ממ"ן 16

יונתן אוחיון

10 בינואר 2018

שאלה 1 – טענת עזר

תהי f כך ש$\lim_{t\to\infty} f(t) = x, 0 \neq x \in \mathbb{R}$. נראה כי מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = e^x \tag{1}$$

ראשית, נעבור לסדרות. תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. אזי לפי היינה,

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x_n)}{x_n}\right)^{x_n}$$

נתבונן בסדרה $y_n = \frac{f(x_n)}{x_n}$. נוכל לראות שמתקיים $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. נציב ב(1) ונראה כי

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x_n)}{x_n}\right)^{x_n} &= \lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{f(x_n)}{y_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right)^{f(x_n)} \\
\text{טענה 6.15} &= \lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}\lim_{n\to\infty} f(x_n)} \\
\text{היינה} &= \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}\lim_{t\to\infty} f(t)} \\
\text{טענה 6.18} &= e^{\lim_{t\to\infty} f(t)} = \boxed{e^x}
\end{aligned}$$

והוכחנו כי מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = e^x$$

כנדרש.

■

שאלה 1א – הוכחה

ראשית, נזכר בהוכחה של הגבול המפורסם $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. בתור חלק מההוכחה, הוכח אי השוויון הבא עבור x בקרבת 0:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \equiv x\cos x \le \sin x \le x$$

כלומר, נוכל לראות שעבור x בקרבת 0 מתקיים

$$(1+x\cos x)^{\frac{1}{x}} \le (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{2}$$

בנוסף, מכלל הסנדוויץ' נובע כי מתקיים

$$\lim_{x\to 0}(1+x\cos x)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \tag{3}$$

ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. מ(2), (3) והיינה נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{4}$$

לפיכך, כל שעלינו הוא לחשב את הגבול הימני והשמאלי ולהשתמש בכלל הסנדוויץ'. הגבול הימני הוא כמובן הגבול הידוע $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. בנוסף, מטענת העזר נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}} \tag{5}$$

מכיוון ש$\cos$ רציפה בכל נקודה ו$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=\cos 0=1$. לפיכך ולפי (5),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}}=e^1=e$$

לכן, נוכל לכתוב את (4) מחדש בתור

$$e \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \le e$$

ומכלל הסנדוויץ' נובע כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n=e$ כנדרש.

■

שאלה 1ב

נתבונן בפונקציה $f(x)=|x|^{x^2}$. נוכל לראות שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} |x|^{x^2} = \infty$$

מכך נובע כי

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|}^{x^2} = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right|^{x^2}$$

כעת, נציב $t=\frac{1}{x}$ (כמובן ש$t\to 0$) ונקבל את הגבול הבא:

$$0 = \lim_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\right|^{x^2} = \lim_{t\to 0} |t|^{\frac{1}{t^2}}$$

כלומר, הוכחנו כי מתקיים

$$\lim_{t\to 0} |t|^{\frac{1}{t^2}} = 0$$

כנדרש.

■

שאלה 3א

תחום הגדרה

מכיוון ש$\sin$ ו$\sin^2$ מוגדרות בכל $\mathbb{R}$ ו$\frac{1}{x}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$, הפונקציה $g(x) = \sin^2 x \sin \frac{1}{x}$ מוגדרת לכל $x \neq 0$. מכיוון שהגדרנו את f כך ש$f(0) = 0$, הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בכל $\mathbb{R}$.

■

תחום רציפות

נראה שf רציפה בכל $\mathbb{R}$. נניח ש$x_0 \in \mathbb{R}$ נק' אי רציפות מסוג כלשהו של f ונחלק למקרים:

אם $x_0 \neq 0$, קיימת סביבה של x_0 שבה f מתלכדת עם $\sin^2 x \sin \frac{1}{x}$. מכיוון שפונקציה זו הינה כפל של הרכבה של פונקציות אלמנטריות, היא רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה. כפי שראינו לעיל, פונקציה זו מוגדרת לכל $x \neq 0$ ולכן גם רציפה בx_0, בסתירה להנחה שזו נק' אי רציפות.

