ממ"ן 16

יונתן אוחיון

17 בינואר 2018

שאלה 1א

ראשית, נחשב את גבול הסדרה $a_n = n\sin\frac{1}{n}$:

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$\text{היינה: לכל } 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n}{x_n}$$

$$\text{בפרט עבור } x_n = \frac{1}{n} \quad = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}$$

לפיכך, הראינו כי $\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$. כעת, נראה ש$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$:

$$0 = \lim_{x\to 0}\sin x$$

$$\text{היינה: לכל } 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n \quad = \lim_{n\to\infty}\sin x_n$$

$$\text{בפרט עבור } x_n = \frac{1}{n} \quad = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}$$

לפיכך הראינו כי $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n} = 0$. כעת, נראה כי הגבול הבא שווה לe:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{n\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}\right)^{n\sin\frac{1}{n}}$$

$$\text{טענה 6.15} \quad = \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}}$$

$$\text{היינה} \quad = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

לפיכך מתקיים $e \xrightarrow[n\to\infty]{} (1+\sin\frac{1}{n})^n$ כנדרש.

■

שאלה 1ב

נתבונן בפונקציה $f(x) = |x|^{x^2}$. נוכל לראות שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty}|x| \le \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}|x|^{x^2}$$

בנוסף, ידוע כי $\lim_{x\to\infty}|x| = \infty$. לכן, מקריטריון ההשוואה לאינסוף באנלוגיה לפונקציות נובע כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

מכך נובע כי

$$0 = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|^{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right|^{x^2}$$

כעת, נציב $t = \frac{1}{x}$ (כמובן ש$t \to 0$) ונקבל את הגבול הבא:

$$0 = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{1}{x}\right|^{x^2} = \lim_{t\to 0}|t|^{\frac{1}{t^2}}$$

כלומר, הוכחנו כי מתקיים

$$\lim_{t\to 0}|t|^{\frac{1}{t^2}} = 0$$

כנדרש.

■

שאלה 2א

נתבונן בגבול $\lim_{x\to\infty} e^{-x}$:

$$\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty \implies \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0 = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \qquad (1)$$

בנוסף, $\lim_{n\to\infty} \pi n = \infty$. לפיכך, לפי (6) ומהיינה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\pi n} = 0$$

כעת נתבונן בשתי תת סדרות המכסות את $\sin^2 \pi n$: $\sin^2 2\pi n$ ו-$\sin^2 2\pi n + \pi$. נתבונן בגבולותיהן:

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 2\pi n \underset{\text{מחזוריות } \sin}{=} \sin^2 2\pi = \sin^2 0 = 0$$

בנוסף,

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 2\pi n + \pi \underset{\text{מחזוריות } \sin}{=} \sin^2 2\pi + \pi = \sin^2 \pi = 0$$

מכיוון שתת סדרות אלו מכסות את $\sin^2 \pi n$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2 \pi n = 0$$

לפיכך, מתקיים

$$0 = \lim_{n\to\infty} e^{-\pi n} + \lim_{n\to\infty} \sin^2 \pi n = \lim_{n\to\infty} e^{-\pi n} + \sin^2 \pi n = \lim_{n\to\infty} f(\pi n)$$

והוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} f(\pi n) = 0$ כנדרש.

■

שאלה 2ב

נסמן $A=[0,\infty)$. ראשית נראה כי 0 חסם מלרע של $f(A)$. יהי $x\in A$. אזי:

$$0<e\Longrightarrow 0<\frac{1}{e}\Longrightarrow 0=0^x<\left(\frac{1}{e}\right)^x=\frac{1}{e^x}=e^{-x}\Longrightarrow 0<e^{-x}$$

בנוסף, ידוע כי לכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $0\leq y^2$. לפיכך, $0\leq\sin^2 x$. לפיכך, עבור $x\in A$ מתקיים

$$0<e^{-x}+\sin^2 x$$

והוכחנו ש0 חסם מלרע של $f(A)$. כעת, מהסעיף הקודם נובע כי $\exists n\in\mathbb{N}\forall c>0, f(\pi n)<c$. בנוסף, מכיוון ש$f(\pi n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, אי שוויון זה נשמר לכל n טבעי ולכן כל $c>0$ אינו חסם מלרע של f.
לפיכך $\inf f(A)=0$ כנדרש.

