ממן 11

יונתן אוחיון

31 במרץ 2018

שאלה 1

נסמן $f(x)=\frac{1}{p(x)}$ ונראה שהיא רציפה בתחום $[2,4]$. פונקציה זו הינה פונקציה רציונלית, ולכן ידוע מאינפי 1 שהיא רציפה בכל נקודה שבה היא מוגדרת, כלומר בכל נקודה x שבה $p(x)\neq 0$. נוכל לראות, על ידי הצבה, שמתקיים $p(2)=7\wedge p(4)=71$. כעת נגזור את p ונראה שהיא עולה בתחום זה ולכן לא מתאפסת בו:

$$p(x)=x^3+(x-1)^2-2 \Longrightarrow p'(x)=3x^2+2x-2$$

כמובן שלכל $x>2$ מתקיים $3x^2+2x>2$ ולכן $\forall x\in[2,\infty), p'(x)>0$ ובפרט לכל x בתחום $[2,4]$. לכן, $\forall x\in[2,4], p(x)\geq p(2)$ וf מוגדרת שם.

לפיכך, f רציפה ב$[2,4]$ ואף גזירה בו (לפי אינפי 1). כעת, נחפש את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום זה. ראשית, על מנת למצוא נקודות חשודות, נגזור את הפונקציה:

$$f(x)=\frac{1}{x^3+(x-1)^2-2} \Longrightarrow f'(x)=-\frac{3x^2+2x-2}{(x^3+(x-1)^2-2)^2}$$

כעת, נשווה ל0 ונפתור את הפולינום:

$$\begin{aligned}
f'(x)=0 &\iff -3x^2-2x+2=0\\
&\iff x=-\frac{2+\sqrt{28}}{6}\vee x=-\frac{2-\sqrt{28}}{6}\\
&\iff x=-\frac{1+\sqrt{7}}{3}\vee x=-\frac{1-\sqrt{7}}{3}
\end{aligned}$$

שני הפתרונות הללו אינם בתחום $[2,4]$, לכן אין לפונקציה נקודות חשודות בתחום ונקודות הקיצון בתחום נמצאות בקצוות הקטע. בנוסף, מכיוון ש$\forall x\in[2,4], f'(x)<0$, מאינפי 1 נוכל לדעת ש$f$ יורדת ולכן נקבל שנקודת המקסימום היא $f(2)=\frac{1}{7}$, כלומר מתקיים $\forall x\in[2,4], f(x)\leq\frac{1}{7}$. לכן ממונוטוניות האינטגרל נקבל

$$\begin{aligned}
\int_2^4 f(x)dx\leq\int_2^4\frac{1}{7}dx &\Longrightarrow \int_2^4 f(x)dx\leq\frac{1}{7}\int_2^4 dx\\
&\Longrightarrow \int_2^4 f(x)dx\leq\frac{1}{7}(4-2)=\frac{2}{7}\\
&\Longrightarrow \int_2^4 f(x)dx\leq\frac{2}{7}
\end{aligned}$$

כנדרש.

■

שאלה 4

ראשית, נסמן: $I(t)=\int_0^t f(x)dx$, $f(x)=\ln(e^x+x^2)$. כעת, נראה כי $\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$ וכי $\lim_{t\to\infty} I(t)=\infty$:

$$\forall t\in(0,\infty)\forall x\in[0,t], 0<e^x\le e^x+x^2$$
$$\xRightarrow{\text{עולה ממש } \ln} x=x\ln e=\ln e^x\le\ln(e^x+x^2)=f(x)\Longrightarrow \underbrace{x\le f(x)}_{(1)}$$

