

האוניברסיטה הפתוחה

20475

## **חשבון אינפיניטסימלי 2**

**חוברת הקורס - אביב 2018**

כתב: ד"ר ודים גרינשטיין

מרץ 2018 - סמסטר אביב - תשע"ח

**פנימי – לא להפצה.**

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

## תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת 2 נקודות זכות
ג	תיאור המטלות
1	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
5	ממ"ן 13
7	ממ"ן 14
9	ממ"ח 01
13	ממ"ן 15
15	ממ"ח 02
19	ממ"ן 16
21	ממ"ן 17



## אל הסטודנטים

אנו מקדמים את פניכם עם הצטרפותכם אל הלומדים את הקורס "חשבון אינפיניטסימלי 2".

בחוברת זו תמצאו את לוח הזמנים של הקורס ואת המטלות.

באתר האינטרנט של הקורס תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה, כולל גישה לשיעורי וידאו. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת:

<http://www.openu.ac.il/shoham>

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה באינטרנט [www.openu.ac.il/Library](http://www.openu.ac.il/Library)

מרכז ההוראה של הקורס הוא ד"ר ודים גרינשטיין. ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון 09-7781424 בימי ה', בין השעות 16:30-18:00.
- בפקס 09-7780631.
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - [vadimg@openu.ac.il](mailto:vadimg@openu.ac.il)

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודיכם.

בברכה,  
צוות הקורס

**לוח זמנים ופעילויות (20475 / ב2018)**

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח	
				ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	16.3.2018-6.3.2018	יחידה 1			
2	23.3.2018-18.3.2018	יחידות 2,1			
3	30.3.2018-25.3.2018 (ו ערב פסח)	יחידות 2,1			ממ"ן 11 30.3.2018
4	6.4.2018-1.4.2018 (א-ו פסח)	יחידות 3,2			
5	13.4.2018-8.4.2018 (ה יום הזכרון לשואה)	יחידות 3,2			ממ"ן 12 13.4.2018
6	20.4.2018-15.4.2018 (ד יום הזיכרון, ה יום העצמאות)	יחידה 3			
7	27.4.2018-22.4.2018	יחידות 4,3			ממ"ן 13 27.4.2018
8	4.5.2018-29.4.2018 (ה ל"ג בעומר)	יחידה 4			
9	11.5.2018-6.5.2018	יחידות 5,4			ממ"ן 14 11.5.2018
10	18.5.2018-13.5.2018 (א יום ירושלים)	יחידה 5		ממ"ח 01 18.5.2018	
11	25.5.2018-20.5.2018 (א שבועות)	יחידות 6,5			ממ"ן 15 25.5.2018
12	1.6.2018-27.5.2018	יחידה 6		ממ"ח 02 1.6.2018	
13	8.6.2018-3.6.2018	יחידות 7,6			ממ"ן 16 8.6.2018
14	15.6.2018-10.6.2018	יחידה 7			
15	19.6.2018-17.6.2018	חזרה			ממ"ן 17 19.6.2018

**מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד**

\* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

## התנאים לקבלת 6 נקודות זכות

על מנת לקבל נקודות זכות בקורס עליכם לעמוד בתנאים הבאים :

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 16 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל ציון סופי בקורס 60 נקודות לפחות.

## תיאור המטלות

בחוברת הקורס 7 מטלות מנחה (ממ"נים) ו-2 מטלות מחשב (ממ"חים) במשקל כולל של 30 נקודות. עליכם להגיש במהלך הקורס מטלות שמשקלן הכולל 16 נקודות לפחות. אנו ממליצים מאוד להגיש את כל המטלות על מנת שתיחשפו למגוון גדול של שאלות.

בטבלה שלהלן מופיעה רשימת הממ"נים, היחידות בהן הם עוסקים ומשקליהם :

שם המטלה	נושא המטלה	משקל המטלה
ממ"ח 01	יחידה 5	2 נקודות
ממ"ח 02	יחידה 6	2 נקודות
ממ"ן 11	יחידה 1	4 נקודות
ממ"ן 12	יחידות 1,2	4 נקודות
ממ"ן 13	יחידה 3	3 נקודות
ממ"ן 14	יחידה 4	4 נקודות
ממ"ן 15	יחידה 5	4 נקודות
ממ"ן 16	יחידה 6	4 נקודות
ממ"ן 17	יחידה 7	3 נקודות

## **הערות חשובות לתשומת לבכם!**

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחשוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

**עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.**

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית  
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**



# מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 1

מספר השאלות: 7

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: 2018

מועד אחרון להגשה: 30.3.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת מהשאלות 1 - 6 בממ"ן.

