האוניברסיטה הפתוחה

# אלגברה לינארית

**כרך א  פרקים 1-4**

האוניברסיטה הפתוחה

# אלגברה לינארית 1

## פרקים 1–4

20109
מהדורה פנימית
לא למכירה ולא להפצה
מק"ט 20109-5031

***Linear Algebra 1***

Volume I

Dr. Elad Paran

Prof. Daniela Leibowitz (Chapter 1)

## צוות הקורס

### מהדורה שנייה

**כתיבה:** ד"ר אלעד פארן
פרופ' דניאלה ליבוביץ (השתתפה בכתיבת פרק 1)

**עריכה מתמטית:** ד"ר ציפי ברגר

**אסיסטנטית:** אסתר גרונהט

**יועצים:** פרופ' דניאלה ליבוביץ, פרופ' דן הרן, ד"ר גיל אלון, ד"ר מרים רוסט

**עורכת:** יהודית גוגנהיימר

**איורים:** רונית בורלא

**עימוד:** מנוחה מורביץ, עינב צדוק-טרבלסי

**התקנה והבאה לדפוס:** טלי מאן

### מהדורה ראשונה

**כתיבה:** פרופ' אלי לוין, פרופ' דניאלה ליבוביץ, פרופ' אברהם אורנשטיין, פרופ' אורי לירון,
פרופ' דב סמט, פרופ' איתמר פיטובסקי

**יועצים:** פרופ' אברהם גינזבורג, פרופ' אמנון יקימובסקי, פרופ' מיכאל משלר

הדפסה דיגיטלית - אלול תשע"ו, ספטמבר 2016


בית ההוצאה לאור של האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע"ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת"ד 808, רעננה 4353701.
The Open University of Israel, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 4353701.
Printed in Israel.


17 18 19 20 21 22 23 24 25

# תוכן עניינים כללי

# תוכן העניינים

# מבוא

במהלך העיון במבוא זה (שלא כמו בהמשך הקורס) אין צורך שתתעמקו בפרטים - נסו להפנים את רוח הדברים.

מערכות של משוואות, הכוללות משוואה אחת או יותר, הן התרגום לשפת המתמטיקה של בעיות מכל תחומי המדע. כאשר בעיה מוצגת באמצעות מערכת משוואות, פתרונה הופך לשאלה מתמטית טהורה. הענף של המתמטיקה המכונה **אלגברה** צמח מתוך העיסוק בחקר מערכות של משוואות מסוג מסוים, שאותו נתאר לאחר שנתבונן בכמה דוגמאות.

א. $2x = 4$ היא **משוואה** בודדת (או **מערכת בת משוואה אחת**).
הסמל $x$ המופיע בה מציין **משתנה** או **נעלם**. המספרים הקבועים 2 ו־4 המופיעים בה נקראים **מקדמים**. **לפתור** את המשוואה משמעו למצוא ערכים מספריים אשר הצבתם במקום המשתנה מניבה שוויון. ברור שלמשוואה שלפנינו יש **פתרון** יחיד - $x = 2$. אפשר לומר גם שהמספר $x = 2$ **מקיים** (או **פותר**) את המשוואה, ושהוא הערך היחיד המקיים אותה.

ב. $2x + y = \frac{1}{2}$ היא משוואה בשני משתנים, $x$ ו־$y$.
אם נציב $x = 0,\ y = \frac{1}{2}$ נקבל שוויון. גם צמדי ההצבות $x = \frac{1}{4},\ y = 0$ ו־$x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}$ מניבות שוויונות. **הפתרונות** של משוואה זו הם **זוגות** של מספרים, כגון אלה שראינו. קל להיווכח שיש אינסוף זוגות שונים של מספרים שמקיימים את המשוואה, כלומר יש לה אינסוף פתרונות. (האם תוכלו לאפיין את כולם בצורה כלשהי?)

ג. $x^2 + 5x + 4 = 0$ היא משוואה במשתנה היחיד $x$.
מהנוסחה המוכרת לפתרון משוואות ריבועיות נובע שלמשוואה זו יש בדיוק שני פתרונות: $x = -1,\ x = -4$.

המערכות א-ג הן בנות משוואה אחת, לכן לא נזקקנו למונח "מערכת". כעת נדגים מערכות שיש בהן יותר ממשוואה אחת.

ד. $\begin{aligned} x + \phantom{2}y &= 3 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$ היא **מערכת** בת שתי משוואות בשני נעלמים (או משתנים).
פתרון של מערכת בשני נעלמים הוא זוג מספרים, שפותר את כל המשוואות של המערכת כאחת. למערכת המודגמת כאן יש פתרון יחיד. אכן, **נניח** שעבור ערכים מסוימים של $x, y$ מתקבלים שוויונות. מהמשוואה השנייה מתחייב $(x + y) + y = 5$, ומאחר שהמשוואה הראשונה קובעת $x + y = 3$, נקבל: $3 + y = 5$, ולכן בהכרח $y = 2$. נציב $y = 2$ ב־$x + y = 3$ ונקבל שבהכרח $x = 1$. אם כן, זוג הערכים היחיד שעשוי לפתור את המערכת הוא $x = 1,\ y = 2$, שאותו נסמן בקיצור $(1,2)$. שימו לב, יצאנו מתוך ההנחה שקיים זוג $(x, y)$ המהווה פתרון, והצעדים שביצענו הובילו אותנו למסקנה שבהכרח $x = 1,\ y = 2$, כלומר ש־$(1,2)$ הוא הזוג **המועמד** היחיד

לפתרון. נותר לוודא שזהו אמנם פתרון, כלומר שאם מציבים $(1,2)$ במקום $(x,y)$ (דהיינו מציבים $x=1,\ y=2$), שתי המשוואות של המערכת הופכות לטענות שוויון נכונות. בצעו בדיקה זו!

