ממן 13

יונתן אוחיון

1 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

ראשית, נפתח את הסוגריים ונגיע לערכו של z^4:

$$\begin{aligned}
z^4 &= (1+i)^6 - (1-i)^6 \\
&= ((1+i)(1+i)^2)^2 - ((1-i)(1-i)^2)^2 \\
&= ((1+i)(\cancel{1}+2i-\cancel{1}))^2 - ((1-i)(\cancel{1}-2i-\cancel{1}))^2 \\
&= (2i-2)^2 - (2-2i)^2 \\
&= \cancel{-4} - 8i + \cancel{4} - (\cancel{4} + 8i - \cancel{4}) \\
&= -8i - 8i \\
&= -16i
\end{aligned}$$

לפיכך, $z^4 = -16i$. כעת נסתכל על מיקום הנקודה $0 - 16i$ על מישור המספרים המרוכבים ונגלה שהיא נמצאת $16-$ יחידות על ציר המרוכבים ו0 יחידות על ציר הממשיים, כלומר ההצגה הקוטבית שלה הינה $16 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$ (שכן $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$). כעת, נוכל למצוא את השורשים של z^4 בעזרת הנוסחה בעמוד 87:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt[4]{16}(\operatorname{cis} \frac{\alpha + 2\pi k}{4}) \\
&= 2 \operatorname{cis} \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} \\
&= 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi + 2\pi k}{8}
\end{aligned}$$

כעת, נציב $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$z_0 = 2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8} \qquad z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{8}$$

$$z_2 = -2 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{8} \qquad z_3 = -2 \operatorname{cis} \frac{7\pi}{8}$$

ואלו הם ערכי z.

■

2 שאלה 2

2.1 סעיף א

2.1.1 K

כל איברי K שייכים למרחב הלינארי $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ (לפי שאלה 7.1.3). נוכיח ש־K הינו תת־מרחב לינארי של $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$:

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{bmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c & c \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת ל־K. לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא ל־K קבוצה פורשת הוא תת־מרחב לינארי.

2.1.2 L

ראשית, נגיע לביטוי של L בעזרת x_2, x_3:

$$x_1 = 2x_1 - 4x_2 - 5 \to -x_1 = -4x_2 - 5 \to x_1 = 4x_2 + 5$$
$$\downarrow$$
$$L = \{(4x_2+5, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

נניח בשלילה ש־L מרחב לינארי. ננסה להוכיח סגירות של הפעולה $+_L$ (שהיא חיבור n־יות) ונגיע לסתירה:

$$\begin{aligned}
(4t+5, t, s) +_L (4x+5, x, y) &= (4t+4x+10, t+x, s+y) \\
&= (4(t+x)+10, t+x, s+y)
\end{aligned}$$

מכיוון ש־$4(t+x)+10$ אינו ביטוי מהצורה $4x+5$, הפעולה $+_L$ אינה סגורה ביחס ל־L והוא אינו מרחב לינארי.

2.1.3 M

כל איברי M שייכים למרחב הלינארי $\mathbb{R}_4[x]$ (לפי שאלה 7.1.9). נוכיח ש־M הינו תת־מרחב לינארי של $\mathbb{R}_4[x]$.

לפי סימון 6.7.4 ולפי הגדרת M, ניתן לרשום את $p(x)$ בצורה הבאה:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

כעת, נציב $x=0$ ונקבל $p(0)=a_0$. באופן דומה, נוכל להציב $x=1$ ו־$x=-1$ ולקבל את המערכת הלינארית הבאה (לפי הגדרת M):

$$\begin{aligned}
\cancel{a_0} + a_1 + a_2 + a_3 &= \cancel{a_0} \\
\cancel{a_0} - a_1 + a_2 - a_3 &= \cancel{a_0}
\end{aligned}
\to
\begin{aligned}
0a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\
0a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0
\end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג אותה עד להגעה למטריצת מדרגות קנונית ולקבל את הצורה הכללית של איבר ב-M:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{2}R_2]{}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 - R_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} a_0 = 0 \\ a_1 = -a_3 \\ a_2 = t \end{matrix}$$

לכן, כל $p(x) \in M$ הינו מהצורה $0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3$. נוכל לסמן את M כך כעת:

$$\begin{aligned} M &= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1x + a_2x^2 - a_1x^3\right\} \\ &= \left\{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \mid p(x) = 0a_0 + a_1(x - x^3) + a_2x^2\right\} \\ &= \mathrm{Sp}\left\{0, x - x^3, x^2\right\} \end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת ל-M. לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא ל-M קבוצה פורשת הוא תת־מרחב לינארי.

■

2.2 סעיף ב

לפי תוצאות סעיף א, נוכל לראות שמצאנו ש-K ו-M הינם מרחבים לינארים (ובפרט תת־מרחבים של $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$ ושל $\mathbb{R}_4[x]$, בהתאמה), בעזרת מציאת קבוצות הפורשות אותם. לפיכך הקבוצות הפורשות הן:

- הקבוצה הפורשת של K: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
- הקבוצה הפורשת של M: $\left\{0, x - x^3, x^2\right\}$

■