ממן 12

יונתן אוחיון

26 בנובמבר 2017

שאלה 1

סעיף א

מטריצה A_1

ראשית, נחשב את $A_1^* = \overline{A^t}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \to A^t = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \to A_1^* = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

נוכל לראות שמתקיים $A_1 = A_1^*$. לפיכך, $A_1A_1^* = A_1^*A_1 = A_1^2$ ולכן A_1 מטריצה נורמלית. נמצא מטריצה אוניטרית המלכסנת אותה. ראשית, נמצא את הערכים העצמיים של A_1:

$$P_{A_1}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & i \\ -i & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

והערכים העצמיים שמצאנו הינם $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. נמצא את הווקטורים העצמיים לכל ע"ע:

$$(A_1 - \lambda_1 I)\vec{v} = \vec{0} \equiv \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to iR_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ומצאנו את הו"ע $\vec{v_1} = (1, -i)$. נמצא את הווקטור העצמי המשוייך לλ_2:

$$(A_1 - \lambda_2 I)\vec{v} = \vec{0} \equiv \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 \to iR_2 \\ R_2 \to R_2 - R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ומצאנו את הוע $\vec{v_2} = (1, i)$.