# ממן 15

יונתן אוחיון

30 במאי 2018

## שאלה 1

בשאלה זו בחרתי להחליף את סעיף ב בסעיף הרשות.

### סעיף א

נניח ש$(a_n)$ מתכנסת ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. אזי מתקיים $L = \cos L$, אבל 0 בוודאי לא מקיים את המשוואה הזאת (שכן $\cos 0 = 1$) ולכן $L \neq 0$. לכן אם $(a_n)$ מתכנסת גבולה שונה מ0 ולכן הטור בשאלה מתבדר לפי התנאי ההכרחי כנדרש.

■

### סעיף רשות

נסמן: $a_n = \sin\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. נתבונן בפיתוחי מקלורן עבור $\sin x, \ln(1+x)$ ב$x = \frac{1}{n}$:

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} + R_2\left(\frac{1}{n}\right), \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + Q_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

לכן מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} + R_2\left(\frac{1}{n}\right) - Q_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

כעת, ממשפט 4.7 נקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{R_2(n^{-1})}{n^{-2}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{Q_2(n^{-1})}{n^{-2}}}_{\to 0} \right| = \frac{1}{2}$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הגבולי הטור מתכנס בהחלט כנדרש.

■

## שאלה 2

ראשית, נוכל להיווכח שמכיוון ש-$\forall x\in\mathbb{R}, 0\le|x|$, מתקיים $\overbrace{0\le|a_n|\le b_n}^{I}$ ולכן ממבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט ובפרט מתכנס. נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים של הטור:

$$|P_m|=\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\right|\underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\le}\sum_{n=1}^{m}|a_n|\le\sum_{n=1}^{m}b_n=Q_m$$

מ-$I$ נובע כי $\forall n\in\mathbb{N}, b_n\ge 0$ ולכן $\forall m\in\mathbb{N}, Q_m\le S$. לפיכך נוכל לראות שמתקיים $|P_m|\le S$, כלומר $\forall m\in\mathbb{N}, P_m\le S$. לפיכך מאינפי 1 נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}P_m\le S$ כנדרש.

■

## שאלה 3

ראשית, נסמן: $a_n=\frac{(2n)!}{n!\alpha^n n^n}$ ונתבונן בגבול של $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}\cancel{(n!)}}{(n+1)\cancel{(n!)}\cancel{(2n)!}}\cdot\frac{\cancel{\alpha^n}n^n}{\cancel{\alpha^n}\alpha(n+1)^{n+1}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{(n+1)}(2n+1)}{\cancel{(n+1)}(n+1)}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)^{-1}\\&=\frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\cancel{n}(4+\frac{2}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}}_{\to 4}\cdot\underbrace{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1}}_{\to\frac{1}{e}}=\frac{4}{\alpha e}\end{aligned}$$

ולכן מתקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4}{\alpha e}$. לפיכך, לפי מבחן המנה 5.17** הטור מתכנס אם $\alpha\in(\frac{4}{e},\infty)$ ומתבדר אם $\alpha\in(-\infty,\frac{4}{e})$. לכן מתקיים $A=(\frac{4}{e},\infty)$ ו-$\inf A=\frac{4}{e}$ כנדרש.

■

## שאלה 4

כיוון א: ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס. לכן, גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ מתכנס ולכן גם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+a_{n+1}$ מתכנס (משפט 5.9).

כיוון ב: נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+a_{n+1}$ מתכנס. ניווכח שמתקיים

$$Q_k=\sum_{n=1}^{k}a_n+a_{n+1}=\left(\sum_{n=1}^{k}a_n-a_1+a_{k+1}\right)+\sum_{n=1}^{k}a_n=2\sum_{n=1}^{k}a_n-a_1+a_{k+1}=2P_k-a_1+a_{k+1}$$

לכן מתקיים $P_k=\frac{1}{2}(Q_k+a_1-a_{k+1})$. מהנתון נקבל כי $\lim_{k\to\infty}a_{k+1}=0$ ולכן נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{k\to\infty}P_k=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})+\frac{a_1}{2}$ כנדרש. ■

