ממן 17

יונתן אוחיון

10 ביולי 2018

סימונים כלליים וסעיפי רשות

אני משתמש בסימון הבא בשביל לסמן ווקטורים: $\vec{x}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ וכדומה. בנוסף, מתקיים $\vec{0} = (0,0)$. לעתים אשתמש בסימון הבא על מנת לקצר את כתיבת הגבול: במקום הסימון $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ אשתמש ב-$\lim_{\vec{v}\to\vec{0}}$.

בנוסף, הסימון $\underset{\text{L'H}}{=}$ אומר כי השוויון מתקיים לפי כלל לופיטל, בדרך כלל בגבולות מהצורה "$\frac{0}{0}$" (ואני מציין כאשר מדובר במקרה אחר).

בעת חישוב הקריטריון לנקודת קיצון בנקודה $\vec{p}$ (הנמצא במשפט 7.72), אשתמש בשיטה הבאה:
אסמן

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{p}), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{p}), C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{p})$$

ואחשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{p}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{p}) \end{bmatrix} \Rightarrow \det D = AC - B^2$$

ולכן אוכל להשוות את $\det D$ – ל-0 וכך לראות האם הנקודה היא נקודת קיצון. בנוסף, בחרתי להחליף את סעיף ב' בשאלה 5 בסעיף הרשות.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

שאלה 1א

ראשית, נסמן:

$$f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2+25}-5},g(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

נוכיח טענת עזר:

טענת עזר 1 יהיו $a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. אזי מתקיים: $\left|\frac{a^3}{a^2+b^2}\right|\leq|a|$. הוכחה:

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\frac{b^2}{a^2}\geq 0\Rightarrow\left|1+\frac{b^2}{a^2}\right|\geq 1\Rightarrow\left|\frac{a^2}{a^2+b^2}\right|=\left|1+\frac{b^2}{a^2}\right|^{-1}\leq 1\Rightarrow\left|\frac{a^3}{a^2+b^2}\right|=|a|\cdot\left|\frac{a^2}{a^2+b^2}\right|\leq|a|$$

כעת, מטענת העזר נובע כי מתקיים $\forall x,y\in\mathbb{R}\backslash\{0\},0\leq\left|g(x,y)\right|\leq|x|+|y|$. כמובן שמתקיים השוויון $\lim_{(x,y)\to\vec{0}}|x|+|y|=0$ ולכן ממשפט הסנדוויץ' נקבל כי $\lim_{\vec{v}\to\vec{0}}g(\vec{v})=0$.

כעת, נפשט את הביטוי ל$f(\vec{v})$:

$$\begin{aligned}f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2+25}-5}&=\frac{(x^3+y^3)(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)}{(\sqrt{x^2+y^2+25}-5)(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)}\\&=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2+\cancel{25-25}}(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)=g(x,y)\cdot(\sqrt{x^2+y^2+25}+5)\end{aligned}$$

כעת, מרציפות ב$\vec{0}$ נקבל כי מתקיים

$$\lim_{(x,y)\to\vec{0}}\sqrt{x^2+y^2+25}+5=\sqrt{25}+5=10$$

ולכן מתקיים

$$\lim_{\vec{v}\to\vec{0}}f(\vec{v})=\lim_{\vec{v}\to\vec{0}}g(\vec{v})\cdot\lim_{(x,y)\to\vec{0}}\sqrt{x^2+y^2+25}+5=0\cdot 10=0$$

והגבול קיים בנקודה ובפרט שווה ל0 כנדרש.

