ממ"ן 14

יונתן אוחיון

16 בדצמבר 2017

שאלה 1

סעיף א

לא נכון. דוגמה נגדית תהיה $f = h, g = k$ (כאשר הפונקציות h, k הן הפונקציות המוגדרות בממן).
נוכל לחשב ולראות ש$h(0) = h(1) = 0$ ולכן היא לא חח"ע, אך גם ש$(h \circ k)(x) = x$:

$$(h \circ k)(x) = \begin{cases} k(x) & k(x) \leq 0 \\ k(x) - 1 & k(x) > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 - 1 & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = x$$

ולכן אם $(f \circ g) = id$, f אינה בהכרח חח"ע כנדרש.

■

סעיף ב

נכון. נניח בשלילה שg לא חח"ע, כלומר מתקיים

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ g(a) = g(b) \wedge a \neq b$$

נפעיל את f על שני הצדדים ונקבל:

$$f(g(a)) = f(g(b)) \equiv (f \circ g)(a) = (f \circ g)(b) \xRightarrow[(f \circ g) = id]{} a = b$$

בסתירה להנחה. לפיכך, g חח"ע כנדרש.

■

שאלה 1 – המשך

סעיף ג + ד

לא נכון. יהיו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרות באופן הבא: $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$. שתי הפונקציות לא מוגדרות בנקודה $x = 0$, ולכן $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R} \wedge \operatorname{Im} g \neq \mathbb{R}$ ולכן לא על. נשים לב ש-$(f \circ g) = id$:

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

נוכל לשים לב שהדוגמה הזאת עובדת גם עבור המקרה הנדרש בסעיף ד, שכן גם $g(x)$ לא על במקרה זה. לפיכך, אם $(f \circ g) = id$, לא f ולא g בהכרח על כנדרש.

■

סעיף ה

לא נכון. ניתן בתור דוגמה נגדית את אותה הדוגמה מסעיף א. ראשית, נגדיר את פונקציית ההרכבה $k \circ h$:

$$(k \circ h)(x) = \begin{cases} h(x) & h(x) \leq 0 \\ h(x) - 1 & h(x) > 0 \end{cases}$$

אזי $(f \circ g)(x) = (h \circ k)(x) = x$ כפי שהראינו בסעיף א, אך מחישוב נובע $h(0) = h(1) = 0$, ולכן לפי ההגדרה, $(k \circ h)(0) = (k \circ h)(1) = 0$ ולא מתקיים $(k \circ h) = id$ כנדרש.

■

סעיף ו

נכון. נניח ש-g על. אזי לפי הנתון מתקיים $f(g(x)) = x \Rightarrow g(f(g(x))) = g(x)$. מכיוון ש-$g$ על, לכל $y \in \mathbb{R}$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש-$g(x) = y$. לפיכך, $g(f(y)) = y$ לכל y, כלומר $\forall y \in \mathbb{R}, (g \circ f)(y) = y$ כנדרש.

■

שאלה 2

סעיף א

יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $\delta = \frac{1}{\pi}$. לפיכך, מתקיים

$$0 < \left|x - \tfrac{2}{\pi}\right| < \delta \Rightarrow x \in N_\delta^*\left(\tfrac{2}{\pi}\right) = \left(\tfrac{1}{\pi}, \tfrac{3}{\pi}\right)$$

לכן:

$$\tfrac{1}{x} \in \left(\tfrac{\pi}{3}, \pi\right) \wedge \tfrac{1}{x} \neq \tfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\tfrac{1}{x} \in \left(0, \sin\tfrac{\pi}{3}\right) \wedge \sin\tfrac{1}{x} \neq 1 \ \left(= \sin\tfrac{\pi}{2}\right)$$

ולכן $\sin\frac{1}{x} < 1$ ובפרט $0 < \sin\frac{1}{x} < 1$ (בטווח זה, $\sin x > 0$) ולכן

$$\forall x \in N_\delta^*\left(\tfrac{2}{\pi}\right),\ \left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor = 0 \Rightarrow \left|\left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor\right| = 0 \Rightarrow \left|\left\lfloor \sin\tfrac{1}{x} \right\rfloor\right| < \varepsilon$$

לכל $0 < \varepsilon$ ולכן $f(x) \xrightarrow[x \to \frac{2}{\pi}]{} 0$ כנדרש.

