ה א ו נ י ב ר ס י ט ה   ה פ ת ו ח ה

20229

אלגברה לינארית 2

חוברת הקורס – סתיו 2018א

כתב: פרופ' יוני סטאנצ'סקו

אוקטובר 2017 - סמסטר סתיו - תשע"ח

פנימי – לא להפצה.

תוכן העניינים

אל הסטודנטים

אנו מברכים אתכם עם הצטרפותכם ללומדי הקורס "אלגברה לינארית II" ומאחלים לכם לימוד מהנה ומוצלח.

חוברת זו כוללת את כל הפרטים שעליכם לדעת, כדי לבצע את המוטל עליכם בלימוד קורס זה. זהו מעין מדריך אישי, שתפקידו לסייע לכם בלימוד הקורס ולהבהיר פרטים הקשורים בו. קראו חוברת זו בעיון ושמרו עליה במשך כל לימודיכם בקורס.

בהמשך תמצאו את לוח הזמנים של הקורס והמטלות.

לקורס שבו אתם לומדים קיים אתר באינטרנט שבו תמצאו חומרי למידה נוספים שמפרסם מרכז ההוראה. האתר גם מהווה עבורכם ערוץ תקשורת עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שוהם בכתובת: http://www.openu.ac.il/shoham .

מידע על שירותי ספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספריה באינטרנט www.openu.ac.il/Library.

מרכז ההוראה בקורס הוא פרופ' יוני סטאנצ'סקו.

ניתן לפנות אליו באופן הבא:

- בטלפון **09-7781422** בימי ו' בין השעות 14:00 - 15:00 .
- דרך אתר הקורס.
- בדואר אלקטרוני - ionut@openu.ac.il.
- פקס: **09-7780631**.

אנו מאחלים לכם הצלחה בלימודים.

ב ב ר כ ה ,

צוות הקורס

לוח זמנים ופעילויות (מס' קורס 20229 /2018א)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת	מפגשי ההנחיה*	תאריך אחרון למשלוח ממ"ח (לאו"פ)	ממ"ן (למנחה)
1	20.10.2017-17.10.2017	יחידה 1			
2	27.10.2017-22.10.2017	יחידות 1,2		ממ"ח 01 27.10.2017	
3	3.11.2017-29.10.2017	יחידה 2			ממ"ן 11 3.11.2017
4	10.11.2017-5.11.2017	יחידה 3			
5	17.11.2017-12.11.2017	יחידה 3			ממ"ן 12 17.11.2017
6	24.11.2017-19.11.2017	יחידה 4			
7	1.12.2017-26.11.2017	יחידות 4,5			
8	8.12.2017-3.12.2017	יחידה 5			ממ"ן 13 8.12.2017
9	15.12.2017-10.12.2017 (ד-ו חנוכה)	יחידה 6			
10	22.12.2017-17.12.2017 (א-ד חנוכה)	יחידה 6			ממ"ן 14 22.12.2017
11	29.12.2017-24.12.2017	יחידה 7			
12	5.1.2018-31.12.2017	יחידות 7,8		ממ"ח 02 5.1.2018	
13	12.1.2018-7.1.2018	יחידה 8			ממ"ן 15 12.1.2018
14	19.1.2018-14.1.2018	יחידה 9			
15	29.1.2018-21.1.2018	יחידה 9			ממ"ן 16 29.1.2018

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

** התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".*

התנאים לקבלת 4 נקודות זכות

על מנת לקבל 4 נקודות זכות בקורס עליכם:

א. להגיש מטלות במשקל כולל של 15 נקודות לפחות.

ב. לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

ג. לקבל בציון הסופי 60 לפחות.

תיאור המטלות

בקורס "אלגברה לינארית II" 6 מטלות מנחה ו-2 מטלות מחשב.