כעת כמובן ש$x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$ ולכן מקריטריון ההשוואה לאינסוף מתקיים $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$. בנוסף מ(1) וממונוטוניות האינטגרל נובע כי מתקיים

$$\begin{aligned}\forall t\in(0,\infty),\int_0^t xdx\le\int_0^t f(x)dx&\Longrightarrow \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=t}\le\int_0^t f(x)dx\\&\Longrightarrow\frac{t^2}{2}-\frac{0^2}{2}\le\int_0^t f(x)dx\\&\Longrightarrow\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}t^2\le\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)dx=\lim_{t\to\infty}I(t)\end{aligned}$$

בנוסף, כמובן ש$\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}t^2=\infty$ ו$0<\frac{1}{2}$ ולכן $\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}t^2=\infty$ ולכן מקריטריון ההשוואה לאינסוף מתקיים $\lim_{t\to\infty}I(t)=\infty$.

כעת, ממשפט 1.33 נובע כי מתקיים $I'(t)=f(t)$ ומכיוון שf הינה הרכבה של פונקציות הגזירות בתחום הגדרתן (כל $\mathbb{R}$) מתקיים $I''(t)=f'(t)$. נחשב את $f'(t)$ לפי כלל השרשרת:

$$f(t)=\ln(e^t+t^2)\Longrightarrow f'(t)=\frac{e^t+2t}{e^t+t^2}=I''(t)$$

כעת נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_0^t\ln(e^x+x^2)dx&\underset{\text{L'H}^1}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}I'(t)\underset{\text{L'H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}f'(t)\\&=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{e^t+2t}{e^t+t^2}\underset{\text{L'H}^2}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{e^t+2}{e^t+2t}\\&\underset{\text{L'H}^2}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{e^t+2}\underset{\text{L'H}^2}{=}\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\frac{e^t}{e^t}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_0^t\ln(e^x+x^2)dx=\frac{1}{2}$$

וחישבנו את הגבול בשאלה כנדרש.

■

[1] הקיצור L'H נועד על מנת לסמן את כלל לופיטל שנקרא באנגלית L'Ĥospital's Rule, עבור המקרה $\frac{\infty}{\infty}$.

[2] שתי הפונקציות במונה ובמכנה הינן חיבור של פונקציות גזירות ולכן גזירות בעצמן ובנוסף שואפות ל∞ כאשר $t\to\infty$.

שאלה 5

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ ונניח בה"כ שמתקיים $a < b$. ראשית, נסמן: $F_a(x) = \int_a^x f(x)dx, F_b(x) = \int_b^x f(x)dx$. נשים לב שלפי הגדרת האינטגרל מתקיים $\int_x^b f(x)dx = -F_b(x)$, כלומר עלינו לחפש נקודה המקיימת $F_a(x)+F_b(x) = 0$. נשים לב ששתי הפונקציות הללו הינן אינטגרלים בלתי מסויימים של f בתחום $[a, b]$ ולכן לפי משפט 1.32 שתיהן רציפות.

נגדיר, אם כן, את הפונקציה $G(x) = F_a(x) + F_b(x)$ (פונקציה זו רציפה בקטע $[a, b]$ בתור חיבור של פונקציות הרציפות בתחום זה). נתבונן בערכי הפונקציה בנקודות a, b:

$$G(a) = F_a(a) + F_b(a) = \cancel{\int_a^a f(x)dx} + \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$G(b) = F_a(b) + F_b(b) = \int_a^b f(x)dx + \cancel{\int_b^b f(x)dx} = \int_a^b f(x)dx = -G(a)$$

מכיוון שפונקציה זו הינה רציפה ו$G(a) \cdot G(b) < 0$, ממשפט ערך הביניים נובע כי קיימת נקודה $c \in (a, b)$ כך ש$G(c) = 0$, ולכן

$$F_a(c) + F_b(c) = 0 \Longrightarrow \int_a^c f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx \Longrightarrow \int_a^c f(x)dx = \int_c^b f(x)dx$$

ומצאנו נקודה בקטע המקיימת את התנאי כנדרש.

■

שאלה 6

נוכיח שהטענה אינה נכונה בדרך השלילה.