■

סעיף ב

נסמן: $f(x) = \sqrt{2x - \sin 3x}$. יהי $M_1 \in \mathbb{R}$. נבחר $M_2 = \frac{M_1^2+1}{2}$. אזי:

$$\begin{aligned} x > M_2 &\Rightarrow x > \frac{M_1^2 + 1}{2} \\ \text{נימוק: } \sin x \leq 1 \quad &\Rightarrow x > \frac{M_1^2 + \sin 3x}{2} \\ &\Rightarrow 2x > M_1^2 + \sin 3x \\ &\Rightarrow 2x - \sin 3x > M_1^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{2x - \sin 3x} > M_1 \Rightarrow f(x) > M_1 \end{aligned}$$

לכן, לפי הגדרה 4.55, $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$ כנדרש.

■

שאלה 3

סעיף א1

ההגדרה: נגיד כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם קיים $L \in \mathbb{R}$ כך שלכל $0 < \varepsilon$ קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x > M$ מתקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

נשלול: נגיד כי ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כש$x \to \infty$ אם לכל $L \in \mathbb{R}$, קיים $0 < \varepsilon$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $x > M$ כך ש$|f(x) - L| \geq \varepsilon$. שללנו את ההגדרה כנדרש.

■

סעיף ב1

יהיו $L, M \in \mathbb{R}$. נבחר $\varepsilon = \frac{1}{6}$ ונניח כי $x > M$. ידוע לנו ש$-1 \leq \cos x \leq 1$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$ ולכן מתקיים

$$4 \leq 5 + \cos x \leq 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{5 + \cos x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 \text{ :נימוק} \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{|4 - 5L - L\cos x|}{6} \leq \frac{|4 - 5L - L\cos x|}{5 + \cos x} = \left|\frac{4 - L(5 + \cos x)}{5 + \cos x}\right|$$

$$= \left|\frac{4}{5 + \cos x} - L\right| = |f(x) - L| \Rightarrow |f(x) - L| \geq \frac{1}{6}$$

ומצאנו ε כך ש$|f(x) - L| \geq \varepsilon$ לכל $L \in \mathbb{R}$ ולכן לא קיים ל$f(x)$ גבול ממשי לפי סעיף א1 כנדרש.

■

שאלה 3 – המשך

סעיף א2

ההגדרה: נגיד כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

נשלול: נגיד כי ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כש$x\to\infty$ אם קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ כך שהסדרה $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת במובן הצר. שללנו את ההגדרה כנדרש.

■

סעיף ב2

תהי (x_n) סדרה המוגדרת כך: $x_n=n\pi$. לפיכך לפי משפט 2.43ד, $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$. ממחזוריות פונקציית הקוסינוס ניתן לראות כי מתקיים

$$\cos x_{2n}=\cos 2\pi n=1$$
$$\cos x_{2n-1}=\cos(2n-1)\pi=-1$$

נסמן: $a_n=f(x_n)$. נבחר שתי תת־סדרות מכסות של (a_n): הסדרה a_{2n} והסדרה a_{2n-1}. נוכל לראות ששתי סדרות אלו הינן סדרות קבועות:

$$a_{2n}=\frac{4}{5+\cos 2\pi n}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n}=\frac{2}{3}$$
$$a_{2n-1}=\frac{4}{5+\cos(2n-1)\pi}=\frac{4}{4}=1\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=1$$

מכיוון ששתי תת־סדרות אלו הינן תת־סדרות מכסות וגבולותיהן שונים זה מזה, לפי משפט 3.31 הסדרה $a_n=f(x_n)$ מתבדרת. לכן לפי ההגדרה בסעיף א2 ל$f(x)$ לא קיים גבול ממשי כנדרש.

