נספח לממן 16– הוכחות ארוכות ומייגעות

יונתן אוחיון

17 בינואר 2018

תקציר

נספח זה כולל בתוכו שתי הוכחות ארוכות שכתבתי לשאלות 1א ו2ב בממן 16 של חשבון אינפינטסימלי 1. הוכחות אלו נכתבו במהלך הלילה / שעות הלימודים שלי בתיכון ולכן יכול להיות שהן אינן מדויקות. **נספח זה אינו חלק מהמטלה והוא צורף רק מכיוון שאני מעוניין לראות אם הוכחות אלו נכונות.** אשמח אם תבדוק אותן אם יש לך זמן.

השאלות

שאלה 1א

חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n$$

שאלה 2ב

תהי $f(x)=e^{-x}+\sin^2 x$. הוכח כי $\inf f\left([0,\infty)\right)=0$.

פתרון – שאלה 1א

טענת עזר

תהי f כך ש-$0 \neq x \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to\infty} f(t) = x$. נראה כי מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = e^x \tag{1}$$

ראשית, נעבור לסדרות. תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. אזי לפי היינה,

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x_n)}{x_n}\right)^{x_n}$$

נתבונן בסדרה $y_n = \frac{f(x_n)}{x_n}$. נוכל לראות שמתקיים $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. נציב ב(1) ונראה כי

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{f(x_n)}{x_n}\right)^{x_n} &= \lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{f(x_n)}{y_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left((1+y_n)^{\frac{1}{y_n}}\right)^{f(x_n)} \\
\text{6.15 טענה} &= \lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{\frac{1}{y_n}\lim_{n\to\infty} f(x_n)} \\
\text{היינה} &= \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}\lim_{t\to\infty} f(t)} \\
\text{6.18 טענה} &= e^{\lim_{t\to\infty} f(t)} = \boxed{e^x}
\end{aligned}$$

והוכחנו כי מתקיים

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{f(t)}{t}\right)^t = e^x$$

כנדרש.

■

פתרון – שאלה 1א (המשך)

הוכחה

ראשית, נזכר בהוכחה של הגבול המפורסם $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. בתור חלק מההוכחה, הוכח אי השוויון הבא עבור x בקרבת 0:

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \equiv x\cos x \le \sin x \le x$$

כלומר, נוכל לראות שעבור x בקרבת 0 מתקיים

$$(1+x\cos x)^{\frac{1}{x}} \le (1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad (2)$$

בנוסף, מכלל הסנדוויץ' נובע כי מתקיים

$$\lim_{x\to 0}(1+x\cos x)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} \le \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad (3)$$

ידוע כי $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. מ(2), (3) והיינה נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (4)$$

לפיכך, כל שעלינו הוא לחשב את הגבול הימני והשמאלי ולהשתמש בכלל הסנדוויץ'. הגבול הימני הוא כמובן הגבול הידוע $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. בנוסף, מטענת העזר נובע כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}} \qquad (5)$$

מכיוון ש$\cos$ רציפה בכל נקודה ו$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, מתקיים $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=\cos 0=1$. לפיכך ולפי (5),

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}}=e^1=e$$

לכן, נוכל לכתוב את (4) מחדש בתור

$$e \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n \le e$$

ומכלל הסנדוויץ' נובע כי $\lim_{n\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)^n=e$ כנדרש.

■

פתרון - שאלה 2ב

נסמן $A=[0,\infty)$ ונסמן $\inf_S f=\inf f(S)$ (כמו כן, $\min_S f=\min f(S)$). ראשית נראה כי 0 חסם מלרע של $f(A)$. יהי $x\in A$. אזי:

$$0<e\Longrightarrow<\frac{1}{e}\Longrightarrow=0^x<\left(\frac{1}{e}\right)^x=\frac{1}{e^x}=e^{-x}\Longrightarrow<e^{-x}$$

בנוסף, ידוע כי לכל $y\in\mathbb{R}$ מתקיים $0\le y^2$. לפיכך, $0\le\sin^2 x$. לפיכך, עבור $x\in A$ מתקיים

$$0<e^{-x}+\sin^2 x$$

והוכחנו ש0 חסם מלרע של $f(A)$. כעת עלינו להראות שמתקיים $\inf_A f=0$. נסמן $g(x)=e^{-x}$ ונתבונן בגבול $\lim_{x\to\infty} g(x)$. ידוע לנו שמתקיים

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}=\frac{1}{\lim_{x\to\infty} e^x}=0$$

לפיכך לפי הגדרת הגבול באינסוף מתקיים

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon>0\exists M\in\mathbb{R}\forall x\in(M,\infty),\ e^{-x}\in N_\varepsilon(0) &\iff \forall\varepsilon>0\exists M\in\mathbb{R}\forall x>M,\ e^{-x}<\varepsilon\\ M=0 \text{ נבחר} &\iff \forall\varepsilon>0\forall x>0, e^{-x}<\varepsilon\\ \text{בפרט קיים } x>0 \text{ המקיים זאת} &\iff \forall\varepsilon>0\exists x>0, e^{-x}<\varepsilon\end{aligned}$$

בנוסף, $e^{-0}=e^0=1$ ולכן לפי הגדרת האינפימום מתקיים $\inf_A g=0$.

בנוסף, ידוע כי $h(x)=\sin^2(x)\in[0,1]$ ולכן $\min_A h=0$ ובפרט $\inf_A h=0$.

כעת מהגדרת f נובע כי

$$f(A)=\left\{e^{-x}+\sin^2 x\mid x\in A\right\}=\left\{e^{-x}\mid x\in A\right\}+\left\{\sin^2 x\mid x\in A\right\}=g(A)+h(A)$$

לכן מתקיים

$$\inf_A f=\inf_A g+\inf_A h=0+0=0$$

והוכחנו כי $\inf_A f=0$ כנדרש.

■