ממן 14

יונתן אוחיון

25 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

ראשית, נחשב את הצורה הכללית של $(x+1)(p'(x))$:

$$\begin{aligned}(x+1)(p'(x)) &= x\cdot p'(x)+p'(x)\\ &= (1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)+x\cdot(1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)\\ &= (1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)+(1a_1x^1+2a_2x^2+3a_3x^3+\dots)\\ &= 1a_1x^0+1a_1x^1+2a_2x^1+2a_2x^2+3a_3x^2+\dots\\ &= a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+\dots+((n-1)a_{n-1}+na_n)x^{n-1}\end{aligned}$$

נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי E:

$$[(x+1)(p'(x))]_E=\left[\sum_{i=0}^{n}((i-1)a_{i-1}+ia_i)x^{i-1}\right]_E=\begin{bmatrix}0\\a_1\\a_1+2a_2\\ \vdots\\((n-1)a_{n-1}+na_n)x^{n-1}\end{bmatrix}$$

לפיכך, נוכל לייצג את ההעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ בעזרת העתקת הקואורדינטות $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת כך:

$$S\left(\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\ \vdots\\a_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\a_1\\a_1+2a_2\\ \vdots\\(n-1)a_{n-1}+na_n\end{bmatrix}$$

כעת נוכל להוכיח שS הינה העתקה לינארית (ועקב כך גם T) אם מתקיים

$$S(\alpha[p(x)]_E+\beta[q(x)]_E)=\alpha S([p(x)]_E)+\beta S([q(x)]_E)$$

לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ו$p(x),q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$. נוכיח בעמוד הבא.

1.1 סעיף א (המשך)

הוכחה:

$$
\begin{aligned}
S\left(\alpha\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right) &= S\left(\begin{bmatrix}\alpha a_0+\beta b_0\\ \vdots\\ \alpha a_n+\beta a_n\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha a_1+\beta b_1+2(\alpha a_2+\beta b_2)\\ \vdots\\ \alpha(n-1)a_{n-1}+\beta(n-1)b_{n-1}+n(\alpha a_n+\beta b_n)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha(a_1+2a_2)+\beta(b_1+2b_2)\\ \vdots\\ \alpha((n-1)a_{n-1}+na_n)+\beta((n-1)b_n+nb_n)\end{bmatrix}\\
&= \alpha\begin{bmatrix}0\\ a_1\\ a_1+2a_2\\ \vdots\\ (n-1)a_{n-1}+na_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\ b_1\\ b_1+2b_2\\ \vdots\\ (n-1)b_{n-1}+nb_n\end{bmatrix}\\
&= \alpha S\left(\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)+\beta S\left(\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

ו-S העתקה לינארית. מכיוון ש-S פועלת על ווקטורי הקואורדינטות של $\mathbb{R}_n[x]$, נוכל להסיק מהעובדה שהיא העתקה לינארית ש-T הינה העתקה לינארית גם היא כנדרש.

■

1.2 סעיף ב

נראה שT אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לכפל בסקלר:

$$\begin{aligned}
x = y = 1,\ \alpha = -1 \\
\alpha T(x,y) \stackrel{?}{=} T(\alpha x, \alpha y) \\
\alpha(2x - y, 3|x|, y) \stackrel{?}{=} (2\alpha x - \alpha y, 3|\alpha x|, \alpha y) \\
-1(2-1,3,1) \stackrel{?}{=} (-2+1,3,-1) \\
(-1,-3,-1) \neq (-1,3,-1)
\end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה T אינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר והיא אינה ט"ל.

■

1.3 סעיף ג

נראה שT אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לחיבור:

$$\begin{aligned}
X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
XY = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
T(X) + T(Y) \stackrel{?}{=} T(X+Y) \\
\cancel{X^2} - \cancel{X} + \cancel{Y^2} - \cancel{Y} \stackrel{?}{=} \cancel{X^2} + XY + YX + \cancel{Y^2} - \cancel{X} - \cancel{Y} \\
XY + YX \stackrel{?}{=} 0 \\
\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \neq 0
\end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה T לא מקיימת את תכונת החיבור והיא אינה ט"ל.

