# ממן 14

יונתן אוחיון

25 בספטמבר 2017

## 1 שאלה 1

### 1.1 סעיף א

ראשית, נחשב את הצורה הכללית של $(x+1)(p'(x))$:

$$\begin{aligned}(x+1)(p'(x)) &= x \cdot p'(x) + p'(x) \\ &= (1a_1x^0 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + \dots) + x \cdot (1a_1x^0 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + \dots) \\ &= (1a_1x^0 + 2a_2x^1 + 3a_3x^2 + \dots) + (1a_1x^1 + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \dots) \\ &= 1a_1x^0 + 1a_1x^1 + 2a_2x^1 + 2a_2x^2 + 3a_3x^2 + \dots \\ &= a_1 + (a_1 + 2a_2)x + (2a_2 + 3a_3)x^2 + \dots + ((n-1)a_{n-1} + na_n)x^{n-1}\end{aligned}$$

נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי $E$:

$$[(x+1)(p'(x))]_E = \left[\sum_{i=0}^{n}((i-1)a_{i-1} + ia_i)x^{i-1}\right]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1 + 2a_2 \\ \vdots \\ ((n-1)a_{n-1} + na_n)x^{n-1} \end{bmatrix}$$

לפיכך, נוכל לייצג את ההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ בעזרת העתקת הקואורדינטות $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת כך:

$$S\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_1 + 2a_2 \\ \vdots \\ (n-1)a_{n-1} + na_n \end{bmatrix}$$

כעת נוכל להוכיח ש$S$ הינה העתקה לינארית (ועקב כך גם $T$) אם מתקיים

$$S(\alpha[p(x)]_E + \beta[q(x)]_E) = \alpha S([p(x)]_E) + \beta S([q(x)]_E)$$

לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו$p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$. נוכיח בעמוד הבא.

### 1.1 סעיף א (המשך)

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
S\left(\alpha\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right) &= S\left(\begin{bmatrix}\alpha a_0+\beta b_0\\ \vdots\\ \alpha a_n+\beta a_n\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha a_1+\beta b_1+2(\alpha a_2+\beta b_2)\\ \vdots\\ \alpha(n-1)a_{n-1}+\beta(n-1)b_{n-1}+n(\alpha a_n+\beta b_n)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha(a_1+2a_2)+\beta(b_1+2b_2)\\ \vdots\\ \alpha((n-1)a_{n-1}+na_n)+\beta((n-1)b_n+nb_n)\end{bmatrix}\\
&= \alpha\begin{bmatrix}0\\ a_1\\ a_1+2a_2\\ \vdots\\ (n-1)a_{n-1}+na_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\ b_1\\ b_1+2b_2\\ \vdots\\ (n-1)b_{n-1}+nb_n\end{bmatrix}\\
&= \alpha S\left(\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)+\beta S\left(\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

ו-$S$ העתקה לינארית. מכיוון ש-$S$ פועלת על ווקטורי הקואורדינטות של $\mathbb{R}_n[x]$, נוכל להסיק מהעובדה שהיא העתקה לינארית ש-$T$ הינה העתקה לינארית גם היא כנדרש.

■

### 1.2 סעיף ב

נראה ש־$T$ אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לכפל בסקלר:

$$\begin{aligned} x = y = 1,\ \alpha = -1 \\ \alpha T(x,y) &\stackrel{?}{=} T(\alpha x, \alpha y) \\ \alpha(2x-y, 3|x|, y) &\stackrel{?}{=} (2\alpha x - \alpha y, 3|\alpha x|, \alpha y) \\ -1(2-1, 3, 1) &\stackrel{?}{=} (-2+1, 3, -1) \\ (-1,-3,-1) &\neq (-1,3,-1) \end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה $T$ אינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר והיא אינה ט"ל.

■

### 1.3 סעיף ג

נראה ש־$T$ אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לחיבור:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ XY &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(X) + T(Y) &\stackrel{?}{=} T(X+Y) \\ \cancel{X^2} - \cancel{X} + \cancel{Y^2} - \cancel{Y} &\stackrel{?}{=} \cancel{X^2} + XY + YX + \cancel{Y^2} - \cancel{X} - \cancel{Y} \\ XY + YX &\stackrel{?}{=} 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} &\neq 0 \end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה $T$ לא מקיימת את תכונת החיבור והיא אינה ט"ל.