■

שאלה 4

סעיף א

נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\\
\text{משפט 4.45}\quad &= \frac{1}{1+\lim_{x\to 0}\cos x}\\
\text{טענה 4.44}\quad &= \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

טענות עזר

נוכיח כי $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ וכי $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$.

ראשית, נוכיח כי $\lim_{x\to\infty}x=\infty$: יהי $M_1\in\mathbb{R}$ ונבחר $M_2=M_1$. לפיכך, לכל $x>M_1$ מתקיים $x=f(x)>M_2=M_1$ וסיימנו. לפיכך, לפי משפט 4.53ה מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ כנדרש.

שנית, נוכיח את הגבול השני בעזרת הגדרת הגבול לפי היינה: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אפסה החסומה מלרע ע"י 0, כלומר $x_n>0$ לכל n. לפיכך לפי משפט 2.43ו, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty$. לכן, לפי הגדרה 4.51 מתקיים $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ כנדרש.

■

בעמוד הבא נראה את החישובים לסעיפים ב וג.

שאלה 4 – המשך

סעיף ב

נראה שהגבול אינו קיים. נפשט מעט את ביטוי הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{\sin^4 x}{x^7} &= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin^4 x}{x^4}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^3}\\ &= \left(\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x}{x}\right)^4\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^3}\\ \text{4.48 משפט} &= \lim_{x\to x_0}\frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

לפיכך:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}=\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\right)^3=\infty^3=\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^4 x}{x^7}=\infty$$

כעת, נוכיח ש-$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$ לפי שאלה 4.75ב. יהי $M\in\mathbb{R}$ ונבחר $0<\delta=|M|$. בנוסף נוכל לראות כי מכיוון שאנו מתקרבים ל0 בסביבת δ <u>נקובה</u> משמאל, M בהכרח שונה מ0. נניח בנוסף כי $-\delta<x<0$ ונחלק למקרים:

אם $M>0$ אז $\delta=|M|=M$ ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}-M<x<0\Rightarrow M>-x\Rightarrow M&>\frac{1}{M}>\frac{1}{-x}>\frac{1}{x^2}>\frac{1}{x^3}\\ \Rightarrow M&>\frac{1}{x^3}\Rightarrow f(x)<M\end{aligned}$$

אם $M<0$ אז $\delta=|M|=-M$ ולכן מתקיים:

$$\begin{aligned}M<x<0\Rightarrow M&>\frac{1}{M}>\frac{1}{x}>\frac{1}{x^3}\\ \Rightarrow M&>\frac{1}{x^3}\Rightarrow f(x)<M\end{aligned}$$

והראנו שמתקיים $f(x)<M$ לכל x בסביבה שמאלית של 0 ולכן $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}=-\infty$. כעת הראינו שהגבול של $f(x)$ בנקודה 0 משמאל שונה מהגבול שלה בנקודה מימין ולכן לא קיים לה גבול כנדרש.

■

שאלה 4 - המשך

סעיף ג

נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5+5x^3+1}{5x^5+3x^3-1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^5}(-3+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^5})}{\cancel{x^5}(5+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^5})}\\ &= \frac{-3+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{5+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}\\ &\overset{\text{לפי טענת העזר}}{=} \frac{-3+5\cdot 0+0}{5+3\cdot 0-0} = \boxed{-\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

טענת עזר לסעיף ד

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש-$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ קיים. אזי $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(-x)$. נוכיח בעזרת הגדרת הגבול בסדרות:

תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש-$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$ ונסמן $y_n=-x_n$. אזי לפי טענה 2.39 מתקיים $\lim_{n\to\infty}-x_n=\infty$, או במילים אחרות, $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$.

