ממן 14

יונתן אוחיון

23 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

ראשית, נחשב את הצורה הכללית של $(x+1)(p'(x))$:

$$\begin{aligned}(x+1)(p'(x)) &= x\cdot p'(x)+p'(x)\\ &= (1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)+x\cdot(1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)\\ &= (1a_1x^0+2a_2x^1+3a_3x^2+\dots)+(1a_1x^1+2a_2x^2+3a_3x^3+\dots)\\ &= 1a_1x^0+1a_1x^1+2a_2x^1+2a_2x^2+3a_3x^2+\dots\\ &= a_1+(a_1+2a_2)x+(2a_2+3a_3)x^2+\dots+((n-1)a_{n-1}+na_n)x^{n-1}\end{aligned}$$

נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי E:

$$[(x+1)(p'(x))]_E=\left[\sum_{i=0}^{n}((i-1)a_{i-1}+ia_i)x^{i-1}\right]_E=\begin{bmatrix}0\\a_1\\a_1+2a_2\\\vdots\\((n-1)a_{n-1}+na_n)x^{n-1}\end{bmatrix}$$

לפיכך, נוכל לייצג את ההעתקה הלינארית $T:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_n[x]$ בעזרת העתקת הקואורדינטות $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת כך:

$$S\left(\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\a_1\\a_1+2a_2\\\vdots\\(n-1)a_{n-1}+na_n\end{bmatrix}$$

כעת נוכל להוכיח שS הינה העתקה לינארית (ועקב כך גם T) אם מתקיים

$$S(\alpha[p(x)]_E+\beta[q(x)]_E)=\alpha S([p(x)]_E)+\beta S([q(x)]_E)$$

לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ו$p(x),q(x)\in\mathbb{R}_n[x]$. נוכיח בעמוד הבא.

1.1 סעיף א (המשך)

הוכחה:

$$\begin{aligned}
S\left(\alpha\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right) &= S\left(\begin{bmatrix}\alpha a_0+\beta b_0\\ \vdots\\ \alpha a_n+\beta a_n\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha a_1+\beta b_1+2(\alpha a_2+\beta b_2)\\ \vdots\\ \alpha(n-1)a_{n-1}+\beta(n-1)b_{n-1}+n(\alpha a_n+\beta b_n)\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\ \alpha a_1+\beta b_1\\ \alpha(a_1+2a_2)+\beta(b_1+2b_2)\\ \vdots\\ \alpha((n-1)a_{n-1}+na_n)+\beta((n-1)b_n+nb_n)\end{bmatrix}\\
&= \alpha\begin{bmatrix}0\\ a_1\\ a_1+2a_2\\ \vdots\\ (n-1)a_{n-1}+na_n\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\ b_1\\ b_1+2b_2\\ \vdots\\ (n-1)b_{n-1}+nb_n\end{bmatrix}\\
&= \alpha S\left(\begin{bmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\right)+\beta S\left(\begin{bmatrix}b_0\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

ו-S העתקה לינארית. מכיוון ש-S פועלת על ווקטורי הקואורדינטות של $\mathbb{R}_n[x]$, נוכל להסיק מהעובדה שהיא העתקה לינארית ש-T הינה העתקה לינארית גם היא כנדרש.

■

1.2 סעיף ב

נראה שT אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לכפל בסקלר:

$$\begin{aligned} x = y = 1,\ \alpha = -1 \\ \alpha T(x,y) \stackrel{?}{=} T(\alpha x, \alpha y) \\ \alpha(2x-y, 3|x|, y) \stackrel{?}{=} (2\alpha x - \alpha y, 3|\alpha x|, \alpha y) \\ -1(2-1,3,1) \stackrel{?}{=} (-2+1, 3, -1) \\ (-1,-3,-1) \neq (-1,3,-1) \end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה T אינה מקיימת את תכונת הכפל בסקלר והיא אינה ט"ל.

■

1.3 סעיף ג

נראה שT אינה טרנספורמציה לינארית ע"י דוגמה נגדית לחיבור:

$$\begin{aligned} X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix},\ YX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ T(X) + T(Y) \stackrel{?}{=} T(X+Y) \\ \cancel{X^2} - \cancel{X} + \cancel{Y^2} - \cancel{Y} \stackrel{?}{=} \cancel{X^2} + XY + YX + \cancel{Y^2} - \cancel{X} - \cancel{Y} \\ XY + YX \stackrel{?}{=} 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

לפיכך, ההעתקה T לא מקיימת את תכונת החיבור והיא אינה ט"ל.

