ממן 13

יונתן אוחיון

31 באוגוסט 2017

1 שאלה 1

ראשית, נפתח את הסוגריים ונגיע לערכו של z^4:

$$\begin{aligned}
z^4 &= (1+i)^6 - (1-i)^6 \\
&= ((1+i)(1+i)^2)^2 - ((1-i)(1-i)^2)^2 \\
&= ((1+i)(\cancel{1}+2i-\cancel{1}))^2 - ((1-i)(\cancel{1}-2i-\cancel{1}))^2 \\
&= (2i-2)^2 - (2i+2)^2 \\
&= \cancel{-4} - 8i + \cancel{4} - (\cancel{4} + 8i - \cancel{4}) \\
&= -8i - 8i \\
&= -16i
\end{aligned}$$

לפיכך, $z^4 = -16i$. כעת נסתכל על מיקום הנקודה $0 - 16i$ על מישור המספרים המרוכבים ונגלה שהיא נמצאת -16 יחידות על ציר המרוכבים ו0 יחידות על ציר הממשיים, כלומר ההצגה הקוטבית שלה הינה $16\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$ (שכן $\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$). כעת, נוכל למצוא את השורשים של z^4 בעזרת הנוסחה בעמוד 87:

$$\begin{aligned}
z &= \sqrt[4]{16}(\operatorname{cis}\frac{\alpha + 2\pi k}{4}) \\
&= 2\operatorname{cis}\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4} \\
&= 2\operatorname{cis}\frac{3\pi + 2\pi k}{8}
\end{aligned}$$

כעת, נציב $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$z_0 = 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{8} \qquad z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}$$

$$z_2 = -2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{8} \qquad z_3 = -2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{8}$$

ואלו הם ערכי z.

■

2 שאלה 2

2.1 סעיף א

2.1.1 K

הוכחה שK הינו מרחב לינארי:

$$\begin{aligned}
K &= \left\{ \begin{bmatrix} a-2c & c+a \\ b & -c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2c & c \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

לפיכך, מצאנו קבוצה פורשת לK. לפי משפט 7.5.1, מכיוון שהצלחנו למצוא לK קבוצה פורשת הוא מרחב לינארי.

2.1.2 L

ראשית, נגיע לביטוי של L בעזרת x_2, x_3:

$$x_1 = 2x_1 - 4x_2 - 5 \to -x_1 = -4x_2 - 5 \to x_1 = 4x_2 + 5$$

$$\downarrow$$

$$L = \{(4x_2+5, x_2, x_3) \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

נניח בשלילה שL מרחב לינארי. ננסה להוכיח סגירות של הפעולה $+_L$ (שהיא חיבור n־יות) ונגיע לסתירה:

$$\begin{aligned}
(4t+5, t, s) +_L (4x+5, x, y) &= (4t+4x+10, t+x, s+y) \\
&= (4(t+x)+10, t+x, s+y)
\end{aligned}$$

מכיוון ש$4(t+x)+10$ אינו ביטוי מהצורה $4x+5$, הפעולה $+_L$ אינה סגורה ביחס לL והוא אינו מרחב לינארי.