לפי הגדרת הגבול בסדרות, הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$ קיים. בנוסף, מכיוון ש-$x_n=-y_n$, גם הגבול $\lim_{n\to\infty}f(-y_n)$ קיים ובפרט שווה ל-L.

לכן, לכל סדרה $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}y_n=\infty$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}f(-y_n)=L$ ולכן לפי הגדרת הגבול בסדרות מתקיים $\lim_{x\to\infty}f(-x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)$ כנדרש.

■

סעיף ד

נסמן:

$$\begin{aligned}f(x)=\sqrt{x^2-\sin x}-x &\Rightarrow f(-x)=\sqrt{x^2+\sin x}+x\\ &\Rightarrow g(x)=\sqrt{x}+\frac{x}{x^2+\sin x},\ \ h(x)=x^2+\sin x\\ &\Rightarrow f(-x)=g(h(x))\end{aligned}$$

נראה ש-$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, אך לפי טענת העזר, די לנו לחשב את $\lim_{x\to\infty}g(h(x))$. בעמוד הבא ניעזר במשפט 4.39 על מנת להראות שגבול זה אכן קיים.

שאלה 4 – המשך

סעיף ד – המשך

לפי משפט 4.39, עלינו להראות שהגבולות הבאים קיימים:

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty \qquad \lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$$

נראה זאת בעזרת אריתמטיקה:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \frac{x}{x^2+\sin x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+\sin x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{\sin x}{x}}\end{aligned}$$

כעת, מכיוון ש-$\sin x$ חסומה ו-$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, מתקיים $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ (חסומה כפול אפסה) ולכן $\lim_{x\to\infty} x+\frac{\sin x}{x}=\infty$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{\sin x}{x}}=0$. לפיכך,

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$$

כנדרש. כעת, נחשב את הגבול השני:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} h(t) &= \lim_{t\to\infty} t^2+\sin t \\ &= \lim_{t\to\infty} t^2\left(1+\frac{\sin t}{t^2}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} t^2\cdot\left(1+\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t^2}\right)\end{aligned}$$

כעת, מכיוון ש-$\sin t$ חסומה ו-$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}=0$, מתקיים $\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t^2}=0$ (חסומה כפול אפסה). לפיכך,

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \lim_{t\to\infty} t^2\cdot\left(1+\lim_{t\to\infty}\frac{\sin t}{t^2}\right) = \lim_{t\to\infty} t^2 = \infty$$

כנדרש. לכן, לפי משפט 4.39 מתקיים $\lim_{x\to\infty} g(h(x))=\infty$, כלומר $\lim_{x\to\infty} f(-x)=\infty$. לכן, לפי טענת העזר, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

שאלה 4 - המשך

סעיף ה - $k=0$

נראה ש-$\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\lfloor\sin x\rfloor=0$. ראשית, נוכיח את הגבול מימין. יהי $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ונבחר $\delta=\frac{\pi}{2}$. אזי מתקיים

$$\begin{aligned}\forall 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<\sin x<1 &\Rightarrow \lfloor\sin x\rfloor=0\Rightarrow\lfloor\sin x\rfloor\in N_\varepsilon(0)\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\lfloor\sin x\rfloor=0\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\lfloor\sin x\rfloor=0\cdot\lim_{x\to 0^+}\sin\frac{x}{2}=0\end{aligned}$$

כעת, נוכיח את הגבול משמאל ונתחיל מהגבול משמאל של הפונקציה $g_1(x)=\lfloor\sin x\rfloor$. יהי $\varepsilon\in\mathbb{R}$ ונבחר $\delta=\frac{\pi}{2}$. לפיכך,

$$\begin{aligned}\forall -\frac{\pi}{2}<x<0,\ -1<\sin x<0 &\Rightarrow \lfloor\sin x\rfloor=-1\Rightarrow\lfloor\sin x\rfloor\in N_\varepsilon(-1)\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\lfloor\sin x\rfloor=-1\\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^-}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to 0^-}\lfloor\sin x\rfloor=-\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

