ממ"ן 13

יונתן אוחיון

30 בנובמבר 2017

שאלה 1

ראשית, נוכיח שהסדרה (a_n) מוגדרת לכל n. נוכל לראות שהסדרה מוגדרת אמ"מ

$$4(1-a_n) \neq 0 \Rightarrow 4-4a_n \neq 0 \Rightarrow 4a_n \neq 4 \Rightarrow a_n \neq 1$$

$(*)$ נוכיח באינדוקציה שמתקיים $0 \leq a_n < \frac{1}{2}$ לכל n. עבור מקרה הבסיס $n=1$ אי־שוויון זה ברור מהגדרת הסדרה (שכן $a_1 = 0$). כעת, נניח נכונות עבור $n=k$ ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned} 0 \leq a_k < \frac{1}{2} &\Rightarrow -\frac{1}{2} < -a_k \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < 1-a_k \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \frac{1}{1-a_k} < 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4(1-a_k)} < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a_{k+1} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

לפיכך ולפי הגדרת הסדרה מתקיים $a_n \neq 1$ ולכן היא מוגדרת לכל n. כעת, נוכיח באינדוקציה שהסדרה מונוטונית עולה. עבור מקרה הבסיס $n=1$, נחשב ונראה שאי־השוויון מתקיים:

$$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{4-a_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 < a_2$$

כעת, נניח נכונות עבור $n=k$ ונוכיח עבור $n=k+1$:

$$\begin{aligned} a_k < a_{k+1} &\Rightarrow 1-a_k > 1-a_{k+1} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-a_k} < \frac{1}{1-a_{k+1}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{4(1-a_k)} < \frac{1}{4(1-a_{k+1})} \\ &\Rightarrow a_{k+1} < \frac{1}{4(1-a_{k+1})} \Rightarrow a_{k+1} < a_{k+2} \end{aligned}$$

לכן הסדרה מונוטונית עולה. לפיכך ולפי $(*)$ הסדרה מונוטונית וחסומה, ולכן לפי משפט 3.16 היא מתכנסת. בעמוד הבא נחשב את גבולה.

שאלה 1 – המשך

כעת, נחשב את גבול הסדרה. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לפי משפט 2.29 מתקיים

$$\begin{aligned} L = \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4-4a_n} \\ &= \frac{1}{4-4\lim_{n\to\infty} a_n} \\ &= \frac{1}{4-4L} \end{aligned}$$

נכפול את שני הצדדים ב$4-4L$ ונקבל:

$$\begin{aligned} -4L^2+4L=1 &\Rightarrow -4L^2+4L-1=0 \\ &\Rightarrow 4L^2-4L+1=0 \\ &\Rightarrow (2L-1)^2=0 \\ &\Rightarrow L=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

וזהו גבול הסדרה כנדרש.

■

שאלה 2

סעיף א

נחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(-4)^n}((\frac{5}{4})^n+2(\frac{3}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}{\cancel{(-4)^n}(1+2(\frac{2}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}$$
$$=\frac{\lim_{n\to\infty}((\frac{5}{4})^n+2(\frac{3}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}{\lim_{n\to\infty}(1+2(\frac{2}{4})^n+\frac{3}{(-4)^n})}$$
$$=\frac{\infty+2\cdot 0+0}{1+2\cdot 0+0}=\infty$$

וחישבנו את הגבול כנדרש.

■

סעיף ב

ראשית, נסמן

$$a_n=\frac{(-5)^n+2(-3)^n+3}{(-4)^n+2(-2)^n+3},\ b_n=\frac{(-4)^n+2(-2)^n+3}{(-5)^n+2(-3)^n+3}$$

נוכל לשים לב ש$a_n=\frac{1}{b_n}$. לפיכך ולפי סעיף א, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}a_n}\underset{\text{משפט 2.43ה}}{=}0$$

כנדרש.

■

שאלה 2 - המשך

סעיף ג

טענת עזר - $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$:

ראשית, נוכיח ש$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$. נגדיר את הסדרה $b_n=(1+\frac{1}{n})^n=(\frac{n+1}{n})^n$. אזי $\lim_{n\to\infty}b_n=e$. נשים לב שלמעשה מתקיים

$$\begin{aligned}
b_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow b_{n-1}&=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\\
&=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\\
&=\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\\
&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}
\end{aligned}$$

לפי משפט 2.29 מתקיים $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}b_{n-1}$. נחשב את הגבול ונקבל:

$$\begin{aligned}
e=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}
\end{aligned}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n=e$. כעת, נוכל לראות שמתקיים

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1}$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n&=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1}\\
&=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n\right)^{-1}\\
&=e^{-1}=\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

שאלה 2 – המשך

סעיף ג – המשך

כעת נחשב את גבול הסדרה. ראשית, נפשט את הביטוי:

$$a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

נניח בשלילה ש־(a_n) מתכנסת לגבול L. לכן, לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים ל־L. נסתכל על שתי תת־סדרות של (a_n):

$$a_{2n} = (-1)^{2n}\left(1 - \tfrac{1}{2n}\right)^{2n}, a_{2n-1} = (-1)^{2n-1}\left(1 - \tfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}$$
$$\Downarrow$$
$$a_{2n} = \left(1 - \tfrac{1}{2n}\right)^{2n}, a_{2n-1} = -\left(1 - \tfrac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}$$

נשים לב שמתקיים $a_{2n} = b_{2n}$ ולכן היא תת־סדרה של הסדרה b_n (סדרה זו הוגדרה בטענת העזר). הסדרה b_n מתכנסת, ולכן לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים לגבול שלה. לפיכך, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{e}$.