■

שאלה 1ב

נסמן:

$$f(x,y) = \Big(1+\sin(x^2+y^2)\Big)^{\frac{x+2}{x^2+y^2}}, g(x,y) = (x+2)\cdot \frac{\ln\big(1+\sin(x^2+y^2)\big)}{x^2+y^2}$$

כעת, נוכל לראות כי למעשה מתקיים $\forall \vec{v}\in\mathbb{R}^2, f(\vec{v}) = e^{g(\vec{v})}$. לכן, מרציפות הפונקציה e^x על מנת למצוא את הגבול של f בראשית עלינו למצוא את הגבול של g בראשית ולהציב. אם כן, נעשה זאת:

$$\begin{aligned}
\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} g(\vec{v}) &= \lim_{(x,y)\to\vec{0}}(x+2)\cdot \lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{\ln\big(1+\sin(x^2+y^2)\big)}{x^2+y^2} \\
&= 2\lim_{(x,y)\to\vec{0}} \frac{\ln\big(1+\sin(x^2+y^2)\big)}{x^2+y^2} = \begin{bmatrix} t = x^2+y^2 \\ t \xrightarrow[(x,y)\to\vec{0}]{} 0 \end{bmatrix} \\
&= 2\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+\sin t)}{t} \underset{\text{L'H}}{=} 2\lim_{t\to 0}\frac{\cos t}{1+\sin t}\cdot 1 = 2\cdot\frac{1}{1}\cdot 1 = \boxed{2}
\end{aligned}$$

לכן, מתקיים $\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{v}) = e^{\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} g(\vec{v})} = e^2$ כנדרש.

■

שאלה 1ג

נראה שהגבול אינו קיים. נסמן:

$$f(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$$

נניח בשלילה כי הגבול כן קיים. כעת, נתבונן בסדרות הנקודות הבאות:

$$\vec{p_n} = \left(0,\frac{1}{n}\right), \vec{q_n} = \left(\frac{1}{n},0\right)$$

מתקיים כמובן $\vec{p_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{0}$ וגם $\vec{q_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \vec{0}$. נציב בפונקציה ונקבל:

$$f(\vec{p_n}) = \frac{0^4-\left(\frac{1}{n}\right)^4}{0^4+\left(\frac{1}{n}\right)^4} = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1, f(\vec{q_n}) = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^4-0^4}{\left(\frac{1}{n}\right)^4+0^4} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

מכיוון ש $-1\neq 1$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(\vec{p_n}) \neq \lim_{n\to\infty} f(\vec{q_n})$ והגבול בנקודה לא קיים כנדרש.

■

שאלה 1ד

ראשית, נוכל לראות כי מתקיים $0 \le |\arctan x| \le \frac{\pi}{2}$ ולכן גם $0 \le \arctan^4 x \le \frac{\pi^4}{16}$. כעת, מכיוון ש$0 \le \cos x^2 \le 1$ נקבל:

$$\frac{-1+y^2}{y^2+\frac{\pi^4}{16}} \le \frac{\cos^2 x - 1 + y^2}{y^2+\arctan^4 x} \le \frac{y^2}{y^2}$$

שאלה 2א

אם $y \neq 0$, נקבל כי f רציפה בנקודה בתור הרכבה וכפל של פונקציות רציפות. נתבונן בנקודות מהצורה $(x,0)$ כך ש$x \neq 0$: יהי $c \neq 0$. נתבונן בסדרת הנקודות $\vec{p_n} = (c, \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}})$. מתקיים כמובן $p_n \xrightarrow[n \to \infty]{} (c,0)$, אבל אם נציב ב$f$ נקבל כי מתקיים

$$f(\vec{p_n}) = c\sin(\pi n + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n c$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} f(\vec{p_n})$ לא קיים. לפיכך, הגבול $\lim_{\vec{v}\to(c,0)} f(\vec{v})$ לא קיים וf אינה רציפה בנקודות מהסוג $(x,0)$ כאשר $x \neq 0$. נתבונן, אם כן, בנקודה $(0,0)$: ידוע כי $\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq 1$ ולכן מתקיים $\left|f(\vec{v})\right| \leq |x|$, ומכלל הסנדוויץ' נקבל כי $\lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{v}) = 0$. בנוסף, מהגדרת הפונקציה נקבל כי $f(\vec{0}) = \lim_{\vec{v}\to\vec{0}} f(\vec{v})$ ולכן הפונקציה רציפה ב$\vec{0}$.