כעת, נשתמש במשפט 4.39 על מנת להוכיח את הגבול הדרוש, כלומר עלינו להוכיח את הטענות הבאות:

1. $\sin x\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ .2 $\frac{t}{2}\xrightarrow[t\to 0]{} 0$ .3 קיימת סביבה נקובה $N^*_\delta(0)$ כך ש-$g(t)$ נמצא בתוכה

הטענה הראשונה נמצאת במשפט 4.44, ואת הטענה השנייה נראה מאריתמטיקה:

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}t=\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

ובנוסף הראינו, לפי הגדרת הגבול, כי בהכרח קיימת סביבה נקובה המקיימת את התנאי הדרוש. לפיכך, לפי משפט 4.39 מתקיים:

$$0=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=-\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{x}{2}$$

ולכן מתקיים $\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}\lfloor\sin x\rfloor=0$ כנדרש.

■

שאלה 4 – המשך

סעיף ה – $k = 1$

נתבונן בגבול $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor\sin x\rfloor$. נבחר $\delta=\frac{\pi}{2}$. עבור כל $0<x<\pi$ חוץ מ־$x=\frac{\pi}{2}$ מתקיים $0<\sin x<1$, ולכן גם $\lfloor\sin x\rfloor=0$. לכן, לכל $x\in N^*_\delta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $\lfloor\sin x\rfloor\in N_\varepsilon(0)$, כלומר $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}=0$. לפיכך, מתקיים

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin\frac{x}{2}\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{x}{2}}\lfloor\sin x\rfloor=0\cdot\lim_{x\to\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=0$$

כנדרש.

■

סעיף ה – $k = 2$

נתבונן בפונקציה $g_1(x)=\lfloor\sin x\rfloor$. נוכיח ש־$\lim_{x\to\pi^+}g_1(x)=-1$. נבחר $\delta=\pi$. אזי לכל $\pi<x<2\pi$ מתקיים $-1<\sin x<0$, כלומר $\lfloor\sin x\rfloor=-1$ ולכן $\lim_{x\to\pi^+}g_1(x)=-1$. כעת, נראה כי $\lim_{x\to\pi^-}g_1(x)=0$. נבחר $\delta=\frac{\pi}{2}$. אזי לכל $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ מתקיים $0<\sin x<1$, כלומר $\lfloor\sin x\rfloor=0$ ולכן $\lim_{x\to\pi^-}g_1(x)=0$.

בנוסף, נתבונן בפונקציה $g_2(x)=\sin\frac{x}{2}$. נוכיח כי $\lim_{x\to\pi}g_2(x)=1$ בעזרת משפט 4.39. ראשית, הפונקציה $\frac{t}{2}=\frac{1}{2}t$ הינה פונקציה לינארית ולכן $\lim_{t\to\pi}\frac{t}{2}=\frac{\pi}{2}$. בנוסף, לפי שאלה 4.77 מתקיים $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$. לבסוף, ברור שקיימת סביבה נקובה $N^*_\delta(\frac{\pi}{2})$ כך ש־$\frac{t}{2}$ נמצא בתוכה לפי הגדרת הגבול. לפיכך, $\lim_{t\to\pi}\sin\frac{t}{2}=1$.

כעת, נוכל להראות שהגבול של הפונקציה בשאלה אינו קיים. הגבול מימין הינו

$$\lim_{x\to\pi^+}\sin\frac{x}{2}\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^+}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to\pi^+}\lfloor\sin x\rfloor=1\cdot -1=-1$$

והגבול משמאל הינו

$$\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{x}{2}\lfloor\sin x\rfloor=\lim_{x\to\pi^-}\sin\frac{x}{2}\cdot\lim_{x\to\pi^-}\lfloor\sin x\rfloor=1\cdot 0=0$$

כמובן ש־$0\neq -1$ ולכן אין לפונקציה גבול בנקודה π כנדרש.

■