ה.
$$\begin{aligned} x + \phantom{4}y &= 3 \\ x + 4y &= 5 \end{aligned}$$

מערכת זו דומה מאוד למערכת ד. גם היא בת שתי משוואות בשני משתנים. ההבדל היחיד בין שתי המערכות הוא בַּמְקַדֵּם של $y$ במשוואה השנייה. אנא ודאו, בדרך דומה לזו שבה פתרנו את המערכת הקודמת, שהפתרון היחיד של המערכת הזאת הוא $x=\frac{7}{3},\quad y=\frac{2}{3}$, כלומר הזוג $\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$.

המקדמים בשתי המערכות האחרונות שבדקנו שייכים לעולם **המספרים הרציונליים** (מספר רציונלי הוא מנה של שני מספרים שלמים), ולכל אחת מהן מצאנו פתרון שמורכב מזוג מספרים רציונליים. יתר על כן, המקדמים בשתי המשוואות שייכים לעולם המצומצם יותר של **המספרים השלמים**, אך בעולם השלמים, רק לאחת מהן – המערכת ד – יש פתרון. למערכת ה אין פתרון בשלמים, שהרי הפתרון היחיד שלה – הזוג $\left(\frac{7}{3},\frac{2}{3}\right)$ – אינו זוג של מספרים שלמים. לפיכך, אם הבעיות שתרגומן המתמטי הן המערכת ד ו־ה מחייבות פתרונות במספרים שלמים (למשל, אם ערכי המשתנים הם כמויות של בעלי חיים), הרי שלאחת מהן יש פתרון ולאחרת – אין.

לפני שמתחילים לחפש פתרונות למערכות משוואות יש לתת אפוא את הדעת לשאלה – באיזה עולם אנו מנסים לפתור אותן. למשל, נוכל לדרוש שהמקדמים של המערכת ישתייכו לאותו עולם שבו אנו מחפשים לה פתרונות. המספרים השלמים, המספרים הרציונליים ו**המספרים הממשיים** (שהם כל המספרים המייצגים נקודות על ציר המספרים המוכר לכם מלימודי בית־הספר) הם שלושה עולמות שונים: עולם המספרים הממשיים מכיל־ממש את עולם הרציונליים (כל מספר רציונלי הוא מספר ממשי, ולא להפך), ובאופן דומה – עולם המספרים הרציונליים מכיל־ממש את עולם המספרים השלמים. האם יש עולמות נוספים? בהחלט כן; עולם המספרים המרוכבים (ייתכן שכבר נתקלתם בו בלימודיכם הקודמים, ובכל אופן נתאר אותו בהרחבה בהמשך) הוא עולם שמכיל־ממש את שלושת העולמות הקודמים. יש גם עולמות נוספים, נפרדים לחלוטין מכל העולמות שנזכרו עד כה, ועל חלקם תלמדו בקורס זה.

להמחשה נוספת של חשיבות שאלת עולם המקדמים והפתרונות, נתבונן במשוואה $x^3+y^3=z^3$. למשוואה זו, שמקדמיה שלמים, יש **פתרון טריוויאלי** (כלומר פתרון ברור מאליו) – הפתרון $x=y=z=0$. האם יש לה פתרונות נוספים? גם כאן, התשובה תלויה בעולם שבו מחפשים אותם. בעולם המספרים הטבעיים, הפתרון הטריוויאלי הוא הפתרון היחיד (זוהי עובדה לא טריוויאלית, שהוכחה במאה ה־18 על־ידי אוילר).[1] לעומת זאת, בעולם המספרים הממשיים קל לגלות אינסוף פתרונות שונים שלה (נסו!).

1 ליאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-1783), מתמטיקאי שוויצרי, מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים.

ו. $\begin{aligned} xy &= 0 \\ x + y &= 2 \\ x + 4y &= 3 \end{aligned}$ זוהי מערכת בת שלוש משוואות בשני נעלמים.

למערכת הזאת אין פתרון בעולם המספרים הממשיים. כדי להיווכח בכך, שימו לב שאחד משני המספרים בכל זוג שפותר את המשוואה הראשונה הוא בהכרח 0, ושאין זוג מספרים שאחד מהם הוא 0, הפותר את המשוואות השנייה והשלישית בבת אחת. מקדמי המערכת הזאת שייכים גם לעולמות המצומצמים יותר של המספרים הרציונליים, ואפילו השלמים, אך לאור מה שראינו, מובן שלמערכת הנידונה אין פתרון בעולמות הללו.

כדוגמה אחרונה נתבונן במערכת

ז. $\begin{aligned} 2xy + z &= 0 \\ x + y + z &= 3 \\ \sin(x + y) &= 1 \end{aligned}$ זוהי מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים.

