ממ"ן 15

יונתן אוחיון

30 בדצמבר 2017

שאלה 1

ראשית, נוכל לראות שהפונקציה $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$ היא הרכבה של פונקציות הרציפות בתחום $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, שכן $\frac{\pi x}{2}$ פונקציה לינארית ולכן רציפה בכל נקודה ו$\tan$ רציפה בתחום זה לפי הגדרתה. לפיכך, $g(x)$ רציפה גם היא בתחום זה.

נחלק למקרים. יהי $x_0\in\mathbb{R}$. אם $x_0\notin\mathbb{Z}$, הפונקציה $\lfloor x\rfloor$ רציפה בx_0 וגם $g(x)$ רציפה בה. לכן לפי משפט 5.11 גם f רציפה בx_0 כנדרש.

אם $x_0=2m\in\mathbb{Z}$, נחשב את ערך הפונקציה בx_0 והגבולות החד צדדיים. הגבול מימין:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x\rfloor\tan\frac{\pi x}{2} &= \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x\rfloor\cdot\lim_{x\to x_0^+}\tan\frac{\pi x}{2} \\
\text{(}\tan\text{ מוגדרת לכל } x\neq-\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ ורציפה שם)} &= \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x\rfloor\cdot\tan\frac{\cancel{2}m\pi}{\cancel{2}} \\
\text{(מחזוריות הטנגנס)} &= \lim_{x\to x_0^+}\lfloor x\rfloor\cdot\tan\pi = 0
\end{aligned}$$

הגבול משמאל:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x\rfloor\tan\frac{\pi x}{2} &= \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x\rfloor\cdot\lim_{x\to x_0^+}\tan\frac{\pi x}{2} \\
\text{(}\tan\text{ מוגדרת לכל } x\neq-\frac{\pi}{2}+\pi n \text{ ורציפה שם)} &= \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x\rfloor\cdot\tan\frac{\cancel{2}m\pi}{\cancel{2}} \\
\text{(מחזוריות הטנגנס)} &= \lim_{x\to x_0^-}\lfloor x\rfloor\cdot\tan\pi = 0
\end{aligned}$$

ערך הפונקציה:

$$f(x_0)=\lfloor x_0\rfloor\tan\frac{\cancel{2}m\pi}{\cancel{2}}=\lfloor x_0\rfloor\tan\pi=0$$

ולכן

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

לכן f רציפה מימין ומשמאל בx_0 ולפי טענה 5.18 רציפה בx_0 כנדרש. נראה בעמוד הבא ש$2m+1\in\mathbb{Z}$ נקודות אי רציפות מהמין השני של f.

שאלה 1 – המשך

אם $x_0 = 2m+1 \in \mathbb{Z}$, נשים לב ש$g(x)$ לא מוגדרת בנקודות מסוג זה, שכן $\tan$ לא מוגדרת בהן. נחשב, אם כן, את הגבולות החד צדדיים ונראה שזוהי נקודת אי רציפות מהמין השני. בנוסף, נשים לב שהגבולות החד צדדיים של $\lfloor x \rfloor$ בx_0 תמיד קיימים וממשיים (נקודות אי רציפות מהמין הראשון) ולכן די לנו לראות שהגבול של $g(x)$ לא קיים.

שאלה 2

סעיף א1

שלילת הטענה: הפונקציה f אינה רציפה בנק' x_0 אמ"מ קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $\delta > 0$ מתקיים

$$x \in N_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \notin N_\varepsilon(f(x_0))$$

■

סעיף א2

שלילת הטענה: הפונקציה f אינה רציפה בנק x_0 אמ"מ קיימת סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול x_0 כך שמתקיים

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$$

■

סעיף ב

נוכיח לפי הגדרת הגבול לפי היינה: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. נתון כי g רציפה בx_0 ולכן גם $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = 0$ (לפי הנתון). בנוסף, פונקציית דיריכלה מקבלת שני ערכים (0 או 1) ולכן חסומה על ידיהם ולכן הסדרה $(D(x_n))_{n=1}^{\infty}$ חסומה. נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} g(x_n)D(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} g(x_n) \cdot \lim_{n\to\infty} D(x_n) \\ &= 0 = g(x_0) = g(x_0)D(x_0) = f(x_0) \quad \text{נימוק: חסומה כפול אפסה} \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)}\end{aligned}$$

ולכן לפי הגדרת הגבול לפי היינה, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$ וf רציפה בx_0 כנדרש.

