ממ"ן 12

יונתן אוחיון

22 באוגוסט 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

$$|A| = 3 \to |A \times A| = 3^2 \to |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{3^2} = 512$$

■

1.2 סעיף ב

ננסה להוכיח שS יחס שקילות ונגיע לסתירה:

1.2.1 רפלקסיביות

רלציה R על A הינה רפלקסיבית אם מתקיים $I_A \subseteq R$ (כלומר $(x,x) \in R$). נראה שS רפלקסיבית:

$$\forall R \in M \to RR = R^2 \to R^2 = R^2 \to (R,R) \in S$$

1.2.2 סימטריות

לפי הגדרת S, $(R_1,R_2) \in S$ אמם $R_1R_2 = R_2R_1$. לפיכך, $(R_2,R_1) \in S$ גם כן שכן $R_2R_1 = R_1R_2$ לפי ההגדרה.

1.2.3 טרנזיטיביות

נראה שS אינו טרנזיטיבי באמצעות דוגמה נגדית:

$$R_1 = \{(2,3)\},\ R_2 = \emptyset,\ R_3 = \{(3,2)\}$$
$$R_1R_2 = R_2R_1 = \emptyset \to (R_1,R_2) \in S$$
$$R_3R_2 = R_2R_3 = \emptyset \to (R_3,R_2) \in S$$
$$R_1R_3 = \{(2,2)\},\ R_3R_1 = \{(3,3)\}$$
$$R_3R_1 \neq R_1R_3 \to (R_1,R_3) \notin S$$

לכן, S אינו יחס שקילות.

■

2 שאלה 2

2.1 סעיף א

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned}&R_1 = \{(2,3)\}\\&R_2 = \{(3,2)\}\\&s(R_1) = s(R_2) = \{(2,3),(3,2)\}\\&R_1 \neq R_2\end{aligned}$$

■

2.2 סעיף ב

לא נכון, מכיוון שכל $R \in Range(S)$ הינו יחס סימטרי אך היחס מוגדר על M (שאיבריה אינם בהכרח יחסים סימטריים).

■

2.3 סעיף ג

לא נכון. דוגמה נגדית:

$$\begin{aligned}&R_1 = \{(3,2)\}\\&R_2 = \{(2,3)\}\\&R_1R_2 = \{(3,3)\}\\&s(R_1) = \{(2,3),(3,2)\}\\&s(R_2) = \{(3,2),(2,3)\}\\&s(R_1R_2) = \{(3,3)\}\\&s(R_1)s(R_2) = \{(2,2),(3,3)\}\\&s(R_1R_2) \neq s(R_1)s(R_2)\end{aligned}$$

■

2.4 סעיף ד

נכון. הוכחה:

$$\begin{aligned}&s(R_1) \underset{\text{שאלה ב2.34}}{=} R \cup R^{-1}\\&s(s(R)) \underset{\text{סעיף קודם}}{=} s(R) \cup (s(R))^{-1} \underset{\text{הצבה}}{=} R \cup R^{-1} \cup (R \cup R^{-1})^{-1}\\&s(s(R)) \underset{\text{שאלה ג2.6.3}}{=} R \cup R^{-1} \cup R \cup R^{-1} \underset{\text{קומוטטיביות}}{=} R \cup R \cup R^{-1} \cup R^{-1}\\&s(s(R)) \underset{\text{אידמפוטנטיות}}{=} R \cancel{\cup R} \cup R^{-1} \cancel{\cup R^{-1}} = R \cup R^{-1}\\&s(s(R)) = s(R))\end{aligned}$$

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

נוכיח שK סדר חלקי מעל F:

3.1.1 רפלקסיביות

נראה שK רפלקסיבי:

$$\forall f \in F \to f(n) = f(n) \xrightarrow[\text{הגדרת גדול שווה}]{} f(n) \leq g(n) \xrightarrow[\text{הגדרת היחס}]{} (f,f) \in K$$

3.1.2 טרנזיטיביות

נניח שקיימים $f,g,h \in F \to (f,g) \in K \wedge (g,f) \in K$ ונראה ש$(f,h) \in K$. ע"פ הגדרת היחס K, מכיוון ש$(f,g) \in K$, בהכרח $f(n) \leq g(n)$. בנוסף, מכיוון ש$(g,h) \in K$ בהכרח $g(n) \leq h(n)$. לפיכך ולפי הגדרת גדול שווה, $f(n) \leq g(n) \leq h(n) \to f(n) \leq h(n)$ ולכן $(f,h) \in K$ גם כן.

