ממן 11

יונתן אוחיון

3 בנובמבר 2017

1 שאלה 1

1.1 סעיף א

נניח ש־a רציונלי ונגיע לסתירה. ראשית, מכיוון שמתקיים $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, גם k ו־l רציונליים. כעת, נפשט את הביטוי מעט:

$$a = k + l\sqrt{2} \xRightarrow[() - k]{} a - k = l\sqrt{2} \underset{\frac{()}{l}}{\Rightarrow} \sqrt{2} = \frac{a-k}{l}$$

כעת, מכיוון ש־a, k רציונליים, הפרשם רציונלי גם הוא. לפיכך, מכיוון ש־$a - k, l$ רציונליים, המנה שלהם רציונלית גם היא ולכן $\sqrt{2} = \frac{a-k}{l}$ רציונלי, וזוהי כמובן סתירה. לפיכך, a אינו רציונלי כנדרש.

■

1.2 סעיף ב

נפתח את הביטוי בעזרת נוסחת הבינום:

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} \sqrt{2}^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sqrt{2}^i$$

נוכל לשים לב שעבור הביטוי $\sqrt{2}^{2m}$, התוצאה הינה למעשה 2^m. לפיכך, נוכל לפצל את הסכומים לחזקות זוגיות ואי־זוגיות:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sqrt{2}^i &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} \sqrt{2}^{2i} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} \sqrt{2}^{2j+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} 2^i + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} 2^j \sqrt{2} \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{2i} 2^i}_{a} + \underbrace{\sqrt{2} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{2j+1} 2^j}_{b}
\end{aligned}$$

כעת, a הוא כמובן מספר רציונלי (כפל רציונליים וחיבור רציונליים), ולפי שאלה 1.61א נוכל לראות ש־b אינו מספר רציונלי (חיבור רציונליים וכפל אי רציונלי ברציונלי). כעת, שוב לפי שאלה 1.61א נוכל לראות שהסכום $a + b$ אי רציונלי גם הוא, ולכן $(1 + \sqrt{2})^n$ אי רציונלי כנדרש.

■

2 שאלה 2

2.0 טענת עזר

ראשית, נוכיח טענת עזר אשר אומרת שעבור כל $1 \le x, n \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{x}{n} \le x$. לפי טענה 1.42.2, לכל $1 \le n \in \mathbb{R}$ מתקיים $\frac{1}{n} \le 1$. נכפיל את שני האגפים בx ונקבל $\frac{x}{n} \le x$ כנדרש.

■

2.1 סעיף א

ראשית, נוכיח ש$|a| + 1 > 0$ בה"כ. לפי תכונות הערך המוחלט, $|a| \ge 0$. אם $|a| > 0$, בהכרח גם $|a| + 1 > 0$ (שכן $1 > 0$) וסיימנו. אם $|a| = 0$ אזי $|a| + 1 = 1 > 0$ כנדרש. לפיכך, $|a| + 1, |b| + 1 > 0$ ונוכל להשתמש בנוסחה הנתונה במטלה על מנת לפשט מעט את הביטוי:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| &= \left|\frac{(\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1})(\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1})}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right| \\
\text{נוסחאות הכפל המקוצר} \rightarrow &= \left|\frac{|a| + \cancel{1} - |b| - \cancel{1}}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right| \\
\text{חיסור} \rightarrow &= \left|\frac{|a| - |b|}{\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}}\right| \\
\text{מתכונות הערך המוחלט} \rightarrow &= \frac{\big||a| - |b|\big|}{\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right|}
\end{aligned}$$

כעת, לפי טענת העזר שהוכחנו מתקיים

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| = \frac{\big||a| - |b|\big|}{\left|\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|b|+1}\right|} \le \big||a| - |b|\big|$$

וגם

$$\frac{|a-b|}{2} \le |a-b|$$

לפי אי־שוויון המשולש מתקיים $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$ ולכן גם

$$\left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \le \big||a| - |b|\big| \le \frac{|a-b|}{2} \le |a-b| \xRightarrow[\text{טרנזיטיביות}]{} \left|\sqrt{|a|+1} - \sqrt{|b|+1}\right| \le \frac{|a-b|}{2}$$

כנדרש.