שאלה 1 (10 נקודות)

הוכיחו כי  $\int_2^4 \frac{dx}{p(x)} \leq \frac{2}{7}$  כאשר  $p(x) = x^3 + (x-1)^2 - 2$ .

שאלה 2 (15 נקודות)

הראו כי  $0 < \int_0^{\sqrt{2}} x \sin(\sqrt[3]{4x^2}) dx \leq 1$

(שימו לב כי האי-שוויון השמאלי הוא אי-שוויון חזק)

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי  $f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & x < -\pi/2 \text{ or } x > \pi/2 \end{cases}$

א. הראו שאם  $F(x)$  קדומה של  $f(x)$  ב- $\mathbb{R}$ , אז לכל  $x_1 < x_2$  מתקיים

$$0 \leq F(x_2) - F(x_1) \leq 2$$

ב. מצאו את הקדומה של  $f(x)$  ב- $\mathbb{R}$  העוברת דרך הנקודה  $(0,1)$ .

**שאלה 4 (15 נקודות)**

חשבו את  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \int_0^t \ln(e^x + x^2) dx$

**שאלה 5 (15 נקודות)**

תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

הוכיחו שקיים  $x \in [a, b]$  כך ש-  $\int_a^x f(t) dt = \int_x^b f(t) dt$

**שאלה 6 (10 נקודות)**

הפונקציות  $f(x)$ ,  $g(x)$  מוגדרות ואינטגרביליות בקטע  $[-5, 5]$  ומתקיים:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \pi, \int_2^5 f(x) dx = -3, \int_{-5}^5 g(x) dx = 3, \int_{-5}^{-2} g(x) dx = \pi$$

האם ייתכן כי  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [-5, 5]$ ? נמקו היטב!

**שאלת רשות**

תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-שלילית בקטע  $[0, 1]$ . נסמן  $a_n = \int_0^1 (f(x))^n dx$

הוכיחו כי לסדרה  $(a_n)$  קיים גבול סופי אם ורק אם  $f(x) \leq 1$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**שאלה 7 (20 נקודות)**

שאלה זו ופתרונה באים להמחיש את השימוש באינטגרלים מסוימים ובהגדרתם לפי רימן לחישוב גבולות של סדרות מסוימות.

(8 נק') א. תהי  $f(x)$  רציפה ב-  $[a, b]$ . הוכיחו כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx$$

(2 נק') ב. הביעו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$  כאינטגרל מסוים בהנחה ש-  $f(x)$  רציפה בקטע המתאים.

(10 נק') ג. חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 4} + \frac{n}{n^2 + 9} + \dots + \frac{n}{n^2 + (n-1)^2} \quad (i)$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad (ii)$$

# מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1, 2

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: 2018

מועד אחרון להגשה: 13.4.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

### שאלה 1 (30 נקודות)

חשבו:

א.  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$     ב.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^{3/2}} dx$     ג.  $\int \frac{\tan x}{1 + \tan x} dx$

ד.  $\int \frac{\ln(x+1)}{x^3} dx$     ה.  $\int \frac{x \arctan x}{\sqrt{x^2+1}} dx$     ו.  $\int \frac{dx}{4 + e^{4x}}$     ז.  $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$

ח. (רשות)  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1} + \sqrt{e^x-1}}$     ט. (רשות)  $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

### שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו:

א.  $\int_{-1}^3 x|x-1| dx$     ב.  $\int_{-4}^1 \frac{x+|x|}{2} \arctan(3x) dx$

ג.  $\int_0^1 (e^x(x-1)^{2018} - e^{1-x}x^{2018}) dx$     ד.  $\int_0^1 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$

ה. (רשות)  $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

**שאלה 3 (20 נקודות)**

א. מצאו את כל הערכים של  $\alpha$  עבורם 
$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{(x^2 + \alpha)^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + \alpha)^2} dx = \frac{1}{4}$$

ב. תהי  $f(x)$  בעלת שתי נגזרות רציפות בקטע  $[a, b]$  ומקיימת  $f(a)f'(a) = f(b)f'(b)$ .

