ממן 13

יונתן אוחיון

1 בדצמבר 2017

שאלה 1

סעיף א

ראשית, נפשט מעט את הביטוי של $f(A,B)$:

$$\begin{aligned} f(A,B) &= \operatorname{tr} A^t M B \\ &= \operatorname{tr} (B^t M^t A)^t && \text{נימוק: } \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^t \\ &= \operatorname{tr} B^t M^t A \end{aligned}$$

בנוסף, ידוע לנו שמתקיים $f(B,A) = \operatorname{tr} B^t M A$, כלומר עלינו למצוא תנאי שM תקיים על מנת ש$\operatorname{tr} B^t M^t A = \operatorname{tr} B^t M A$. תנאי זה הוא כמובן תנאי הסימטריות, כלומר $M = M^t$.

לפיכך, $f(A,B) = f(B,A)$ אממ M מטריצה סימטרית ומצאנו את התנאי הנדרש.

■

סעיף ב

נחשב (בעמוד הזה ובעמוד הבא):

שורה 1

$$f(e_1,e_1) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$f(e_1,e_2) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$f(e_1,e_3) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

$$f(e_1,e_4) = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$[A]_1^R = (f(e_1,e_1), f(e_1,e_2), f(e_1,e_3), f(e_1,e_4)) = (1,0,2,0)$$

שאלה 1 - המשך

סעיף ב

שורה 2

$$f(e_2,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_2,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=1$$

$$f(e_2,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_2,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&2\end{bmatrix}=2$$

$$[A]_2^R=(f(e_2,e_1),f(e_2,e_2),f(e_2,e_3),f(e_2,e_4))=(0,1,0,2)$$

שורה 3

$$f(e_3,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}3&0\\0&0\end{bmatrix}=3$$

$$f(e_3,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&3\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_3,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}5&0\\0&0\end{bmatrix}=5$$

$$f(e_3,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&5\\0&0\end{bmatrix}=0$$

$$[A]_3^R=(f(e_3,e_1),f(e_3,e_2),f(e_3,e_3),f(e_3,e_4))=(3,0,5,0)$$

שורה 4

$$f(e_4,e_1)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_4,e_2)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&3\end{bmatrix}=3$$

$$f(e_4,e_3)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\5&0\end{bmatrix}=0$$

$$f(e_4,e_4)=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}\begin{bmatrix}0&5\\0&5\end{bmatrix}=5$$

$$[A]_4^R=(f(e_4,e_1),f(e_4,e_2),f(e_4,e_3),f(e_4,e_4))=(0,3,0,5)$$

בעמוד הבא נראה את $[f]_E$.

שאלה 1 – המשך

סעיף ב

כעת, לאחר שחישבנו את שורות $[f]_E$, נציב:

$$[f]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ומצאנו את המטריצה המייצגת לפי הבסיס הסטנדרטי כנדרש.

■