עקב הנוכחות של פונקצית הסינוס במשוואה השלישית, אתם מרגישים, מן הסתם, שהמערכת הזאת שונה מקודמותיה. אכן, חקר המערכת הזאת חורג מן הגבולות הטבעיים של האלגברה.

**האלגברה** יסודה בחקר מערכות של משוואות פּוֹלִינוֹמְיאָלִיוֹת. **משוואה פּוֹלִינוֹמְיאָלִית** היא משוואה שמופיעים בה סכומים, מכפלות וחזקות של משתנים, מקדמים קבועים, ותו לא. למשל, $3x + 8y + 5xz - z^3 = 17$ היא משוואה פולינומיאלית (בשלושה נעלמים). משוואות פולינומיאליות אינן כוללות ביטויים כגון סינוס, שורשים וכיוצא באלה. המשוואה $\sin(x + y) = 1$ המופיעה במערכת זו, **אינה** פולינומיאלית.

משוואה פולינומיאלית שלא מופיעות בה מכפלות של משתנים - לא מכפלות של משתנים שונים (כגון $xy$), ולא חזקות של משתנה בודד (כגון $z^3$) - נקראת **משוואה לינארית**. למשל, $3x + 8y + 15z = 8$ היא משוואה לינארית. לעומתה, המשוואה הקודמת שהדגמנו לעיל, $3x + 8y + 5xz - z^3 = 17$, היא משוואה פולינומיאלית **שאינה** לינארית. למערכת משוואות שכולן לינאריות נקרא בקצרה **מערכת לינארית**.

כאמור, חקר מערכות של משוואות פולינומיאליות הוא בליבה של האלגברה. החקר אינו מתמצה בפתרון של מערכות ספציפיות; הוא כולל התייחסות לשאלות כלליות הנוגעות לדרכי הפתרון ולתיאור קבוצות הפתרונות. דוגמה לשאלה כזאת היא שאלת הקיום של **נוסחת שורשים למשוואה פולינומיאלית בודדת בנעלם אחד**, כלומר נוסחה המתארת את הפתרונות של מערכת הכוללת משוואה אחת במשתנה אחד בלבד.

המשוואה הכללית הפשוטה ביותר מסוג זה היא המשוואה הלינארית $ax + b = 0$, עם $a \neq 0$. למשוואה זו פתרון יחיד, הניתן לביטוי באמצעות הנוסחה הפשוטה $x = -(b / a)$.

מה לגבי **המשוואה הפולינומיאלית הכללית ממעלה 2**, שהיא $ax^2 + bx + c = 0$, עם $a \neq 0$? כל הפתרונות הממשיים למשוואה, אם הם קיימים, נתונים על־ידי הנוסחה:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**המשוואה הפולינומיאלית הכללית ממעלה 3** היא $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, עם $a \neq 0$ (כאשר $a = 0$ המשוואה היא ממעלה 2 לכל היותר). הנה נוסחת פתרון למשוואה זו, שהתגלתה במאה ה־15:

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) + \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right) - \sqrt{\left(\frac{-b^3}{27a^3} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{d}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

הנוסחה מסובכת, אך מבחינתנו חשיבותה היא בעצם קיומה ולא בביטוי המדויק המופיע בה.

גם ל**משוואה הפולינומיאלית הכללית ממעלה 4** יש נוסחת פתרון, הידועה בשם נוסחת Ferrari.[2] היא ארוכה מאוד, ולא נציג אותה כאן משום שמבחינתנו - עובדת קיומה בלבד היא הרלוונטית כרגע.

מה לגבי משוואות ממעלה חמישית (או יותר)? מתמטיקאים חיפשו נוסחה לפתרון משוואות כאלה במשך מאות שנים, עד אשר ב־1824 הוכיח אָבֶּל,[3] כי נוסחה כזאת **אינה קיימת**. אין פירוש הדבר שלמשוואות ממעלה חמישית אין פתרונות,[4] אלא שקיימות משוואות בעלות פתרון שאינו ניתן לתיאור על־ידי שום נוסחה כדוגמת אלה המופיעות לעיל, כלומר נוסחאות המערבות את המקדמים בעזרת צירופים של סכומים, מכפלות, מנות ושורשים בלבד.

זו הייתה תגלית מתמטית מרעישה. אולי אתם תוהים: כיצד ניתן **להוכיח** ששום נוסחה, ארוכה ומסובכת ככל שתהיה, אינה מבטאת פתרונות למשוואה נתונה? מהי בכלל "נוסחה"? איך תיתכן אמירה על **כלל** הנוסחאות? השאלות האלה מדגימות את הבעיות העמוקות שבהן עוסקת האלגברה. המענה לשאלות מסוג זה היה כרוך בפיתוח שפה מתאימה וכלים לחקר אובייקטים אלגבריים שאינם בהכרח מספרים (במקרה שתיארנו - חקר **נוסחאות**).

הטיפול הכללי בשאלת הקיום של נוסחאות שורשים למשוואות פולינומיאליות נעשה במסגרת **תורת גָלוּאָה**,[5] המסתמכת על **תורת החבורות** - תורה העוסקת במבנים אלגבריים מופשטים שבעזרתם אפשר, בין השאר, לחקור נוסחאות פתרון של משוואות פולינומיאליות. במסגרת הקורס הנוכחי לא תלמדו אמנם את התורות הללו, אך תכירו במהלכו דוגמאות חשובות אחרות להפשטה אלגברית. כדי

---

2 לודוביצ'ו פרארי (Lodovicho Ferrari, 1522-1565), מתמטיקאי איטלקי.