■

שאלה 2ג

נניח שf מקבלת מינימום בA, כלומר קיים $x_0\in A$ כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x_0)\leq f(x)$. לפיכך לפי טענה 3.13 והסעיף הקודם מתקיים

$$f(x_0)=0\Longrightarrow e^{-x_0}+\sin^2 x=0\Longrightarrow \sin^2 x_0=-e^{-x_0}$$

אבל כפי שראינו בסעיף הקודם $-e^{-x}<0\Longrightarrow e^{-x}>0$ וגם $\sin^2 x>0$ והגענו לסתירה. לפיכך, לא קיים x_0 שכזה ולכן לא קיים $f(x_0)$ המקיים את הטענה ולכן f לא מקבלת מינימום בA כנדרש.

■

שאלה 3א

תחום הגדרה

מכיוון ש$\sin$ ו$\sin^2$ מוגדרות בכל $\mathbb{R}$ ו$\frac{1}{x}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, הפונקציה $g(x) = \sin^2 x \sin \frac{1}{x}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$. מכיוון שהגדרנו את f כך ש$f(0) = 0$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל $\mathbb{R}$.

■

תחום רציפות

נראה שf רציפה בכל $\mathbb{R}$. נניח ש$x_0 \in \mathbb{R}$ נק' אי רציפות מסוג כלשהו של f ונחלק למקרים:

אם $x_0 \neq 0$, קיימת סביבה של x_0 שבה f מתלכדת עם $\sin^2 x \sin \frac{1}{x}$. מכיוון שפונקציה זו הינה כפל של הרכבה של פונקציות אלמנטריות, היא רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה. כפי שראינו לעיל, פונקציה זו מוגדרת לכל $x \neq 0$ ולכן גם רציפה בx_0, בסתירה להנחה שזו נק' אי רציפות.

נשאר לנו להראות שf רציפה ב0. מכיוון ש$\sin \frac{1}{x}$ חסומה ו$\sin^2 x$ אפסה בסביבת 0, מתקיים

$$\lim_{x \to 0} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} = 0$$

בנוסף, ידוע לנו ש$f(0) = 0$ לפי הגדרתה של f ומכיוון ש$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, f רציפה ב0 בסתירה להנחה.

לפיכך, הראינו שלf לא קיימות נק' אי רציפות משום סוג ולכן היא רציפה בכל $\mathbb{R}$ כנדרש.

■

תחום גזירות

נראה שf גזירה בכל $\mathbb{R}$ ע"י חלוקה למקרים. ראשית, נתבונן בפונקציות המרכיבות את f כאשר $x \neq 0$:

- $\frac{1}{x}$ הינה פונקציה רציונלית ולכן גזירה בכל נק' בתחום הגדרתה, כלומר בכל $x \neq 0$. נגזרתה בתחום זה (לפי כלל החזקה): $-\frac{1}{x^2}$.
- $\sin$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ולכן גם $\sin^2$ גזירה בכל $\mathbb{R}$. נגזרותיהן (בהתאמה): $\cos x, 2\sin x \cos x$.
- לפיכך, ההרכבה $\sin \frac{1}{x}$ גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה לפי משפט 7.21 ונגזרתה בתחום זה היא $-\frac{\cos x}{x^2}$.

לפיכך, לפי כלל המכפלה f גזירה בכל $x \neq 0$ ונגזרתה בתחום זה היא:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin^2 x \sin \frac{1}{x}\right)' \\ &= (\sin^2 x)' \sin \frac{1}{x} + \left(\sin \frac{1}{x}\right)' \sin^2 x \\ &= 2\sin x \cos x \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x^2} = \sin 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

ומצאנו את הנגזרת של f בכל $x \neq 0$. בעמוד הבא נראה שf גזירה ב0 ומתקיים $f'(0) = 0$.

שאלה 3א - המשך

תחום גזירות - המשך

נתבונן במקרה שנותר לנו להוכיח, בו $x = 0$. נתבונן בהגדרת הנגזרת בנקודה:

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\
f(0)=0 \text{ :נימוק} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h \sin \frac{1}{h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin h \sin \frac{1}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \sin h \sin \frac{1}{h}
\end{aligned}$$

$\sin h = 0$ אפסה, $\sin \frac{1}{h}$ חסומה

לכן, f גזירה ב-0 ובפרט מתקיים $f'(0) = 0$. לפיכך, נוכל להגדיר את הנגזרת של f באופן הבא:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin 2x \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ומצאנו את תחום הגזירות וערך הנגזרת של f בכל $\mathbb{R}$ כנדרש.