■

2 שאלה 2

2.1 מציאת בסיסים ל$\ker T$ ול$\operatorname{Im} T$

2.1.1 $\ker T$

ראשית, נמצא העתקה S המתאימה לT בעזרת הצגת הקואורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי (e_1, e_2, e_3, e_4) של $M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$T : M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \to \mathbb{R}_n[x],\ T(A) = (a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d)$$
$$\downarrow$$
$$S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ S([A]_E) = S\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d) \end{bmatrix} = [T(A)]_E$$

לפיכך, נוכל למצוא את גרעין ההעתקה S:

$$\begin{aligned}\ker S &= \left\{v \mid v \in \mathbb{R}^4 \wedge S(v) = 0\right\} \\ &= \left\{[A]_E \mid A \in M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \wedge [T(A)]_E = 0\right\} \\ &= \left\{v = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^t \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge S(v) = 0\right\} \\ &= \left\{v = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^t \mid \begin{bmatrix} a-d & b+c & 5(a-d) \end{bmatrix}^t = 0\right\}\end{aligned}$$

כעת, נוכל לדרג את המערכת הבאה ולקבל את הצורה הכללית של איבר ב$\ker S$:

$$\begin{aligned} a + 0b + 0c + (-1)d = 0 \\ 0a + b + c + 0d = 0 \\ 5a + 0b + 0c + (-5)d = 0 \end{aligned} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{aligned} a &= d \\ b &= -c \\ c &= \alpha \\ d &= \beta \end{aligned}$$

כלומר, $\ker S = \{\begin{bmatrix} \beta & -\alpha & \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

נעבור מקואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{aligned}\ker T &= \left\{\begin{bmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\alpha \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Sp} \underbrace{\left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}}_{P}\end{aligned}$$

כעת, הווקטורים בקבוצה P הפורשת את $\ker T$ אינם פרופורציוניים ולכן בלתי תלויים. לפיכך, P הינה פורשת ובת"ל ב$\ker T$ ולפיכך הינה בסיס שלו.

■

2.1.2 $\operatorname{Im} T$

נוכל למצוא את $\operatorname{Im} T$:

$$\operatorname{Im} T = \left\{(a-d)x^2 + (b+c)x + 5(a-d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$$

כעת נעבור להצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונגיע ל$\operatorname{Im} S$ (כאשר S הינה הט"ל אשר מצאנו בסעיף הקודם):

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} S &= \left\{ \begin{bmatrix} a-d \\ b+c \\ 5(a-d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \operatorname{Sp}\underbrace{\left\{ p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, p_3 = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}}_{P}
\end{aligned}$$

כעת, קיבלנו קבוצה P הפורשת את $\operatorname{Im} S$. מכיוון ש$p_3 = -p_1$ והם פרופורציוניים, נצטרך להוציא את p_3 מP על מנת שהיא תהיה בת"ל:

$$\operatorname{Im} S = \operatorname{Sp}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

מכיוון שקבוצה זו גם פורשת וגם בת"ל, היא בסיס של $\operatorname{Im} S$. כעת נעבור מהצגת קואורדינטות בעזרת הבסיס הסטנדרטי ונמצא את הבסיס המתאים ל$\operatorname{Im} T$:

$$\begin{aligned}
B_{\operatorname{Im} T} &= \left(x^2 + 0x + 5, 0x^2 + x + 0\right) \\
&= \left(x^2 + 5, x\right)
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

2.2 סעיף ב

אף אחד מהתנאים לא מתקיים, שכן $\operatorname{Im} T \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ ו$\ker T \subseteq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$, וכמובן ש$M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \not\subseteq \mathbb{R}_n[x]$ ולכן לא יכולה להתקיים הכלה דו כיוונית ע"מ שוויון המרחבים.

לפיכך, $\ker T \oplus \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2} \wedge \ker T + \operatorname{Im} T \neq M^{\mathbb{R}}_{2\times 2}$ כנדרש.