הראו כי 
$$\int_a^b f(x)f''(x)dx \leq 0$$

ג. (רשות) הוכיחו כי אם  $f$  רציפה ב- $[0, 1]$  אז 
$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)dx$$

**שאלה 4 (10 נקודות)**

מצאו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x) = x \sin(\pi x)$  ובין ציר ה- $x$  בקטע  $[0, 2]$ .

**שאלה 5 (20 נקודות)**

הפרבולה  $y^2 = 2x$  מחלקת את העיגול  $x^2 + y^2 \leq 8$  לשני תחומים.

א. מצאו את יחס השטחים של התחומים האלה.

ב. חשבו את נפחו של גוף הסיבוב המתקבל מסיבוב סביב ציר ה- $x$  של התחום הקטן יותר.

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2018

מועד אחרון להגשה: 27.4.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית: היא יכולה להחליף כל אחת מהשאלות 2 - 5 בממ"ן.

שאלה 1 (20 נקודות)

לגבי כל אחד מהאינטגרלים הבאים קבעו אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א.  $\int_{-1}^{\infty} x^2 \cos(x^5) dx$

ב.  $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} dx$

ג.  $\int_0^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$

שאלה 2 (20 נקודות)

מצאו את כל הערכים של  $\alpha$  ו- $\beta$  עבורם  $\beta > \alpha$  והאינטגרל הבא מתכנס:

$$\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^\alpha + x^\beta} dx$$

**הדרכה:** הראו כי לביטוי  $\frac{x - \sin x}{x^3}$  יש גבול סופי שונה מ-0 כאשר  $x \rightarrow 0$  והשתמשו בעובדה זו כדי לטפל ב"נקודה בעייתית" של  $x = 0$  של האינטגרל.

**שאלה 3 (20 נקודות)**

תהי  $f(x)$  רציפה בקטע  $[0, \infty)$  ומקיימת  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f(x) = 1$ .

חשבו את  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx$ .

**שאלה 4 (20 נקודות)**

תהי  $f(x)$  עולה וחיובית בקטע  $[a, \infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  ו- $f'(x)$  רציפה ב- $[a, \infty)$ .

הוכיחו את התכנסות האינטגרל  $\int_a^\infty \frac{f'(x)}{f(x)} \sin(f(x)) dx$ .

**שאלה 5 (20 נקודות)**

הוכיחו או הפריכו על-ידי דוגמה נגדית כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $\int_1^\infty f(x) dx$  מתכנס אז גם  $\int_4^\infty f(2x) dx$  מתכנס.

ב. אם  $f(x)$  רציפה ב- $[1, \infty)$ , הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים והאינטגרל  $\int_1^\infty f(x) dx$  מתכנס, אז

האינטגרל  $\int_1^\infty f^2(x) dx$  מתכנס.

**שאלת רשות**

נניח כי  $\int_a^\infty f(x) dx$  מתכנס ו- $f(x)$  רציפה במידה שווה ב- $[a, \infty)$ .

הוכיחו כי  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 4

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב2018

מועד אחרון להגשה: 11.5.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

### שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו את  $\arctan(1.1)$  בעזרת שלושת האיברים הראשונים בפיתוח טיילור מתאים של  $\arctan x$  (כלומר בעזרת פיתוח מסדר 2 בנקודה מתאימה) והוכיחו שהשגיאה אינה עולה על  $10^{-3}$ .

### שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו ערך מקורב של  $\int_0^{1/2} \sin(x^2) dx$  כך שהשגיאה לא תעלה על  $10^{-2}$ .

### שאלה 3 (20 נקודות)

היעזרו בפיתוח מקלורן על מנת לחשב את הגבולות הבאים:

א.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{e^{x^2} \tan x - x}$

ב.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \frac{1}{n \sin(\frac{1}{n})} - 1 \right)$  (שימו לב: מדובר בגבול של סדרה).

**שאלה 4 (20 נקודות)**

רכב מתחיל את נסיעתו בנקודה  $A$  ונוסע ממנה בכביש ישר לנקודה  $B$  בה הוא עוצר. המרחק בין  $A$  ל- $B$  הוא  $S$ , זמן הנסיעה הוא  $T$ .

