ממן 12

יונתן אוחיון

28 באוגוסט 2017

1 שאלה 1

1.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר $A^kB = B^kA$ לכל $AB = BA$ באינדוקציה:

1.0.1 $n = 1$

$$A^1B = BA^1 \rightarrow AB = BA$$

נכון לפי הנתון.

1.0.2 **נניח שנכון ל**$n = k$ **ונוכיח ל**$n = k + 1$

$$A^{k+1}B \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^kAB \underset{\text{הנתון}}{=} A^kBA \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} BA^kA \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} BA^{k+1}$$

עכשיו נוכל להשתמש בטענת העזר על מנת להוכיח את הטענה בשאלה.

1.1 הוכחה באינדוקציה

1.1.1 $n = 1$

$$(AB)^1 = A^1B^1 \rightarrow AB = AB$$

1.1.2 **נניח שנכון ל**$n = k$ **ונוכיח ל**$n = k + 1$

$$(AB)^{k+1} \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} AB(AB)^k \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} ABA^kB^k \underset{\text{טענת העזר}}{=} AA^kB^kB \underset{\text{הגדרה 3.6.5}}{=} A^{k+1}B^{k+1}$$

לכן, לכל $AB = BA$ מתקיים $(AB)^k = A^kB^k$.

■

2 שאלה 2

נניח שA הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$. לפיכך, $A^2 = I$, כלומר נצטרך למצוא את ערכי k שבהם $A^2 = I$. ראשית, נכפיל את המטריצה A בעצמה:

$$[A^2]_{11} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$[A^2]_{12} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{13} = [k \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{21} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{22} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$[A^2]_{23} = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{31} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{32} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A^2]_{33} = [-1 \quad 0 \quad -k] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -k \end{bmatrix} = k^2 - 1$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^2-1 \end{bmatrix}$$

כלומר, נצטרך למצוא את ערכי הk הפותרים את המשוואה $k^2 - 1 = 1 \rightarrow k^2 = 2$. מכיוון שהמטריצה מעל השדה הסופי $\mathbb{Z}_7$ נצטרך לבדוק את הריבוע של כל איבר בשדה. לאחר הבדיקה נמצא כי $k \in \{3, 4\}$. לפיכך, כאשר $k \in \{3, 4\}$, המטריצה A הפיכה ומתקיים $A = A^{-1}$.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

הוכחה:

$$\begin{aligned}
&A^2 + AB + I = 0 \\
&AB = -A^2 - I \\
&A^{-1}\cdot /\cancel{A}B = \cancel{A}(-A - A^{-1}) \\
&B = -A - A^{-1} \\
&B = (-A^2 - I)\cancel{A^{-1}}\ / \cdot A \\
&BA = -A^2 - I \\
&A^2 + BA + I = 0
\end{aligned}$$

כעת, מכיוון ששתי המשוואות שוות ל0 נוכל להשוות אותם ולהגיע ל$AB = BA$:

$$\cancel{A^2} + BA + \cancel{I} = \cancel{A^2} + AB + \cancel{I} \to BA = AB$$

■

3.2 סעיף ב

הוכחה:

$$AB \underset{\text{לפי הנתון}}{=} -BA \to |AB| = |-BA| \xrightarrow[\text{משפט 4.5.1}]{} (|A||B| = \overbrace{-|B||A|}^{(*)} \leftrightarrow |A| = 0 \vee |B| = 0)$$

מכיוון שלפחות אחת מהמטריצות סינגולרית, $|A| = 0 \vee |B| = 0$ והתנאי תמיד מתקיים. יש לציין שב$(*)$ הסימן של הדטרמיננטה תמיד שווה למינוס, שכן הגורם המשותף $(-1)^n$ תמיד בחזקה אי זוגית (לפי הנתון בשאלה).

■

4 שאלה 4

הוכחה:

מכיוון שבA יש יותר שורות מעמודות, ניתן להפוך אותה למטריצה עם שורת אפסים לאחר מספר של פעולות אלמנטריות:

$$\exists \underbrace{\varphi_1, ..., \varphi_k}_{\text{מטריצות אלמנטריות}} \quad \to \quad \underbrace{A \cdot \varphi_1 \cdot ... \cdot \varphi_k}_{\text{מטריצה עם שורת אפסים}}$$

לפיכך, מתקיים ש:

$$AB = A \cdot \underbrace{(\varphi_1 \cdot ... \cdot \varphi_k \cdot \varphi_k^{-1} \cdot ... \cdot \varphi_1^{-1})}_{I} \cdot B \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} \underbrace{(A \cdot \varphi_1 \cdot ... \cdot \varphi_k)}_{\text{מטריצה עם שורת אפסים}} \cdot (\varphi_k^{-1} \cdot ... \cdot \varphi_1^{-1} \cdot B)$$

מאחר ויש במטריצה זו שורת אפסים היא אינה הפיכה[1].

