אלגברה לינארית 1 - סיכום*

יונתן אוחיון

31 בדצמבר 2017

פעולה בינארית על קבוצה

פעולה בינארית $*$ על קבוצה A הינה כלל התאמה שמתאים לכל זוג סדור $(a,b) \in A \times A$ איבר בA המסומן ב$a * b$. סימון פורמלי יותר: $* : A \times A \to A$.

שאלה

תהי $*$ פעולה על $\mathbb{R}$ המוגדרת כך: $a * b = ab - 1$. בדוק האם הפעולה מקיימת את תכונות החלופיות והקיבוציות.

פתרון

נראה שהפעולה מקיימת את תכונת החילופיות. יהיו $a, b \in A$. נוכל לראות שמתקיים $a * b = ab - 1$ וגם $b * a = ba - 1$. מכיוון ש$ba = ab \Longleftarrow ba - 1 = ab - 1 \Longleftarrow a * b = b * a$ ולכן $*$ חילופית.

נראה שהפעולה לא מקיימת את תכונת הקיבוציות בעזרת דוגמה נגדית:

$$(1 * 2) * 3 = (2 - 1) * 3 = 1 * 3 = 2$$
$$1 * (2 * 3) = 1 * (6 - 1) = 1 * 5 = 4$$
$$2 \neq 4 \Longrightarrow (1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3)$$

ולכן $*$ לא קיבוצית כנדרש.

■

הקדמה לשדות - חבורות

תהי G קבוצה ו$+$ פעולה עליה. הזוג $(G, +)$ ייקרא חבורה אם $+$ מקיימת את התכונות הבאות:

- **סגירות:** לכל $a, b \in G$ מתקיים $a * b \in G$.
- **אסוציאטיביות (קיבוציות):** לכל $a, b, c \in G$ מתקיים $a * (b * c) = (a * b) * c$.
- **קיום איבר ניטרלי:** קיים $e \in G$ כך שלכל $a \in G$ מתקיים $a * e = e * a = a$.
- **קיום איבר הופכי:** לכל $a \in G$ קיים $b \in G$ כך ש$a * b = b * a = e$.

בנוסף, $(G, +)$ תיקרא חבורה אבלית/חילופית אם היא חבורה המקיימת את תכונת החילופיות, כלומר אם לכל $a, b \in G$ מתקיים $a * b = b * a$.

*מבוסס על השיעורים של ד"ר אסף שרון מסמסטר 2017ג בקמפוס רמת אביב

שדות

הגדרה

תהי F קבוצה, $+_F, \cdot_F$ פעולות על F. נגיד שהשלשה $(F, +_F, \cdot_F)$ נקראת שדה אם התכונות הבאות מתקיימות:

- הזוג $(F, +_F)$ חבורה אבלית עם איבר ניטרלי המסומן ב0 או 0_F.
- הזוג $(F, \cdot_F)$ חבורה אבלית עם איבר ניטרלי המסומן ב1 או 1_F.
- הפעולות מקיימות את תכונת הדיסטריבוטיביות (פילוג): $a \cdot_F (b +_F c) = (a \cdot_F b) +_F (a \cdot_F c)$

איבר בשדה נקרא סקלר (Scalar).

דוגמאות

השלשות $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ו$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ עם פעולות הכפל והחיבור הרגילות הן שדה.

שדות סופיים

יהי p מספר ראשוני. נסמן: $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p-1\}$. נגדיר את הפעולות הבאות:

- שארית החילוק של $a+b$ בp $a +_p b = a \underset{\text{mod } p}{+} b =$
- שארית החילוק של ab בp $a \cdot_p b = a \underset{\text{mod } p}{\cdot} b =$

מסתבר שהשלשה $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ מקיימת את תכונות השדה.

שדות סופיים - כדאי לזכור

1. $(p-1)^{-1} = p-1$
2. כאשר $p \geq 2$, $2^{-1} = \frac{p+1}{2}$
3. אם $a^{-1} = b$, אז:
   (א) $b^{-1} = a$
   (ב) $(-a)^{-1} = -b$
   (ג) $(-b)^{-1} = -a$

n־יות

הגדרה

n־יה (קריא: אניה) סדורה היא רשימה של n איברים מקבוצה A המסומנת כך:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

האיבר של A המופיע במקום הi של n־יה מכונה הרכיב הi שלה ומסומן כך: a_i. אין צורך להקיף בסוגריים n־יה של איבר אחד, שכן היא איבר בודד מA. נסמן את אוסף כל הn־יות באורך k מעל A כך: A^k.

שוויון n־יות

נאמר שהn־יה $(a_1, \dots, a_n)$ שווה לn־יה $(b_1, \dots, b_m)$ אם ורק אם התנאים הבאים מתקיימים:

1. $n = m$
2. $\forall 1 \leq i \leq n, a_i = b_i$

חיבור n־יות