הוכיחו כי במסלול הנסיעה קיימת נקודה בה תאוצה של הרכב לא קטנה בערכה המוחלט מ-  $4S/T^2$ .

הערה למי ששכח לגמרי את העובדות הפיסיקליות הבסיסיות: אם דרך כפונקציה של זמן מוגדרת על-ידי  $f(t)$  אז המהירות היא  $f'(t)$  והתאוצה היא  $f''(t)$ .

**שאלה 5 (20 נקודות)**

תהי  $f(x)$  מוגדרת לכל  $x$  ומקיימת  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$ ,  $f''(0) = 2$ .

הוכיחו כי לכל  $x \neq 0$  מתקיים  $\frac{f(x)}{x} = 1 + x(1 + \alpha(x))$  כאשר  $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha(x) = 0$ .

**שאלת רשות**

נניח כי לפונקציה  $f(x)$  נגזרת שניה חסומה בקטע  $[0, \infty)$ , ולכל  $n$  טבעי בקטע  $[n, n+1]$  יש אפס של  $f(x)$ .

הוכיחו כי  $f(x)$  חסומה ב-  $[0, \infty)$ .



# מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

משקל המטלה: 2 נקודות

מספר השאלות: 20

מועד אחרון להגשה: 18.5.2018

סמסטר: ב2018

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא

בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

בכל אחת מהשאלות 1 – 7 מופיעות שתי טענות שמסומנות ב-1 ו-2. קבעו לגבי כל אחת מהן אם היא נכונה או לא.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.

ב – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות.

ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

בכל אחת מהשאלות 8 – 19

סמנו: א – אם הטור מתכנס בהחלט.

ב – אם הטור מתכנס בתנאי.

ג – אם הטור מתבדר.

שאלות 1 ו-2 מתייחסות לטור  $\sum n^a b^n$ .

### שאלה 1

1. עבור  $a < -1$  הטור מתכנס (לכל ערך של  $b$ ).
2. עבור  $a < 0$  הטור מתכנס לכל  $-1 \leq b < 1$ .

### שאלה 2

1. עבור  $|b| < 1$  הטור מתכנס (לכל ערך של  $a$ ).
2. עבור  $a < -|b|$  הטור מתכנס.

### שאלה 3

1. אם  $a_n \rightarrow 0$  אז  $\sum (-1)^n a_n a_{n+1}$  מתכנס.
2. אם  $\sum a_n^4$  מתכנס אז גם  $\sum a_n^7$  מתכנס.

### שאלה 4

1. אם  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט ו-  $(b_n/a_n)$  סדרה אפסה אז גם  $\sum b_n$  מתכנס בהחלט.
2. אם  $\sum a_n$  טור חסום ו-  $(b_n)$  סדרה מונוטונית וחסומה אז  $\sum a_n b_n$  מתכנס.

### שאלה 5

1. אם  $a_n > 0$  ו-  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{2n+1}$  לכל  $n$  אז הטור  $\sum a_n$  מתכנס.
2. אם  $a_n > 0$  לכל  $n$  ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n > 0$  אז הטור  $\sum a_n$  מתבדר.

### שאלה 6

1. אם  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים מתכנסים אז גם  $\sum \max(a_n, b_n)$  מתכנס.
2. אם  $\sum a_n, \sum b_n$  טורים מתבדרים אז גם  $\sum \max(a_n, b_n)$  מתבדר.

**שאלה 7**

1. כל טור המתקבל מהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  על ידי שינוי סדר איבריו הוא טור מתכנס.

2. כל טור המתקבל מהטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  על ידי שינוי סדר איבריו הוא טור מתכנס בתנאי.

**שאלה 8**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-n^2 - 1}{n^2 + n + 1} \right)^{n^2}$$

**שאלה 9**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1+1/n}}$$

**שאלה 10**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n \cdot \frac{(n+1)^{n-1}}{n^{n+1}}$$

**שאלה 11**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \sin 3n}{n}$$

**שאלה 12**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+1} \sin \frac{\pi n}{2}$$

**שאלה 13**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

**שאלה 14**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(\ln n))^2}$$

**שאלה 15**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln \frac{n+1}{n-1}$$

**שאלה 16**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 (-4)^n}{(2n)!}$$

**שאלה 17**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin 3n \left( \frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$$

**שאלה 18**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + 2^n \sin n}{\sqrt{n} 2^n}$$

**שאלה 19**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n^2} (-1)^n e^{-x^2} dx$$

**שאלה 20**

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  טור מתכנס,  $a_n \neq 0$  לכל  $n$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{\sin a_n}{a_n} \right)$$

א. בהכרח מתכנס.