■

2 שאלה 2 (המשך)

2.2 סעיף ב

נחלק את הביטוי לשלושה תתי מקרים:

2.2.1 מקרה א – $a = 0$

לפי תכונות הערך המוחלט, עבור $a = 0$ מתקיים $|a| = 0$. לפיכך,

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = a^2 = 0$$

כנדרש.

2.2.2 מקרה ב – $a > 0$

לפי תכונות הערך המוחלט, עבור $a > 0$ מתקיים $|a| = a$. לפיכך,

$$\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}\right)^2 + \left(\frac{0}{2}\right)^2 = a^2 + 0 = a^2$$

כנדרש.

2.2.3 מקרה ג – $a < 0$

לפי תכונות הערך המוחלט, עבור $a < 0$ (כלומר קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש־$a = -m$) מתקיים $|a| = -a = m$. לפיכך,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a+|a|}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-|a|}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\cancel{-m+m}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-m-m}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\cancel{2}m}{\cancel{2}}\right)^2 \\ &= (-m)^2 = a^2\end{aligned}$$

כנדרש.

■

3 שאלה 3

3.1 סעיף א

מתכונות הערך השלם מתקיים

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1,\ \ \lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$$

נחבר את אי השוויונות ונקבל

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq x + y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$$

כעת, אם מתקיים $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$, אזי מתכונות הערך השלם מתקיים שהערך השלם של $x+y$ הינו $n = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$, או בקיצור $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$.

אם מתקיים $\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1 \leq x+y < \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$, אזי מתכונות הערך השלם מתקיים $\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$. מכך נובע ש$\lfloor x+y\rfloor > \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$. "נשלב" בין שני המקרים ונקבל ש$\lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor \leq \lfloor x+y\rfloor$ כנדרש.

■

3.2 סעיף ב

3.2.1 (i)

נפתח את הביטוי:

$$\left\lfloor x - \frac{1}{2}\right\rfloor^2 = 25 \underset{\sqrt{()}}{\Longrightarrow} \left\lfloor x - \frac{1}{2}\right\rfloor = 5 \vee \left\lfloor x - \frac{1}{2}\right\rfloor = -5$$

כעת, לפי תכונות הערך השלם, נוכל לקבל את אי השוויונות הבאים:

$$-5 \leq x - \frac{1}{2} < -4, 5 \leq x - \frac{1}{2} < 6$$

כעת, נפשט את הביטויים שבתוך אי השוויונות:

$$\begin{gathered} 5 \leq x - \tfrac{1}{2} < 6 \vee -5 \leq x - \tfrac{1}{2} < -4 \\ \Downarrow \\ (5 \leq x - \tfrac{1}{2} \wedge x - \tfrac{1}{2} < 6) \vee (-5 \leq x - \tfrac{1}{2} \wedge x - \tfrac{1}{2} < -4) \\ \Downarrow \\ (5.5 \leq x \wedge x < 6.5) \vee (-4.5 \leq x \wedge x < -3.5) \\ \Downarrow \\ 5.5 \leq x < 6.5 \vee -4.5 \leq x < -3.5 \\ \Downarrow \\ x \in [5.5, 6.5) \vee x \in [-4.5, -3.5) \Rightarrow x \in [5.5, 6.5) \cup [-4.5, -3.5) \end{gathered}$$

ולכן קבוצת הפתרונות הינה $[5.5, 6.5) \cup [-4.5, -3.5)$ כנדרש.