ממ"ן 11	4 נק'
ממ"ן 12	3 נק'
ממ"ן 13	4 נק'
ממ"ן 14	3 נק'
ממ"ן 15	4 נק'
ממ"ן 16	3 נק'
ממ"ח 01	4 נק'
ממ"ח 02	4 נק'

במהלך הקורס עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.
ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת מחשב (ממ"ח) 01

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1,2

מספר השאלות: 15 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 27.10.2017

(יוני)

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**
בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

שים לב!
בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

בכל אחת מהשאלות 1-15 מופיעות שתי טענות. קבע לכל אחת מהן אם היא נכונה, אם לא.
סמן:
א – אם רק טענה א נכונה.
ב – אם רק טענה ב נכונה.
ג – אם הטענות א ו- ב נכונות.
ד – אם אף אחת מהטענות אינה נכונה.

שאלה 1

א. יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ ויהיו A, B איברים ב- V.
הנוסחה: $(A,B) = tr(BA)$, מגדירה מכפלה פנימית על V.

ב. יהי $V = \mathbf{R}^2$ ויהיו $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ איברים ב- V.
הנוסחה $(u,v) = x_1 + y_1$ מגדירה מכפלה פנימית ב- V.

שאלה 2

א. אם V מרחב אוניטרי, אז קיים $0 \neq v \in V$ עבורו מתקיים: $(v,v) = i$.

ב. יהי $V = \mathbf{R}^4$ ויהיו $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 0$.

לכל $a = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ ו- $b = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ נגדיר

$$(a,b) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \alpha_i \beta_i .$$

הנוסחה הנ"ל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbf{R}^4$.

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u, v, w \in V$.

א. $(u,v) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

ב. אם $u \perp v$ ו- $v \perp w$, אז $u \perp w$.

שאלה 4

יהי V מרחב אוניטרי ויהיו $u, v \in V$.

א. אם $\|u+v\| = \|u-v\|$, אז $u \perp v$.

ב. אם $u \perp v$, אז $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

שאלה 5

א. ב- $\mathbf{R}_5[x]$ קיימת מכפלה פנימית שלגביה הקבוצה:

$$\{1, x, x^2, x^3+2, 2x\}$$

אורתוגונלית.

ב. יהי V מרחב אוניטרי ו- $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V.

הנורמה של הווקטור u:

$$u = v_1 + \sqrt{2}\, v_2 + \sqrt{3}\, v_3 + \ldots + \sqrt{n}\, v_n$$

היא $\frac{(1+n)n}{2}$.

שאלה 6

א. אם U_1, U_2 ו- U_3 תת-מרחבים של מרחב מכפלה פנימית V, המקיימים:

$V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, אז מתקיים $V = U_1^{\perp} \oplus U_2^{\perp} \oplus U_3^{\perp}$.

ב. אם U ו- W תת-מרחבים של V כך ש- $U \subseteq W$, אז $U^{\perp} \subseteq W^{\perp}$.

שאלה 7

א. ב- $M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$, $n > 1$, קיימת מטריצה סימטרית שונה מאפס אשר אורתוגונלית לכל מטריצה אלכסונית.

ב. יהי U תת-מרחב של $\mathbf{R}^n$ המוגדר כך:

$$U = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}.$$

אז הווקטור $\{(1,1,\ldots,1)\}$ מהווה בסיס ל- $U^{\perp}$.

שאלה 8

נגדיר ב- $\mathbf{R}_3[x]$ מכפלה פנימית כך:

$$(P, Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)\, Q(k).$$

יהיו $P_1 = 1$, $P_2 = x - 1$ ו- $P_3 = x^2 - 2x + \frac{1}{3}$.

א. הקבוצה $\{P_1, P_2, P_3\}$ אורתוגונלית.

ב. הקבוצה $\{P_1, P_2, P_3\}$ אורתונורמלית.

שאלה 9

יהיו $u = (1,2,i,0)$ ו- $v = (3+i, -1, 1-i, 10)$ וקטורים ב- $\mathbf{C}^4$.

א. $(v, u) = 0$.

ב. המרחק בין u ל- v הוא $\sqrt{119}$.

שאלה 10

א. הנורמה של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ היא $\sqrt{30}$ (A איבר ב- $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$).

ב. לכל $a_1,a_2,\dots,a_n$ ו- $b_1,b_2,\dots b_n$ ב- $\mathbf{R}$ מתקיים:

$(a_1b_1+\dots+a_nb_n)^2 \le (|a_1|^2+\dots+|a_n|^2)(|b_1|^2+\dots+|b_n|^2)$.