3.1.3 אנטיסימטריות

אם קיימות $f,g \in F$ כך ש$(f,g) \in K \wedge (g,f) \in K$, הרי $f(n) \leq g(n) \wedge g(n) \leq f(n)$, מה שאומר שבהכרח $f(n) = g(n)$. לפיכך, היחס K אנטיסימטרי.

לכן, K יחס חלקי מעל F.

■

3.2 סעיף ב

נניח שK סדר מלא, ניתן דוגמה נגדית ונגיע לסתירה:

$$f(n) = n$$
$$g(n) = 2$$

לפי ההנחה, K סדר מלא ועבור כל $f,g \in F$ מתקיים $(f,g) \in K \vee (g,f) \in K$. אך מכיוון שהפונקציה g מחזירה לכל $n \in \mathbb{N}$ את המספר 2, לא מתקיים $(f,g) \in K$ וגם לא $(g,f) \in K$ (שכן הראשון מתקיים רק כאשר $f(n) \leq 2$ והשני כאשר $f(n) \geq 2$ אך הם אינם מוגדרים כך). לפיכך, הגענו לסתירה להנחה וK אינו סדר מלא.

■

3 שאלה 3

3.3 סעיף ג

לא נכון, מכיוון שלכל $f, g \in F$ הפונקציה $g(n) = f(n) + 1$ תמיד מוגדרת, ללא קשר לf (שכן $\mathbb{N}$ קבוצה אינסופית ותמיד מתקיים $f(n) \leq g(n)$). לפיכך, אין בF איברים מקסימליים לגבי K.

■

3.4 סעיף ד

כן. לפי הגדרת F, כל איברי F הם פונקציות מ$\mathbb{N}$ ל$\mathbb{N}$. לפיכך, ומכיוון שהמספר הקטן ביותר ב$\mathbb{N}$ הוא 0, האיבר המינימלי בF לגבי K הוא $f(n) = 0$, שכן תמיד מתקיים $f(n) \leq g(n)$ לכל פונקציה $g \in F$.

■

3.5 סעיף ה

לכל $f \in F$ קיים $g \in F$ שמכסה אותו:

$$g(n) = \begin{cases} f(n), & n \neq 1 \text{ אם} \\ f(n) + 1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אך אם נשים לב, נוכל להחליף את התנאי $n = 1$ ואת היפוכו (במקרה הזה - $n = 1 \rightarrow \neg(n \neq 1)$) בכל תנאי אחר והפונקציה g עדיין תכסה את f.

■

4 שאלה 4

4.1 סעיף א

מכיוון שנתונים לנו שני מקרי בסיס, נרצה לבדוק את נכונות שניהם (ואז נוכל להשתמש גם ב$n = k$ וגם ב$n = k - 1$ בהוכחה).

4.1.1 $n = 0$

$$2 * 3^0 + (-2)^1 = 2 * 1 - 2 = 0 = f(0)$$

4.1.2 $n = 1$

$$2 * 3^1 + (-2)^2 = 6 + 4 = 10 = f(1)$$

כעת, נוכל להניח שהתנאי מתקיים ל$n = k$ וגם ל$n = k - 1$ ונוכיח שהוא מתקיים גם ל$n = k + 1$.

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 * 3^n + (-2)^{n+1} \\ f(n-1) &= 2 * 3^{n-1} + (-2)^n \end{aligned}$$

מההגדרה הרקורסיבית נובע:

$$f(n+1) = f(n) + 6f(n-1)$$

עכשיו נוכל להציב את ערכי $f(n)$ ו$f(n-1)$ בפונקציה הרקורסיבית ולהוכיח:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2 * 3^n + (-2)^{n+1} + 6(2 * 3^{n-1} + (-2)^n) \\ &= 6 * 3^{n-1} + -2(-2)^n + 12 * 3^{n-1} + 6(-2)^n \\ &= 6 * 3^{n-1} + 12 * 3^{n-1} + -2(-2)^n + 6(-2)^n \\ &= 18 * 3^{n-1} + 4(-2)^n \\ &= 2 * 3^{n+1} + (-2)^{n+2} \end{aligned}$$

לפי עקרון האינדוקציה השלמה, הבדיקה והמעבר, התנאי נכון לכל n טבעי.

■

4.1.3 סעיף ב

הפונקציה f אינה על מכיוון שהיא מתאימה לכל n מספר זוגי, ו$\mathbb{N}$ כולל בתוכו את כל המספרים הטבעיים (ולא רק את הזוגיים):

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 * 3^n + (-2)^n - 2 \\ &= 2 * 3^n - 2 * (-2)^n \\ &= 2 * (3^n - (-2)^n) \end{aligned}$$

■