■

שאלה 3ב

תחום הגדרה

מכיוון ש$|x|$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ו$\ln x$ מוגדרת לכל $x > 0$, הפונקציה $g(x) = |\ln| x$ מוגדרת לכל $x > 0$.

■

תחום רציפות

מכיוון ש$\ln x$ רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה (כלומר בכל $x > 0$) ו$|x|$ רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$, g רציפה בכל $x > 0$, כלומר בכל נקודה בתחום הגדרתה.

■

תחום גזירות

ראשית, g אינה גזירה בכל $x \leq 0$, שכן היא אינה רציפה שם. הפונקציה g הינה הרכבה של שתי פונקציות: $i(x) = \ln x$, $h(x) = |x|$, כלומר $g(x) = h(i(x))$. לפיכך, לפי משפט 7.21, g גזירה ב$x_0 > 0$ אמ"מ i גזירה בx_0 וh גזירה ב$i(x)$. נראה, אם כן, שg גזירה בכל $0 < x \neq 1$. יהי $0 < x_0$ ונחלק למקרים:

אם $0 < x_0 < 1$, i גזירה בx_0 (שכן היא נמצאת בתחום ההגדרה שלה וi גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה). בנוסף, $\ln x_0 < 0$ וh גזירה בx_0 (שכן היא גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה שאינה 0). לפיכך, g גזירה בx_0 ולפי כלל השרשרת נגזרתה בנקודה זו היא:

$$f'(x_0) = -\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\ln x}{x}$$

אם $1 < x_0$, i כמובן גזירה בx_0. בנוסף, $0 < \ln x_0$ וh גזירה ב$i(x_0)$. לפיכך, g גם היא גזירה בx_0 ולפי כלל השרשרת נגזרתה בנקודה זו היא:

$$f'(x_0) = \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

נותר לנו כעת להוכיח שg אינה גזירה ב$x_0 = 1$. כפי שנאמר לעיל, g הינה הרכבה של $|x|$ ושל $\ln x$ ולכן גזירה ב1 אממ $\ln x$ גזירה ב1 ו$|x|$ גזירה ב$\ln 1$. כפי שאנו יודעים, $\ln x$ גזירה ב1 שכן היא גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה, אבל $\ln 1 = 0$ ו$|x|$ אינה גזירה ב0 ולכן g לא גזירה ב1.

לפיכך, g גזירה בכל $0 < x \neq 1$ ונגזרתה היא:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-\ln x}{x} & 0 < x < 1 \\ \frac{\ln x}{x} & 1 < x \end{cases}$$

ומצאנו את תחום הגזירות של g כנדרש.

■

שאלה 4

תהי f פונקציה זוגית ב$\mathbb{R}$, כלומר $f(-x)=f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נניח בנוסף כי f גזירה ב0. נתבונן בנגזרת השמאלית של f ב0:

$$\begin{aligned}
f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)}{h} \\
f \text{ זוגיות } &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-h)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0)}{h} \\
&= -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0)}{h} \\
&= -\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

ובנגזרת הימנית ב0:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

לפי (1) והנתון מתקיים

$$f'_+(0) = -f'_+(0) \Longrightarrow 2f'_+(0) = 0 \Longrightarrow f'_+(0) = 0$$

לפי הנתון, $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, כלומר הנגזרת הימנית והנגזרת השמאלית שוות ובפרט שוות ל0 ולכן $f'(0)=0$ כנדרש.

■

שאלה 5א

רציפות משמאל ב0

נראה שf רציפה משמאל ב0. לפי הגדרת f, עבור $x<0$ היא מתלכדת עם הפונקציה $g(x)=x+xe^{\frac{1}{x}}$.
לפיכך, על מנת לחשב את הגבול של f ב0 משמאל עלינו לחשב את הגבול של g ב0 משמאל:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} g(x) &= \lim_{x\to 0^-} x+xe^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} \\
t=-\frac{1}{x}, t\to\infty \text{ :הצבה} &= \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}}{t} \\
&= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \cdot \lim_{t\to\infty} e^{-t} \\
&= 0\cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

לפיכך,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x+xe^{\frac{1}{x}} = 0$$

לפי הגדרת f מתקיים $f(0)=0$ ולכן $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$ וf רציפה משמאל ב0 כנדרש.