שאלה 11

א. אם $(\ ,\ )$ מכפלה פנימית במרחב V מעל השדה $\mathbf{C}$, אז גם כל כפולה של $(\ ,\ )$ בסקלר $\mathbf{C}\ni\lambda\neq 0$ היא מכפלה פנימית ב- V.

ב. תהי $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$.

המכפלה הפנימית הנקבעת על-ידי A בבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ היא:

$(u,v)=4x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+5x_2y_2$,

כאשר $u=(x_1,x_2)$, $v=(y_1,y_2)$.

שאלה 12

א. יהיו $x\neq y$ שייכים ל- $\mathbf{R}^n$ ומקיימים $\|x\|=\|y\|=1$.

אז מתקיים $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=1$.

ב. המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ חיובית לחלוטין.

שאלה 13

א. יהי V מרחב מכפלה פנימית, $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס של V ונניח כי קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ כך שמתקיים:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^2.$$

אז B בסיס אורתונורמלי של V.

ב. יהי $U=Sp(\{1,x,x^2\})$ תת מרחב של $\mathbf{R}_5[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגראלית בקטע $[0,1]$. ההיטל האורתוגונאלי של x^3 על U הוא $(x^3,1)1+(x^3,x)x+(x^3,x^2)x^2$.

שאלה 14

א. יהי $W = Sp\left(\{2x+1, x^2\}\right)$ תת-מרחב של $\mathbf{R}_3[x]$ עם המכפלה הפנימית האינטגראלית בקטע $[0,1]$, אז $\{40x^2 - 44x + 9\}$ בסיס ל- $W^{\perp}$.

ב. יהי $W = Sp\{(1,i,1)\ ,(1+i,0,2)\}$ תת-מרחב של $\mathbf{C}^3$, אז $\{(1+i,1,-1)\}$ בסיס ל- $W^{\perp}$.

שאלה 15

א. ב- $\mathbf{R}^3$ המרחק של $v = (1,-1,2)$ מתת-המרחב W,

$W = Sp\{(0,1,1)\ ,(0,1,0)\}$,

הוא 1.

ב. ב- $M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$, המרחק של $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ מתת-המרחב W,

$$W = Sp\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

הוא $\sqrt{151}$.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 1,2,3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 3.11.2017

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

שאלה 1

א. יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית, ותהי $P \in V$ מטריצה הפיכה.

נגדיר טרנספורמציה לינארית $T_P : M_{n\times n}^{\mathbf{C}} \to M_{n\times n}^{\mathbf{C}}$ על-ידי:

$T_P X = P^{-1}XP$ לכל $X \in V$.

הוכח ש- $(T_P)^* = T_{P^*}$.

ב. תהי $T_P : M_{2\times 2}^{\mathbf{C}} \to M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$ מוגדרת על-ידי $T_P X = P^{-1}XP$, כאשר $P = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$.

מצא את המטריצה המייצגת את $(T_P)^*$ בבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbf{C}}$.

שאלה 2

יהיו P ו- Q מטרצות ממשיות מסדר $(n \times n)$, ותהי $U = P + iQ$.

נסמן $D = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}$.

א. הוכח שאם U מטריצה הרמיטית, אז D מטריצה סימטרית.

ב. הוכח שאם U מטריצה אוניטרית, אז D מטריצה אורתוגונלית.

שאלה 3

יהיו A ו- B מטריצות חיוביות לחלוטין ו- Q מטריצה אוניטרית.

הוכח שאם $A = BQ$ אז $A = B$.

שאלה 4

יהי $0 \neq w \in \mathbf{C}^n$ וקטור עמודה. מצא תנאי הכרחי ומספיק עבור w כדי שהמטריצה $H = I - 2ww^*$ תהיה אוניטרית. הוכח שבמקרה זה H היא מטריצת שיקוף ביחס ל- $\{w\}^\perp$,

כלומר: $Hw = -w$ ו- $Hv = v$ לכל $v \in \{w\}^\perp$.

(**הערה**: אם $w = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$, אז w^* מוגדר על-ידי $(w^* = (\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$.

