ממן 13

יונתן אוחיון

20 בדצמבר 2017

שאלה 1

סעיף א

ראשית, נפשט מעט את הביטוי של $f(A,B)$:

$$\begin{aligned} f(A,B) &= \operatorname{tr} A^t M B \\ &= \operatorname{tr} (B^t M^t A)^t && \text{נימוק: } \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^t \\ &= \operatorname{tr} B^t M^t A \end{aligned}$$

בנוסף, ידוע לנו שמתקיים $f(B,A) = \operatorname{tr} B^t M A$, כלומר עלינו למצוא תנאי שM תקיים על מנת ש$\operatorname{tr} B^t M^t A = \operatorname{tr} B^t M A$. תנאי זה הוא כמובן תנאי הסימטריות, כלומר $M = M^t$.

לפיכך, $f(A,B) = f(B,A)$ אממ M מטריצה סימטרית ומצאנו את התנאי הנדרש.

■

סעיף ב

נחשב (בעמוד הזה ובעמוד הבא):

שורה 1

$$f(e_1,e_1) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$f(e_1,e_2) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$f(e_1,e_3) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$f(e_1,e_4) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A]_1^R = (f(e_1,e_1), f(e_1,e_2), f(e_1,e_3), f(e_1,e_4)) = (1,0,2,0)$$

שאלה 1 – המשך

סעיף ב

שורה 2

$$f(e_2,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_2,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=1$$

$$f(e_2,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_2,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=2$$

$$[A]_2^R=(f(e_2,e_1),f(e_2,e_2),f(e_2,e_3),f(e_2,e_4))=(0,1,0,2)$$

שורה 3

$$f(e_3,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}=3$$

$$f(e_3,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&3\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_3,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}5&0\\0&0\end{bmatrix}=5$$

$$f(e_3,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&5\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$[A]_3^R=(f(e_3,e_1),f(e_3,e_2),f(e_3,e_3),f(e_3,e_4))=(3,0,5,0)$$

שורה 4

$$f(e_4,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_4,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}=3$$

$$f(e_4,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\5&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_4,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&5\\0&5\end{bmatrix}=5$$

$$[A]_4^R=(f(e_4,e_1),f(e_4,e_2),f(e_4,e_3),f(e_4,e_4))=(0,3,0,5)$$

בעמוד הבא נראה את $[f]_E$.

שאלה 1 – המשך

סעיף ב

כעת, לאחר שחישבנו את שורות $[f]_E$, נציב:

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2I \\ 3I & 5I \end{bmatrix}$$

ומצאנו את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי כנדרש.

■

סעיף ג

נסמן בf_1 תבנית בילינארית סימטרית ובf_2 תבנית בילינארית אנטיסימטרית. עלינו למצוא f_1, f_2 כאלו המקיימות $f = f_1 + f_2$. לפי מסקנה 10.8, די לנו למצוא שתי מטריצות $A, B \in M_{4\times 4}^{\mathbb{R}}$ המקיימות $A = A^t, B = -B^t$ שבעזרתן נוכל להגדיר את f_1, f_2 כך שמתקיים

$$[f]_E = [f_1 + f_2]_E = [f_1]_E + [f_2]_E = A + B$$

נתבונן במטריצות הבלוקים הבאות:

$$A = \begin{bmatrix} I & K \\ K & 5I \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} I & K + M \\ K - M & 5I \end{bmatrix}$$

כעת, נמצא את K, M:

$$K + M = 2I \wedge K - M = 3I \Rightarrow K = 2.5I, M = -0.5I$$

ומצאנו את המטריצות שחיפשנו והן:

$$A = \begin{bmatrix} I & 2.5I \\ 2.5I & 5I \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & -0.5I \\ 0.5I & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} I & 2I \\ 3I & 5I \end{bmatrix}$$

נראה שהן אכן מקיימות את ההגבלות:

$$A^t = \begin{bmatrix} I^t & 2.5I^t \\ 2.5I^t & 5I^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 2.5I \\ 2.5I & 5I \end{bmatrix} = A,\ -B^t = \begin{bmatrix} 0^t & -(0.5I)^t \\ -(-0.5I)^t & 0^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5I \\ 0.5I & 0 \end{bmatrix} = B$$

ומצאנו שתי תבניות בילינאריות $f_1(v, u) = [v]_E^t A[u]_E,\ f_2(v, u) = [v]_E^t B[u]_E$ המקיימות $f = f_1 + f_2$ כנדרש.