נניח כי היא נכונה - כלומר, מתקיים $\forall x \in [-5, 5], f(x) \leq g(x)$. מהנתון, נוכל לראות כי מתקיים

$$\int_{-5}^{-2} g(x)dx > \int_{-5}^{-5} g(x)dx = \int_{-5}^{-2} g(x)dx + \int_{-2}^{5} g(x)dx \Longrightarrow \int_{-2}^{5} g(x)dx < 0$$

בנוסף, מהנחתנו וממונוטוניות האינטגרל נובע כי מתקיים

$$\int_{-2}^{5} f(x)dx \leq \int_{-2}^{5} g(x)dx < 0 \Longrightarrow \int_{-2}^{5} f(x)dx < 0$$

כעת, מהנתון נוכל לראות שמתקיים

$$\int_{-2}^{5} f(x)dx = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx = \pi - 3$$

כמובן ש$\pi > 3$ ולכן $\pi - 3 > 0$, כלומר $\int_{-2}^{5} f(x)dx > 0$ והגענו לסתירה. לכן הטענה אינה נכונה כנדרש.

■

שאלת הרשות

נסמן $f^n(x) = (f(x))^n$. תהי f פונקציה רציפה ואי־שלילית בתחום $[0,1]$. נוכיח כי הסדרה $a_n = \int_0^1 f^n(x)dx$ מתכנסת אמ"מ $f(x) \leq 1$ לכל x בתחום.

כיוון א

נניח כי $0 \leq f(x) \leq 1$ לכל $x \in [0,1]$. נראה כעת באינדוקציה כי $0 \leq f^{n+1}(x) \leq f^n(x) \leq 1$ לכל n טבעי:

נוכיח את מקרה הבסיס בו $n = 1$. ידוע כי $0 \leq f(x) \leq 1$, ולכן נוכל לכפול את אי השוויון ב$f(x)$ ולקבל ש$0 \leq f^2(x) \leq f(x) \leq 1$ כנדרש.
נניח כעת כי הטענה נכונה עבור $n = k$ ונוכיח עבור $n = k+1$:

$$0 \leq f^{k+1}(x) \leq f^k(x) \leq 1 \underset{0 \leq f(x)}{\Longrightarrow} f(x) \cdot f^{k+1}(x) \leq f(x) \cdot f^k(x) \leq f(x) \Longrightarrow 0 \leq f^{k+2}(x) \leq f^{k+1}(x) \leq 1$$

לכן לפי עקרון האינדוקציה השלמה מתקיים $0 \leq f^{n+1}(x) \leq f^n(x) \leq 1$ לכל n טבעי.

כעת, ממונוטוניות האינטגרל נובע כי $0 \leq \int_0^1 f^{n+1}(x)dx \leq \int_0^1 f^n(x)dx \leq 1$ לכל n טבעי, כלומר לכל n טבעי מתקיים $0 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1$.לפיכך, הסדרה (a_n) מונוטונית יורדת וחסומה, ולכן ממשפט באינפי 1 נובע כי (a_n) מתכנסת כנדרש.

כיוון ב

נניח בשלילה כי קיימת נקודה $x_0 \in [0,1]$ וקיים $M > 1$ כך ש$f(x_0) > M$. מכיוון שf רציפה, קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ מתקיים $f(x) > M$ ולכן לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $f^n(x) > M^n$.
כעת, ממונוטוניות האינטגרל נובע כי

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} M^n dx \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx \quad \Longleftrightarrow \quad M^n(x_0 + \delta - x_0 + \delta) \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2\delta M^n \leq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx$$

בנוסף, מכיוון שלכל $x \in [0,1]$ מתקיים $f^n(x) \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $a, b \in [0,1]$. לפיכך, נוכל לראות כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\int_0^{x_0-\delta} f^n(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 f^n(x)dx \geq 0$$
$$\Longrightarrow \int_0^{x_0-\delta} f^n(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 f^n(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx$$
$$\Longrightarrow \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^n(x)dx \leq a_n \Longrightarrow 2\delta M^n \leq a_n$$

מכיוון ש$M > 1$, כמובן ש$\lim_{n\to\infty} 2\delta M^n = \infty$ ולכן מקריטריון ההשוואה לאינסוף נובע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, בסתירה לנתון. לפיכך, לא קיימת $x_0 \in [0,1]$ כך ש$f(x) > 1$, כלומר $\forall x \in [0,1], f(x) \leq 1$ כנדרש.