שאלה 5

יהי V מרחב מכפלה פנימית. יהיו $w_1, w_2 \in V$ וקטורים המקיימים:

$||w_1|| = ||w_2|| = 1$, $(w_1, w_2) = 0$.

נגדיר טרנספורמציה ליניארית $T: V \to V$ כך: $Tv = v - 2(v, w_1)w_1 - 2(v, w_2)w_2$.

א. הוכח כי T טרנספורמציה ליניארית צמודה לעצמה ואוניטרית.

ב. בדוק אם T אי שלילית.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 3

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 17.11.2017

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

א. נתונות המטריצות:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad , A_2 = \begin{bmatrix} i & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , A_3 = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{bmatrix}$$

לכל אחת מהמטריצות בדוק אם היא נורמלית, ואם כן - מצא מטריצה אוניטרית המלכסנת אותה.

ב. מצא אילו מבין המטריצות הבאות הן חיוביות (חיוביות לחלוטין):

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_5 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

תהי $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית נורמלית במרחב מכפלה פנימית ממימד סופי.

הוכח:

(i) $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Ker}T^*$.

(ii) $\mathrm{Im}\,T = (\mathrm{Ker}T)^{\perp}$.

(iii) $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{Im}\,T^*$.

שאלה 3

יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית המקיימת

$T^2 = \frac{1}{2}(T + T^*)$. הוכח ש- T נורמלית ו- $T^2 = T$.

שאלה 4

תהי H מטריצה סימטרית ממשית מסדר $(n \times n)$ ויהי λ הערך העצמי המקסימאלי של H.

הוכח שלכל $v \in \mathbf{R}^n$, $||v|| = 1$ מתקיים $v^t H v \le \lambda$.

שאלה 5

הוכח שהמטריצה $A = \begin{bmatrix} 2-i & -1 & 0 \\ -1 & 1-i & 1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{bmatrix}$ היא נורמלית, ומצא את הפירוק $A = \sum_i \lambda_i P_i$

כאשר P_i הן המטריצות (המייצגות בבסיס הסטנדרטי) של ההטלות האורתוגונאליות שמופיעות בפירוק הספקטראלי של T_A.

שים לב!

בכל שאלה, אלא אם כן צוין אחרת, מדובר במכפלה הפנימית הסטנדרטית במרחב הליניארי המתאים.

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 4, 5

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 8.12.2017

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:
- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

יהי $V = M_{n\times n}^{\mathbf{R}}$ ותהי $f: V\times V \to \mathbf{R}$ מוגדרת לפי: $f(A,B) = tr(A^t MB)$, לכל $A,B\in V$.

א. מצא תנאי מספיק והכרחי על M כדי ש-f תהיה תבנית סימטרית.

ב. מצא את $[f]_E$ כאשר $n=2$, E הבסיס הסטנדרטי של $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ ו- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

ג. מצא הצגה של f כסכום של תבנית בילינארית סימטרית ותבנית בילינארית אנטיסימטרית,

כאשר $n=2$, $V = M_{2\times 2}^{\mathbf{R}}$ ו- $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

שאלה 2

הוכח שתבנית בילינארית $f \neq 0$ ניתנת להצגה כמכפלה של שתי תבניות ליניאריות:

$$f(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j y_j\right)$$

אם ורק אם הדרגה של f היא 1.

שאלה 3

תהי f תבנית על $\mathbf{R}^2$ הנתונה על-ידי:

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)=x_1y_1+4x_2y_2+2x_1y_2+2x_2y_1\,.$$

א. הוכח ש-f תבנית ביליניארית, מצא בסיס שבו f מיוצגת על-ידי מטריצה אלכסונית והצג את התבנית הריבועית המסומכת ל-f.

ב. בדוק את נכונות נוסחת המעבר (משפט X.14) מן הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^2$ לבסיס שמצאת בסעיף הקודם.

שאלה 4

א. מצא צורה אלכסונית של התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j\,.$$

מצא את התבנית הבילינארית הסימטרית הקוטבית ל-q.

ב. מצא בסיס שבו התבנית הריבועית מסעיף א' היא בעלת צורה אלכסונית.

