סיכום לקראת המבחן בלינארית 2

יונתן אוחיון

14 באוגוסט 2018

פתרון לשאלה 2ב

השאלה: תהי $A \in M_{5\times 5}^{\mathbb{R}}$ המקיימת $\operatorname{tr} A = 0, \rho(A) = 1$. מצאו את הפולינום האופייני שלה ואת הפולינום המינימלי שלה. האם A בהכרח לכסינה מעל $\mathbb{R}$?

התשובה שלי:

מלינארית 1 נקבל כי A לא הפיכה ולכן $\det A = 0$. לכן, 0 ע"ע של A והריבוב הגיאומטרי שלו (נסמן - g_0) הינו

$$g_0 = 5 - \rho(-A) = 5 - \rho(A) = 4$$

כעת, נסמן את הריבוב האלגברי של 0 בa_0. ידוע כי $g_0 \le a_0 \le n$ ולכן נקבל כי

$$4 \le a_0 \le 5$$

כלומר, $a_0 = 4$ או $a_0 = 5$. נניח בשלילה כי $a_0 = 4$. אזי נקבל כי מכיוון ש$P_A(\lambda)$ פולינום מתוקן ממעלה 5, יש לו עוד שורש שונה מ0. נסמן את השורש הזה בt. לכן נוכל לראות כי מתקיים

$$P_A(\lambda) = \lambda^4(\lambda - t) = \lambda^5 - \lambda^4 t$$

מלינארית 1 ידוע כי המקדם של λ^4 שווה ל$-\operatorname{tr} A$, כלומר מתקיים $t = -\operatorname{tr} A = 0$ אבל $t \neq 0$ ולכן $a_0 \neq 4$. לפיכך, נקבל כי $a_0 = 5$ והפ"א של A הינו

$$P_A(\lambda) = \lambda^5$$

בנוסף, מכיוון ש$4 = g_0 \neq a_0 = 5$, המטריצה A בהכרח אינה לכסינה מעל $\mathbb{R}$. כעת, נחפש את הפולינום המינימלי של A. ידוע לנו כי $\rho(A) = 1$ ולכן הפולינום $m(t) = t$ אינו הפ"מ של A.