לכן, נקבל כי תחום הרציפות של f הוא $A = \left\{(x,y) | y \neq 0 \vee x = y = 0\right\}$ כנדרש.

■

שאלה 2ב סעיף 1

נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g(x) = \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \frac{\sqrt[4]{x^4}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

ובפרט מתקיים $-1 = \lim_{x\to0^-} g(x) \neq \lim_{x\to0^+} g(x) = 1$, אבל הנגזרת החלקית לפי x ב$\vec{0}$ מוגדרת לפי $\lim_{x\to0} g(x)$ ומכיוון שהגבול אינו קיים כך גם הנגזרת החלקית לפי x ולכן לפי משפט 7.63 נקבל כי f אינה דיפרנציאבילית ב$\vec{0}$ כנדרש. ■

שאלה 2ב סעיף 2

נתבונן בהגדרת הנגזרת החלקית:

$$f_x(\vec{0}) = \lim_{x\to0} \frac{f(x,0) - f(\vec{0})}{x} = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to0} x = 0$$

$$f_y(\vec{0}) = \lim_{y\to0} \frac{f(0,y) - f(\vec{0})}{y} = \lim_{y\to0} \frac{y^2}{y} = \lim_{y\to0} y = 0$$

נתבונן בהגדרת הדיפרנציאביליות (משפט 7.62), עבור $A = B = 0$:

$$d((x,y),\vec{0}) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - Ax - By = \sqrt{x^4+y^4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{r(x,y)}{d((x,y),\vec{0})} = \sqrt{\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}} \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to\vec{0}]{} = 0$$

לכן מכלל הסנדוויץ' נקבל כי $r(x,y) = o(d((x,y),\vec{0}))$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודה $\vec{0}$ כנדרש.

■

שאלה 3א

נגזור חלקית את f לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x + h'(\sin y - \sin x) \cdot (-\cos x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = h'(\sin y - \sin x) \cdot \cos y$$

כעת, נוכל לראות כי מתקיים

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos y &= \cos x \cos y - h'(\sin y - \sin x) \cos x \cos y \\ &= \cos x \cos y - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x \end{aligned}$$

ולכן מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos y + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos x = \cos x \cos y$$

כנדרש.

■

שאלה 3ג

ראשית, נניח כי קיימות שתי פונקציות, $w, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש$w(t)$ מסמל את רוחב המלבן ברגע t ו$h(t)$ מסמל את אורך המלבן ברגע t. כעת, מנתוני השאלה ידוע לנו כי קיים t_0 כך שw, h גזירות בt_0 ואף מתקיים:

$$w(t_0) = 6 \qquad h(t_0) = 15$$

$$w'(t_0) = 2 \qquad h'(t_0) = 3$$

כעת, על מנת לקבל את השטח של המלבן ברגע t, נגדיר את הפונקציה הבאה:

$$S(t) = f(w(t), h(t)) = w(t) \cdot h(t)$$

כאשר $f(x, y) = xy$. למעשה, עלינו למצוא את $S'(t_0)$. נגזור את הפונקציה לפי כלל השרשרת ונקבל:

$$\begin{aligned} S'(t) &= f_x(w(t), h(t))w'(t) + f_y(w(t), h(t))h'(t) \\ &= h(t)w'(t) + w(t)h'(t) \end{aligned}$$

נציב $t = t_0$ ונקבל כי $S'(t_0) = 15 * 2 + 6 * 3 = 48$ וקיבלנו כי שטח המלבן משתנה ב48 מ"ר לשנייה ברגע t_0 כנדרש.