שאלה 5

א. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{C}$, $\dim V\ge 2$.
הוכח שאם $q:V\to\mathbf{C}$ תבנית ריבועית, אז קיים $v\ne 0$ כך ש-$q(v)=0$.

ב. האם תכונה זאת נכונה גם עבור תבנית ריבועית $q:V\to\mathbf{R}$, כאשר V מרחב וקטורי מעל $\mathbf{R}$, $\dim V\ge 2$? נמק.

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 5, 6

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 22.12.2017

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

א. מצא את הדרגה ואת הסימנית של התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$:

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 + x_3x_4 .$$

ב. מצא תת-מרחב ממימד מקסימאלי של $\mathbf{R}^4$ שעליו q היא תבנית חיובית לחלוטין.

שאלה 2

תהי q תבנית ריבועית חיובית למחצה. הוכח כי:

$$L_0 = \{v \in V \mid q(v) = 0\}$$

הוא תת-מרחב ממימד $n-\rho$ כאשר ρ הדרגה של q.

שאלה 3

יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbf{R}$ ו- $q:V \to \mathbf{R}$ תבנית ריבועית.

הוכח שאם הקבוצה $L = \{v \mid q(v) \geq 0\}$ היא תת מרחב של V,

אז q **שומרת סימן**.

(הערה: ההגדרה של תבנית ש**<u>אינה שומרת סימן</u>** נמצאת בעמוד 70, יחידות 4-5-6).

שאלה 4

א. מצא את כל הערכים הממשיים של λ שעבורם התבנית הריבועית $q:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2\lambda x_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$$

חיובית לחלוטין.

ב. תהיינה התבניות הבאות על $\mathbf{R}^3$:

$$q_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3 ,$$

$$q_2(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+8x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3 .$$

מצא בסיס של $\mathbf{R}^3$ אשר ביחס אליו :

$q_1=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ ו- $q_2=\delta_1y_1^2+\delta_2y_2^2+\delta_3y_3^2$. מהם δ_3 , δ_2 , δ_1 ?

שאלה 5

א. הוכח כי אם q תבנית ריבועית אי-שלילית, אז המטריצה המייצגת אותה היא מטריצה סינגולארית. (הערה : אי-שלילית = חיובית למחצה , לפי הגדרה $X.26$).

ב. תהי $A=A^t$ מטריצה סימטרית. תהי $q(x)=x^tAx,\ x\in\mathbf{R}^n$ תבנית ריבועית חיובית לחלוטין. הוכח כי A מטריצה אורתוגונלית אם ורק אם $A=I$.

מטלת מחשב (ממ"ח) 02

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 7,8

מספר השאלות: 15   **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א   **מועד אחרון להגשה:** 5.1.2018

(יוני)

את התשובות לממ"ח יש לשלוח באמצעות מערכת **שאילתא**

בכתובת www.openu.ac.il/sheilta

בשאלות 1-14 מופיעות שתי טענות. סמן:

א – אם רק טענה א נכונה.

ב – אם רק טענה ב נכונה.

ג – אם שתי הטענות נכונות.

ד – אם שתי הטענות אינן נכונות.

שאלה 1

תהי A מטריצה מסדר 3×3.

א. אם $A^4=0$, אז $A^3=0$.

ב. אם $A^3=0$, אז $A^2=0$.

שאלה 2

תהי A מטריצה מסדר $n\times n$ ויהי $P(t)$ הפולינום המינימאלי שלה.

אם $P(t)$ ממעלה k ו-$(c\neq 0)$, אז הפולינום המינימאלי של המטריצה cA הוא:

א. $c^k P(\frac{t}{c})$.

ב. $c^n P(\frac{t}{c})$.

שאלה 3

תהי $A\in M_{n\times n}^{\mathbf{F}}$ מטריצה שאינה ניתנת ללכסון.

אז קיים פולינום $P(t)\in\mathbf{F}[t]$ ממעלה $n-1$ כך שמתקיים: $[P(A)]^2=0$.

א. כאשר $F=\mathbf{C}$.

ב. כאשר $F=\mathbf{R}$.

