ממן 15

יונתן אוחיון

3 בדצמבר 2017

0 סימונים

0.1 ריבוי גיאומטרי ואלגברי

נסמן את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ כך: g_λ ואת הריבוי האלגברי שלו כך: a_λ.

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

1.1.1 בדיקת לכסינות

ראשית, נמצא את הפולינום האופייני של מטריצה A:

$$\begin{aligned}
P_A(\lambda) = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 + R_1}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{הוצאת גורם משותף מ} C_1, R_3}{=} (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} \lambda-3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - C_2 \\ C_1 \to C_1 - C_3 \\ R_1 \leftrightarrow R_3}}{=} (\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda+1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&\underset{\text{פיתוח לפי } R_1}{=} (\lambda-1)^2 \cdot \left[\cancel{0 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}} - \cancel{0 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ \lambda+1 & -4 \end{vmatrix}} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda+1 & 0 \end{vmatrix} \right] \\
&= -(\lambda-1)^2(\lambda+1)
\end{aligned}$$

לפי משפט 11.4.1, נוכל להשוות את הפולינום ל0 ולקבל את הערכים העצמיים $\lambda = \pm 1$. מכיוון שהפולינום מתפרק לגורמים לינאריים נוכל להמשיך ולבדוק את הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע. ראשית, נוכל לראות ש$a_{-1} = 1$, ולפי שאלה 11.5.5ב מתקיים $g_{-1} = a_{-1} = 1$. כעת, נוכל לראות שמתקיים $a_1 = 2$. נבדוק מהו ערכו של g_1:

$$g_1 = n - \rho(\lambda I - A) = 3 - 1 = 2$$

כעת, מכיוון שמתקיים $g_1 = a_1 = 2$, A לכסינה. בעמוד הבא נמצא את המטריצה P המלכסנת אותה ואת המטריצה האלכסונית B הדומה לה.

1.1.2 מציאת המטריצה המלכסנת

ראשית, נמצא את הו"ע לכל הע"ע של המטריצה A. עבור $\lambda=-1$:

$$(A+I)\vec{v}=0 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_2 \to \frac{1}{2}R_2}]{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} x=z \\ y=\frac{1}{2}z \\ z=2t \end{array} \to \begin{array}{c} x=2t \\ y=t \end{array} \to t(2,1,2) \text{ :הפתרון הכללי} \to \vec{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

כעת, נחפש את הווקטורים העצמיים עבור $\lambda=1$:

$$(A-I)\vec{v}=0 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_2 \to R_2 - 2R_1}]{R_3 \to R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{array}{c} x=2z \\ y=t \\ z=s \end{array} \to s(2,0,1)+t(0,1,0) \text{ :הפתרון הכללי} \to \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{v}_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן, המטריצה המלכסנת P הינה

$$P=\begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

כנדרש.

1.1.3 מציאת המטריצה האלכסונית הדומה לA

ראשית, נמצא את P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{2}R_3]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 + R_2 \\ R_1 \to R_1 - R_2}]{\substack{R_3 \to -2R_3 \\ R_3 \leftrightarrow R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{array}\right] \to P^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

בדף הבא נמצא את המטריצה האלכסונית B הדומה לA.

1.1.3 מציאת המטריצה האלכסונית הדומה לA (המשך)

לפי הגדרה 11.3.4, מתקיים $B = P^{-1}AP$. כעת, נכפיל את המטריצות על מנת להגיע למטריצה האלכסונית B:

$$M = P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, מצאנו את המטריצה האלכסונית הדומה לA והיא הינה

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כנדרש.

■

1.2 סעיף ב

1.2.1 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר על מנת להעלות מטריצות לכסינות בחזקה בקלות. לפי הגדרה 11.3.4, מתקיים

$$B = P^{-1}AP \xrightarrow[\text{כפל מימין ב}P^{-1}]{} BP^{-1} = P^{-1}A \xrightarrow[\text{כפל משמאל ב}P]{} PBP^{-1} = A$$

$$\downarrow \text{העלה בחזקה ב}k$$

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{PB\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}B\cancel{P^{-1}} \cdot \ldots \cdot \cancel{P}B\cancel{P^{-1}} \cdot \cancel{P}BP^{-1}}_{k \text{ פעמים}} = PB^kP^{-1}$$

לפיכך, $A^k = PB^kP^{-1}$.

1.2.2 הוכחה

ראשית, נחשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$T(\vec{e}_1) = (3,1,2) \qquad T(\vec{e}_2) = (0,1,0)$$

$$T(\vec{e}_3) = (-4,-2,-3)$$

$$\downarrow$$

$$[T]_E = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(\vec{e}_1)]_E & [T(\vec{e}_2)]_E & [T(\vec{e}_3)]_E \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

כעת, מכיוון שהמטריצה המייצגת של T שווה לA היא לכסינה. בעמוד הבא נחשב את T^{2020} בעזרת טענת העזר.

1.2.2 הוכחה (המשך)

לפי משפט 10.4.1, מתקיים $[T^2]_E = [T]_E \cdot [T]_E$, כלומר $[T^2]_E = A^2$. כעת, נוכל לפרק את $[T^{2020}]_E$ ל$\underbrace{[T^2]_E \cdot \ldots \cdot [T^2]_E}_{1010 \text{ פעמים}}$. לפי טענת העזר שהוכחנו, נוכל לראות שמתקיים

$$\begin{aligned} A^2 &= PB^2P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

לפיכך, $[T^{2020}]_E = I$ ומתקיים $T^{2020}(x,y,z) = (x,y,z)$ כנדרש.

■