■

5 שאלה 5

5.1 $\det B$

ראשית, נפתח את הדטרמיננטה של B בעזרת R_3:

$$\begin{aligned} |B| &= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{32} + a_{33}M_{33} - a_{34}M_{34} \\ &= 0M_{31} - 2M32 + 0M_{33} - 0M_{34} \\ &= 0 - 2M_{32} + 0 - 0 \\ &= -2M_{32} \end{aligned}$$

לפיכך, נצטרך רק לחשב את המינור M_{32} ולהכפילו ב-2 ע"מ לקבל את הדטרמיננטה של B.

כעת, נחשב את M_{32}:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 5-3b & 2-3b & 8-3a \end{vmatrix} \underset{R_3 \to R_3 - 2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2(a+3) & 2(a-1) & 2(b+2) \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ 3-3b & -6-3b & 6-3a \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ -3(b-1) & -3(b+2) & -3(a-2) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ a+3 & a-1 & b+2 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} 6 \begin{vmatrix} a+3 & a-1 & b+2 \\ 1 & 4 & 1 \\ b-1 & b+2 & a-2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{משפט 4.3.1}}{=} 6 \begin{vmatrix} a+3 & 1 & b-1 \\ a-1 & 4 & b+2 \\ b+2 & 1 & a-2 \end{vmatrix} \underset{|A| = \frac{1}{3}}{=} 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

לפיכך, $M_{32} = 2$ ו$\det B = -4$.

[1] מטריצה בעלת שורת אפסים אינה הפיכה מכיוון שלא קיימת מטריצה B המקיימת $AB = I$. הוכחה לכך תהיה: נניח $[A]_k^r$ שורת אפסים. לפי הגדרת כפל מטריצות, $[AB]_{kj} = [A]_k^r [B]_j^c = 0 \cdot [B]_j^c = 0$, כלומר כל השורה ה-$k$-ית של AB תהיה שווה ל0. לפיכך, $AB \neq I$ בהכרח והיא אינה יכולה להיות הפיכה.

5.2 $\det -2B^{-1}$

נחשב:

$$|-2B^{-1}| \underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} (-2)^4|B^{-1}| = 16|B^{-1}| \underset{|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}}{=} \frac{16}{|B|} = \frac{16}{-4} = -4$$

לכן, $\det -2B^{-1} = \det B = -4$.

■

6 שאלה 6

נחשב את הדטרמיננטה של D:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & n & n & \dots & n \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{\forall 2\le i\le n, \\ R_1\to R_1+R_i}}{=} \begin{vmatrix} n(n-1) & n(n-1) & n(n-1) & \dots & n(n-1) \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 0 & n & \dots & n \\ n & n & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{משפט 4.3.3}}{=} n^{n-1}\cdot n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\forall 2\le i\le n, \\ R_i\to R_i-R_1}}{=} n^n(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \underset{\text{משפט 4.3.8}}{=} n^n(n-1)(-1)^{n-1}$$

■

7 שאלה 7

נניח שהמטריצה לא הפיכה ב$\mathbb{Q}$ ונגיע לסתירה לנתון.

לפי ההנחה ולפי משפט 3.10.6ז, למערכת המשוואות $Ax = 0$ קיים פתרון לא טריוויאלי. מכיוון ש$\mathbb{R}^n \subset \mathbb{Q}^n \wedge \mathbb{Q}^n \ni x$, מתקיים $x \in \mathbb{R}^n$ והוא פתרון לא טריוויאלי למשוואה כאשר היא מעל $\mathbb{R}$. לפיכך, קיים פתרון לא טריוויאלי ל$Ax = 0$ מעל $\mathbb{R}$ והגענו לסתירה לנתון. לפיכך, אם המטריצה הפיכה ב$\mathbb{Q}$ היא הפיכה גם ב$\mathbb{R}$.

■