■

2 שאלה 2

2.1 מציאת בסיסים ל$\ker T$ ול$\operatorname{Im} T$

2.1.1 $\ker T$

ראשית, נמצא העתקה S המתאימה לT בעזרת הצגת הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbb{R}}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$T : M_{2\times 2}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}_n[x],\ T(A) = (a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d)$$
$$\downarrow$$
$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ S([A]_E) = S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d) \end{bmatrix} = [T(A)]_E$$

לפיכך, נוכל למצוא את גרעין ההעתקה S:

$$\begin{aligned} \ker S &= \left\{v \mid v \in \mathbb{R}^4 \wedge S(v) = 0\right\} \\ &= \left\{[A]_E \mid A \in M_{2\times 2}^{\mathbb{R}} \wedge [T(A)]_E = 0\right\} \\ &= \left\{v = [a \quad b \quad c \quad d]^t \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge S(v) = 0\right\} \\ &= \left\{v = [a \quad b \quad c \quad d]^t \mid [a-d \quad b+c \quad 5(a-d)]^t = 0\right\} \end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג את המערכת הבאה ולקבל את הצורה הכללית של איבר ב$\ker S$:

$$\begin{matrix} a + 0b + 0c + (-1)d = 0 \\ 0a + b + c + 0d = 0 \\ 5a + 0b + 0c + (-5)d = 0 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} a = d \\ b = -c \\ c = \alpha \\ d = \beta \end{matrix}$$

כלומר, $\ker S = \{[\beta \quad -\alpha \quad \alpha \quad \beta] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

נעבור מקואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{aligned} \ker T &= \left\{\begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\alpha \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Sp} \underbrace{\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}}_{P} \end{aligned}$$

כעת, הווקטורים בקבוצה P הפורשת את $\ker T$ אינם פרופורציוניים ולכן בלתי תלויים. לפיכך, P הינה פורשת ובת"ל ב$\ker T$ ולפיכך הינה בסיס שלו.

■

2.1.2 $\operatorname{Im} T$

נוכל למצוא את $\operatorname{Im} T$:

$$\operatorname{Im} T = \left\{ (a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

כעת נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונגיע ל$\operatorname{Im} S$ (כאשר S הינה הט"ל אשר מצאנו בסעיף הקודם):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S &= \left\{ \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{Sp} \underbrace{\left\{ p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}}_{P}
\end{aligned}$$

כעת, קיבלנו קבוצה P הפורשת את $\operatorname{Im} S$. מכיוון ש$p_3 = -p_1$ והם פרופורציוניים, נצטרך להוציא את p_3 מP על מנת שהיא תהיה בת"ל:

$$\operatorname{Im} S = \operatorname{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

מכיוון שקבוצה זו גם פורשת וגם בת"ל, היא בסיס של $\operatorname{Im} S$. כעת נעבור מהצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונמצא את הבסיס המתאים ל$\operatorname{Im} T$:

$$\begin{aligned}
B_{\operatorname{Im} T} &= \left(x^2 + 0x + 5, 0x^2 + x + 0 \right) \\
&= \left(x^2 + 5, x \right)
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

2.2 סעיף ב

אף אחד מהתנאים לא מתקיים, שכן $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ ו$\ker T \subseteq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$, וכמובן ש$\mathbb{R}_n[x] \nsubseteq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$ ולכן לא יכולה להתקיים הכלה דו כיוונית ע"מ שוויון המרחבים.

לפיכך, $\ker T + \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \wedge \ker T \oplus \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$ כנדרש.

