ממן 11

יונתן אוחיון

29 באוקטובר 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

נניח ש-a רציונלי ונגיע לסתירה. ראשית, מכיוון שמתקיים $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, גם k ו-l רציונליים. כעת,

$$(*) \qquad a = k + l\sqrt{2} \xrightarrow[() - k]{} a - k = l\sqrt{2}$$

מכיוון ש-$a, k \in \mathbb{Q} \wedge a - k = a + (-k)$ ופעולת החיבור מעל הרציונליים הינה פעולה סגורה, מתקיים גם $a - k \in \mathbb{Q}$. לפיכך, נוכל לייצגו בעזרת $\alpha, \beta \in \mathbb{Z} \wedge \beta \neq 0$ כך: $a - k = \frac{\alpha}{\beta}$ ונוכל להניח שהצגה זו הינה ההצגה המצומצמת ביותר של מספר זה (כלומר, הגורם המשותף היחידי בין α ו-β הוא 1). לכן לפי $(*)$ מתקיים

$$\frac{\alpha}{\beta} = l\sqrt{2} \xrightarrow[()^2]{} \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2l^2 \xrightarrow[() * \beta^2]{} \alpha^2 = 2l^2\beta^2$$

מכיוון ש-$2 \mid 2l^2\beta^2$ מתקיים $2 \mid \alpha^2$, ומכיוון שריבוע של מספר אי־זוגי הינו מספר אי־זוגי מתקיים גם $2 \mid \alpha$, כלומר קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש-$\alpha = 2m$. לכן

$$4m^2 = 2l^2\beta^2 \xrightarrow[\frac{()}{2}]{} l^2\beta^2 = 2m^2 \xrightarrow[\frac{()}{l^2}]{} \beta^2 = 2 \cdot \frac{m^2}{l^2}$$

לכן $2 \mid \beta^2$ ומכיוון שריבוע של מספר אי־זוגי הינו מספר אי־זוגי, מתקיים גם $2 \mid \beta$ והגענו לסתירה להנחה שהגורם המשותף היחידי בין α ו-β הינו 1. לפיכך, $a = k + l\sqrt{2}$ הינו מספר אי־רציונלי כנדרש.

■

1 שאלה 1 (המשך)

1.1 סעיף ב

נוכיח את הטענה באינדוקציה עבור $1 \le n \in \mathbb{N}$. מקרה הבסיס הוא כמובן $n = 1$, כלומר

$$a = (1 + \sqrt{2})^1 = 1 + \sqrt{2}$$

מספר זה הינו מהצורה $a = k + l\sqrt{2}$ (עבור $k = l = 1$) ולפי סעיף א של השאלה אנו יודעים שזהו מספר אי רציונלי. כעת, נניח נכונות עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} a &= (1 + \sqrt{2})^{k+1} \\ &= (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 + \sqrt{2})^k \\ &= (1 + \sqrt{2})^k + \sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^k \end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה $(1 + \sqrt{2})^k$ הינו מספר אי רציונלי, אך לפי שאלה 1.61ד נוכל לראות שמכפלת מספרים אי רציונליים אינה בהכרח מספר אי רציונלי בעצמה ולכן $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^k$ אינו בהכרח אי רציונלי. לפיכך, נוכל לחלק את הביטוי לשני מקרים:

1.1.1 מקרה א – $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^k \in \mathbb{Q}$

לפי הנחת האינדוקציה $(1 + \sqrt{2})^k$ מספר אי רציונלי. לפי שאלה 1.61א נוכל לראות שסכום מספר אי רציונלי ומספר רציונלי הינו מספר אי רציונלי בעצמו ולכן $a \notin \mathbb{Q}$ כנדרש.

1.1.2 מקרה ב – $\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^k \notin \mathbb{Q}$

2 שאלה 2

2.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר אשר אומרת שעבור כל $x, n \in \mathbb{R}, 1 \leq$ מתקיים $\frac{x}{n} \leq x$. לפי טענה 1.42.2, לכל $1 \leq n \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{n} \leq 1$. נכפיל את שני האגפים בx ונקבל $\frac{x}{n} \leq x$ כנדרש.

■

2.1 סעיף א

ראשית, נוכיח ש$|a| + 1 > 0$ בה"כ. לפי תכונות הערך המוחלט, $|a| \geq 0$. אם $|a| > 0$, בהכרח גם $|a| + 1 > 0$ (שכן $1 > 0$) וסיימנו. אם $|a| = 0$ אזי $|a| + 1 = 1 > 0$ כנדרש. לפיכך, $|a| + 1, |b| + 1 > 0$ ונוכל להשתמש בנוסחה הנתונה במטלה על מנת לפשט מעט את הביטוי:

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| = \left|\frac{(\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1})(\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1})}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right|$$

$$\text{נוסחאות הכפל המקוצר} \to = \left|\frac{|a| + \cancel{1} - |b| - \cancel{1}}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right|$$

$$\text{חיסור} \to = \left|\frac{|a| - |b|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right|$$

$$\text{מתכונות הערך המוחלט} \to = \frac{\big||a| - |b|\big|}{\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right|}$$

כעת, לפי טענת העזר שהוכחנו מתקיים

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| = \frac{\big||a| - |b|\big|}{\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right|} \leq \big||a| - |b|\big|$$

וגם

$$\frac{|a-b|}{2} \leq |a-b|$$

לפי אי־שוויון המשולש מתקיים $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ ולכן גם

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \leq \big||a| - |b|\big| \leq \frac{|a-b|}{2} \leq |a-b| \xRightarrow[\text{טרנזיטיביות}]{} \left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \leq \frac{|a-b|}{2}$$

כנדרש.

■

2 שאלה 2 (המשך)

2.2 סעיף ב

נחלק את הביטוי לשלושה תתי מקרים:

2.2.1 מקרה א – $a = 0$

לפי תכונות הערך המוחלט, $|a| = 0$. לפיכך,

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = a^2 = 0$$

כנדרש.

2.2.2 מקרה ב – $a > 0$

לפי תכונות הערך המוחלט, עבור $a > 0$ מתקיים $|a| = a$. לפיכך,

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}\right)^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 = a^2 + 0 = a^2$$

כנדרש.

2.3 מקרה ג – $a < 0$

לפי תכונות הערך המוחלט עבור $a < 0$ (כלומר קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש$a = -m$) מתקיים $|a| = -a = m$.
לפיכך,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\cancel{-m+m}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-m-m}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\cancel{2}m}{\cancel{2}}\right)^2 \\ &= (-m)^2 = a^2\end{aligned}$$

כנדרש.

■