ממ"ן 14

יונתן אוחיון

5 בדצמבר 2017

שאלה 1

סעיף א

לא נכון. דוגמה נגדית תהיה $f = h, g = k$ (כאשר הפונקציות h, k הן הפונקציות המוגדרות בממן).
נוכל לחשב ולראות ש$h(0) = h(1) = 0$ ולכן היא לא חח"ע, אך גם ש$(h \circ k)(x) = x$:

$$(h \circ k)(x) = \begin{cases} k(x) & k(x) \leq 0 \\ k(x) - 1 & k(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 - 1 & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = x$$

ולכן אם $(f \circ g) = id$, f אינה בהכרח חח"ע כנדרש.

■

סעיף ב

נכון. נניח בשלילה שg לא חחע, כלומר מתקיים

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ \ g(a) = g(b) \wedge a \neq b$$

נפעיל את f על שני הצדדים ונקבל:

$$f(g(a)) = f(g(b)) \equiv (f \circ g)(a) = (f \circ g)(b) \xRightarrow[(f \circ g) = id]{} a = b$$

בסתירה להנחה. לפיכך, g חחע כנדרש.

■

שאלה 1 - המשך

סעיף ג + ד

לא נכון. יהיו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרות באופן הבא: $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$. שתי הפונקציות לא מוגדרות בנקודה $x = 0$, ולכן $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R} \wedge \operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}$ ולכן לא על. נשים לב ש$(f \circ g) = id$:

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

נוכל לשים לב שהדוגמה הזאת עובדת גם עבור המקרה הנדרש בסעיף ד, שכן גם $g(x)$ לא על במקרה זה. לפיכך, אם $(f \circ g) = id$, לא f ולא g בהכרח על כנדרש.

■

סעיף ה

לא נכון. ניתן בתור דוגמה נגדית את אותה הדוגמה מסעיף א. ראשית, נגדיר את פונקציית ההרכבה $k \circ h$:

$$(k \circ h)(x) = \begin{cases} h(x) & h(x) \leq 0 \\ h(x) - 1 & h(x) > 0 \end{cases}$$

אזי $(f \circ g)(x) = (h \circ k)(x) = x$ כפי שהראינו בסעיף א, אך מחישוב נובע $h(0) = h(1) = 0$, ולכן לפי ההגדרה, $(k \circ h)(0) = (k \circ h)(1) = 0$ ולא מתקיים $(k \circ h) = id$ כנדרש.

■

סעיף ו

נכון. נניח שg על. אזי לפי הנתון מתקיים $f(g(x)) = x \Rightarrow g(f(g(x))) = g(x)$. מכיוון ש$g$ על, לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש$g(x) = y$. לפיכך, $g(f(y)) = y$ לכל y, כלומר $\forall y \in \mathbb{R}, (g \circ f)(y) = y$ כנדרש.

■

שאלה 2

סעיף א

יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $\delta = \frac{1}{\pi}$. לפיכך, מתקיים

$$0 < \left|x - \tfrac{2}{\pi}\right| < \delta \Rightarrow x \in N^*_\delta\left(\tfrac{2}{\pi}\right) = \left(\tfrac{1}{\pi}, \tfrac{3}{\pi}\right)$$

לכן:

$$\tfrac{1}{x} \in \left(\tfrac{\pi}{3}, \pi\right) \land \tfrac{1}{x} \neq \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\tfrac{1}{x} \in \left(0, \sin\tfrac{\pi}{3}\right) \land \sin\tfrac{1}{x} \neq 1 \ \left(= \sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

ולכן $\sin\frac{1}{x} < 1$ ובפרט $0 < \sin\frac{1}{x} < 1$ (בטווח זה, $\sin x > 0$) ולכן

$$\forall x \in N^*_\delta\left(\tfrac{2}{\pi}\right),\ \left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor = 0 \Rightarrow \left|\left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor\right| = 0 \Rightarrow \left|\left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor\right| < \varepsilon$$

לכל $0 < \varepsilon$ ולכן $f(x) \xrightarrow[x \to \frac{2}{\pi}]{} 0$ כנדרש.

■

סעיף ב

נסמן: $f(x) = \sqrt{2x - \sin 3x}$. יהי $M_1 \in \mathbb{R}$. נבחר $M_2 = \frac{M_1^2+1}{2}$. אזי:

$$\begin{aligned}
x > M_2 &\Rightarrow x > \frac{M_1^2 + 1}{2} \\
\sin x \leq 1 \text{ :נימוק} &\Rightarrow x > \frac{M_1^2 + \sin 3x}{2} \\
&\Rightarrow 2x > M_1^2 + \sin 3x \\
&\Rightarrow 2x - \sin 3x > M_1^2 \\
&\Rightarrow \sqrt{2x - \sin 3x} > M_1 \Rightarrow f(x) > M_1
\end{aligned}$$

לכן, לפי הגדרה 4.55, $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$ כנדרש.

■

שאלה 3

סעיף א1

ההגדרה: נגיד כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

נשלול: נגיד כי ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כש$x \to \infty$ אם לכל $L \in \mathbb{R}$, קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $x > M$ כך ש$|f(x) - L| \geq \varepsilon$. שללנו את ההגדרה כנדרש.