3 נילס הנריק אבל (Niels Henrik Abel, 1802-1829), מתמטיקאי נורווגי.

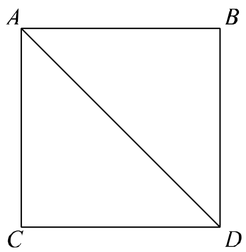
4 למעשה, ממשפט הידוע בשם "המשפט היסודי של האלגברה" נובע, כי לכל משוואה פולינומיאלית בעלת מקדמים ממשיים או מרוכבים יש לפחות פתרון **מרוכב** אחד.

5 אווריסט גלואה (Évariste Galois, 1811-1832), מתמטיקאי צרפתי שקנה לעצמו שם עולם למרות שלא האריך ימים. הוא נהרג בדו־קרב בגיל 21.

להבהיר למה כוונתנו ב"הפשטה", נחזור לשאלת "עולם המקדמים" של מערכת משוואות נתונה. דוגמה ה מתחילת המבוא ממחישה, שכדי לפתור מערכת שמקדמיה שלמים, אנו עלולים להזדקק לחריגה מעולם השלמים (הפתרון היחיד של מערכת ה היה זוג מספרים רציונליים, לא שלמים). ברוח דומה ניתן היה לשער, שפתרון מערכת לינארית שמקדמיה רציונליים עלול לחייב חריגה מעולם המספרים הרציונליים. מסתבר שלא כך: אם למערכת לינארית שמקדמיה רציונליים יש פתרון שערכיו הם מספרים ממשיים, אז יש לה גם פתרון שערכיו הם מספרים רציונליים. מתעוררת אפוא השאלה: מהו ההבדל בין עולם המספרים הרציונליים לבין עולם המספרים השלמים? מה הן התכונות של האחד, שאין לאחר, המבטיחות שכאשר ניתן למצוא למערכת משוואות פתרון בעולם כלשהו, תמיד ניתן גם למצוא פתרון שאינו חורג מעולם המקדמים? בקרוב תלמדו שהמספרים הרציונליים והמספרים הממשיים הם שתי דוגמאות (מני רבות) לאובייקט אלגברי מופשט המכונה **שדה**, ושעולם המספרים השלמים אינו שדה. בהמשך נחקור שדות באופן מופשט ונוכיח, שאם למערכת לינארית שמקדמיה לקוחים משדה כלשהו יש פתרון באיזשהו עולם, אז בהכרח יש לה פתרון בשדה שממנו לקוחים המקדמים שלה.

מגוון ההיבטים של חקר משוואות פולינומיאליות (שרק בודדים מהם נזכרו לעיל) הצמיח ענפים מעניינים בתוך האלגברה עצמה. בנוסף, האלגברה קשורה באופן הדוק לענפים מרכזיים אחרים של המתמטיקה, ובכללם האנליזה, תורת המספרים והגיאומטריה. להדגמת הקשר שבין האלגברה לגיאומטריה, נפנה לשאלה עתיקת יומין שהטרידה את המתמטיקאים הקדמונים של יוון.

אלכסון של ריבוע מחלק את הריבוע לשני משולשים חופפים, שווי שוקיים וישרי זווית.



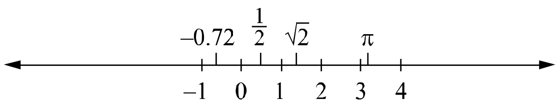

נתבונן באחד המשולשים. מהו היחס בין אורך הניצב שלו לבין האורך של היתר שלו?

המתמטיקאים בעת העתיקה היו משוכנעים שהיחס בין האורכים של כל שני קטעים ניתן לביטוי כיחס שבין מספרים שלמים (כלומר כְּמָה שמכונה כיום מספר רציונלי), ומחשבה זו הובילה **לפָּרָדוֹקס** (מצב עניינים שיש בו סתירה פנימית). מצד אחד, היחס בין אורך הניצב לאורך היֶתֶר במשולש הנידון אמור להיות מספר רציונלי. מצד שני, משפט פיתגורס (שהיה מוכר להם) קובע, שסכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים של משולש ישר זווית שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר. ממשפט זה נובע, שאם $x$ הוא אורך הניצב במשולש שלנו, ו־$y$ הוא אורך היתר, אז $y^2 = x^2 + x^2$, כלומר $y^2 = 2x^2$, או $(y/x)^2 = 2$. היחס בין $y$ ל־$x$ אמור אפוא להיות פתרון של המשוואה $z^2 = 2$. אבל מתמטיקאֵי יוון הכירו גם בעובדה המבוטאת בלשון ימינו באמירה שלמשוואה הנידונה אין

פתרון בעולם המספרים הרציונליים; המספרים היחידים הפותרים את המשוואה הזאת, שהם $\pm\sqrt{2}$, **אינם** מספרים רציונליים.[6]

מֵאות רבות חלפו עד שהפרדוקס הזה יושב והתמסדה ההבנה, שכדי לייצג באופן מספרי את היחס בין אורכי כל הקטעים לבין האורך של קטע מסוים המשמש כ**יחידת אורך**, דרושה מערכת מספרים רחבה יותר ממערכת המספרים הרציונליים. המערכת המתאימה היא מערכת המספרים הממשיים.