ב. בהכרח מתכנס כאשר  $a_n > 0$  לכל  $n$  ויכול להתבדר אם  $a_n < 0$  עבור אינסוף  $n$ -ים.

ג. בהכרח מתכנס כאשר  $a_n > 0$  לכל  $n$  ובהכרח מתבדר אם  $a_n < 0$  עבור אינסוף  $n$ -ים.

ד. יכול להתבדר גם בתנאי ש-  $a_n > 0$  לכל  $n$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 5

מספר השאלות: 6

משקל המטלה: 4 נקודות

סמסטר: ב2018

מועד אחרון להגשה: 25.5.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

### שאלה 1 (20 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מהטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  כאשר  $a_1 = 1$ ,  $a_{n+1} = \cos a_n$  לכל  $n \geq 1$ .

ב.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{n \ln n} + \sin n \cdot \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ .

ג. (רשות)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$ .

### שאלה 2 (15 נקודות)

יהי  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טור מתכנס שסכומו  $S$ .

הוכיחו כי אם  $|a_n| \leq b_n$  לכל  $n$  אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס וסכומו לא גדול מ- $S$ .

**שאלה 3 (15 נקודות)**

נסמן ב- $A$  את קבוצת כל הערכים החיוביים של  $\alpha$  עבורם מתכנס הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(\alpha n)^n}$ . מצאו את  $\inf A$ .

**שאלה 4 (15 נקודות)**

נתון ש- $a_n \rightarrow 0$ . הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס אם ורק אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  מתכנס. **שימו לב:** לא נתון ש- $a_n > 0$ .

**שאלה 5 (15 נקודות)**

תהי  $(a_n)$  סדרה חיובית, עולה וחסומה.

הוכיחו כי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$  מתכנס.

**שאלה 6 (20 נקודות)**

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \arctan n$  מתכנס.

ב. אם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  מתכנס, אז גם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}$  מתכנס.

ג. אם  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  טורים מתכנסים של איברים חיוביים, אז הטורים  $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$

ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$  בהכרח מתכנסים.

ד. קיימים טורים  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  כך שהטור השני מתקבל מהטור הראשון על-ידי שינוי סדר

איבריו,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ו-  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (כמובן, מדובר בטורים המתכנסים לסכומים סופיים).

ה. (רשות) תהי  $f(x)$  רציפה ב- $[0, \infty)$ .

אם הטור  $\sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx$  מתכנס אז גם האינטגרל  $\int_0^{\infty} f(x) dx$  מתכנס.

# מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

מספר השאלות: 15

משקל המטלה: 2 נקודות

סמסטר: ב2018

מועד אחרון להגשה: 1.6.2018

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת שאלתא

בכתובת [www.openu.ac.il/sheilta](http://www.openu.ac.il/sheilta)

בכל אחת מהשאלות 1 – 8 מופיעות שלוש טענות.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.

ב – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם רק טענה 3 נכונה.

ד – אם רק טענות 2,1 נכונות.

ה – אם רק טענות 3,1 נכונות.

ו – אם רק טענות 3,2 נכונות.

ז – אם כל הטענות 3,2,1 נכונות.

ח – אם בין הטענות 1 – 3 אין אף טענה נכונה.

בכל אחת מהשאלות 10 – 15 מופיעות שתי טענות.

סמנו: א – אם רק טענה 1 נכונה.

ב – אם רק טענה 2 נכונה.

ג – אם שתי הטענות 2,1 נכונות.

ד – אם בין הטענות 2,1 אין אף טענה נכונה.

## שאלה 1

תהי  $(f_n)$  סדרת פונקציות המוגדרות על-ידי:

$$f_n(x) = \frac{\cos \sqrt{n|x|}}{n^2 + x^2}$$

1.  $(f_n)$  מתכנסת לפונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}$ .

2.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב- $[-10, 10]$ .

3.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$ .