■

# 2 שאלה 2

## 2.1 מציאת בסיסים ל$\ker T$ ול$\operatorname{Im} T$

### 2.1.1 $\ker T$

ראשית, נמצא העתקה $S$ המתאימה ל$T$ בעזרת הצגת הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי של $M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T : M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_n[x],\ T(A) = (a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d)$$

$$\downarrow$$

$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ S([A]_E) = S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d) \end{bmatrix} = [T(A)]_E$$

לפיכך, נוכל למצוא את גרעין ההעתקה $S$:

$$\begin{aligned} \ker S &= \left\{ v \mid v \in \mathbb{R}^4 \wedge S(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ [A]_E \mid A \in M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \wedge [T(A)]_E = 0 \right\} \\ &= \left\{ v = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^t \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge S(v) = 0 \right\} \\ &= \left\{ v = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^t \mid \begin{bmatrix} a-d & b+c & 5(a-d) \end{bmatrix}^t = 0 \right\} \end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג את המערכת הבאה ולקבל את הצורה הכללית של איבר ב$\ker S$:

$$\begin{matrix} a + 0b + 0c + (-1)d = 0 \\ 0a + b + c + 0d = 0 \\ 5a + 0b + 0c + (-5)d = 0 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} a = d \\ b = -c \\ c = \alpha \\ d = \beta \end{matrix}$$

כלומר, $\ker S = \{[\beta \quad -\alpha \quad \alpha \quad \beta] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

נעבור מקואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{ \begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Sp} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{P} \end{aligned}$$

כעת, הווקטורים בקבוצה $P$ הפורשת את $\ker T$ אינם פרופורציוניים ולכן בלתי תלויים. לפיכך, $P$ הינה פורשת ובת"ל ב$\ker T$ ולפיכך הינה בסיס שלו.

■

### 2.1.2 $\operatorname{Im} T$

נוכל למצוא את $\operatorname{Im} T$:

$$\operatorname{Im} T = \left\{(a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

כעת נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונגיע ל-$\operatorname{Im} S$ (כאשר $S$ הינה הט"ל אשר מצאנו בסעיף הקודם):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S &= \left\{ \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{Sp} \underbrace{\left\{ p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}}_{P}
\end{aligned}$$

כעת, קיבלנו קבוצה $P$ הפורשת את $\operatorname{Im} S$. מכיוון ש-$p_3 = -p_1$ והם פרופורציוניים, נצטרך להוציא את $p_3$ מ-$P$ על מנת שהיא תהיה בת"ל:

$$\operatorname{Im} S = \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

מכיוון שקבוצה זו גם פורשת וגם בת"ל, היא בסיס של $\operatorname{Im} S$. כעת נעבור מהצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונמצא את הבסיס המתאים ל-$\operatorname{Im} T$:

$$\begin{aligned}
B_{\operatorname{Im} T} &= \left(x^2 + 0x + 5, 0x^2 + x + 0\right) \\
&= \left(x^2 + 5, x\right)
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

## 2.2 סעיף ב

אף אחד מהתנאים לא מתקיים, שכן $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ ו-$\ker T \subseteq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$, וכמובן ש-$M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \nsubseteq \mathbb{R}_n[x]$ ולכן לא יכולה להתקיים הכלה דו כיוונית ע"מ שוויון המרחבים.

לפיכך, $\ker T \oplus \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \wedge \ker T + \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$ כנדרש.

■

## 2.3 סעיף ג

### 2.3.1 $i$

ראשית, אנו יודעים שאיברי $\ker T$ הינם מטריצות, כלומר

$$\exists a,b,c,d\in\mathbb{R}\to A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in\ker T$$

כעת, די לחשב את $A^2$ ולבדוק אם אכן מתקיים $T(A^2)=0$. ראשית, נחשב את $A^2$:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ca+cd & cb+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{bmatrix}$$

כעת נציב ב$T(A^2)=0$:

$$\begin{aligned}T(A^2)&=(a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc}))x^2+(b(a+d)+c(a+d))x+5(a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc}))\\&=(a+d)(a-d)x^2+(a+d)(b+c)x+5(a+d)(a-d)\\&=(a+d)[(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)]\\&=(a+d)\cdot T(A)\underset{T(A)\in\ker T}{=}0\cdot(a+d)\\&=0\end{aligned}$$

כלומר, מתקיים $T(A^2)=0$ ולפיכך $A^2\in\ker T$ גם הוא.