## שאלה 5

ראשית, נתבונן באיבר הכללי של הטור:

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n)$$

כעת, מכיוון שנתון ש$(a_n)$ מונוטונית עולה וחסומה, קיים לה גבול סופי $L$, ולכן הגבול של $\frac{1}{a_{n+1}}$ הוא $\frac{1}{L}$. בנוסף, מאינפי 1 נובע כי סדרה זו חסומה, מכיוון שמונוטונית יורדת ושואפת למספר סופי. לכן $\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)$ סדרה מונוטונית וחסומה. בנוסף, נתבונן בסכום החלקי הבא:

$$P_l=\sum_{n=1}^{l}a_{n+1}-a_n=\left(\cancel{\sum_{n=1}^{l}a_n}\right)+a_{l+1}-a_1-\left(\cancel{\sum_{n=1}^{l}a_n}\right)=a_{l+1}-a_1$$

לכן, מכיוון ש$(a_n)$ מתכנסת לגבול $L$, נקבל ש$P_l$ מתכנסת לגבול $L-a_1$, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}-a_n$ מתכנס. לכן לפי מבחן אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}}(a_{n+1}-a_n)$ מתכנס. לפיכך, מתקיים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ מתכנס כנדרש.

■

## שאלה 6א

הטענה נכונה. ידוע לנו כי $\arctan x$ הינה פונקציה מונוטונית עולה וחסומה ב$[0,\infty)$. לכן הסדרה $\arctan n$ הינה סדרה מונוטונית וחסומה. לפיכך, מכיוון ש$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, ממבחן אבל נקבל כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\arctan n$ מתכנס כנדרש.

■

## שאלה 6ד

הטענה אינה נכונה. לפי הנתון ומשפט 5.26, הטור של $a_n$ מתכנס בהחלט ובנוסף מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=x$, כלומר עלינו למצוא $x$ המקיים

$$x=2+x\wedge x=2x$$

קיים רק $x$ אחד המקיים $x=2x$ וזהו $x=0$, אבל $0+2=2\neq 0$ ולכן הוא לא מקיים את שתי המשוואות. לפיכך, לא קיים $x$ שכזה, כלומר בהכרח $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\neq\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ בסתירה למשפט 5.26 כנדרש.

■

## שאלה 6ה

בחרתי להחליף את סעיף ג בשאלה זו בסעיף הרשות.

נתבונן בפונקציה $f(x)=\cos(2\pi x)$. נתבונן באינטגרל בשאלה:

$$I_n=\int_n^{n+1} f(x)dx=\begin{bmatrix} u=2\pi x \\ \frac{1}{2\pi}du=dx \end{bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\left(\sin u\,\Big|_{u=2\pi n}^{u=2\pi(n+1)}\right)=\frac{1}{2\pi}(0-0)=0$$

לכן בוודאי $\sum_{n=1}^{\infty} I_n=0$. נתבונן באינטגרל הבא:

$$\int_n^{n+\frac{1}{4}} f(x)dx=\begin{bmatrix} u=2\pi x \\ \frac{1}{2\pi}du=dx \end{bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\left(\sin u\,\Big|_{u=2\pi n}^{u=2\pi n+\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{1}{2\pi}(1+0)=\frac{1}{2\pi}$$

לכן קיים $\epsilon=\frac{1}{4\pi}$ כך שלכל $M>0$ קיימים $r=\lceil M\rceil, s=\lceil M\rceil+\frac{1}{4}$ (כמובן שמתקיים $\lceil M\rceil\geq M$ ולכן $s,r\in[M,\infty)$) כך שמתקיים

$$\left|\int_r^s f(x)dx\right|=\left|\int_{\lceil M\rceil}^{\lceil M\rceil+\frac{1}{4}} f(x)dx\right|=\left|\frac{1}{2\pi}\right|>\frac{1}{4\pi}=\epsilon$$

בסתירה למבחן קושי (משפט 3.15). לכן $\int_0^{\infty} f(x)dx$ מתבדר והטענה אינה נכונה כנדרש.

■