נשאר לנו להראות שf רציפה ב0. מכיוון ש$\sin \frac{1}{x}$ חסומה ו$\sin^2 x$ אפסה בסביבת 0, מתקיים

$$\lim_{x \to 0} \sin^2 x \sin \frac{1}{x} = 0$$

בנוסף, ידוע לנו ש$f(0) = 0$ לפי הגדרתה של f ומכיוון ש$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, f רציפה ב0 בסתירה להנחה.

לפיכך, הראינו שלf לא קיימות נק' אי רציפות משום סוג ולכן היא רציפה בכל $\mathbb{R}$ כנדרש.

■

תחום גזירות

נראה שf גזירה בכל $\mathbb{R}$ ע"י חלוקה למקרים. ראשית, נתבונן בפונקציות המרכיבות את f כאשר $x \neq 0$:

- $\frac{1}{x}$ הינה פונקציה רציונלית ולכן גזירה בכל נק' בתחום הגדרתה, כלומר בכל $x \neq 0$. נגזרתה בתחום זה (לפי כלל החזקה): $-\frac{1}{x^2}$.
- $\sin$ גזירה בכל $\mathbb{R}$ ולכן גם $\sin^2$ גזירה בכל $\mathbb{R}$. נגזרותיהן (בהתאמה): $\cos x, 2\sin x \cos x$.
- לפיכך, ההרכבה $\sin \frac{1}{x}$ גזירה בכל נקודה בתחום הגדרתה לפי משפט 7.21 ונגזרתה בתחום זה היא $-\frac{\cos x}{x^2}$.

לפיכך, לפי כלל המכפלה f גזירה בכל $x \neq 0$ ונגזרתה בתחום זה היא:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sin^2 x \sin \frac{1}{x}\right)' \\ &= (\sin^2 x)' \sin \frac{1}{x} + \left(\sin \frac{1}{x}\right)' \sin^2 x \\ &= 2 \sin x \cos x \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

ומצאנו את הנגזרת של f בכל $x \neq 0$. בעמוד הבא נראה שf גזירה ב0 ומתקיים $f'(0) = 0$.

שאלה 3א - המשך

תחום גזירות - המשך

נתבונן במקרה שנותר לנו להוכיח, בו $x = 0$. נתבונן בהגדרת הנגזרת בנקודה:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ \text{נימוק: } f(0) = 0 \quad &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h \sin \frac{1}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin h \sin \frac{1}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin h \sin \frac{1}{h} \\ \text{חסומה } \sin \frac{1}{h} \text{ ,אפסה } \sin h \quad &= 0 \end{aligned}$$

לכן, f גזירה ב-0 ובפרט מתקיים $f'(0) = 0$. לפיכך, נוכל להגדיר את הנגזרת של f באופן הבא:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \sin x \cos x \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x} \sin^2 x}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ומצאנו את תחום הגזירות וערך הנגזרת של f בכל $\mathbb{R}$ כנדרש.

■

שאלה 3ב

תחום הגדרה

מכיוון ש$|x|$ מוגדרת לכל $x \in \mathbb{R}$ ו$\ln x$ מוגדרת לכל $x > 0$, הפונקציה $g(x) = |\ln| x$ מוגדרת לכל $x > 0$.

תחום רציפות

מכיוון ש$\ln x$ רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה (כלומר בכל $x > 0$) ו$|x|$ רציפה בכל $x \in \mathbb{R}$, g רציפה בכל $x > 0$, כלומר בכל נקודה בתחום הגדרתה.

תחום גזירות

שאלה 4

תהי f פונקציה זוגית ב-$\mathbb{R}$, כלומר $f(-x) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נניח בנוסף כי f גזירה ב-0. נתבונן בנגזרת השמאלית של f ב-0:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} - \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0)}{h} \\ \text{זוגיות } f \quad &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-h)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} + \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0)}{h} \\ &= -\left(\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

ובנגזרת הימנית ב-0:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

לפי (1) והנתון מתקיים

$$f'_+(0) = -f'_+(0) \Longrightarrow 2f'_+(0) = 0 \Longrightarrow f'_+(0) = 0$$

לפי הנתון, $f'_-(0) = f'_+(0) = 0$, כלומר הנגזרת הימנית והנגזרת השמאלית שוות ובפרט שוות ל-0 ולכן $f'(0) = 0$ כנדרש.

■