■

שאלה 7

סעיף א

ראשית, אנו יודעים ש-f אינטגרבילית רימן בקטע $[a,b]$ מכיוון שהיא רציפה בו. כעת, לפי הגדרה 1.35 מתקיים $\int_a^b f(x)dx \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \sigma$ לכל חלוקה אשר פרמטר החלוקה שלה שואף ל-0. בפרט, אם נתבונן בחלוקה הרגולרית (כלומר החלוקה בה מתקיים $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$) מתקיים ש-$\Delta x_i$ הינו קבוע:

$$\begin{aligned}\forall 1 \le i \le n, \Delta x_i &= \cancel{a} + \frac{i(b-a)}{n} - \cancel{a} - \frac{(i-1)(b-a)}{n} \\ &= \cancel{\frac{i(b-a)}{n}} - \cancel{\frac{i(b-a)}{n}} + \frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \Longrightarrow \forall 1 \le i \le n, \Delta x_i = \frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

לכן מכיוון שפרמטר זה הינו קבוע, מתקיים לפי הגדרת פרמטר החלוקה $\lambda(P) = \frac{b-a}{n}$. כעת, נכתוב את σ (נבחר את הנקודות $\xi_i = x_i$ בכל אחד מקטעי החלוקה):

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

בנוסף, בגלל ש-a,b קבועים, מתקיים $\lambda \to 0$ אמ"מ $n \to \infty$ ולכן לפי הגדרת האינטגרל לפי רימן מתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{i(b-a)}{n}\right)$$

כנדרש.

■

סעיף ב

נניח כי f רציפה בקטע $[0,1]$. לפי סעיף א, נוכל לראות כי אם נבחר $a=0, b=1$ מתקיים

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

כנדרש.

■

שאלה 7 – המשך

סעיף ג

תת־סעיף 1

ראשית, נפשט את הביטוי:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+i^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+\frac{i^2}{n})} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n(1+\frac{i^2}{n^2})} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} - \frac{1}{n+\frac{1}{n^3}}
\end{aligned}
$$

נוכל לראות כי $\lim_{n\to\infty} n+\frac{1}{n^3} = \infty$ ולכן $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n^3}} = 0$.

כעת, נסמן $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ונחשב את הגבול:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} - \frac{1}{n+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n^3}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \\
&\overset{\text{לפי סעיף ב}}{=} \int_0^1 f(x)dx = \arctan(x)\Big|_{x=0}^{x=1} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

ולכן $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{4}$ כנדרש.

■

שאלה 7 – המשך

סעיף ג

תת־סעיף 2

כמו בשאלה הקודמת, ננקוט בפישוט הביטוי תחילה:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2in}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{2i}{n})}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{1+2\frac{i}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{i}{n})}}$$

כעת, נסמן $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ ונחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{i}{n})}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$\overset{\text{לפי סעיף ב}}{=} \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx = \int_0^1 \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}dx$$

נפתור את האינטגרל בעזרת שיטת ההצבה. נבחר $u = 1+2x$ ונראה שמתקיים $du = 2dx$. נציב ונקבל

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{2}{2\sqrt{1+2x}}dx = \int_{u=1}^{u=3} \frac{1}{2\sqrt{u}}du = \sqrt{u}\Big|_{u=1}^{u=3} = \sqrt{3}-1$$

לכן מתקיים $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{3}-1$ כנדרש.

■