■

3 שאלה 3 (המשך)

3.2 סעיף ב (המשך)

3.2.2 (ii)

לפי תכונות הערך השלם, נוכל לקבל את אי השוויון הבא:

$$9 \le x^2 < 10 \Rightarrow \overbrace{9 \le x^2}^{(1)} \wedge \overbrace{x^2 < 10}^{(2)}$$

ראשית, נפתור את (1):

$$9 \le x^2 \Rightarrow x^2 - 9 \ge 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) \ge 0$$

כעת, אנו יודעים שזוהי למעשה משוואה ריבועית ושורשיה הינם

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3$$

ולכן ערכי המשוואה הגדולים מ0 או שווים לו הינם $-3 \le x \vee x \ge 3$
כעת, נפתור את (2):

$$x^2 < 10 \Rightarrow x^2 - 10 < 0 \Rightarrow (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) < 0$$

גם זוהי משוואה ריבועית ושורשיה הינם

$$x_1 = \sqrt{10},\ x_2 = -\sqrt{10}$$

ולכן ערכי המשוואה הקטנים מ0 הינם $-\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$. לפיכך, ערכי ה$x$ הפותרים את המשוואה $\lfloor x^2 \rfloor = 9$ הינם

$$\begin{gathered}(x \le -3 \vee x \ge 3) \wedge (-\sqrt{10} < x < \sqrt{10})\\ \Downarrow \\ -\sqrt{10} < x \le -3 \wedge 3 \le x < \sqrt{10} \\ \Downarrow \\ x \in (-\sqrt{10}, -3] \wedge x \in [3, \sqrt{10}) \\ \Downarrow \\ x \in (-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10})\end{gathered}$$

לפיכך, קבוצת הפתרונות הינה $(-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10})$ כנדרש.

■

4 שאלה 4

4.1 סעיף א

לפי צפיפות הממשיים ב$\mathbb{R}$, עבור כל $x,y \in \mathbb{R}$ המקיימים $x < y$ קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש$x < q < y$. נבחר $x,y \in \mathbb{R}$ המקיימים $0 \leq x < y \leq 1$ $(*)$. נכפול את אי השוויון ב$\frac{1}{\sqrt{3}}$ ונקבל

$$0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{y}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

לפי טענת העזר שהוכחנו בשאלה 2, נוכל להיווכח שמתקיים

$$0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} < \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 1$$

אזי קיים $q \in \mathbb{Q}$ המקיים

$$0 \leq \frac{x}{\sqrt{3}} < q < \frac{y}{\sqrt{3}} \leq 1$$

נכפול את אי השוויון בחזרה ב$\sqrt{3}$ ונקבל $0 \leq x < q\sqrt{3} < y \leq 1$ (לפי $(*)$). לפיכך, עבור כל $x,y \in [0,1]$ קיים $0 < q\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ כך ש$x < q\sqrt{3} < y$ כנדרש.

■

4.2 סעיף ב

נזכיר מהי הגדרת הצפיפות: קבוצה A של מספרים צפופה בקטע I אם לכל $x,y \in I$ כך ש$x < y$ קיים $a \in A$ כך ש$x < a < y$.

נצרין את ההגדרה ונעבור לכתב כמתים:

$$p = \forall x,y \in I, x < y \Rightarrow \exists a \in A, x < a \wedge a < y$$

כעת, נשלול את הפסוק:

$$\neg p = \exists x,y \in I, x < y \Rightarrow \forall a \in A, x \geq a \vee a \geq y$$

נחזור לביטוי: קבוצה A של מספרים אינה צפופה בקטע I אם קיימים $x,y \in I$ המקיימים $x < y$ כך שלכל $a \in A$ מתקיים $x \geq a$ או $a \geq y$. וזוהי השלילה של הגדרת הצפיפות כנדרש.

■

4.3 סעיף ג

נניח בשלילה שקבוצת השברים העשרוניים שלא מופיעה בהם הספרה 3 צפופה בקטע $[-1,1]$, כלומר עבור כל $x,y \in [-1,1]$ המקיימים $x < y$ קיים שבר עשרוני שלא מופיעה בו הספרה 3 המסומן בq כך ש$x < q < y$. נוכל לקחת $x = 0.3, y = 0.35$. אזי $x < y$, אך לא קיים ביניהם שבר אשר בפיתוחו העשרוני לא מופיעה הספרה 3 (שכן כל שבר ביניהם מתחיל ב$0.3\ldots$) בסתירה לנתון שהקבוצה צפופה. לפיכך, הקבוצה אינה צפופה בקטע כנדרש.

■