שאלה 4

א. אם $T:V \to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת: $T^2 = I$, אז $T = I$ או $T = -I$.

ב. תהי:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אז A מאפסת את הפולינום $t^6 - t$.

שאלה 5

א. קיימת מטריצה ממשית עבורה הפולינום האופייני הוא $t(t-1)(t^2+t+1)$ ואילו הפולינום המינימאלי הוא $t(t-1)$.

ב. יהיו A ו- B מטריצות מסדר $n \times n$.

אם קיים פולינום $q(t)$ המקיים $q(A) = 0$ אבל $q(B) \neq 0$, אז A ו- B אינן דומות.

שאלה 6

א. הפולינום המינימאלי של המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ הוא ממעלה 2 לכל היותר.

ב. עבור $A = diag\{2,2,5,5,6\}$ הפולינום המינימאלי הוא: $(t-2)^2(t-5)(t-6)$.

שאלה 7

א. אם למטריצות A ו- B אותו פולינום אופייני, אז הן דומות.

ב. לכל פולינום מתוקן $p(t) \in \mathbf{F}[t]$ קיימת מטריצה כך ש- $p(t)$ הוא הפולינום האופייני שלה.

שאלה 8

תהי $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

א. מטריצה A מאפסת פולינום ממעלה 1.

ב. הפולינום המינימאלי של A הוא: $t^3 - t$.

שאלה 9

א. אם $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ו- $P(t) = t^2 - 1$, אז $P(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$.

ב. תהי $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

הפולינום המינימאלי של A הוא $(t-2)^2(t-3)^3$.

שאלה 10

תהי $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, אז :

א. $B^4 = B^2 - 6B - 6I$.

ב. $B^{-1} = -\frac{1}{6}B^2 + \frac{1}{6}B$.

שאלה 11

א. תהי $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנספורמציית הסיבוב ב- 120^o נגד כיוון השעון סביב הנקודה 0.

יהי $P(t) = t^7 - t^4 + t^3$. אז $P(T)(x,y) = (x,y)$, לכל $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

ב. תהי $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ טרנספורמציית השיקוף ביחס לציר ה- x, כלומר $T(x,y) = (x,-y)$,

ויהי $P(t) = t^3 + t - 1$. אז $P(T)(x,y) = (x,-3y)$.

שאלה 12

תהי $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

א. הפולינום האופייני של A הוא $(t+4)^4$.

ב. הפולינום המינימאלי של A הוא $t^3 + 12t^2 + 48t + 64$.

שאלה 13

יהיו V מרחב ליניארי ממימד 5, $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית הפיכה.

א. האיבר החופשי של הפולינום המינימאלי של T שונה מ- 0.

ב. T^{-1} ניתנת להצגה על-ידי פולינום ב- T ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

שאלה 14

א. אם $\{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V, ו- $T:V \to V$ מקיימת:

$$Tv_1 = 0$$

$$Tv_i = v_{i-1}, \qquad 2 \le i \le n,$$

אז קיים $1 \le k < n$ עבורו $T^k = 0$.

ב. אם מטריצה ריבועית A מאפסת את הפולינום $P(t) = t^2 + 5t + 1$, אז A הפיכה.

שאלה 15

א. אם מטריצה ריבועית A מאפסת את הפולינום $t^{102} + t^2 + t$, אז A הפיכה.

ב. תהי A מטריצה ממשית הפיכה המקיימת $A^{-1} = -A$, אז הפולינום המינימאלי של A (ביחס ל- **R**) הוא $t^2 + 1$.

מטלת מנחה (ממ״ן) 15

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידות 8, 9

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 4 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 12.1.2018

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב״נוהל הגשת מטלות מנחה״

שאלה 1

א. תהי $T:V\to V$ ההעתקה המיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}$$

מצא את כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של V:

(1) כאשר $V=\mathbf{R}^2$.

(2) כאשר $V=\mathbf{C}^2$.

ב. יהי V מרחב ליניארי מעל שדה $\mathbf{F}$, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית.

ידוע כי כל תת-מרחב של V הוא T-שמור. הוכח שקיים $\alpha\in F$ כך ש- $T=\alpha I$,

(כלומר T טרנספורמציה סקלרית).

