ממן 11

יונתן אוחיון

21 בפברואר 2018

שאלת הרשות

נסמן $f^n(x) = (f(x))^n$. תהי f פונקציה רציפה ואי־שלילית בתחום $[0,1]$. נוכיח כי הסדרה $a_n = \int_0^1 f^n(x)dx$ מתכנסת אמ"מ $f(x) \leq 1$ לכל x בתחום.

כיוון א

נניח כי $0 \leq f(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$. נראה כעת באינדוקציה כי $0 \leq f^{n+1}(x) \leq f^n(x) \leq 1$ לכל n טבעי:

נוכיח את מקרה הבסיס בו $n = 1$. ידוע כי $0 \leq f(x) \leq 1$, ולכן נוכל לכפול את אי השוויון ב$f(x)$ ולקבל ש$0 \leq f^2(x) \leq f(x) \leq 1$ כנדרש.
נניח כעת כי הטענה נכונה עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k + 1$:

$$0 \leq f^{k+1}(x) \leq f^k(x) \leq 1 \underset{0 \leq f(x)}{\Longrightarrow} f(x)\cdot f^{k+1}(x) \leq f(x)\cdot f^k(x) \leq f(x) \Longrightarrow 0 \leq f^{k+2}(x) \leq f^{k+1}(x) \leq 1$$

לכן לפי עקרון האינדוקציה השלמה מתקיים $0 \leq f^{n+1}(x) \leq f^n(x) \leq 1$ לכל n טבעי.

כעת, ממונוטוניות האינטגרל נובע כי $0 \leq \int_0^1 f^{n+1}(x)dx \leq \int_0^1 f^n(x)dx \leq 1$ לכל n טבעי, כלומר לכל n טבעי מתקיים $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1$.לפיכך, הסדרה (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן ממשפט באינפי 1 נובע כי (a_n) מתכנסת כנדרש.

כיוון ב

נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$ ונניח בשלילה כי $f(x) > 1$ לכל x בתחום. נגדיר את הסדרה $b_n = f^n(x)$. נראה כי $b_{n+1} > b_n > 1$ לכל n טבעי: ידוע כי $f(x) > 1$ לכל $x \in [0,1]$. נכפול את אי השוויון ב$f(x)$ ונקבל $f^2(x) > f(x) > 1$. באינדוקציה נקבל כי $f^{n+1}(x) > f^n(x) > 1$ לכל n טבעי כנדרש. ממונוטוניות האינטגרל נובע כי $a_{n+1} > a_n$ לכל n טבעי ומכך נובע כי

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$$

ולכן ממבחן המנה לגבולות נובע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, ובפרט $\lim_{n\to\infty} a_n \notin \mathbb{R}$, בסתירה להנחה.
לפיכך, $f(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$ כנדרש.

לכן, לסיכום, הוכחנו שהסדרה $a_n = \int_0^1 f^n(x)dx$ מתכנסת אמ"מ $f(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$.

■