■

שאלה 3ב

ראשית, נחשב את הנגזרות החלקיות של $x(u,v)=\frac{u}{v}, y(u,v)=\frac{v}{u}$ לפי כל אחד מהמשתנים:

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)=\frac{1}{v} \qquad \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)=-\frac{v}{u^2}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)=-\frac{u}{v^2} \qquad \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)=\frac{1}{u}$$

נגדיר: $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2, z(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))$. כעת, נחשב את הנגזרות החלקיות של z לפי כלל השרשרת. נתחיל מהנגזרת החלקית לפי u:

$$\begin{aligned}\forall\vec{v}=(u,v)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial z}{\partial u}(\vec{v}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\vec{v}),y(\vec{v}))\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(\vec{v})+\frac{\partial f}{\partial y}(x(\vec{v}),y(\vec{v}))\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(\vec{v})\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &= \frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-\frac{v}{u^2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\end{aligned}$$

ולפי v:

$$\begin{aligned}\forall\vec{v}=(u,v)\in\mathbb{R}^2, \frac{\partial z}{\partial v}(\vec{v}) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(\vec{v}),y(\vec{v}))\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(\vec{v})+\frac{\partial f}{\partial y}(x(\vec{v}),y(\vec{v}))\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(\vec{v})\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &= \frac{1}{u}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\end{aligned}$$

כעת, נוכל לראות כי מתקיים

$$\begin{aligned}u\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-\frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\\ &= x(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-y(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\end{aligned}$$

וגם כי מתקיים

$$\begin{aligned}v\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{v}{u}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-\frac{u}{v}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)\\ &= y(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)-x(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u}{v},\frac{v}{u}\right)=-u\frac{\partial z}{\partial u}\end{aligned}$$

מכך נובע כי לכל $u,v\neq 0$ מתקיים

$$u\frac{\partial z}{\partial u}+v\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

כנדרש.

■

שאלה 5א

נסמן: $\vec{p}=(x_0,y_0)$. ראשית, נמצא את הנגזרות החלקיות של h מסדר ראשון:

$$\frac{\partial h}{\partial x}=f'(x)g(y) \qquad \frac{\partial h}{\partial y}=f(x)g'(y)$$

ומסדר שני:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=f''(x)g(y) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=g''(y)f(x)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}=f'(x)g'(y)$$

כעת, נשים לב שנובע מהנתון כי $\frac{\partial h}{\partial x}(\vec{p})=\frac{\partial h}{\partial y}(\vec{p})=0$ ולכן היא נקודה חשודה בהיותה נקודת קיצון.
נמצא את D:

$$D=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(\vec{p})\\ \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(\vec{p}) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(\vec{p})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f''(x_0)g(y_0) & 0\\ 0 & g''(y_0)f(x_0)\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det D=f''(x_0)g(y_0)g''(y_0)f(x_0)=f''(x_0)f(x_0)\cdot g''(y_0)g(y_0)$$

לכן, מהנתון נקבל כי $\det D>0$, או $\det D<0$ –, ולפי משפט 7.72 נוכל לראות כי $\vec{p}$ נקודת קיצון של h כנדרש.

■

שאלה 5 רשות

נסמן: $h(t)=f(t,3t-2)$. לפי הנתון בשאלה, ידוע לנו כי $\forall t\in\mathbb{R}, h(t)=2018$ ומכיוון שזוהי פונקציה קבועה נקבל כי $h'(t)=0$. נגזור כעת לפי כלל השרשרת ממשפט 7.66 ונקבל:

$$h'(t)=f_x(t,3t-2)+3f_y(t,3t-2)$$

נוכל לשים לב שמתקיים $(1,1)=(t,3t-2)\Big|_{t=1}$ ולכן נקבל כי מתקיים

$$0=h'(1)=f_x(1,1)+3f_y(1,1)$$

$$\Downarrow$$

$$f_y(1,1)=-\frac{1}{3}$$

ומצאנו את $f_y(1,1)$ כנדרש.

■