■

2.3 סעיף ג

2.3.1 i

ראשית, אנו יודעים שאיברי $\ker T$ הינם מטריצות, כלומר

$$\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \to A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker T$$

כעת, די לחשב את A^2 ולבדוק אם אכן מתקיים $T(A^2)=0$. ראשית, נחשב את A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$$

כעת נציב ב$T(A^2)=0$:

$$\begin{aligned} T(A^2) &= (a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc}))x^2+(b(a+d)+c(a+d))x+5(a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc})) \\ &= (a+d)(a-d)x^2+(a+d)(b+c)x+5(a+d)(a-d) \\ &= (a+d)[(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)] \\ &= (a+d)\cdot T(A) \underset{T(A)\in\ker T}{=} 0\cdot(a+d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים $T(A^2)=0$ ולפיכך $A^2 \in \ker T$ גם הוא.

■

2.3.2 ii

הצורה הכללית של פולינום $p(x) \in \operatorname{Im} T$ הינה $(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)$. לפיכך, אם נצרף לו את הפולינום $r(x)=3x^2+2x+5$ נקבל את $q(x)$ הבא:

$$q(x) = r(x)+p(x) = (a-d+3)x^2+(b+c+2)x+5(a-d+1)$$

נניח ש$q(x) \in \operatorname{Im} T$ לכל $p(x) \in \operatorname{Im} T$ ונראה דוגמה נגדית לפולינום אשר עבורו $q(x) \notin \operatorname{Im} T$:

$$\begin{matrix} a=1 & b=2 \\ c=3 & d=4 \end{matrix} \to p(x) = -3x^2+3x-15$$

$$\begin{aligned} q(x) &= (-3+3)x^2+(3+2)x+5(-3+1) \\ &= 0x^2+5x-10 \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים

$$\begin{matrix} a-d+3=0 \\ a-d+1=-10 \end{matrix} \to \begin{matrix} a-d=-3 \\ a-d=-11 \end{matrix} \to -3 \neq -11$$

וסתירה להנחה. לפיכך, לא לכל $p(x) \in \operatorname{Im} T$ מתקיים $q(x) \in \operatorname{Im} T$.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

ראשית, נראה ש$\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$: לפי הגדרת גרעין ההעתקה, $\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$ ולפי הגדרת תמונת ההעתקה, $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\}$. לפי הגדרת T מתקיים $T^2 = 0$, כלומר $T(T(v)) = 0$ לכל $v \in V$. כעת, לפי הגדרת הגרעין, $x = T(v) \in \ker T$ לכל $v \in V$ (שכן מתקיים $T(x) = 0$).
כעת, כל $x \in \operatorname{Im} T$ שייך גם ל$\ker T$ ולכן $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

כעת, לפי משפט 8.3.4, מתקיים $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim \ker T$, כלומר קיים $\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T - \epsilon$$

לפי משפט 9.6.1, מתקיים

$$\begin{aligned}
&\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n \\
&\dim \ker T + \dim \ker T - \epsilon = n \\
&2 \dim \ker T = n + \epsilon \ / : 2 \\
&\dim \ker T = \frac{n + \epsilon}{2}
\end{aligned}$$

ומכיוון ש$\epsilon \geq 0$, מתקיים

$$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$$

כנדרש.

■

3.2 סעיף ב

ראשית, לפי סעיף א אנו יודעים ש$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$, כלומר $\dim \ker T \geq 1.5$. נוכל להיווכח ש$2 \leq \dim \ker T < n = 3$, ומכיוון שמימד של מרחב וקטורי הינו מספר טבעי מתקיים $\dim \ker T = 2$.
נסמן את הבסיס לגרעין כך:

$$k_1, k_2 \in \ker T \to B_{\ker T} = (k_1, k_2)$$

כעת, על מנת להשלים את $B_{\ker T}$ לבסיס של V נצטרך למצוא $v \in V$ אשר אינו בגרעין ההעתקה, כלומר שמתקיים $T(v) \neq 0$ ולצרפו ל$B_{\ker T}$. לפי הנתון, $T \neq 0$ ולכן קיים $v \in V$ כך ש$T(v) \neq 0$.
לכן, מתקיים

$$\begin{gathered}
B_V = (v, k_1, k_2) \\
\downarrow \\
[T(k_1)]_{B_V} = [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_1) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(k_2)]_{B_V} = [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_2) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(v)]_{B_V} = [1 \quad 0 \quad 0]^t \to T(v) = 1v + 0k_1 + 0k_2 = v
\end{gathered}$$

כנדרש.

