ממן 15

יונתן אוחיון

16 בספטמבר 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

ראשית, נחשב את a_0, a_1, a_2. כמות המחרוזות באורך 0 המקיימות את התנאי הינה 1 (המחרוזת הריקה). לפיכך, $a_0 = 1$. כמות המחרוזות באורך 1 המקיימות את התנאי הינה 3 (שכן $|\{0, 1, 2\}| = 3$) ולכן $a_1 = 3$. כמות המחרוזות באורך 2 המקיימות את התנאי הינה 7 (שכן כמות המחרוזות באורך 2 הינה $|A \times A| = 3^2 = 9$, אך יש 2 מחרוזות באורך 2 שאינן מקיימות את התנאי ו$9 - 2 = 7$).

אם מחרוזת באורך n מתחילה ב0, אזי היא תהיה חייבת להתחיל ב02 והמשך הסדרה הינו באורך $n - 2$. אם מחרוזת באורך n מתחילה ב1 או ב2, אזי המשך הסדרה הינו באורך $n - 1$. לפיכך, זהו יחס הנסיגה:

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

נראה שהיחס נכון ע"י הצבה של $n = 2$:

$$7 = a_2 = 2a_1 + a_0 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

כנדרש.

■

1.2 סעיף ב

המשוואה האופיינית של הסדרה הינה

$$\lambda^n = 2\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \; / : \lambda^{n-2}$$
$$\lambda^2 = 2\lambda + 1$$
$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

נפתור:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

כלומר $a_n = A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n$. בעמוד הבא נחשב את ערכי A וB.

1.1 סעיף א (המשך)

כעת, נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\begin{aligned}1 &= a_0 = A + B\\3 &= a_1\\&= A(1+\sqrt{2}) + B(1-\sqrt{2})\\&= A + \sqrt{2}A + B - \sqrt{2}B\\&= A + B + \sqrt{2}(A-B)\\2 &= \sqrt{2}(A-B) \ / : \sqrt{2}\\\sqrt{2} &= A - B\end{aligned}$$

כעת, נוכל למצוא את ערכי A ו-B באופן הבא:

$$\begin{aligned}&A + B + (A-B) = 1 + \sqrt{2}\\&2A = 1 + \sqrt{2} \ / : 2\\&A = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\\&A + B - (A-B) = 1 - \sqrt{2}\\&2B = 1 - \sqrt{2} \ / : 2\\&B = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})\end{aligned}$$

כעת, נוכל להציב בנוסחה שמצאנו לאיברי הסדרה ולקבל את הנוסחה המפורשת ל-a_n:

$$\begin{aligned}a_n &= A(1+\sqrt{2})^n + B(1-\sqrt{2})^n\\&= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^n\\&= \frac{1}{2}(1+\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})^{n+1}\\&= \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})\end{aligned}$$

לפיכך, $a_n = \frac{1}{2}((1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1})$ כנדרש.

■

2 שאלה 2

מכיוון שערכי כל המשתנים גדולים מ1, נוכל לסמנם ב$x_n = y_n + 2$, כלומר המשוואה הינה

$$\begin{aligned} &y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + 10 = 24 \\ &y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 14 \end{aligned}$$

כעת, שלושה משתנים הינם זוגיים ושניים הינם אי־זוגיים, ויש $\binom{5}{3} = 10$ דרכים לבחור את המשתנים הזוגיים מתוך כלל המשתנים. כעת, נשער בה"כ ששני המשתנים הראשונים הינם אי־זוגיים והשאר זוגיים ונסמן

$$y_i = \begin{cases} 2z_i + 1, & i \le 2 \\ 2z_i, & \text{אחרת} \end{cases}$$

כעת, נציב ונראה מה המשוואה:

$$\begin{aligned} &2z_1 + 1 + 2z_2 + 1 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 = 14 \\ &2z_1 + 2z_2 + 2z_3 + 2z_4 + 2z_5 = 12 \\ &z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 6 \end{aligned}$$

וכעת אין שום הגבלה על המשתנים ונוכל לבדוק כמה דרכים לבחור אותם יש. בעיה זו הינה אותה בעיה כמו לזרוק 6 כדורים ל5 תאים, כלומר מספר הדרכים הינו

$$D(5,6) = \binom{5+6-1}{4} = \binom{10}{4}$$

נכפיל את מספר זה במספר הדרכים לבחור את המשתנים הזוגיים ונקבל

$$\binom{10}{4} \cdot \binom{5}{3} = 210 \cdot 10 = 2100$$

לכן, יש 2100 פתרונות אפשריים למשוואה.

■