■

### 2.3.2 $ii$

הצורה הכללית של פולינום $p(x)\in\operatorname{Im}T$ הינה $(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)$. לפיכך, אם נצרף לו את הפולינום $r(x)=3x^2+2x+5$ נקבל את $q(x)$ הבא:

$$q(x)=r(x)+p(x)=(a-d+3)x^2+(b+c+2)x+5(a-d+1)$$

נניח ש$q(x)\in\operatorname{Im}T$ לכל $p(x)\in\operatorname{Im}T$ ונראה דוגמה נגדית לפולינום אשר עבורו $q(x)\notin\operatorname{Im}T$:

$$\begin{matrix}a=1 & b=2\\ c=3 & d=4\end{matrix}\to p(x)=-3x^2+3x-15$$

$$\begin{aligned}q(x)&=(-3+3)x^2+(3+2)x+5(-3+1)\\&=0x^2+5x-10\end{aligned}$$

כלומר, מתקיים

$$\begin{matrix}a-d+3=0\\ a-d+1=-10\end{matrix}\to\begin{matrix}a-d=-3\\ a-d=-11\end{matrix}\to -3\neq-11$$

וסתירה להנחה. לפיכך, לא לכל $p(x)\in\operatorname{Im}T$ מתקיים $q(x)\in\operatorname{Im}T$.

■

## 3 שאלה 3

### 3.1 סעיף א

ראשית, נראה ש$\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$: לפי הגדרת גרעין ההעתקה, $\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$ ולפי הגדרת תמונת ההעתקה, $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\}$. לפי הגדרת $T$ מתקיים $T^2 = 0$, כלומר $T(T(v)) = 0$ לכל $v \in V$. כעת, לפי הגדרת הגרעין, $x = T(v) \in \ker T$ לכל $v \in V$ (שכן מתקיים $T(x) = 0$).
כעת, כל $x \in \operatorname{Im} T$ שייך גם ל$\ker T$ ולכן $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

כעת, לפי משפט 8.3.4, מתקיים $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim \ker T$, כלומר קיים $\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T - \epsilon$$

לפי משפט 9.6.1, מתקיים

$$\begin{aligned}
&\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n \\
&\dim \ker T + \dim \ker T - \epsilon = n \\
&2 \dim \ker T = n + \epsilon \ / : 2 \\
&\dim \ker T = \frac{n + \epsilon}{2}
\end{aligned}$$

ומכיוון ש$\epsilon \geq 0$, מתקיים

$$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$$

כנדרש.

$\blacksquare$

### 3.2 סעיף ב

ראשית, לפי סעיף א אנו יודעים ש$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$, כלומר $\dim \ker T \geq 1.5$. נוכל להיווכח ש$2 \leq \dim \ker T < n = 3$, ומכיוון שמימד של מרחב וקטורי הינו מספר טבעי מתקיים $\dim \ker T = 2$.
נסמן את הבסיס לגרעין כך:

$$k_1, k_2 \in \ker T \to B_{\ker T} = (k_1, k_2)$$

כעת, על מנת להשלים את $B_{\ker T}$ לבסיס של $V$ נצטרך למצוא $v \in V$ אשר אינו בגרעין ההעתקה, כלומר שמתקיים $T(v) \neq 0$ ולצרפו ל$B_{\ker T}$. לפי הנתון, $T \neq 0$ ולכן קיים $v \in V$ כך ש$T(v) \neq 0$.
לכן, מתקיים

$$\begin{aligned}
B_V &= (v, k_1, k_2) \\
&\downarrow \\
[T(k_1)]_{B_V} &= [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_1) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(k_2)]_{B_V} &= [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_2) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(v)]_{B_V} &= [1 \quad 0 \quad 0]^t \to T(v) = 1v + 0k_1 + 0k_2 = v
\end{aligned}$$

כנדרש.

$\blacksquare$

## 4 שאלה 4

### 4.0 סימון מטריצת מעבר מ־$B'$ ל־$B$

נסמן את מטריצת המעבר מבסיס $B'$ לבסיס $B$ בעזרת $M_{B'}^{B}$.

### 4.1 סעיף א

ראשית, נשלים את הקבוצה הפורשת את $\ker T$ לבסיס של $\mathbb{R}_4[x]$:

$$b_1 = 1 - x,\ b_2 = x - x^3$$
$$[b_1]_E = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]\,,\ [b_2]_E = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{השלמה לבסיס בעזרת } x^2, 1]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to -R_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, הקבוצה פורשת ובת"ל ב־$\mathbb{R}_4[x]$ ולכן $B$ בסיס כאשר

$$B = (b_1 = 1 - x, b_2 = x - x^3, b_3 = x^2, b_4 = 1)$$

כעת, על מנת להגדיר את ההעתקה די להגדיר אותה על איברי הבסיס, שכן איברי המרחב הינם צירוף לינארי שלהם. בנוסף, אנו יודעים שהקבוצה $\{1 - x, x - x^3\}$ פורשת את גרעין ההעתקה ולכן חייב להתקיים $T(1 - x) = T(x - x^3) = 0$. ניקח לדוגמה את ההעתקה $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ הבאה:

$$\begin{matrix} T(1-x) = 0 & T(x-x^3) = 0 \\ T(x^2) = 1 - x & T(1) = x - x^3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} T(1-x) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t & T(x-x^3) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t \\ T(x^2) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t & T(1) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^t \end{matrix}$$

