ממן 13

יונתן אוחיון

30 באפריל 2018

תקציר

בממן זה החלטתי להחליף את שאלה 5 בשאלת הרשות.

שאלה 1א

ראשית, נפשט את האינטגרנד בעזרת הצבה ונפרק את האינטגרל לשלושה אינטגרלים שונים:

$$I=\int_{-1}^{\infty}x^{2}\cos x^{5}dx=\begin{bmatrix}t=x^{5}\\ dx=\frac{1}{5t^{\frac{4}{5}}}dt\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int_{-1}^{\infty}\frac{\cancel{t^{\frac{2}{5}}}\cos t}{t^{\frac{\cancel{4}}{5}}}dt=\frac{1}{5}\underbrace{\int_{-1}^{0}\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{5}}}dt}_{I_1}+\frac{1}{5}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{5}}}dt}_{I_2}+\frac{1}{5}\underbrace{\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{5}}}dt}_{I_3}$$

כעת, על מנת להראות את ההתכנסות של I, עלינו להראות את ההתכנסות של כל אחד מהאינטגרלים I_1, I_2 וI_3. נתחיל בהוכחת טענת עזר:

טענת עזר

נתבונן בפונקציות f, g הבאות:

$$\left|f(u)\right|=\left|\frac{\cos u}{u^{\frac{2}{5}}}\right|=\frac{|\cos u|}{u^{\frac{2}{5}}},\ g(u)=\frac{1}{u^{\frac{2}{5}}}$$

נרצה להוכיח טענת עזר שתשמש אותנו בהוכחת ההתכנסות של I_1 וI_2 - יהי $0<b\in\mathbb{R}$. נוכיח ש$\int_0^b f(u)du$ מתכנס בהחלט בתחום. מתקיים כמובן $0\le|\cos u|\le 1$ לכל $u\in\mathbb{R}$ ולכן גם $0\le\left|f(u)\right|\le g(u)$ לכל $u\in(0,b]$. כעת, מכיוון ש$\frac{2}{5}<1$, לפי למה 3.2 מתקיים ש$\int_0^b g(u)du$ מתכנס. לכן לפי מבחן ההשוואה $\int_0^b f(t)dt$ מתכנס בהחלט כנדרש.

האינטגרלים הראשונים - I_1, I_2

ראשית, נבצע הצבה:

$$\int_{-1}^{0}\frac{\cos t}{t^{\frac{2}{5}}}dt=\begin{bmatrix}u=-t\\ dt=-du\end{bmatrix}=-\int_{1}^{0}\frac{\cos(-u)}{(-u)^{\frac{2}{5}}}du=\int_{0}^{1}\frac{\cos u}{u^{\frac{2}{5}}}du$$

מטענת העזר נוכל לראות שאם נבחר $b=1$ נקבל שI_1 מתכנס בהחלט ולפיכך מתכנס כנדרש. כעת, אם נבחר $b=\pi$ נקבל שלפי מבחן ההשוואה I_2 מתכנס בהחלט ולפיכך מתכנס כנדרש.

האינטגרל השלישי - I_3

נרצה להשתמש במבחן דיריכלה עבור הוכחת התכנסות I_3 עם $f(t)=t^{-\frac{2}{5}}$ ו$g(t)=\cos t$ בתחום $[\pi,\infty)$. נראה שתנאי המשפט מתקיימים: ראשית, נגזור את f: $f'(t)=-\frac{2}{5}t^{-\frac{7}{5}}$, אשר היא כמובן פונקציה רציפה. בנוסף כמובן שמתקיים $\lim_{t\to\infty}f(t)=0$. כעת נתבונן ב$G(t)$:

$$G(t)=\int_{\pi}^{t}g(x)dx=\ -\sin x\,\Big|_{x=t}^{x=\pi}=-\sin t$$

כמובן שמתקיים $\left|G(t)\right|\le 1$ לכל $t\in[\pi,\infty)$ ולכן היא חסומה בקטע. כעת, מכיוון שמתקיימים כל תנאי המשפט, האינטגרל $\int_{\pi}^{\infty}f(t)g(t)dt$ מתכנס, כלומר I_3 מתכנס כנדרש.

מכיוון שI_1, I_2, I_3 מתכנסים מתקיים שI מתכנס בתנאי כנדרש.

■

שאלה 1ב

נגדיר:

$$f(x)=\frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)^2},g(x)=\frac{1}{x-1}$$

נחשב את הגבול $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\sin(x^2-1)(x+1)}{x^2-1}=[t=x^2-1]=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

לכל $x\in(1,2]$ מתקיים $f(x)>0\land g(x)>0$ וגם האינטגרל $\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2\frac{1}{x-1}dx$ מתבדר ולכן כל תנאי משפט 3.5 מתקיימים והאינטגרל $\int_1^2 f(x)dx$ מתבדר.

לכן, גם האינטגרל $\int_0^\infty f(x)dx=\int_0^\infty\frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)^2}dx$ מתבדר כנדרש.

