

אוסף שאלות (2018א)

אילון בן שמואל

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

יהי V מרחב אוקלידי ויהיו $\vec{u}, \vec{v} \in V$. נסמן ב- \langle, \rangle מכפלה פנימית ב- V . הוכח או הפרך:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

2. אם $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ אז $\vec{u} \perp \vec{v}$

3. אם $\vec{u} + \vec{v} \perp \vec{u} - \vec{v}$ אז $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

1.2 סעיף ב

חזור על סעיף א, אך התייחס ל- V כמרחב אונטרי.

1.3 סעיף ג

יהי V מרחב אונטרי ויהיו $\vec{u}, \vec{v} \in V$. נסמן ב- \langle, \rangle מכפלה פנימית ב- V . הוכח או הפרך: הפונקציה $f(\vec{u}, \vec{v}) = \operatorname{Re}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V מעל \mathbb{R} .

2 שאלה 2

תהי $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכח שלכל $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{g}_i \right\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\vec{g}_i\|^2}$$

כאשר הנורמות מחושבות לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- \mathbb{R}^n .

3 שאלה 3

תהי $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה:

$$f(\vec{v}) = \frac{(v_1 + v_2^2 + \dots + v_n^n)^2}{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

לכל $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

3.1 סעיף א

מצא סקלר $m \in \mathbb{R}$ $0 < m$ מינימלי כך ש $f(\vec{u}) \leq m$ לכל $\vec{u} \neq \vec{0}$.

3.2 סעיף ב

מצא וקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ כך ש $f(\vec{v}) = m$ (שאלה זו פתורה במפגשי "אופק").

4 שאלה 4

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית מעל $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$. יהי $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ בסיס של V . הוכח ש B בסיס אורתונורמלי אם ורק אם לכל $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ מתקיים

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{v}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2$$

5 שאלה 5

נניח ש V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית מעל $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$ ויהי B בסיס אורתונורמלי $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$. נסמן ב \langle, \rangle את המכפלה הפנימית במרחב V ונסמן ב \cdot את המכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב F^n מעל F . הוכח שלכל $\vec{u}, \vec{w} \in V$ מתקיים

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [\vec{u}]_B \cdot [\vec{w}]_B$$

6 שאלה 6

האם קיימת מכפלה פנימית במרחב $\mathbb{R}_3[x]$ מעל \mathbb{R} כך שהקבוצה הבאה מהווה קבוצה אורתוגונלית?

1. $\{1 - x, 1 + x + x^2, x^2\}$

2. $\{1, 1 - x^2\}$

3. $\{1 + x, 2 + x, 3 + 2x\}$

7 שאלה 7

יהי $V = \mathbb{R}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית ויהי $\vec{v} = (1, 2, 3, 4)$. האם קיים תת מרחב של V כך שאורך ההיטל האורתוגונלי של \vec{v} עליו הוא 6?

8 שאלה 8

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהי $\vec{v} \in V$. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ כך ש $0 \leq \alpha \leq \|\vec{v}\|$. האם קיים תת מרחב של V כך שאורך ההיטל האורתוגונלי של \vec{v} עליו הוא בדיוק α ?

9 שאלה 9

המכפלות הפנימיות בשאלה זו הן המכפלות הפנימיות הסטנדרטיות במרחבים המתאימים.

1. יהיו $\vec{u} = (1, 2, i, 1, i)$, $\vec{v} = (3 + i, -1, 1 - i, 1, -i)$. האם $\vec{u} \perp \vec{v}$? חשב את המרחק בין \vec{u} ל \vec{v} .

2. מהו המרחק בין $\vec{w} = (1, 1, 3)$ לבין תת המרחב $U = \text{Sp}\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$ של \mathbb{R}^3 ?

3. האם המרחק בין $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ לבין תת המרחב $\text{Sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\right\}$ הוא $\sqrt{243}$? אם כן, הוכח. אם לא, חשב מהו המרחק.

10 שאלה 10

יהי $V = \mathbb{R}_4[x]$, $F = \mathbb{R}$, $p, q \in V$. האם הנוסחה הבאה מהווה מכפלה פנימית?

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^2 p(i)q(i)$$

11 שאלה 11

יהי $V = M_{2 \times 2}^{\mathbb{R}}$, $F = \mathbb{R}$, $A, B \in V$. האם הנוסחה $\langle A, B \rangle = \text{tr}(BA)$ מהווה מכפלה פנימית?

12 שאלה 12

יהיו $\vec{u} = (x_1, x_2)$ ו $\vec{v} = (y_1, y_2)$ כמרחב ווקטורים ב \mathbb{R}^2 . קבע לגבי כל אחת מהנוסחאות הבאות האם היא מהווה מכפלה פנימית ב \mathbb{R}^2 :

$$1. \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1^2 + x_2 y_2$$

$$2. \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$$

$$3. \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + 9x_2 y_2$$