■

2.3 סעיף ג

2.3.1 i

ראשית, אנו יודעים שאיברי $\ker T$ הינם מטריצות, כלומר

$$\exists a,b,c,d \in \mathbb{R} \to A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker T$$

כעת, די לחשב את A^2 ולבדוק אם אכן מתקיים $T(A^2)=0$. ראשית, נחשב את A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+cd & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$$

כעת נציב ב$T(A^2)=0$:

$$\begin{aligned} T(A^2) &= (a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc}))x^2+(b(a+d)+c(a+d))x+5(a^2+\cancel{bc}-(d^2+\cancel{bc})) \\ &= (a+d)(a-d)x^2+(a+d)(b+c)x+5(a+d)(a-d) \\ &= (a+d)[(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)] \\ &= (a+d)\cdot T(A) \underset{T(A)\in\ker T}{=} 0\cdot(a+d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים $T(A^2)=0$ ולפיכך $A^2 \in \ker T$ גם הוא.

■

2.3.2 ii

הצורה הכללית של פולינום $p(x)\in \operatorname{Im} T$ הינה $(a-d)x^2+(b+c)x+5(a-d)$. לפיכך, אם נצרף לו את הפולינום $r(x)=3x^2+2x+5$ נקבל את $q(x)$ הבא:

$$q(x)=r(x)+p(x)=(a-d+3)x^2+(b+c+2)x+5(a-d+1)$$

נניח ש$q(x)\in \operatorname{Im} T$ ונביא דוגמה נגדית לפולינום אשר עבורו $q(x)\notin \operatorname{Im} T$:

$$\begin{matrix} a=1 & b=2 \\ c=3 & d=4 \end{matrix} \to p(x)=-3x^2+3x-15$$

$$\begin{aligned} q(x) &= (-3+3)x^2+(3+2)x+5(-3+1) \\ &= 0x^2+5x-10 \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים

$$\begin{matrix} a-d+3=0 \\ a-d+1=-10 \end{matrix} \to \begin{matrix} a-d=-3 \\ a-d=-11 \end{matrix} \to -3 \neq -11$$

וסתירה להנחה. לפיכך, לא לכל $p(x)\in \operatorname{Im} T$ מתקיים $q(x)\in \operatorname{Im} T$.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

ראשית, נראה ש$\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$: לפי הגדרת גרעין ההעתקה, $\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$ ולפי הגדרת תמונת ההעתקה, $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\}$. לפי הגדרת T מתקיים $T^2 = 0$, כלומר $T(T(v)) = 0$ לכל $v \in V$. כעת, לפי הגדרת הגרעין, $x = T(v) \in \ker T$ לכל $v \in V$ (שכן מתקיים $T(x) = 0$).
כעת, כל $m \in \operatorname{Im} T$ שייך גם ל$\ker T$ ולכן $\operatorname{Im} T \subseteq \ker T$.

כעת, לפי משפט 8.3.4, מתקיים $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim \ker T$, כלומר קיים $\epsilon \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\dim \operatorname{Im} T = \dim \ker T - \epsilon$$

לפי משפט 9.6.1, מתקיים

$$\begin{aligned}
&\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = n \\
&\dim \ker T + \dim \ker T - \epsilon = n \\
&2 \dim \ker T = n + \epsilon \ / : 2 \\
&\dim \ker T = \frac{n + \epsilon}{2}
\end{aligned}$$

ומכיוון ש$\epsilon \geq 0$, מתקיים

$$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$$

כנדרש.

■

3.2 סעיף ב

ראשית, לפי סעיף א אנו יודעים ש$\dim \ker T \geq \frac{n}{2}$, כלומר $\dim \ker T \geq 1.5$. נוכל להיווכח ש$2 \leq \dim \ker T < n = 3$, ומכיוון שמימד של מרחב ווקטורי הינו מספר טבעי מתקיים $\dim \ker T = 2$.
נסמן את הבסיס לגרעין כך:

$$k_1, k_2 \in \ker T \to B_{\ker T} = (k_1, k_2)$$

כעת, על מנת להשלים את $B_{\ker T}$ לבסיס של V נצטרך למצוא $v \in V$ אשר אינו בגרעין ההעתקה, כלומר שמתקיים $T(v) \neq 0$. לפי הנתון, $T \neq 0$ ולכן קיים $v \in V$ כך ש$T(v) \neq 0$. לכן, מתקיים

$$\begin{gathered}
B_V = (v, k_1, k_2) \\
\downarrow \\
[T(k_1)]_{B_V} = [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_1) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(k_2)]_{B_V} = [0 \quad 0 \quad 0]^t \to T(k_2) = 0v + 0k_1 + 0k_2 = 0 \\
[T(v)]_{B_V} = [1 \quad 0 \quad 0]^t \to T(v) = 1v + 0k_1 + 0k_2 = v
\end{gathered}$$

כנדרש.

■