■

רציפות מימין ב0 – $a=2$

נראה שf רציפה מימין כאשר $a=2$. לפי הגדרת f היא מתלכדת עם $h(x)=\frac{2-2\cos x}{\sin x}$ עבור $x>0$
ולכן עלינו לחשב את הגבול של h ב0 מימין:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} h(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2-2\cos x}{\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\sin x} \\
&= 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{\sin x}(1+\cos x)} \\
&= 2\lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \frac{1}{1+\lim_{x\to 0^+}\cos x} \\
&= 2\cdot 0\cdot \frac{1}{2} = 0 = f(0)
\end{aligned}$$

ומכיוון ש$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ כאשר $a=2$, היא רציפה מימין ב0. בפרט מכיוון שהיא תמיד רציפה משמאל ב0 היא רציפה ב0 כאשר $a=2$ כנדרש.

■

שאלה 5א – המשך

אי־רציפות מימין ב0 – $a \neq 2$

נראה שf אינה רציפה מימין ב0 כאשר $a \neq 2$. נתבונן בגבולות הבא:

$$\lim_{x\to 0^+} a - 2\cos x = a - 2\lim_{x\to 0^+} \cos x = a - 2$$

גבול זה שונה מ0 כאשר $a \neq 2$, קטן מ0 כאשר $a < 2$ וגדול מ0 כאשר $a > 2$. בנוסף, מכיוון ש$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ מתקיים $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} = \infty$.

נחלק למקרים. נתבונן בגבול של $h(x)$ במקרה שבו $a > 2$ ב0 מימין:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} h(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{a - 2\cos x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (a - 2\cos x) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
&= (a-2) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
\text{נסמן: } 0 < k = a - 2 \quad &= k \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
&= k \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

לפיכך כאשר $a > 2$, f הולכת לאינסוף כאשר $x \to 0$ מימין ובפרט לא הולכת ל0. לפיכך, f לא רציפה מימין ב0 כאשר $a > 2$ ולכן לא רציפה ב0.

אם $a < 2$ אז קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש$-m = a - 2$, או $m = 2 - a$. בנוסף, לפי משפט 4.53ז, נתבונן, אם כן, בגבול מימין של $-h(x)$ כאשר $x \to 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} -h(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x - a}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} (2\cos x - a) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
&= (2-a) \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
\text{נסמן: } 0 < m = 2 - a \quad &= m \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} \\
&= m \cdot \infty = \infty
\end{aligned}$$

לפיכך לפי משפט 4.53ז מתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ובפרט הגבול אינו 0. לפיכך, f אינה רציפה מימין ב0 כאשר $a < 2$ ולכן לא רציפה ב0.

לפיכך, כאשר $a \neq 2$, f אינה רציפה ב0 כנדרש.

■

שאלה 5ב

לפי הסעיף הקודם, f רציפה ב0 אמ"מ $a=2$, ולכן היא אינה גזירה עבור כל $a\neq 2$. נראה שהיא כן גזירה ב$a=2$. ראשית נגדיר מחדש את f:

$$f(x)=\begin{cases} x+xe^{\frac{1}{x}} & x<0 \\ 0 & x=0 \\ \frac{2-2\cos x}{\sin x} & x>0 \end{cases}$$

נחשב את הנגזרת השמאלית של f ב0:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}(1+e^{\frac{1}{h}})}{\cancel{h}} \\ &= 1+\lim_{h\to 0^-}e^{\frac{1}{h}} \\ t=-\frac{1}{h}, t\to\infty \text{ :הצבה} &= 1+\lim_{t\to\infty}e^{-t}=1 \end{aligned}$$

לפיכך f גזירה משמאל ב0 ובפרט ערך הנגזרת שלה בנקודה זו שווה ל1. נחשב את הנגזרת הימנית של f ב0:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{2-2\cos h}{h\sin h} \\ &= 2\lim_{h\to 0^+}\frac{1-\cos h}{h\sin h} \\ &= 2\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin^{\cancel{2}} h}{h\cancel{\sin h}(1+\cos h)} \\ &= 2\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{1}{1+\lim_{h\to 0^+}\cos h} \\ &= 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1 \end{aligned}$$

לפיכך f גזירה מימין ב0 ובפרט ערך נגזרתה הימנית בנקודה זו שווה ל1.

לפיכך, מכיוון שf גזירה מימין ומשמאל ב0 ומתקיים $f'_-(0)=f'_+(0)=1$, מתקיים $f'(0)=1$ ומצאנו את ערכי a עבורם f גזירה ב0 כנדרש.

■