ממן 12

יונתן אוחיון

25 באוגוסט 2017

1 שאלה 1

1.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר $A^kB = B^kA$ לכל $AB = BA$ באינדוקציה:

1.0.1 $n = 1$

$$A^1B = BA^1 \to AB = BA$$

נכון לפי הנתון.

1.0.2 נניח שנכון ל$n = k$ ונוכיח ל$n = k + 1$

$$A^{k+1}B \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^kAB \underset{\text{הנתון}}{=} A^kBA \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} BA^kA \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} BA^{k+1}$$

עכשיו נוכל להשתמש בטענת העזר על מנת להוכיח את הטענה בשאלה.

1.1 הוכחה באינדוקציה

1.1.1 $n = 1$

$$(AB)^1 = A^1B^1 \to AB = AB$$

1.1.2 נניח שנכון ל$n = k$ ונוכיח ל$n = k + 1$

$$(AB)^{k+1} \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} AB(AB)^k \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} ABA^kB^k \underset{\text{טענת העזר}}{=} AA^kB^kB \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^{k+1}B^{k+1}$$

לכן, לכל $AB = BA$ מתקיים $(AB)^k = A^kB^k$.

■

2 שאלה 2

נניח שA הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$. לפיכך, $A^2 = I$, כלומר נצטרך למצוא את ערכי k שבהם $A^2 = I$. ראשית, נכפיל את המטריצה A בעצמה:

$$[A^2]_{11} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$[A^2]_{12} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{13} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{21} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{22} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$[A^2]_{23} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{31} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{32} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{33} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{bmatrix}$$

כלומר, נצטרך למצוא את ערכי הk הפותרים את המשוואה $k^2 - 1 = 1 \to k^2 = 2$. מכיוון שהמטריצה מעל השדה הסופי $\mathbb{Z}_7$ נצטרך לבדוק את הריבוע של כל איבר בשדה. לאחר הבדיקה נמצא כי $k \in \{3,4\}$. לפיכך, כאשר $k \in \{3,4\}$, המטריצה A הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
&A^2 + AB + I = 0 \\
&AB = -A^2 - I \\
&A^{-1} \cdot /\cancel{A}B = \cancel{A}(-A - A^{-1}) \\
&B = -A - A^{-1} \\
&B = (-A^2 - I)\cancel{A^{-1}} \ / \cdot A \\
&BA = -A^2 - I \\
&A^2 + BA + I = 0
\end{aligned}
$$

כעת, מכיוון ששתי המשוואות שוות ל0 נוכל להשוות אותם ולהגיע ל$AB = BA$:

$$\cancel{A^2} + BA + \cancel{I} = \cancel{A^2} + AB + \cancel{I} \to BA = AB$$

∎