ממן 12

יונתן אוחיון

27 באוגוסט 2017

1 שאלה 1

1.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר $A^kB = B^kA$ לכל $AB = BA$ באינדוקציה:

1.0.1 $n = 1$

$$A^1B = BA^1 \to AB = BA$$

נכון לפי הנתון.

1.0.2 נניח שנכון ל$n = k$ ונוכיח ל$n = k + 1$

$$A^{k+1}B \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^kAB \underset{\text{הנתון}}{=} A^kBA \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} BA^kA \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} BA^{k+1}$$

עכשיו נוכל להשתמש בטענת העזר על מנת להוכיח את הטענה בשאלה.

1.1 הוכחה באינדוקציה

1.1.1 $n = 1$

$$(AB)^1 = A^1B^1 \to AB = AB$$

1.1.2 נניח שנכון ל$n = k$ ונוכיח ל$n = k + 1$

$$(AB)^{k+1} \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} AB(AB)^k \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} ABA^kB^k \underset{\text{טענת העזר}}{=} AA^kB^kB \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^{k+1}B^{k+1}$$

לכן, לכל $AB = BA$ מתקיים $(AB)^k = A^kB^k$.

■

2 שאלה 2

נניח שA הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$. לפיכך, $A^2 = I$, כלומר נצטרך למצוא את ערכי k שבהם $A^2 = I$. ראשית, נכפיל את המטריצה A בעצמה:

$$[A^2]_{11} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$[A^2]_{12} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{13} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{21} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{22} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$[A^2]_{23} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{31} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{32} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{33} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{bmatrix}$$

כלומר, נצטרך למצוא את ערכי הk הפותרים את המשוואה $k^2 - 1 = 1 \to k^2 = 2$. מכיוון שהמטריצה מעל השדה הסופי $\mathbb{Z}_7$ נצטרך לבדוק את הריבוע של כל איבר בשדה. לאחר הבדיקה נמצא כי $k \in \{3,4\}$. לפיכך, כאשר $k \in \{3,4\}$, המטריצה A הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

הוכחה:

$$\begin{aligned}
&A^2 + AB + I = 0 \\
&AB = -A^2 - I \\
&A^{-1} \cdot / \cancel{A}B = \cancel{A}(-A - A^{-1}) \\
&B = -A - A^{-1} \\
&B = (-A^2 - I)\cancel{A^{-1}} \; / \cdot A \\
&BA = -A^2 - I \\
&A^2 + BA + I = 0
\end{aligned}$$

כעת, מכיוון ששתי המשוואות שוות ל0 נוכל להשוות אותם ולהגיע ל$AB = BA$:

$$\cancel{A^2} + BA + \cancel{I} = \cancel{A^2} + AB + \cancel{I} \rightarrow BA = AB$$

■

3.2 סעיף ב

הוכחה:

$$AB \underset{\text{לפי הנתון}}{=} -BA \rightarrow |AB| = |-BA| \xrightarrow[\text{משפט 4.5.1}]{} (|A||B| = \overbrace{-|B||A|}^{(*)} \leftrightarrow |A| = 0 \vee |B| = 0)$$

מכיוון שלפחות אחת מהמטריצות סינגולרית, $|A| = 0 \vee |B| = 0$ והתנאי תמיד מתקיים. יש לציין שב$(*)$ הסימן של הדטרמיננטה תמיד שווה למינוס, שכן הגורם המשותף $(-1)^n$ תמיד בחזקה אי זוגית (לפי הנתון בשאלה).

■

4 שאלה 4

נניח שAB הפיכה ונגיע לסתירה. ראשית, ניווכח בעובדה שA הינה מסדר $m \times n$ כאשר $n < m$. לפיכך, נוכל לבצע מספר סופי של פעולות אלמנטריות ולקבל שורת אפסים. אם AB הפיכה, אזי גם מטריצה מהצורה $A \cdot \varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I) \cdot B$ הפיכה, אך יש בה שורת אפסים ולכן הגענו לסתירה להנחה וAB לא הפיכה.

■

5 שאלה 5

5.1 $\det B$

ראשית, נפתח את הדטרמיננטה של B בעזרת R_3:

$$\begin{aligned}|B| &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} - a_{34}M_{34} \\ &= 0M_{31} - 2M32 + 0M_{33} - 0M_{34} \\ &= 0 - 2M_{32} + 0 - 0 \\ &= -2M_{32}\end{aligned}$$

לפיכך, נצטרך רק לחשב את המינור M_{32} ולהכפילו ב-2 ע"מ לקבל את הדטרמיננטה של B.

כעת, נחשב את M_{32}:

$$\begin{aligned}M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix} &\underset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ -3(b-1) & -3(b+2) & -3(a-2) \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} -6\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} 6\begin{vmatrix} a+3 & a-1 & b+2 \\ 1 & 4 & 1 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{משפט 4.3.1}}{=} 6\begin{vmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{vmatrix} \underset{|A| = \frac{1}{3}}{=} 6 \cdot \frac{1}{3} = 2\end{aligned}$$

לפיכך, $M_{32} = 2$ ו$\det B = -4$.

5.2 $\det 2B^{-1}$

נחשב:

$$|2B^{-1}| \underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} 2^4|B^{-1}| = 16|B^{-1}| \underset{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}{=} \frac{16}{|B|} = \frac{16}{-4} = -4$$

לכן, $\det 2B^{-1} = \det B = -4$.

■

6 שאלה 6

נחשב את הדטרמיננטה של D:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & n & n & \dots & n \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\forall 2\le i\le n,\\ R_1\to R_1+R_i}}{=} \begin{vmatrix} n(n-1) & n(n-1) & n(n-1) & \dots & n(n-1) \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} n^{n-1} \cdot n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\forall 2\le i\le n,\\ R_i\to R_i-R_1}}{=} n^n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{משפט 4.3.8}}{=} n^n(n-1)(-1)^{n-1}$$

■