## שאלה 2

תהי  $(f_n)$  סדרת פונקציות המוגדרות על-ידי:  $f_n(x) = x + \frac{x^n}{n}$ .

1. הסדרה  $(f_n)$  מתכנסת (לגבול סופי) אם ורק אם  $|x| \leq 1$ .
2. ההתכנסות של  $(f_n)$  בקטע  $[0,1]$  היא במידה שווה.
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$  בקטע  $[0,1]$ .

## שאלה 3

נתבונן בסדרת הפונקציות  $f_n(x) = nxe^{-nx}$  בקטע  $[0, \infty)$ .

1.  $(f_n)$  מתכנסת בקטע הנתון.
2.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה בקטע  $[0,1]$ .
3. מתקיים השוויון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f_n(x) dx = \int_1^\infty \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx$ .

## שאלה 4

תהי  $(f_n)$  סדרת פונקציות המוגדרות ב-  $[0, \infty)$  על-ידי:  $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ .

1.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, \infty)$ .
2.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[3,4]$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))'$  לכל  $x \geq 0$ .

## שאלה 5

נגדיר סדרת הפונקציות  $(f_n)$  ב-  $[0, \infty)$  על-ידי:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x \sin nx}{n}, & x \notin \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

כאשר  $\mathbb{Q}$  קבוצה של מספרים רציונליים.

1.  $(f_n)$  מתכנסת נקודתית בקטע  $[0,a]$  לכל  $a > 0$  ומתכנסת במידה שווה ב-  $[0,a]$  רק אם  $0 < a \leq 1$ .
2.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0,a]$  לכל  $a > 0$ .
3.  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[0, \infty)$ .



## שאלה 6

תהי  $f$  מוגדרת ב-  $(-\infty, \infty)$  על-ידי:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2x}}{2^n}$ .

1. טור הפונקציות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2x}}{2^n}$  מתכנס במידה שווה ב-  $(-\infty, \infty)$ .

2.  $\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^2 - 1}{2}$ .

3.  $f'(0) = 2$ .

## שאלה 7

נתון טור הפונקציות:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ .

1. הטור הנתון מתכנס במידה שווה בכל קטע סגור  $[a, b]$ .

2. הטור הנתון מתכנס במידה שווה ב-  $\mathbb{R}$ .

3. קיים  $x$  עבורו הטור הנתון מתכנס בהחלט.

## שאלה 8

1. אם  $\sum c_n 6^n$  מתכנס אז  $\sum c_n (-2)^n$  גם מתכנס.

2. אם  $\sum c_n 6^n$  מתכנס אז  $\sum c_n (-6)^n$  גם מתכנס.

3. אם  $\sum c_n 6^n$  מתבדר אז  $\sum c_n 10^n$  גם מתבדר.

## שאלה 9

תחום ההתכנסות של טור טיילור (סביב ה-0) של הפונקציה  $f(x) = (x-1)\ln(1-x)$  הוא:

א.  $(-1, 1)$     ב.  $[-1, 1)$     ג.  $[-1, 1]$     ד.  $(-\infty, 1)$     ה.  $\{0\}$

סמן "ו" אם בין התשובות א – ה אין תשובה נכונה.

## שאלה 10

1. תהיינה  $f(x)$ ,  $f_n(x)$  מוגדרות ב-  $[a, b]$ . אם  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[a, b]$  ל-  $f(x)$

ו-  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) = f(b)$  אז  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[a, b]$ .

2. אם  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[a, b]$  והפונקציות  $f_n(x)$  מוגדרות בנקודה  $x = b$ ,

אז  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב-  $[a, b]$ .

## שאלה 11

תהי  $(f_n)$  סדרת פונקציות רציפות ב- $[0,1]$  המתכנסת נקודתית לפונקציה  $f(x) = 0$  בקטע זה.

1. הסדרה  $a_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  היא סדרה חסומה.

2. אם  $a_n \rightarrow 0$  אז  $(f_n)$  מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$  (הסדרה  $(a_n)$  מוגדרת בסעיף הקודם).

## שאלה 12

1. טור הפונקציות  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{nx}{n+x^2} - \frac{nx-x}{n-1+x^2} \right)$  מתכנס במידה שווה ב- $[0,1]$ .