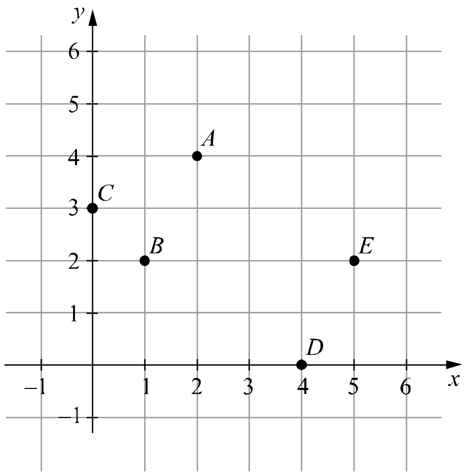
כולכם מכירים את הייצוג של המספרים הממשיים כנקודות על ציר מספרים. **ציר מספרים** הוא ישר שעליו נקבעה נקודה כלשהי המכונה **רֵאשית**, אשר אחת משתי הקרניים היוצאות ממנה נקבעה כ**כיוון החיובי**, והאחרת כ**כיוון השלילי**, ושעבורו נקבעה **יחידת אורך**. לכל קטע $AB$ במישור יש נקודה יחידה על הקרן החיובית, אשר הקטע המחבר אותה עם הראשית חופף ל־ $AB$, ולנקודה הזאת מתאים מספר ממשי חיובי $t$, המבטא את אורך הקטע (יחסית ליחידת האורך שנבחרה). על הקרן השלילית יש נקודה נוספת, אשר הקטע המחבר אותה עם הראשית חופף ל־ $AB$, ולנקודה הזאת מתאימים את המספר הנגדי ל־ $t$, שהוא $-t$. בדרך זו מתקבלת התאמה של אחד לאחד בין המספרים הממשיים לבין הנקודות על ציר המספרים. בעזרת ההתאמה הזאת ניתן להקנות משמעות גיאומטרית גם לפעולות החיבור והכפל של מספרים ממשיים.




הקשר בין האלגברה לגיאומטריה, שהתבסס לקראת המאה ה־17, הרחיב את היכולת לתרגם בעיות גיאומטריות לשפת האלגברה, ולהקנות משמעות גיאומטרית לתוצאות אלגבריות.

אם מציידים את ה**מישור** במערכת צירים קרטזית – זוג צירי מספרים ניצבים זה לזה (ציר $x$ וציר $y$) בעלי ראשית משותפת – ניתן להתאים לכל נקודה $A$ במישור זוג מספרים ממשיים $(x, y)$ המכונים **השיעורים**, או **הקואורדינטות**, של הנקודה. הראשון משני השיעורים של $A$ מתאר את מרחקה מציר $y$, והשני – את מרחקה מציר $x$. כל זוג מספרים ממשיים מותאם בדרך זו לנקודה יחידה במישור.

6 הוכחה לכך תראו במהלך הקורס.



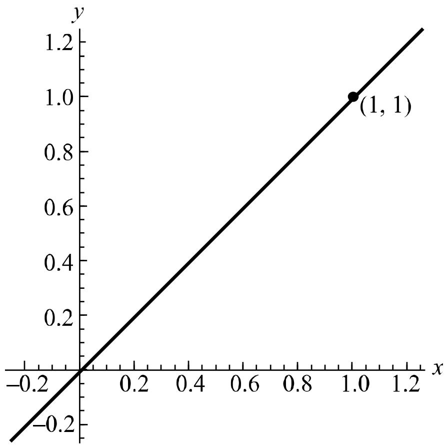

באיור זה, $A$ היא הנקודה שזוג שיעוריה הוא $(2,4)$, ו־ $B$ היא הנקודה שזוג שיעוריה הוא $(1,2)$.
מה הן שיעורי הנקודות $C,D,E$ ?

באופן דומה, גם את המרחב האוקלידי התלת־ממדי ניתן לצייד במערכת צירים קרטזית, המורכבת משלושה צירי מספרים ניצבים בעלי ראשית משותפת, ובדרך זו מתקבלת התאמה של אחד לאחד בין נקודות המרחב לבין השלָשות $(x,y,z)$ של מספרים ממשיים.

הכינוי "מערכת צירים קרטזית" מקנה את זכות היוצרים עליה למתמטיקאי־פילוסוף הצרפתי הנודע רנה דקארט,[7] שתרם תרומה מכרעת לביסוס השימוש בה. לפני פיתוח מערכת הצירים, הגישה היחידה לטיפול בשאלות גיאומטריות הייתה זו של הגיאומטריה האוקלידית, שפותחה על־ידי המתמטיקאים היוונים הקדמונים. השימוש במערכת צירים קושר בין הגיאומטריה לאלגברה. מערכת הצירים הקרטזית מאפשרת לזהות זוגות מספרים עם נקודות במישור (ושלשות של מספרים עם נקודות במרחב). במילים אחרות, "נקודה במישור" ו־"זוג $(a,b)$ של מספרים ממשיים" נחשבים בעינינו כמונחים שקולים, והאופן שבו אנו בוחרים לראותם נקבע לפי ההקשר.