■

4 שאלה 4

4.0 סימון מטריצת מעבר מB' לB

נסמן את מטריצת המעבר מבסיס B' לבסיס B בעזרת $M_{B'}^{B}$.

4.1 סעיף א

ראשית, נשלים את הקבוצה הפורשת את $\ker T$ לבסיס של $\mathbb{R}_4[x]$:

$$b_1 = 1 - x,\ b_2 = x - x^3$$
$$[b_1]_E = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 1]\,,\ [b_2]_E = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{השלמה לבסיס בעזרת } x^2,1]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to -R_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, הקבוצה פורשת ובת"ל ב$\mathbb{R}_4[x]$ ולכן B בסיס כאשר

$$B = (b_1 = 1 - x, b_2 = x - x^3, b_3 = x^2, b_4 = 1)$$

כעת, על מנת להגדיר את ההעתקה די להגדיר אותה על איברי הבסיס, שכן איברי המרחב הינם צירוף לינארי שלהם. בנוסף, אנו יודעים שהקבוצה $\{1 - x, x - x^3\}$ פורשת את גרעין ההעתקה ולכן חייב להתקיים $T(1 - x) = T(x - x^3) = 0$. ניקח לדוגמה את ההעתקה $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ הבאה:

$$\begin{matrix} T(1-x) = 0 & T(x-x^3) = 0 \\ T(x^2) = 1 - x & T(1) = x - x^3 \end{matrix} \to \begin{matrix} T(1-x) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t & T(x-x^3) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t \\ T(x^2) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t & T(1) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^t \end{matrix}$$

מכיוון שההעתקה לינארית, נוכל לייצג את $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$ כך:

$$(*) \quad T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = aT(x^3) + bT(x^2) + cT(x) + dT(1)$$

כעת, לפי משפט 10.6.1 מתקיים $[T]_E = M_B^E \cdot [T]_B \cdot M_E^B = M_B^E \cdot [T]_B \cdot (M_B^E)^{-1}$. לפיכך, על מנת למצוא את הנוסחה המפורשת לT נצטרך למצוא את מטריצת הייצוג שלה בבסיס B, מטריצת המעבר מE לB והמטריצה ההופכית לה.

ראשית, נמצא את מטריצת הייצוג של ההעתקה:

$$[T]_B = [[T(1-x)]_B \quad [T(x-x^3)]_B \quad [T(x^2)]_B \quad [T(1)]_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

בעמוד הבא נמצא את M_B^E ואת ההופכית לה.

4.1 סעיף א (המשך)

על מנת למצוא את מטריצת המעבר, ראשית נמצא את הצירופים הלינארים של איברי E בעזרת איברי B:

$$e_1 = -b_1 - b_2 + 0b_3 + b_4 \quad e_2 = 0b_1 + 0b_2 + b_3 + 0b_4$$
$$e_3 = -b_1 + 0b_2 + 0b_3 + b_4 \quad e_4 = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + b_4$$

כעת, נמצא את מטריצת המעבר:

$$M_B^E = [[e_1]_B \quad [e_2]_B \quad [e_3]_B \quad [e_4]_B] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת, נמצא את המטריצה ההופכית לה ע"י דירוג $[M_B^E \mid I_4]$ עד להגעה ל-$[I_4 \mid (M_B^E)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2\to -R_2 \\ R_2\leftrightarrow R_1 \\ R_2\to R_2+R_1 \\ R_4\to R_4-R_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{R_4\to R_4+R_2 \\ R_2\to -R_2 \\ R_2\leftrightarrow R_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to M_E^B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת, נכפול את המטריצות ונגיע למטריצת הייצוג של ההעתקה בעזרת הבסיס הסטנדרטי:

$$A = M_E^B \cdot [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot M_B^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [T]_E$$