■

שאלה 2

גבול עזר

ראשית, נחשב את הגבול הבא אשר יעזור לנו בפתרון השאלה:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\underset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\underset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}$$

בנוסף, מכיוון ש$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ו$\sin x$ חסומה, נקבל מכלל האפסה כפול חסומה מאינפי 1 ש$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

פתרון השאלה

נסמן $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^\alpha+x^\beta}$ ונוכל לראות שמתקיים $f(x)>0$ לכל $x>0$. ראשית, נפצל את האינטגרל לשניים ונמצא את התנאים עבור שניהם:

$$I=\int_0^\infty f(x)dx=\underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_1^\infty f(x)dx}_{I_2}$$

כעת, נעבור לבדיקות ההתכנסות לערכי $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ המקיימים $\beta>\alpha$:

התכנסות I_1

על מנת להוכיח את התכנסות I_1 נרצה להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי. ניקח $g(x)=\frac{x^3}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{3-\alpha}}$ ונחשב את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^\alpha(x-\sin x)}{x^3(x^\alpha+x^\beta)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^{\beta-\alpha}}=\frac{1}{6}$$

כעת, לפי למה 3.2 נוכל לראות ש$\int_0^1 g(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\alpha-3<1$, או אם $\alpha<4$. לכן ממבחן ההשוואה הגבולי נקבל שI_1 מתכנס אמ"מ $\alpha<4$ כנדרש.

התכנסות I_2

נרצה להוכיח את התכנסות I_2 גם בעזרת מבחן ההשוואה הגבולי. ניקח $h(x)=\frac{x}{x^\beta}=\frac{1}{x^{\beta-1}}$ ונחשב את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{h(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta(x-\sin x)}{x(x^\alpha+x^\beta)}=\left(1-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^{\alpha-\beta}}=1$$

לפי למה 3.12 נראה ש$\int_1^\infty h(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\beta-1>1$, כלומר אם $\beta>2$. לכן נקבל ממבחן ההשוואה הגבולי שI_2 מתכנס אממ $\beta>2$ כנדרש.

לסיכום, אם נאחד את שתי התנאים ונניח כי $\beta>\alpha$, נקבל כי I מתכנס אמ"מ $\beta>2$ וגם $\alpha<4$ כנדרש.

■

שאלה 3

מהנתון $\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = 1$ נקבל שקיים $x_0 > 0$ כך ש$f(x) > 0$ לכל $x \in (x_0, \infty)$. בנוסף, אם נבחר $g(x) = \frac{1}{x^2}$ נקבל ש$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

לכן, מכיוון ש$\int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ מתכנס, לפי מבחן ההשוואה הגבולי נקבל ש$\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ מתכנס. נסמן: $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = F \in \mathbb{R}$. כעת, נתבונן בגבול שאנו צריכים לחשב:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = \begin{bmatrix} t = nx \\ dx = \frac{1}{n}dt \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{n} f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t)dt$$

מהיינה נקבל ש$\lim_{n\to\infty} \int_0^n f(t)dt = F$ וכמובן $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ולכן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(t)dt = F \cdot 0 = 0$$

וחישבנו את הגבול בשאלה כנדרש.

■

שאלה 4

נרצה להשתמש במבחן דיריכלה על מנת להוכיח את ההתכנסות. נסמן $g(x) = f'(x)\sin(f(x))$. נשים לב כי מתקיים

$$f'(x)\sin(f(x)) = \big(-\cos(f(x))\big)' \implies \int g(x)dx = -\cos(f(x)) + C$$

ולכן g רציפה ב$[a,\infty)$, הפונקציה $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ מקיימת

$$G(x) = -\cos(f(x)) \Big|_a^t = \cos(f(a)) - \cos(f(t))$$

ולכן כמובן חסומה (מכיוון ש$\cos$ חסומה ו$\cos(f(a))$ קבוע) ב$[a,\infty)$. כעת, נתבונן ב$h(x) = \frac{1}{f(x)}$. נגזור:

$$h'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

לכן מאינפי 1 נקבל שh מונוטונית יורדת בתחום, וכמובן שh' רציפה בתחום (כי f, f', x^2 רציפות בתחום וh' הנה מנה והרכבה שלהן). בנוסף, מהנתון נקבל ש$\lim_{x\to\infty} h(x) = \frac{1}{\lim_{x\to\infty} f(x)} = 0$, ולכן ממבחן דיריכלה נקבל כי $\int_a^{\infty} h(x)f(x)dx$ מתכנס, או כלומר שהאינטגרל

$$\int_a^{\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} \sin(f(x))dx$$

מתכנס כנדרש.

■

שאלת הרשות

נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אזי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $M < c$ המקיים $\varepsilon \geq \left|f(c)\right|$. מהנתון f רציפה במ"ש ולכן קיים $\delta \in (0, c-M)$ כך שלכל $a < x < y < x+\delta$ מתקיים $\left|f(y)-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

לפיכך נסיק מאי־שוויון המשולש שלכל $x \in (c-\delta, c+\delta)$ מתקיים $\left|f(x)\right| \geq \left|f(c)\right| - \left|f(x)-f(c)\right| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. לכן לפי משפט הערך הממוצע קיים $x_0 \in [c-\delta, c+\delta]$ כך שמתקיים

$$\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx\right| = \left|2\delta \cdot f(x_0)\right| \geq 2\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \delta\epsilon$$

לפיכך, קיבלנו כי קיים $\varepsilon_1 = \delta\epsilon$ כך שלכל M קיימים $M < c-\delta < c+\delta$ כך ש$\left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx\right| \geq \varepsilon_1$
ולכן לפי מבחן קושי האינטגרל $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר, בסתירה לנתון.

הגענו לסתירה והוכחנו את נכונות הטענה בשאלה בדרך השלילה כנדרש.

■