■

שאלה 2

סימונים

יהי $B=\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ בסיס ל-V ונסמן:

$$\vec{b},\vec{c}\in F^n,\ T(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}b_ix_i=\vec{b}\cdot[\vec{x}]_B,\ S(\vec{y})=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j=\vec{c}\cdot[\vec{y}]_B$$

כאשר $\cdot$ המכפלה הסקלרית. בנוסף, נסמן את המטריצה המייצגת של f לפי B ב-A, כלומר $A=[f]_B$.

כיוון א - הצגה $\Leftarrow$ דרגה

נניח כי ההצגה של f לפי B היא $f(\vec{x},\vec{y})=T(\vec{x})S(\vec{y})$ ונוכיח כי $\rho(f)=1$. ברור כי מתקיים

$$\vec{v}_i=0\cdot\vec{v}_1+\ldots+1\cdot\vec{v}_i+\ldots+0\cdot\vec{v}_n$$

ולכן $f(\vec{v}_i,\vec{v}_j)=T(\vec{v}_i)S(\vec{v}_j)=b_ic_j$, כלומר

$$A=\begin{bmatrix}b_1c_1&\ldots&b_1c_n\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_nc_1&\ldots&b_nc_n\end{bmatrix}\Rightarrow[A]_i^R=b_i\cdot\vec{c}$$

ולכן $R_A\subseteq\mathrm{Sp}\{\vec{c}\}$[1], ולכן $\rho(f)\le 1$. אך מכיוון ש-$f\neq 0$, בהכרח $\rho(f)\neq 0$ ולכן $\rho(f)=1$ כנדרש.

כיוון ב - דרגה $\Leftarrow$ הצגה

נניח כי $\rho(A)=1$. ידוע מלינארית 1 כי קיים $\vec{w}\in F^n$ כך ש-$C_A\subseteq\mathrm{Sp}\{\vec{w}\}$[2] או $R_A\subseteq\mathrm{Sp}\{\vec{w}\}$.
נחלק, אם כן, למקרים:
אם $R_A\subseteq\mathrm{Sp}\{\vec{w}\}$, נוכל להניח בהכ כי $\vec{w}=\vec{c}$. לכן $\forall 1\le i\le n\exists b_i\in F,\ [A]_i^R=b_i\cdot\vec{c}$.
אם $C_A\subseteq\mathrm{Sp}\{\vec{w}\}$, נוכל להניח בהכ כי $\vec{w}=\vec{b}$. לכן $\forall 1\le i\le n\exists c_i\in F,\ [A]_i^C=c_i\cdot\vec{b}$.

בשני המקרים מתקבלת המטריצה הבאה:

$$A=\begin{bmatrix}b_1c_1&\ldots&b_1c_n\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ b_nc_1&\ldots&b_nc_n\end{bmatrix}$$

לכן לפי מסקנה 10.8 קיימת תבנית בילינארית המוגדרת באופן הבא:

$$f(\vec{x},\vec{y})=[\vec{x}]_B^tA[\vec{y}]_B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_ic_jx_iy_j=\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}c_jy_j\right)=T(\vec{x})S(\vec{y})$$

והראינו את ההצגה כמכפלה של שתי תבניות לינאריות כנדרש.

$\blacksquare$

[1] R_A – מרחב השורות של A
[2] C_A – מרחב העמודות של A