שאלה 2

א. תהי T טרנספורמציה ליניארית במרחב ליניארי V שמימדו סופי.

יהי W תת-מרחב T-שמור של V ו- T_W הצמצום של T ל- W.

(1) הוכח כי הפולינום המינימאלי של T_W מחלק את הפולינום המינימאלי של T.

(2) הסק כי אם T לכסינה, אז T_W לכסינה.

ב. אם $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ היא בעלת ערכים עצמיים 1, 2 ו- 3 ווקטורים עצמיים v_1, v_2 ו- v_3

בהתאמה, מה הם כל תת-המרחבים ה- T-שמורים של $\mathbf{R}^3$? נמק.

שאלה 3

תהי $T:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ הטרנספורמציה הליניארית המיוצגת בבסיס הסטנדרטי על-ידי המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

א. מצא לפחות שני תת-מרחבים T-שמורים לא טריוויאליים של $\mathbf{R}^3$.

ב. יהי $W = Ker(T-3I)$. הוכח כי לא קיים תת-מרחב U של $\mathbf{R}^3$ שהוא T-שמור ומקיים:

$\mathbf{R}^3 = W \oplus U$.

שאלה 4

תהי $T:V \to V$ טרנספורמציה ליניארית במרחב ליניארי ממימד סופי V,

ויהי $M(t) = M_1(t)\cdot\ldots\cdot M_k(t)$ הפולינום המינימאלי של T (מניחים ש- $M_i(t)$ פולינומים מתוקנים זרים בזוגות).

נסמן: $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$ הפירוק הפרימרי המתאים ל- T, כאשר $W_i = KerM_i(T)$.

יהי W תת-מרחב T-שמור של V.

הוכח כי $W = (W \cap W_1) \oplus (W \cap W_2) \oplus \ldots \oplus (W \cap W_k)$.

שאלה 5

יהי V מרחב אוניטרי מממד סופי ו- $T:V \to V$ טרנספורמציה נורמלית.

הוכח שכל תת-מרחב T-שמור הוא גם T^*-שמור.

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

הקורס: 20229 – אלגברה ליניארית II

חומר הלימוד למטלה: יחידה 9

מספר השאלות: 5 **משקל המטלה:** 3 נקודות

סמסטר: 2018א **מועד אחרון להגשה:** 29.1.2018

(יוני)

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות:

- שליחת מטלות באמצעות מערכת המטלות המקוונת באתר הבית של הקורס
- שליחת מטלות באמצעות הדואר או הגשה ישירה למנחה במפגשי ההנחיה

הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה"

שאלה 1

תהי $A=\begin{bmatrix}6 & -9\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

א. מצא את צורת ז'ורדן G של A ומצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=G$.

ב. חשב את G^{100} ואת A^{100} .

ג. מצא נוסחה עבור a_n , כאשר נתון:

$$a_0=a,$$
$$a_1=b,$$

ו- $a_{n+2}=6a_{n+1}-9a_n$, לכל $n\ge 0$.

שאלה 2

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ותהי $T:V\to V$ טרנספורמציה ליניארית.

נתון שכל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*.

הוכח כי T טרנספורמציה נורמלית.

שאלה 3

א. מצא את צורת ז׳ורדן של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0 & 3\\ -2 & -6 & 0 & 13\\ 0 & -3 & 1 & 3\\ -1 & -4 & 0 & 8\end{bmatrix}$.

ב. מצא את צורת ז׳ורדן J של המטריצה B ומצא מטריצה הפיכה P המקיימת $B=P^{-1}JP$,

כאשר B נתונה על ידי $B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$.

שאלה 4

תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda\in\mathbf{C}$.

נתון ש- $\rho(A-\lambda I)^2=1$ ו- $\rho(A-\lambda I)=2$.

מצא את צורת ז׳ורדן ואת הפולינום המינימאלי של A.

שאלה 5

תהי A מטריצה מסדר 3 בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד, כך שצורת ז׳ורדן של A^3 היא:

$$\begin{bmatrix}8 & 1 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

מצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימאלי של A, ורשום את צורת ז׳ורדן של A. נמק.