כעת, נמצא את $T(e_i)$ לפי הקואורדינטות $[T(e_i)]_E$:

$$T(e_1) = T(x^3) = -x^3 + x \quad T(e_2) = T(x^2) = -x + 1$$
$$T(e_3) = T(x) = 0 \qquad T(e_4) = T(1) = -x^3 + x$$

ונוכל למצוא את הנוסחה המפורשת לפי $(*)$:

$$T(ax^3+bx^2+cx+d) = aT(x^3)+bT(x^2)+cT(x)+dT(1) = (-a-d)x^3+(a-b+d)x+b$$

כנדרש.

■

5 שאלה 5

5.1 סעיף א

ראשית, נמצא את ערכו של a. לפי הנתון, ההעתקה לא הפיכה ולפיכך המטריצה המייצגת אותה אינה הפיכה גם היא, כלומר – הדטרמיננטה שלה שווה ל-0. כעת, נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת וכך נגיע לערך a:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2a \\ a & 1 & 2a \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \to C_3 - C_1 \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - aR_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2a-1 \\ 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח לפי } C_1, R_1}{=} a^2 - (2a-1) \to a^2 - 2a + 1$$

כעת, לפי נוסחאת הכפל המקוצר: $(a-1)^2 = 0$, ולכן $a = 1$. כעת, נמצא את מטריצת המעבר מבסיס E לבסיס B בעזרת מציאת הצירופים הלינארים של e_i בעזרת b_i:

$$(**) \quad \begin{matrix} e_1 = 0.5b_1 + 0.5b_2 + 0.5b_3 & e_2 = 0.5b_1 + 0.5b_2 - 0.5b_3 \\ e_3 = 0.5b_1 - 0.5b_2 - 0.5b_3 & \end{matrix}$$

$$\downarrow$$

$$M_B^E = [[e_1]_B \quad [e_2]_B \quad [e_3]_B] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

כעת, נוכל לייצג את $T(\alpha,\beta,\gamma)$ כך:

$$(***) \quad T(\alpha,\beta,\gamma) = T(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2) + \gamma T(e_3)$$

נמצא את $T(e_i)$ בעזרת המטריצה המייצגת את ההעתקה בבסיס E. נמצא את $M_E^B = (M_B^E)^{-1}$ ע"י דירוג $[M_B^E \mid I_4]$ עד להגעה ל-$[I_4 \mid (M_B^E)^{-1}]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_i \to 2R_i \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \to -0.5R_2 \\ R_3 \to -0.5R_3}}{\longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \underset{\substack{R_2 \leftrightarrow R_3 \\ R_1 \to R_1 - R_2 \\ R_2 \to R_2 - R_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to M_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

בעמוד הבא נחשב את $[T]_E$.

5.1 סעיף א (המשך)

ראשית, נחשב את $M_E^B \cdot [T]_B$:

$$A = M_E^B \cdot [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

כעת, נחשב את $A \cdot M_B^E$:

$$A \cdot M_B^E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [T]_E$$

כעת, נמצא את $T(e_i)$ הקואורדינטות $[T(e_i)]_E$:

$$T(e_1) = T(1,0,0) = (3,0,-1) \quad T(e_2) = T(0,1,0) = (0,0,0)$$
$$T(e_3) = T(0,0,1) = (-1,0,1)$$

וכעת נוכל לחשב את הנוסחה המפורשת עבור $T(\alpha,\beta,\gamma)$ לפי $(***)$:

$$T(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha T(e_1) + \beta T(e_2) + \gamma T(e_3) = (3\alpha - \gamma, 0, \gamma - \alpha)$$

כנדרש.