בנוסף, נוכל לשים לב שמתקיים $a_{2n-1} = -b_{2n-1}$ ולכן היא תת־סדרה של $-b_n$. מכיוון שהיא מתכנסת, לפי משפט 3.25 כל הגבולות החלקיים שלה שווים לגבול שלה ולכן $\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\frac{1}{e}$.
לסיכום:

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{e},\ \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -\frac{1}{e}$$

כמובן ש־$\frac{1}{e} \neq -\frac{1}{e}$, ולכן מצאנו שני גבולות חלקיים שונים של (a_n) בסתירה להנחה. לפיכך, הסדרה (a_n) לא מתכנסת.

כעת, נסמן ב־$\hat{L}$ את קבוצת הגבולות החלקיים של (a_n) ונמצא אותה: לפי ממצאינו, $\hat{L} \subseteq \left\{\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right\}$. נוכיח כעת ששני הגבולות החלקיים הללו הינם הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה. נוכל לראות ששתי תת־סדרות אלו מכסות את הסדרה (a_n), ולכן לפי משפט 3.30, מתקיים $\hat{L} = \left\{\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right\}$ ומצאנו את כל הגבולות החלקיים של (a_n) כנדרש.

■

סעיף ד

נתון ש־(a_n) סדרה עולה ממש של מספרים שלמים. לפיכך, החל ממקום מסוים N, לכל $n > N$ מתקיים $a_n > 0$. מכיוון שהסדרה הינה סדרה עולה ממש של מספרים שלמים, ובמקרה זה – גם חיוביים, היא תת סדרה של הסדרה $b_n = n$. לפיכך, הסדרה $c_n = (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n}$ תת־סדרה של הסדרה $d_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, ולכן גבולן שווה. לפי דוגמה 3.5, מתקיים $\lim_{n\to\infty} d_n = e$, ולפי משפט 3.30, גם $\lim_{n\to\infty} c_n = e$ כנדרש.

■

שאלה 3

סעיף א

נוכיח כי $0 \le a_n \le 1$ לכל n. מתכונות הערך השלם נובע כי

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \sqrt{n} < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \Rightarrow \lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \le \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 - \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$
$$\Rightarrow 0 \le \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < 1$$
$$\Rightarrow 0 \le \langle\sqrt{n}\rangle < 1 \Rightarrow 0 \le a_n < 1$$

לפיכך, הסדרה (a_n) חסומה כנדרש.

■

סעיף ב

ראשית, נראה שתת הסדרה $(a_{n^2})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-0:

$$a_{n^2} = \langle\sqrt{n^2}\rangle = \langle n\rangle \underset{n\,\in\,\mathbb{N}}{=} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n^2} = 0$$

ומצאנו תת־סדרה המתכנסת ל-0. נוכיח כעת כי זהו הגבול התחתון של (a_n). נניח שקיימת תת־סדרה אחרת, $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ (כאשר $\sqrt{n_k} \notin \mathbb{Z}$) המתכנסת לגבול קטן יותר מ-0, או

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} < \lim_{n\to\infty} a_{n^2}$$

לפי תכונות החלק השברי ולפי הגדרת הסדרה, בהכרח $0 < \langle\sqrt{n_k}\rangle$. לפיכך,

$$a_{n^2} < a_{n_k} \underset{\text{משפט } 2.31}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} a_{n^2} < \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

בסתירה להנחה. לפיכך, לא קיימת תת־סדרה אחרת המתכנסת לגבול קטן יותר מ-0, ו

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$$

כנדרש.

■

שאלה 3 – המשך

סעיף ג

ראינו בסעיף א שלכל n מתקיים $0 \leq a_n < 1$, כלומר 0 חסם מלרע של (a_n). בנוסף, ראינו בסעיף ב שהתת־סדרה (a_{n^2}) היא הסדרה הקבועה 0, כלומר לכל n מתקיים $a_{n^2} = 0$, ולכן זהו $\min \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ובפרט $\inf a_n$ כנדרש.