מכיוון שההעתקה לינארית, נוכל לייצג את $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ כך:

$$(*) \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = aT(x^3) + bT(x^2) + cT(x) + dT(1)$$

כעת, לפי משפט 10.6.1 מתקיים $[T]_E = M_B^E \cdot [T]_B \cdot M_E^B = M_B^E \cdot [T]_B \cdot (M_B^E)^{-1}$. לפיכך, על מנת למצוא את הנוסחה המפורשת ל־$T$ נצטרך למצוא את מטריצת הייצוג שלה בבסיס $B$, מטריצת המעבר מ־$E$ ל־$B$ והמטריצה ההופכית לה.

ראשית, נמצא את מטריצת הייצוג של ההעתקה:

$$[T]_B = [[T(1-x)]_B \quad [T(x-x^3)]_B \quad [T(x^2)]_B \quad [T(1)]_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

בעמוד הבא נמצא את $M_B^E$ ואת ההופכית לה.

### 4.1 סעיף א (המשך)

על מנת למצוא את מטריצת המעבר, ראשית נמצא את הצירופים הלינארים של איברי $E$ בעזרת איברי $B$:

$$e_1 = -b_1 - b_2 + 0b_3 + b_4 \quad e_2 = 0b_1 + 0b_2 + b_3 + 0b_4$$
$$e_3 = -b_1 + 0b_2 + 0b_3 + b_4 \quad e_4 = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + b_4$$

כעת, נמצא את מטריצת המעבר:

$$M_B^E = [[e_1]_B \quad [e_2]_B \quad [e_3]_B \quad [e_4]_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת, נמצא את המטריצה ההופכית לה ע"י דירוג $[M_B^E \mid I_4]$ עד להגעה ל-$[I_4 \mid (M_B^E)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 \to -R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_1 \\ R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4 \to R_4 + R_2 \\ R_2 \to -R_2 \\ R_2 \leftrightarrow R_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to M_E^B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת, נכפול את המטריצות ונגיע למטריצת הייצוג של ההעתקה בעזרת הבסיס הסטנדרטי:

$$A = M_E^B \cdot [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot M_B^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כעת, נמצא את $T(e_i)$ לפי הקואורדינטות $[T(e_i)]_E$:

$$T(e_1) = T(x^3) = -x^3 + x \quad T(e_2) = T(x^2) = -x + 1$$
$$T(e_3) = T(x) = 0 \qquad T(e_4) = T(1) = -x^3 + x$$

ונוכל למצוא את הנוסחה המפורשת לפי $(*)$:

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = aT(x^3) + bT(x^2) + cT(x) + dT(1) = (-a-d)x^3 + (a-b+d)x + b$$

כנדרש.

■

# 5 שאלה 5

## 5.1 סעיף א

ראשית, נמצא את ערכו של $a$. לפי הנתון, ההעתקה לא הפיכה ולפיכך המטריצה המייצגת אותה אינה הפיכה גם היא, כלומר – הדטרמיננטה שלה שווה ל0. כעת, נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת וכך נגיע לערך $a$:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2a \\ a & 1 & 2a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \to C_3 - C_1 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - aR_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a-1 \\ 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1, R_1}{=} a^2 - (2a-1) \to a^2 - 2a + 1$$

כעת, לפי נוסחאת הכפל המקוצר: $(a-1)^2 = 0$, ולכן $a = 1$. כעת, נמצא את מטריצת המעבר מבסיס $E$ לבסיס $B$ בעזרת מציאת הצירופים הלינארים של $e_i$ בעזרת $b_i$:

$$e_1 = 0.5b_1 + 0.5b_2 + 0.5b_3 \quad e_2 = 0.5b_1 + 0.5b_2 - 0.5b_3$$
$$e_3 = 0.5b_1 - 0.5b_2 - 0.5b_3$$
$$\downarrow$$
$$M_B^E = [[e_1]_B \quad [e_2]_B \quad [e_3]_B] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

כעת, נוכל לייצג את $T(\alpha,\beta,\gamma)$ כך:

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = T(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2) + \gamma T(e_3)$$

נמצא את $T(e_i)$ בעזרת המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס $E$. נמצא את $M_E^B = (M_B^E)^{-1}$ ע"י דירוג $[M_B^E \mid I_4]$ עד להגעה ל$[I_4 \mid (M_B^E)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_i \to 2R_i \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \to -0.5R_2 \\ R_3 \to -0.5R_3}}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to M_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

בעמוד הבא נחשב את $[T]_E$.

## 5.1 סעיף א (המשך)