כוחה של הגישה שהתווה דקארט טמון בכך, שהיא אינה מוגבלת לנקודות בלבד; היא מאפשרת לתאר באופן אלגברי גם אובייקטים גיאומטריים מסובכים יותר. נתבונן למשל ב**ישר** במישור, ה**עובר** דרך ראשית הצירים ובנקודה $(1,1)$:

7 רנה דקארט (René Descartes, 1596-1650).

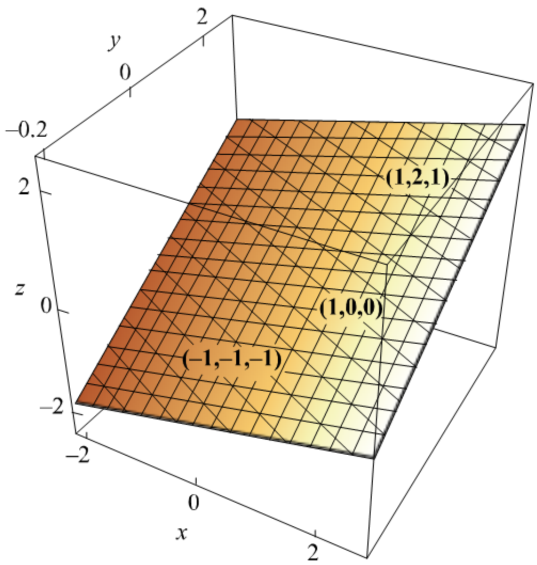



קל להוכיח שכל נקודה $(s,t)$ על הישר הזה היא פתרון של המשוואה $x-y=0$, ושכל נקודה שפותרת את המשוואה הזאת נמצאת עליו. במילים אחרות, **אוסף הנקודות המונחות על ישר זה מתלכד עם אוסף הפתרונות של המשוואה** $x-y=0$. אם כן, הישר ממחיש באופן ויזואלי את קבוצת הפתרונות המופשטת. לחלופין, המשוואה מאפיינת בדרך אלגברית את הנקודות של הישר.

כשם שקבוצת הפתרונות של משוואה בשני נעלמים מייצגת אוסף נקודות **במישור**, כך קבוצת הפתרונות של משוואה בשלושה נעלמים מייצגת אוסף נקודות **במרחב**. לדוגמה, ידוע שדרך כל שלוש נקודות במרחב, שאינן מונחות על אותו ישר, עובר מישור יחיד. המישור המומחש באיור הבא, הוא המישור העובר דרך הנקודות $(1,0,0),(1,2,1),(-1,-1,-1)$. מישור זה מאופיין על־ידי המשוואה

$$x+2y-4z-1=0$$

הפתרונות של משוואה זו הם הנקודות של המישור הנידון.



שימו לב, בעוד שבדוגמה הקודמת קבוצות הפתרונות אופיינה באמצעות אובייקט גיאומטרי "חד־ממדי" - ישר, הפעם קבוצת הפתרונות מאופיינת באמצעות אובייקט "דו־ממדי" - מישור. תוכלו לתהות - מהו בכלל ההבדל בין אובייקט "חד־ממדי" לאובייקט "דו־ממדי"? כיצד מגדירים מהו "מֵמַד", והאם ניתן לעשות זאת באופן שאינו דורש התבוננות באיור?

ציינו שהאלגברה עוסקת בחקר מערכות משוואות פולינומיאליות ובפתרונותיהן; כעת נוסיף ונאמר שהיא עוסקת גם בגיאומטריה של קבוצות הפתרונות, כלומר בהבנת האופן שבו תכונות אלגבריות של המשוואות, ה"מקודדות" במקדמים ובחזקות של המשתנים, משתקפות כתכונות גיאומטריות של קבוצת הפתרונות. בדוגמאות לעיל הסתפקנו בהמחשת קבוצות הפתרונות של משוואות לינאריות בודדות, אך ניתן לבחון את הגיאומטריה של קבוצות פתרון למערכות מרובות משוואות, ואף נעשה זאת בהמשך. שאלות גיאומטריות הנוגעות למערכות משוואות הן שאלות כגון שאלת ה"ממד" של קבוצת הפתרונות, ועוד שאלות נוספות שבהן לא ניגע כרגע.

עד כה התבוננו במשוואות בשני נעלמים או בשלושה. כאשר מספר המשתנים היה 2, ראינו את קבוצת הפתרונות כאובייקט בתוך המישור, וכאשר מספר המשתנים היה 3, ראינו את קבוצת הפתרונות כאובייקט בתוך המרחב. מה לגבי משוואות (או מערכות) בארבעה נעלמים (או יותר)? בוודאי תצפו כי קבוצת הפתרונות תתאר אובייקט גיאומטרי בתוך "מרחב מממד 4" (או יותר). אך כיצד ניתן לעסוק בגיאומטריה של מרחבים שאיננו מסוגלים לראותם (או אפילו לדמיין לעצמנו)? כאן שוב בא לידי ביטוי כוחה של ההפשטה האלגברית. מתוך התבוננות במבנים הנידונים במישור הדו־ממדי ובמרחב התלת־ממדי, ניתן לנסח הגדרות מופשטות, המאפשרות להתייחס למבנים אנלוגיים בממדים גבוהים כרצוננו, ולחקור את תכונותיהם ה"גיאומטריות", גם כאשר מגבלות הראייה האנושית מונעות מאיתנו להמחיש לעצמנו מבנים כאלה.