■

סעיף ד

נוכיח כי $\langle \sqrt{n^2-1} \rangle = \sqrt{n^2-1} - n + 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$. לפי הגדרת החלק השברי מתקיים

$$\langle \sqrt{n^2-1} \rangle = \sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor$$

נפשט את הטענה שעלינו להוכיח עבור כל $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{n^2-1} - \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor = \sqrt{n^2-1} - n + 1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor = n - 1$$

לפי תכונות הערך השלם, $\sqrt{n^2-1} - 1 < \lfloor \sqrt{n^2-1} \rfloor \leq \sqrt{n^2-1}$, כלומר שעלינו להוכיח שמתקיים

$$\sqrt{n^2-1} - 1 < n - 1 \leq \sqrt{n^2-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{n^2-1} - 1 < n - 1 \wedge n - 1 \leq \sqrt{n^2-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cancel{n^2} - 1 < \cancel{n^2} \wedge \cancel{n^2} - 2n + 1 \leq \cancel{n^2} - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$2n - 1 \geq 1 \iff 2n \geq 2 \iff n \geq 1$$

וזה כמובן נכון, שכן $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$, ולכן עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\langle \sqrt{n^2-1} \rangle = \sqrt{n^2-1} - n + 1$ כנדרש.

■

שאלה 3 - המשך

סעיף ה

ידוע לנו שעבור כל $1 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים גם $n^2 - 1 \in \mathbb{N}$. לפיכך, הסדרה $\sqrt{n^2-1}$ היא תת־סדרה של $\sqrt{n}$, ולפי משפט 3.25 גבולן שווה. לפי דוגמה 2.25 נוכל לראות שגבולן בפרט שווה ל∞. בנוסף, אנו יודעים ש$\lim_{n\to\infty} n = \infty$ ו$\lim_{n\to\infty} 1 = 1$. נחשב, אם כן, את גבול הסדרה:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + \lim_{n\to\infty} 1 \\ \text{(נימוק בהערת שוליים}^1\text{)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} - 1 - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2-1}+n} + 1 \\ &= -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} + 1\end{aligned}$$

כעת, לפי משפט 2.43א, מתקיים $\sqrt{n^2-1} + n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ולכן לפי משפט 2.43ה מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} = 0 \Rightarrow -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}+n} = -0 = 0$$

ולכן $-\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}+n)^{-1} + 1 = 0 + 1 = 1$ כנדרש.

■

סעיף ו

כפי שהוכחנו בסעיף הקודם, עבור $n > 1$ טבעי מתקיים $n^2 - 1 \in \mathbb{N}$, ולכן אנו יכולים להגדיר תת־סדרה $(a_{n^2-1})_{n=2}^{\infty}$. נראה שהיא מתכנסת ל1:

$$\begin{aligned} n^2 - 1 \in \mathbb{N} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \langle \sqrt{n^2-1} \rangle \\ \text{לפי סעיף ד} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \langle \sqrt{n^2-1} \rangle = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 \\ \text{לפי סעיף ה} &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2-1} - n + 1 = 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{n^2-1} = 1 \end{aligned}$$

ומצאנו תת־סדרה המתכנסת לגבול 1. לפיכך, 1 גבול חלקי של (a_n) כנדרש.

■

[1] יש לציין שניתן לעשות את המעבר הזה רק מכיוון שעבור $1 < n \in \mathbb{N}$, מתקיים $0 < n^2 - 1 \in \mathbb{N}$.

שאלה 3 – המשך

סעיף ז

נניח שקיים גבול חלקי של (a_n) הגדול ממש מ1 ונסמן אותו בc. כלומר, קיימת תת־סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל$c > 1$. כפי שהוכחנו בסעיף א, נוכל לראות שהסדרה (a_n) חסומה מלעיל ע"י 1, ולכן לפי משפט 3.40.5 מתקיים $\limsup_{n\to\infty} a_n \le 1$, והגענו לסתירה (מצאנו תת־סדרה ששואפת לגבול גדול יותר מהגבול העליון). לפיכך, $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$ כנדרש.

■

סעיף ח

כפי שהראינו בסעיף ו, קיימת תת־סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול 1. כלומר, לפי הגדרת הגבול מתקיים

$$\begin{aligned}\forall 0<\varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall N<n,\ |a_n-1|<\varepsilon &\Rightarrow a_n\in N_\varepsilon(1)\\ &\Rightarrow a_n\in(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\\ &\Rightarrow 1-\varepsilon<a_n<1+\varepsilon\\ \text{בפרט} &\Rightarrow 1-\varepsilon<a_n\end{aligned}$$

בנוסף, 1 חסם מלעיל של (a_n) לפי סעיף א, ולכן לפי טענה 3.9 מתקיים $\sup a_n = 1$. לסדרה (a_n) אין מקסימום, מכיוון שלפי הגדרת החסמים בסעיף א, עבור כל n טבעי מתקיים $a_n < 1$, כלומר לכל n טבעי מתקיים $a_n \le 1 \wedge a_n \ne 1$ ולכן לסדרה אין מקסימום כנדרש.

■