ממ"ן 15

יונתן אוחיון

4 בדצמבר 2017

שאלה 2

סעיף ב

נוכיח לפי הגדרת הגבול לפי היינה: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. נתון כי g רציפה בx_0 ולכן גם $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = 0$ (לפי הנתון). בנוסף, פונקציית דיריכלה מקבלת שני ערכים (0 או 1) ולכן חסומה על ידיהם ולכן הסדרה $(D(x_n))_{n=1}^{\infty}$ חסומה. נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} g(x_n)D(x_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} g(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} D(x_n) \\
&= 0 = g(x_0) = g(x_0)D(x_0) = f(x_0) && \text{נימוק: חסומה כפול אפסה} \\
&\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)}
\end{aligned}$$

ולכן לפי הגדרת הגבול לפי היינה, $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$ וf רציפה בx_0 כנדרש.

■