■

סעיף ג1

שאלה 2 – המשך

סעיף ג2

נסמן ב$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים אי־רציונלים המתכנסת לx_0 וב$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים רציונליים המתכנסת לx_0 (קיימות סדרות כאלו לפי למה 5.9). אזי מתקיים:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= \lim_{n\to\infty} g(a_n)D(a_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} g(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(a_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} g(a_n)\cdot 0 = g(x_0)\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

וגם:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(b_n) &= \lim_{n\to\infty} g(b_n)D(b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} g(b_n)\cdot \lim_{n\to\infty} D(b_n)\\ &= \lim_{n\to\infty} g(b_n)\cdot 1 = g(x_0)\cdot 1 = g(x_0)\end{aligned}$$

נחלק למקרים:

אם $x_0 \in \mathbb{Q}$ אז $f(x_0) = g(x_0)$, אבל $g(x_0) \neq 0$ ומצאנו סדרה (a_n) המתכנסת לx_0 כך ש$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq f(x_0)$.

אם $x_0 \notin \mathbb{Q}$ אז $f(x_0) = 0$, אבל $g(x_0) \neq 0$ ומצאנו סדרה (b_n) המתכנסת לx_0 כך ש$\lim_{n\to\infty} f(b_n) \neq f(x_0)$

לכן f לא רציפה בשום נקודה ב$\mathbb{R}$ כנדרש.

■

סעיף ג3

נניח בשלילה שf רציפה בx_0 ונגיע לסתירה. נתבונן בפונקציה $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. נשים לב כי מתקיים:

$$f(x_0) = g(x_0)D(x_0) \Rightarrow D(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0} = h(x_0)$$

מאריתמטיקה של פונקציות רציפות נובע כי h רציפה בx_0, אבל $h(x_0) = D(x_0)$ ולפי משפט 5.10 פונקציה זו אינה רציפה באף נקודה בסתירה. לפיכך, f לא רציפה בx_0 כנדרש.

■

שאלה 3

הגדרה: נגיד שf שומרת סימן בI אמ"מ $\forall x \in I, f(x) < 0 \vee f(x) > 0$ () ושf אינה שומרת סימן בI אמ"מ $\exists a, b \in I, f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$.

סימון: נסמן $I = (0, \infty)$.

ראשית, נוכיח שf שומרת סימן בI על דרך השלילה. נניח בשלילה שf אינה שומרת סימן בI, כלומר $\exists a, b \in I, f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$ ונניח ב.ה.כ. ש$a < b$. נשים לב ש$[a, b] \subset [0, \infty)$ ולכן f רציפה בו. לפי משפט ערך הביניים, קיים $0 < t \in (a, b)$ כך ש$f(t) = 0$, כלומר $0 = |f(t)| < t$, בסתירה לנתון ש$x < |f(x)|$ לכל $x \in I$. לפיכך, f שומרת סימן בI.

נחלק, אם כן, למקרים:

אם f חיובית בI, מתקיים $f(x) > x$ לכל $x > 0$ ולכן לפי קריטריון ההשוואה לאינסוף באנלוגיה לפונקציות, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ כנדרש.

אם f שלילית בI, מתקיים $-f(x) > x$ לכל $x > 0$. לפי קריטריון ההשוואה לאינסוף באנלוגיה לפונקציות, $\lim_{x\to\infty} -f(x) = \infty$, ולפי משפט 4.53ז מתקיים $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ כנדרש.

■

שאלה 4

סעיף א

נשים לב שf מקבלת מינימום ב$[0,\infty)$ ולכן בהכרח $0 \leq L$ (אחרת הטענה לא הייתה מתקיימת). נפתח את הגדרת הגבול:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{R} \forall x > M, f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = I$$

יהי $\varepsilon > 0$ וניקח M המתאים לε. נוכל להניח ש$M > 0$, שכן החל מנקודה מסויימת x בהכרח יהיה חיובי. בנוסף, נשים לב שL הוא בדיוק אמצע הקטע I ולכן $L \in I$.

נתבונן בקטע (M,∞). נוכל לשים לב שמכיוון שM חיובי, מתקיים $(M,\infty) \subset [0,\infty)$. בנוסף, מהגדרת הגבול נובע כי אם $x \in (M,\infty)$ אז $f(x) \in I$. לכן, בהכרח קיים $t \in (M,\infty)$ כך ש$f(t) \in (L-\varepsilon, L]$, כלומר $f(t) \leq L$ כנדרש.

לפיכך, קיים $x \in [0,\infty)$ כך ש$f(x) \leq L$ כנדרש.

■