2.  $\int_{-1}^1 \left( \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{x^2+n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^1 \arctan \frac{1}{x^2+n^2} dx$

## שאלה 13

1. טור הפונקציות  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(2+\sin nx)}{n\sqrt{n}}$  מתכנס במידה שווה ב- $(-\infty, \infty)$ .

2. טור הפונקציות  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{n \cdot 9^n}$  מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו.

## שאלה 14

1. אם  $f(x) = 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} c_n x^n$  והטור מתכנס עבור  $|x| < 1$  אז  $f^{(3)}(0) = 2$ .

2. אם  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  אז  $f$  גזירה אינסוף פעמים ב- $\mathbb{R}$ .

## שאלה 15

יהיו  $R_1$  ו- $R_2$  רדיוסי ההתכנסות של הטורים  $\sum a_n x^n$  ו- $\sum b_n x^n$  בהתאמה.

1. אם  $R = \min\{R_1, R_2\}$  אז  $\sum (a_n + b_n)x^n$  ,

2. אם  $R = R_1 \cdot R_2$  אז  $\sum a_n b_n x^n$  ,

# מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 6

משקל המטלה: 4 נקודות

מספר השאלות: 6

מועד אחרון להגשה: 8.6.2018

סמסטר: ב2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש שאלת רשות. שאלה זו קשה יותר ומיועדת לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. שאלת רשות היא שאלה חלופית, כלומר היא יכולה להחליף כל שאלה אחרת בממ"ן.

### שאלה 1 (15 נקודות)

תהי  $f(x)$  מוגדרת בקטע  $[a, b]$ . נגדיר  $f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$  כאשר ב- $\lfloor t \rfloor$  מסומן חלק שלם של  $t$ .  
בדקו האם הסדרה  $(f_n(x))$  מתכנסת במידה שווה ב- $[a, b]$ .

### שאלה 2 (15 נקודות)

תהי  $(a_n(x))$  סדרה מונוטונית יורדת (לפי  $n$ ) ואפסה של פונקציות שמוגדרות בקטע  $I$ .  
הוכיחו: אם לכל  $\varepsilon > 0$  כמעט לכל  $n$  מתקיים  $\sup\{|a_n(x)| : x \in I\} < \varepsilon$ , אז הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n(x)$  מתכנס במידה שווה בקטע  $I$ .

### שאלה 3 (20 נקודות)

קבעו לגבי כל אחד מטורי הפונקציות הבאים האם הוא מתכנס במידה שווה:

א.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{8^n \sqrt{2n+1}}$  בתחום התכנסותו.

ב.  $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^2 x^n$  בקטע  $[0,1]$ .

### שאלה 4 (15 נקודות)

א. מצאו את תחום ההתכנסות ואת סכום הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} (nx - n + 1)x^n$ .

ב. קבעו אם הטור מסעיף א מתכנס במידה שווה בתחום התכנסותו.

### שאלה 5 (15 נקודות)

א. הראו כי  $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  לכל  $x \in (-1,1)$  והסיקו מכך שלכל  $0 < r < 1$  מתקיים

$$\int_0^r \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{n(n+1)}$$

ב. הוכיחו, בהסתמך על תוצאת סעיף א, כי  $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

### שאלה 6 (20 נקודות)

הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א.  $\int_{-1}^{2018} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^x + \cos(e^{nx})}{n \ln^2(n+2) + x} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-1}^{2018} \frac{e^x + \cos(e^{nx})}{n \ln^2(n+2) + x} dx \right)$

ב. קיים טור חזקות לא טריוויאלי (כלומר, בעל אינסוף מקדמים שונים מאפס, או במילים אחרות - שונה מפולינום) המתכנס במידה שווה בישר הממשי כולו.

### שאלת רשות

תהי  $(f_n(x))$  סדרת פונקציות, המוגדרות בקטע  $[0,1]$  ומתכנסת נקודתית בקטע זה לפונקציה

רציפה  $f(x)$ . נניח בנוסף שכל אחת מהפונקציות  $f_n(x)$  עולה במובן הרחב.

הוכיחו כי  $(f_n(x))$  מתכנסת במידה שווה ב- $[0,1]$ .

