חשבון אינפיניטסימלי 1 – סיכום*

יונתן אוחיון

7 בפברואר 2018

המספרים הממשיים

אקסיומות השדה

השלשה $(\mathbb{R},\cdot,+)$ הינה **שדה** עם הפעולות $(\cdot,+)$ מעל $\mathbb{R}$, כלומר מתקיימות התכונות הבאות:

פעולת החיבור $(+)$

- קומוטטיביות (חילופיות):
$\forall x,y\in\mathbb{R}, x+y=y+x$
- אסוציאטיביות (קיבוץ):
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x+(y+z)=(x+y)+z$
- קיום איבר ניטרלי (1):
$\forall x\in\mathbb{R}, x+0=0+x=x$
- קיום איבר נגדי:
$\forall x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}, x+y=0$

פעולת הכפל $(\cdot)$

- קומוטטיביות (חילופיות):
$\forall x,y\in\mathbb{R}, x\cdot y=y\cdot x$
- אסוציאטיביות (קיבוץ):
$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
- קיום איבר ניטרלי (1):
$\forall x\in\mathbb{R}, x\cdot 1=1\cdot x=x$
- קיום איבר הופכי:
$\forall 0\neq x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}, x\cdot y=1$

בנוסף, שתי הפעולות ביחד מקיימות את תכונת הדיסטריבוטיביות (פילוג), המוגדרת כך:

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R}, x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$$

*נכתב לפי ההרצאות של אורי ברזנר באליאנס בסמסטר 2018א + תוספות מהספרים החדשים

המספרים הממשיים - המשך

אקסיומות ותכונות

אקסיומה 1 (אקסיומת השלמות) יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}$ כך שלכל $a \in A$ ו-$b \in B$ מתקיים $a \leq b$. אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$a \leq c \leq b$ לכל $a \in A, b \in B$.

תכונה 1 (תכונת ארכימדס) לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$x < n$ $\Longleftarrow$ לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < x$.

תכונה 2 (צפיפות הרציונליים בממשיים) לכל $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq y$) קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש-$x < q < y$.

הערך השלם, הערך השברי ותכונותיהם

- $\lfloor x \rfloor$ - הערך השלם ה"תחתון"
- $\lceil x \rceil$ - הערך השלם ה"עליון"
- $\langle x \rangle$ - החלק השברי, מוגדר כך: $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

סדרות

הגדרה: סדרה היא קבוצת מספרים (ממשיים), המסודרת לפי $\mathbb{N}$.

סימון:

במקרים בהם ידוע ההקשר, $a_1, a_2, a_3, \ldots \equiv (a_n)_{n=1}^{\infty} \equiv (a_n)$

דוגמאות:

- $(17, 17, 17, \ldots)$ $a_n = 17$, סדרה קבועה
- $(1, 2, 3, \ldots)$ $a_n = n$
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$ $a_n = \frac{1}{n}$, הסדרה ההרמונית, שואפת לאפס

גבול של סדרה

הגדרה: תהי (a_n) סדרה. אזי L ייקרא גבול הסדרה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
בכתיב כמתים, ההגדרה נראית כך:

$$\forall\varepsilon > 0\exists N \in \mathbb{N}\forall n > N, |a_n - L| < \varepsilon$$

שלילת ההגדרה נראית כך:

$$\exists\varepsilon > 0\forall N \in \mathbb{N}\exists n > N, |a_n - L| \geq \varepsilon$$

שלילה זו למעשה מראה שL נתון אינו גבול של הסדרה. אם ברצוננו להראות שהסדרה מתבדרת (כלומר אין לה גבול), נצטרך להראות שהביטוי מתקיים <u>לכל</u> $L \in \mathbb{R}$.

סימון:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \ a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$$

משפט 1 (משפט הסנדוויץ') יהיו $(a_n), (b_n), (c_n)$ שלוש סדרות כך ש$a_n \leq b_n \leq c_n$ כמעט לכל n וגם $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$. אזי גם b_n מתכנסת ו$\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

סדרות חסומות, סדרות אפסות

הגדרה: סדרה (a_n) תיקרא סדרה חסומה אם קיים $M > 0$ כך ש$|a_n| < M$.
הגדרה: סדרה (a_n) תיקרא סדרה אפסה אם $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

משפט 2 כל סדרה מתכנסת היא חסומה, כלומר אם סדרה אינה חסומה היא אינה מתכנסת. הערה: לא כל סדרה חסומה מתכנסת.

משפט 3 תהי (a_n) סדרה חסומה, (b_n) סדרה אפסה. אזי $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

אריתמטיקה של גבולות

יהיו $(a_n), (b_n)$ סדרות כך שמתקיים $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L, \ b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} M$. אזי מתקיימים:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot M \tag{2}$$