הבנת הקשר שבין האלגברה לגיאומטריה של מערכת פולינומיאלית היא לרוב בעיה קשה. אבל כאשר מצמצמים את הדיון ל**מערכות לינאריות** (שהן, כזכור, מערכות פולינומיאליות שכל המשוואות בהן לינאריות) - מתקבלת תורה מתמטית אלגנטית, המאפשרת לענות באופן מלא על כל השאלות והבעיות שנגענו בהן במבוא זה - קיומם של פתרונות, מציאתם, תיאורם באופן מפורש, וכן אפיון התכונות הגיאומטריות של קבוצות הפתרונות (לעיתים במרחב מממד גבוה מ־3). תורה זו היא **האלגברה הלינארית**, ובה נעסוק במסגרת קורס זה.

# פרק 1: מערכות משוואות לינאריות

## 1.1 פעולות על קבוצה

בשיעורי חשבון בכיתות היסוד נלמדות ארבע פעולות החשבון הבסיסיות - חיבור, חיסור, כפל, חילוק. הכינוי "פעולה" משקף את העובדה, שהן מְעַבְּדוֹת זוגות מספרים, ומפיקות מהם מספרים בודדים - הסכום, ההפרש, המכפלה או המנה של זוג המספרים.

אנו נשתמש במונח "פעולה" באופן רחב יותר, ככינוי לכל תהליך המפיק תוצאה אחת מזוג נתונים.

אם התהליך מפיק תוצאה **מכל** זוג איברים (שווים או שונים) של קבוצה נתונה $A$,[1] נאמר שהתהליך הוא **פעולה על** $A$.[2]

**דוגמאות**

- לכל זוג מספרים (שווים או שונים) יש סכום, הפרש ומכפלה; בהתאם לכך, חיבור, חיסור וכפל הם פעולות על **כל** קבוצת מספרים $A$. לא כן החילוק: אם $A$ היא קבוצה של מספרים שהמספר 0 הוא אחד מאיבריה, אז יש זוגות איברים מתוך $A$, שאין להם מנה - המנה $a/b$ אינה מוגדרת כאשר $b=0$. אם כן, כאשר $0\in A$, החילוק אינו פעולה **על** $A$, אבל אם $0\notin A$, אז גם החילוק הוא פעולה על $A$.
- המספרים שאליהם מתוודעים בתחילת לימודי החשבון, הם המספרים $1,2,3,...$, המכונים **מספרים טבעיים**. נהוג לסמן את קבוצת המספרים הטבעיים ב־$\mathbb{N}$.[3] מאחר ש־$0\in\mathbb{N}$, כל ארבע פעולות החשבון הבסיסיות - חיבור, חיסור, כפל וחילוק - הן **פעולות על** $\mathbb{N}$.

גם העלאה בחזקה, המתאימה לכל $a,b\in\mathbb{N}$ את $a^b$, היא פעולה על $\mathbb{N}$. אפשר, כמובן, להגדיר על $\mathbb{N}$ פעולות אחרות, כגון:

הפעולה $*$,[4] המוגדרת כך: לכל $a,b\in\mathbb{N}$, $a*b:=a+b+8$ [5]

לפי הגדרה זו, $3*2=13$ (ודאו).

או $a*b:=\max\{a,b\}$ [6]

(מהו $10*8$? מהו $5*5$?)

או $a*b:=$ הממוצע החשבוני של $a,b$

(מהו הפעם $10*8$? מהו $7*4$?)

או $a*b:=$ ספרת האחדות של $(a+b)^2$

(לפי הגדרת $*$ במקרה זה, $7*4=1$.) ◀

---

1 קוראים שאינם בעלי רקע בתורת הקבוצות מתבקשים לקרוא בעיון את הסעיפים העוסקים בכך בפרקי ההכנה, לפני קריאת פרק זה.

2 התוצאה המופקת היא לאו דווקא איבר של הקבוצה $A$.

3 הסמל $\mathbb{N}$ הוא ראש התיבה Natural - טבעי.

4 בסימון $*$ נשתמש לציון פעולות שונות על קבוצות שונות. אותו הסמל יסמל כל פעם פעולה מתמטית אחרת. זאת - מטעמי נוחות בלבד. עקרונית, יכולנו לבחור לכל פעולה חדשה שאנו מדגימים, סימון ייחודי משלה. כאשר נעסוק בפעולה מוכרת כגון החיבור, נשתמש בסימון המוכר (במקרה זה +).

5 הסימון $:=$ מציין שהביטוי הרשום משמאלו מוגדר להיות הביטוי הרשום לימינו.

6 הסימון $\max\{a,b\}$ מציין את המספר הגדול מבין $a$ ו־$b$ (השווה לשניהם במקרה שהם שווים).

