$$

$$2 \notin A \wedge 2 \in A \cup B \to A \neq A \cup B$$

ב. נראה ש$B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq B$ (לפי סעיף א)

$$0 \in B \wedge 0 \notin A - B \to B \neq A - B$$

$$0.5 \in B \wedge 0.5 \notin A \oplus B \to B \neq A \oplus B$$

$$-1 \notin B \wedge -1 \in A \cup B \to B \neq A \cup B$$

ג. נראה ש$A-B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A-B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A-B$ (לפי סעיף ב)
$2 \notin A-B \wedge 2 \in A \oplus B \rightarrow A-B \neq A \oplus B$
$2 \notin A-B \wedge 2 \in A \cup B \rightarrow A-B \neq A \cup B$

ד. נראה ש$A \oplus B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \oplus B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ב)
$A-B \neq A \oplus B$ (לפי סעיף ג)
$0.5 \notin A \oplus B \wedge 0.5 \in A \cup B \rightarrow A \oplus B \neq A \cup B$

ה. נראה ש$A \cup B$ שונה משאר הקבוצות:

$A \neq A \cup B$ (לפי סעיף א)
$B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ב)
$A-B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ג)
$A-B \neq A \cup B$ (לפי סעיף ד)

לפיכך, הצלחנו למצוא קבוצות $A, B, A-B, A \oplus B, A \cup B$ כך שעוצמותיהן שוות אך הן שונות אחת מהשנייה.

■

## 2 שאלה 2

### 2.1 סעיף א

יהי $n \in \mathbb{N} \wedge n > 0$.

תהי $T_n$ קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ באורך $n$ (כלומר, $T_n = \{X \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \wedge |X| = n\}$). תהי $F_n$ קבוצת הסדרות באורך $n$ מעל $\mathbb{N}$ (כלומר, $F_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$). לפיכך, קיימת פונקציה $f : T_n \to F_n$ המתאימה לכל קבוצה ב$T_n$ את סדרת המספרים הנמצאים בה בסדר עולה ב$F_n$.

פונקציה זו הינה חח"ע, שכן לכל קבוצה $P$ ב$T_n$ נוכל להתאים סדרה של איברה בסדר עולה, ולכן $|T_n| \leq |F_n|$ (פונקציה זו אינה על, שכן לכל קבוצה תותאם רק סדרה אחת עם איבריה אך קיימות יותר מסדרה אחת שכזו ב$F_n$). הקבוצה $T_n$ הינה אינסופית, מכיוון שלכל $P \in T_n$ קיימת $M \in T_n$ כך ש$|P| = |M| - 1$, ולכן עוצמתה היא לפחות $\aleph_0$ והיא בת מנייה.

■

### 2.2 סעיף ב

לפי סעיף א, הוכחנו שלכל $n > 0$, קבוצת התת־קבוצות של $\mathbb{N}$ באורך $n$ (מסומנת ב$T_n$) היא בת מנייה. מכיוון שאיחוד של קבוצות בנות מנייה הינו קבוצה בת מנייה בעצמו, נוכל לייצג את קבוצת תת הקבוצות בנות המנייה כך:

$$M = \bigcup_{0<i\leq n}^{\infty} T_i$$

נוכל להבחין ש$i > 0$, ולכן קבוצה זו לא כוללת את קבוצת תת הקבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן שווה ל0, כלומר את הקבוצה $\{\emptyset\}$, שהיא כמובן חלק מקבוצות תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$. לפיכך,

$$M = \bigcup_{0\leq i\leq n}^{\infty} T_i$$

לפיכך, קבוצת תת הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$ הינה בת מנייה.

■

### 2.3 סעיף ג

תהי $L$ קבוצת תת הקבוצות האינסופיות של $\mathbb{N}$. נניח בשלילה ש$|L| = \aleph_0$ ונגיע לסתירה:

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל תת הקבוצות של $\mathbb{N}$. לפיכך, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = M \cup L$. לפיכך,

$$|M| + |L| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \xrightarrow[\text{(לפי סעיף ב)}]{} \aleph_0 + \aleph_0 = C$$

והגענו לסתירה. לפיכך, $L$ היא אינה בת מנייה.

■

### 2.4 סעיף ד

לפי סעיף ג, נוכל להיווכח בכך ש$L$ אינה בת מנייה. לפיכך, $|L| = C$.

■

### 2.5 סעיף ה

#### 2.5.1 $i$

$$\aleph_0 = |\{\emptyset\} \cup \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid i \in \mathbb{N} \land i > 0 \land |X| = i\}\,|$$

■

#### 2.5.2 $ii$

$$C = |\,\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid |X| = \aleph_0\}\,|$$

■

## 3 שאלה 3

לפי הגדרת הפעולה בשאלה, העוצמות $k, m$ אינן שונות אחת מהשנייה בהכרח, וכאשר נבצע את הפעולה $\oplus$ פעמיים על עוצמות שוות נצפה לקבל את אותה תוצאה. נראה דוגמה נגדית שבה אין זה המצב:

#### 3.0.1 דוגמה א

$$\begin{aligned}&A = \{2\},\ B = \{3\},\ A \oplus B = \{2, 3\}\\&|A| = |B| = 1,\ |A| \oplus |B| = 1 \oplus 1 = 2\end{aligned}$$

#### 3.0.2 דוגמה ב

$$\begin{aligned}&A = B = \{2\},\ A \oplus B = \emptyset\\&|A| = |B| = 1,\ |A| \oplus |B| = 1 \oplus 1 = 0\end{aligned}$$

לפיכך, הגדרת הפעולה אינה תקינה.

■

# 4 שאלה 4

## 4.1 סעיף א

יהיו $A_2, B_2$ קבוצות כאשר $|A_2| = k_2, |B_2| = m_2$. לפי שאלה א5.1, קיימת $A_1 \subseteq A_2$ כך ש$|A_1| = k_1$ ו$B_1 \subseteq B_2$ כך ש$|B_1| = m_1$. מהגדרת כפל עוצמות נקבל

$$k_1m_1 = |A_1 \times B_1|,\ k_2m_2 = |A_2 \times B_2|$$

מהגדרת מכפלה קרטזית נקבל $A_1 \times B_1 \subseteq A_2 \times B_2$. לפיכך ולפי שאלה ב5.1, נקבל ש$k_1m_1 \leq k_2m_2$.

## 4.2 סעיף ב

מצד אחד מתקיים $\aleph_0 \leq C \to \aleph_0 \cdot C \leq C \cdot C$ ומצד שני מתקיים $1 \leq \aleph_0 \to C = 1 \cdot C \leq \aleph_0 \cdot C$.

לכן, לפי משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין נובע ש$\aleph_0 \cdot C = C$.

## 4.3 סעיף ג

הוכחה:

$$C^C \underset{\text{משפט 5.26}}{=} 2^{\aleph_0 \cdot C} \underset{\text{(לפי סעיף ב)}}{=} 2^C$$

■