■

סעיף ב1

יהיו $L, M \in \mathbb{R}$. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{6}$ ונניח כי $x > M$. ידוע לנו ש$-1 \leq \cos x \leq 1$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$ ולכן מתקיים

$$4 \leq 5 + \cos x \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5+\cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 \text{ :נימוק} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{|4 - 5L - L\cos x|}{6} \leq \frac{|4 - 5L - L\cos x|}{5+\cos x} = \left|\frac{4 - L(5+\cos x)}{5+\cos x}\right|$$

$$= \left|\frac{4}{5+\cos x} - L\right| = |f(x) - L| \Rightarrow |f(x) - L| \geq \frac{1}{6}$$

ומצאנו ε כך ש$|f(x) - L| \geq \varepsilon$ לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן לא קיים ל$f(x)$ גבול ממשי לפי סעיף א1 כנדרש.

■

שאלה 3 – המשך

סעיף א2

ההגדרה: נגיד כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

נשלול: נגיד כי ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כש$x \to \infty$ אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שהסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת. שללנו את ההגדרה כנדרש.

■

סעיף ב2

תהי (x_n) סדרה המוגדרת כך: $x_n = n\pi$. לפיכך לפי משפט 2.43ד, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. ממחזוריות פונקציית הקוסינוס ניתן לראות כי מתקיים

$$\begin{aligned} \cos x_{2n} &= \cos 2\pi n = 1 \\ \cos x_{2n-1} &= \cos (2n-1)\pi = -1 \end{aligned}$$

נסמן: $a_n = f(x_n)$. נבחר שתי תת־סדרות מכסות של (a_n): הסדרה a_{2n} והסדרה a_{2n-1}. נוכל לראות ששתי סדרות אלו הינן סדרות קבועות:

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{4}{5+\cos 2\pi n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{2}{3} \\ a_{2n-1} &= \frac{4}{5+\cos(2n-1)\pi} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = 1 \end{aligned}$$

מכיוון ששתי תת־סדרות אלו הינן תת־סדרות מכסות וגבולותיהן שונים זה מזה, לפי משפט 3.31 הסדרה $a_n = f(x_n)$ מתבדרת. לכן לפי ההגדרה בסעיף א2 ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כנדרש.

■

שאלה 4

סעיף א

נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\ \text{משפט 4.45} &= \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}\cos x}\\ \text{טענה 4.44} &= \boxed{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

טענות עזר

נוכיח כי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, כי $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ וכי $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

ראשית, נוכיח כי $\lim_{x\to\infty}x=\infty$: יהי $M_1\in\mathbb{R}$ ונבחר $M_2=M_1$. לפיכך, לכל $x>M_1$ מתקיים $x=f(x)>M_2=M_1$ וסיימנו. לפיכך, לפי משפט 4.53ה מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ כנדרש.

שנית, נוכיח את הגבול השני בעזרת הגדרת הגבול לפי היינה: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אפסה החסומה מלרע ע"י 0, כלומר $x_n>0$ לכל n. לפיכך לפי משפט 12.43, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty$. לכן, לפי הגדרה 4.51 מתקיים $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ כנדרש.

לבסוף, נוכיח גם את הגבול האחרון בעזרת הגדרת הגבול לפי היינה: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אפסה החסומה מלעיל ע"י 0, כלומר $x_n<0$ לכל n. לפיכך, הסדרה $y_n=-x_n$ חסומה מלרע ע"י 0, כלומר $y_n>0$ לכל n. לפי הטענה שהראינו לעיל,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\infty \xRightarrow[\text{טענה 2.39}]{} \lim_{n\to\infty}-\frac{1}{y_n}=-\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$$

ולכן הסדרה $\frac{1}{x_n}$ שואפת ל$-\infty$ ולכן לפי הגדרה 4.52, מתקיים $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ כנדרש.

■

בעמוד הבא נראה את החישובים לסעיפים ב וג.

שאלה 4 – המשך

סעיף ב

נראה שהגבול אינו קיים. נפשט מעט את ביטוי הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin^4 x}{x^7} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^4 x}{x^4}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^3}\\ &= \left(\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}\right)^4\cdot\left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\right)^3\\ \text{משפט 4.48} &= \left(\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x}\right)^3\end{aligned}$$

לפיכך:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = \left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)^3 = \infty^3 = \infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^4 x}{x^7} = \infty$$

נסמן: $\frac{1}{-x^3} = \frac{1}{y^3} \Leftarrow y^3 = -x^3 \Leftarrow y = -x$. לפי מה שהוכחנו ולפי

סעיף ג

נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5+5x^3+1}{5x^5+3x^3-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}(-3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^5})}{\cancel{x^5}(5+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5})}\\ &= \frac{-3+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{5+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}\\ \text{לפי טענת העזר} &= \frac{-3+5\cdot 0+0}{5+3\cdot 0-0} = \boxed{\frac{-3}{5}}\end{aligned}$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■