**שימו לב:** לא נתון שהפונקציות  $f_n$  רציפות ב- $[0,1]$ .

# מטלת מנחה (ממ"ן) 17

הקורס: 20475 – חשבון אינפיניטסימלי 2

חומר הלימוד למטלה: יחידה 7

מספר השאלות: 5

משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2018ב

מועד אחרון להגשה: 19.6.2018

## קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
  - שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה
- הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

## לתשומת לבכם:

בממ"ן זה יש סעיפי רשות. סעיפים אלה קשים יותר ומיועדים לסטודנטים שחושבים להמשיך בלימודי המתמטיקה. סעיף רשות הוא סעיף חלופי, כלומר הוא יכול להחליף כל סעיף אחר באותה שאלה.

### שאלה 1 (20 נקודות)

חשבו את הגבולות הבאים, או הראו שאינם קיימים:

א.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 25} - 5}$

ב.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + \sin(x^2 + y^2))^{\frac{x+2}{x^2+y^2}}$

ג.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4}$

ד.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos^2 x - 1 + y^2}{y^2 + \arctan^4 x}$

### שאלה 2 (20 נקודות)

א. מצאו את תחום הרציפות של הפונקציה  $f(x,y) = \begin{cases} x \sin(1/y) & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$

הארה: תחום הרציפות של פונקציה הוא קבוצה של כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה

ב. בדקו אם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בנקודה  $(0,0)$ :

1.  $f(x,y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$       2.  $f(x,y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

### שאלה 3 (20 נקודות)

- א. תהי  $f(x, y) = \sin x + h(\sin y - \sin x)$  כאשר  $h(t)$  פונקציה גזירה במשתנה אחד. הראו כי  $f_x(x, y)\cos y + f_y(x, y)\cos x = \cos x \cos y$ .
- ב. תהי  $f(x, y)$  פונקציה דיפרנציאבילית בכל נקודה, ונניח כי  $x(u, v) = \frac{u}{v}$ ;  $y(u, v) = \frac{v}{u}$ . נגדיר  $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ . הראו כי  $uz_u + vz_v = 0$  לכל  $u, v \neq 0$ .
- ג. באיזה קצב משתנה השטח של מלבן ברגע בו אורכו 15 מ' והוא גדל ב-3 מ' לשנייה, ואילו רוחבו 6 מ' והוא גדל ב-2 מ' לשנייה?
- ד. (רשות) תהי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית במישור כולו. הראו כי לכל שתי נקודות  $P_1(x_1, y_1)$  ו- $P_2(x_2, y_2)$ , בקטע המחבר בין  $P_1$  ל- $P_2$  קיימת נקודה  $C$  כך ש- $f(P_2) - f(P_1) = f_x(C)(x_2 - x_1) + f_y(C)(y_2 - y_1)$ .
- הערה:** זוהי גרסה דו-ממדית למשפט הערך הממוצע של לגראנז' (משפט 8.6 בקורס אינפי 1)

### שאלה 4 (20 נקודות)

- א. מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציה  $f(x, y) = x^2y - \frac{x^2}{2} - 2y$  בעיגול  $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ .
- ב. מצאו שלושה מספרים לא שליליים שסכומם 27 וסכום הריבועים שלהם קטן ככל האפשר.

### שאלה 5 (20 נקודות)

- א. תהיינה  $g, f$  פונקציות במשתנה אחד בעלות נגזרות שניות רציפות ב- $\mathbb{R}$ , ותהי  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . נניח ש- $f'(x_0) = g'(y_0) = 0$ ,  $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ ,  $g(y_0) \cdot g''(y_0) > 0$ . הוכיחו כי  $(x_0, y_0)$  נקודת קיצון של הפונקציה  $h(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ .
- ב. תהי  $f(x, y)$  בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות בסביבת הנקודה  $A = (1, 3)$ . ידוע שהנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $A$  בכיוון מ- $A$  ל- $B = (3, 3)$  שווה ל-3, והנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $A$  בכיוון מ- $A$  ל- $C = (1, 8)$  שווה ל-26. חשבו את הנגזרת הכיוונית של  $f$  בנקודה  $A$  בכיוון מ- $A$  ל- $D = (6, 15)$ .
- ג. (רשות) תהי  $f(x, y)$  דיפרנציאבילית בנקודה  $(1, 1)$  ו- $f(x, 3x - 2) = 2018$  לכל  $x$ . ידוע ש- $f_x(1, 1) = 1$ . מצאו את  $f_y(1, 1)$ .