

ממך 15

יונתן אוהיון

30 בספטמבר 2017

0 סימונים

0.1 ריבוי גיאומטרי ואלגברי

נסמן את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ כד: g_λ ואת הריבוי האלגברי שלו כד: a_λ .

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

1.1.1 בדיקת לכסיונות

ראשית, נמצא את הפולינום האופייני של מטריצה A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + R_1} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda - 1 & -2 \\ \lambda - 1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{C_1 \rightarrow C_1 - C_2 \\ C_1 \rightarrow C_1 - C_3 \\ R_1 \leftrightarrow R_3}} (\lambda - 1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda + 1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \text{הוצאת גורם משותף מ} C_1, R_3 \quad (\lambda - 1)^2 \cdot \left[\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ \lambda + 1 & -4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \lambda + 1 & 0 \end{vmatrix} \right] \\ &= \text{פיתוח לפי } R_1 \quad (\lambda - 1)^2 \cdot \left[0 - 0 + 1 \cdot (-2) \right] \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \end{aligned}$$

לפי משפט 11.4.1, נוכל להשוות את הפולינום ל-0 ולקבל את הערכים העצמיים $\lambda = \pm 1$. מכיוון שהפולינום מתפרק לגורמים לינאריים נוכל להמשיך ולבדוק את הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ע"ע. ראשית, נוכל לראות ש $a_{-1} = 1$, ולפי שאלה 11.5.5 מתקיים $a_{-1} = g_{-1} = 1$. כעת, נוכל לראות שמתקיים $a_1 = 2$. נבדוק מהו ערכו של g_1 :

$$g_1 = n - \rho(\lambda I - A) = 3 - 1 = 2$$

כעת, מכיוון שמתקיים $a_1 = g_1 = 2$, לכסיונה. בעמוד הבא נמצא את המטריצה P המלכסנת אותה ואת המטריצה האלכסונית B הדומה לה.

1.1.2 מציאת המטריצה המלכסנת

ראשית, נמצא את הו"ע לכל הע"ע של המטריצה A . עבור $\lambda = -1$:

$$(A + I)v_1 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2]{R_1 \rightarrow \frac{1}{4}R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \rightarrow R_2 - R_1]{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2}$$

↓

$$\begin{array}{l} x = z \\ y = \frac{1}{2}z \rightarrow x = 2t \\ z = 2t \end{array} \rightarrow \text{הפתרון הכללי: } t(2, 1, 2) \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

כעת, נחפש את הווקטורים העצמיים עבור $\lambda = 1$:

$$(A - I)v = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_1]{R_3 \rightarrow R_3 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1}$$

↓

$$\begin{array}{l} x = 2z \\ y = t \rightarrow s(2, 0, 1) + t(0, 1, 0) \\ z = s \end{array} \rightarrow \text{הפתרון הכללי: } v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן, המטריצה המלכסנת P הינה

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

כנדרש.

1.1.3 מציאת המטריצה האלכסונית הדומה ל A

ראשית, נמצא את P^{-1} :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3]{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[R_1 \rightarrow R_1 - R_2]{R_3 \rightarrow -2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

בדף הבא נמצא את המטריצה האלכסונית B הדומה ל A .

1.1.3 מציאת המטריצה האלכסונית הדומה ל- A (המשך)

לפי הגדרה 11.3.4, מתקיים $B = P^{-1}AP$. כעת, נכפיל את המטריצות על מנת להגיע למטריצה האלכסונית B :

$$M = P^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$M \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לפיכך, מצאנו את המטריצה האלכסונית הדומה ל- A והיא הינה

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

כנדרש.



1.2 סעיף ב

1.2.1 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר על מנת להעלות מטריצות לכסינות בחזקה בקלות. לפי הגדרה 11.3.4, מתקיים

$$B = P^{-1}AP \xrightarrow{\text{כפל מימין ב-} P^{-1}} BP^{-1} = P^{-1}A \xrightarrow{\text{כפל משמאל ב-} P} PBP^{-1} = A$$

\downarrow העלה בחזקה ב- k

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{PBP^{-1} \cdot PBP^{-1} \cdot \dots \cdot PBP^{-1}}_{k \text{ פעמים}} \cdot PBP^{-1} = PB^kP^{-1}$$

לפיכך, $A^k = PB^kP^{-1}$.

1.2.2 הוכחה

ראשית, נחשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T לפי הבסיס הסטנדרטי:

$$T(e_1) = (3, 1, 2) \quad T(e_2) = (0, 1, 0)$$

$$T(e_3) = (-4, -2, -3)$$

\downarrow

$$[T]_E = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [T(e_1)]_E & [T(e_2)]_E & [T(e_3)]_E \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

כעת, מכיוון שהמטריצה המייצגת של T שווה ל- A היא לכסינה. בעמוד הבא נחשב את T^{2020} בעזרת טענת העזר.

1.2.2 הוכחה (המשך)

לפי משפט 10.4.1, מתקיים $[T^2]_E = [T]_E \cdot [T]_E$, כלומר $[T^2]_E = A^2$. כעת, נוכל לפרק את $[T^{2020}]_E$ ל- $\underbrace{[T^2]_E \cdot \dots \cdot [T^2]_E}_{1010 \text{ פעמים}}$. לפי טענת העזר שהוכחנו, נוכל לראות שמתקיים

$$\begin{aligned} A^2 &= PB^2P^{-1} \\ &= P \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= PP^{-1} \\ &= I \end{aligned}$$

לפיכך, $[T^{2020}]_E = I$ ומתקיים $T^{2020}(x, y, z) = (x, y, z)$ כנדרש.

