# ממן 11

יונתן אוחיון

16 בנובמבר 2017

## שאלה 1

### סעיף א

ראשית נוכיח טענת עזר אשר מראה שעבור כל $A,B,C,D \in M_{n\times n}^F$ מתקיים $\mathrm{tr}(ABCD) = \mathrm{tr}(DABC)$ באופן הבא:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(ABCD) &= \mathrm{tr}(A(BCD)) \\ \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA) \rightarrow &= \mathrm{tr}(BCDA) \\ &= \mathrm{tr}((BC)(DA)) \\ \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA) \rightarrow &= \mathrm{tr}(DABC) \end{aligned}$$

נחפש את ההעתקה הצמודה $T_P^* : V \to V$ המקיימת לכל $X,Y \in V$:

$$\langle T(X),\ Y\rangle = \langle X,\ T_P^*(Y)\rangle$$

כלומר לפי הגדרת המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב$M_{n\times n}^{\mathbb{C}}$ ולפי הנתון,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}((T_P^*(Y))^* \cdot X) &= \mathrm{tr}(Y^* \cdot T(X)) \\ \text{נתון} \rightarrow &= \mathrm{tr}\big(Y^* \cdot P^{-1} \cdot X \cdot P\big) \\ \text{טענת העזר} \rightarrow &= \mathrm{tr}\big(P \cdot Y^* \cdot P^{-1} \cdot X\big) \end{aligned}$$

כלומר, ההעתקה הצמודה מקיימת $(T_P^*(Y))^* = P \cdot Y^* \cdot P^{-1}$, והיא ההעתקה הבאה:

$$\begin{aligned} (T_P^*(X))^* &= P \cdot X^* \cdot P^{-1} \\ T_P^*(X) &= (P \cdot X^* \cdot P^{-1})^* \\ &= \overline{(P \cdot X^* \cdot P^{-1})^t} \\ &= \overline{(P^{-1})^t \cdot (X^*)^t \cdot P^t} \\ &= \overline{(P^{-1})^t} \cdot \overline{(X^*)^t} \cdot \overline{P^t} \\ &= (P^{-1})^* \cdot (X^*)^* \cdot P^* \\ &= (P^*)^{-1} \cdot X \cdot P^* \underset{\text{נתון}}{=} T_{P^*} \end{aligned}$$

ולכן $T_P^*(X) = T_{P^*}(X)$ כנדרש.

■

## שאלה 1 (המשך)

### סעיף ב

לפי סעיף א של השאלה, נוכל להיווכח שמתקיים $T_P^*(X) = T_{P^*}(X)$, כלומר על מנת שנמצא את צירופי הבסיס הסטנדרטי כל מה שעלינו לעשות הוא לחשב את $P^*, (P^*)^{-1}$ ואת הצורה הכללית של $T_{P^*}(X)$ ולחשב. נעשה זאת:

$$P^* = \overline{P^t} = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}, (P^*)^{-1} = (P^{-1})^* = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}$$

כעת, נחשב את הצורה הכללית של $T_{P^*}(X)$:

$$\begin{aligned} T_{P^*}(X) = T_{P^*}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} ib + d + i(-ia - c) & -ia - c - i(-ib - d) \\ -b - id + i(a + ic) & a + ic - i(b + id) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נזכיר מהו הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbb{C}}$:

$$E = \left\{\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vec{e_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

נציב ונחשב את ערכי ההעתקה על הבסיס:

$$T_{P^*}(\vec{e_1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{e_1} - \frac{i}{2}\vec{e_2} + \frac{i}{2}\vec{e_3} + \frac{1}{2}\vec{e_4} \qquad T_{P^*}(\vec{e_2}) = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{bmatrix} = \frac{i}{2}\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_2} - \frac{1}{2}\vec{e_3} - \frac{i}{2}\vec{e_4}$$

$$T_{P^*}(\vec{e_3}) = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} = -\frac{i}{2}\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_2} - \frac{1}{2}\vec{e_3} + \frac{i}{2}\vec{e_4} \qquad T_{P^*}(\vec{e_4}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\vec{e_1} + \frac{i}{2}\vec{e_2} - \frac{i}{2}\vec{e_3} + \frac{1}{2}\vec{e_4}$$

לפיכך, מצאנו את צירופי הבסיס הסטנדרטי של הפעלת ההעתקה על הבסיס וכעת נוכל להרכיב את המטריצה המייצגת של ההעתקה:

$$[T_P^*]_E = [T_{P^*}]_E = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ -i & -1 & -1 & i \\ i & -1 & -1 & -i \\ 1 & -i & i & 1 \end{bmatrix}$$

ומצאנו את המטריצה המייצגת את $T_P^*$ לפי הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times 2}^{\mathbb{C}}$ כנדרש.

■