■

5.2 סעיף ב

על מנת למצוא בסיס לגרעין ההעתקה, נמצא את האיבר הכללי ב$\ker T$:

$$\ker T = \{(x,y,z) \mid (3x - z, 0, z - x) = 0\}$$
$$3x - z = 0 \to z = 3x$$
$$z - x = 0 \to 3x - x = 0 \to x = 0 \wedge z = 0$$
$$\begin{aligned} \ker T &= \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Sp}\{(0,1,0)\} \end{aligned}$$

מכיוון שהקבוצה פורשת את $\ker T$ ובת"ל בו, היא גם בסיס ולכן מתקיים

$$B_{\ker T} = ((0,1,0))$$

כעת, אנו יודעים ש$\dim \ker T = 1$ וגם ש$\dim \mathbb{R}^3 = 3$. לכן, לפי משפט 9.6.1 מתקיים

$$\dim \mathrm{Im}\, T = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker T = 3 - 1 = 2$$

לפיכך, בבסיס של $\mathrm{Im}\, T$ יש שני ווקטורים. בעמוד הבא נמצא בסיס ל$\mathrm{Im}\, T$.

5.2 סעיף ב (המשך)

ראשית, נמצא קבוצה הפורשת את $\operatorname{Im} T$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} T &= \{(3x-z,0,z-x) \mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{x(3,0,-1)+z(-1,0,1) \mid x,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \operatorname{Sp}\{(3,0,-1),(-1,0,1)\}\end{aligned}$$

כעת, נציב במטריצה ונדרג על מנת לקבל את הבסיס של $\operatorname{Im} T$:

$$\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \underset{\substack{R_2\to -R_2\\ R_2\leftrightarrow R_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix} \underset{\substack{R_2\to R_2-3R_1\\ R_1\to R_1-0.5R_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

לכן, הבסיס ל$\operatorname{Im} T$ הוא

$$B_{\operatorname{Im} T} = ((1,0,0),(0,0,2))$$

כנדרש.

■

5.3 סעיף ג

ראשית, נוכל להראות את $T(2,-2,1)$ בעזרת צירוף לינארי של $T(e_i)$:

$$T(2,-2,1) = T(2e_1-2e_2+e_3) \underset{\text{לינאריות}}{=} 2T(e_1)-2T(e_2)+T(e_3)$$

לפי $(**)$ נוכל להראות את $T(e_i)$ בתור צירוף לינארי של b_i ולהגיע ל$T(2,-2,1)$ כצירוף לינארי של b_i:

$$\begin{aligned}T(2,-2,1) &= T(2e_1-2e_2+e_3)\\ \text{לינאריות} \to &= 2T(e_1)-2T(e_2)+T(e_3)\\ (***) \to &= 2T(\tfrac12 b_1+\tfrac12 b_2+\tfrac12 b_3)-2T(\tfrac12 b_1+\tfrac12 b_2-\tfrac12 b_3)+T(\tfrac12 b_1-\tfrac12 b_2-\tfrac12 b_3)\\ \text{לינאריות} \to &= \cancel{2T(\tfrac12 b_1)}+\cancel{2T(\tfrac12 b_2)}+2T(\tfrac12 b_3)-\cancel{2T(\tfrac12 b_1)}-\cancel{2T(\tfrac12 b_2)}+2T(\tfrac12 b_3)\\ &\quad +T(\tfrac12 b_1)-T(\tfrac12 b_2)-T(\tfrac12 b_3)\\ &= 3T(\tfrac12 b_3)+T(\tfrac12 b_1)-T(\tfrac12 b_2)\\ \text{לינאריות} \to &= \tfrac32(b_1+2b_2+2b_3)+\tfrac12(b_1+\cancel{b_2}+\cancel{b_3})-\tfrac12(\cancel{b_2}+\cancel{b_3})\\ &= \tfrac32 b_1+3b_2+3b_3+\tfrac12 b_1\\ &= 2b_1+3b_2+3b_3\end{aligned}$$

לפיכך, מתקיים

$$[T(2,-2,1)]_B = \begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$$

כנדרש.

■