נחזור לפעולות החשבון הבסיסיות. חיבור וכפל נתפסים בדרך כלל כפשוטים יותר מחיסור, שנחשב לפשוט יותר מחילוק. אכן, לפעולות החיבור והכפל יש תכונות מסוימות שאין לפעולת החיסור, שעושות אותן "נוחות" יותר (ולפעולת החיסור יש תכונות שאין לפעולת החילוק, העושות אותה "נוחה" יותר). למשל, הסכום של זוג מספרים טבעיים הוא תמיד מספר טבעי, כך גם מכפלתם. ההפרש והמנה לאו דווקא (לדוגמה, $2-3 \notin \mathbb{N}$ , $2/3 \notin \mathbb{N}$).

---

**הגדרה 1.1.1 סגירות של קבוצה לגבי פעולה**

תהי $A$ קבוצה ותהי * פעולה על $A$. נאמר כי $A$ **סגורה לגבי** *,[7] אם לכל $a,b \in A$ מתקיים:

$$a * b \in A$$

---

כעת אפשר להתבטא כך: קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ סגורה לגבי החיבור והכפל, אך **אינה** סגורה לגבי החיסור והחילוק.

המגרעת של החיסור ניתנת לתיקון על־ידי הרחבת הקבוצה: כשמוסיפים ל־$\mathbb{N}$ את המספר 0 ואת המספרים השלמים השליליים - $-1,-2,-3,\ldots$, מתקבלת **קבוצת המספרים השלמים**, $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$, שאותה נהוג לסמן ב־$\mathbb{Z}$.[8] $\mathbb{Z}$ סגורה לגבי החיסור: ההפרש בין כל זוג מספרים שלמים (כמו גם סכומם) הוא תמיד מספר שלם.

**שאלה 1.1.1**

בכל אחד מסעיפי השאלה נתונה קבוצה $A$ ומוגדרת פעולה * על $A$. בכל מקרה בדקו אם הקבוצה סגורה לגבי הפעולה.

א. $A=\mathbb{Z}$ , $a*b=a+b+8$.

ב. $A=\mathbb{Z}$ , $a*b=a+b-8$.

ג. $A=\mathbb{N}$ , $a*b=a+b+8$.

ד. $A=\mathbb{N}$ , $a*b=a+b-8$.

ה. $A=\mathbb{N}$ , * היא פעולת החילוק.

ו. $A=\mathbb{Z}$ , $a*b=a^2b$.

**התשובה בעמוד 115**

לפעולת החיסור על $\mathbb{Z}$ יש מגרעת שאינה ניתנת לתיקון על־ידי הרחבת הקבוצה. לפני שנתאר אותה, נגדיר:

---

7 ויש אומרים: **סגורה ביחס ל־** *.

8 מקור הסימון במילה הגרמנית Zahlen - מספרים.

**הגדרה 1.1.2 פעולה קיבוצית (אָסוֹצְיָאטיבית)**

תהי $A$ קבוצה ותהי $*$ פעולה על $A$. נאמר כי $*$ היא פעולה **קיבוצית**, אם $A$ סגורה לגבי $*$, ולכל $a,b,c \in A$ מתקיים:

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

בהגדרת הקיבוציות כללנו את הדרישה ש־$A$ תהיה סגורה ביחס ל־$*$. נסביר מדוע: אם $*$ היא פעולה על $A$, אבל $A$ אינה סגורה לגבי $*$, אז יש זוג איברים $a,b \in A$, שעבורם $a*b \notin A$. במקרה זה ייתכן ש־$(a*b)*c$ אינו מוגדר בכלל.

**דוגמאות**

- החיבור והכפל הן פעולות קיבוציות על קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$:
  $\mathbb{Z}$ סגורה לגבי הפעולות הללו, ולכל $a,b,c \in \mathbb{Z}$ מתקיים $(a+b)+c = a+(b+c)$
  וכן: $(ab)c = a(bc)$
- פעולת החיסור על $\mathbb{Z}$ אינה קיבוצית, למרות ש־$\mathbb{Z}$ סגורה לגביה. למשל, $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$. אמנם יש מקרים שבהם $(a-b)-c = a-(b-c)$, לדוגמה $(1-1)-0 = 1-(1-0)$, אבל הדרישה המופיעה בהגדרה 1.1.2 היא שהשוויון $(a*b)*c = a*(b*c)$ יתקיים **לכל** $a,b,c \in A$.
- פעולת החילוק אינה מוגדרת על $\mathbb{Z}$ (שכן מנות חילוק ב־0 אינן מוגדרות).
- פעולת החילוק אמנם מוגדרת על $\mathbb{N}$, אבל $\mathbb{N}$ אינה סגורה לגבי החילוק.
- נחזור לפעולת החזקה, $a*b := a^b$.
  $\mathbb{N}$ סגורה לגבי פעולה זו, אבל הפעולה אינה קיבוצית: למשל, $(2*2)*3 \neq 2*(2*3)$
  שכן $(2*2)*3 = (2^2)*3 = 4*3 = 64$
  ואילו: $2*(2*3) = 2*(2^3) = 2*8 = 2^8 = 256 \neq 64$

כאשר $*$ היא פעולה קיבוצית על $A$, ו־$a,b,c \in A$, נהוג להשתמש בסימון $a*b*c$ כתחליף לכל אחד מהביטויים $(a*b)*c$ ו־$a*(b*c)$, המציינים אותו איבר של $A$. ◀

**שאלה 1.1.2**

א. חזרו לשאלה 1.1.1. בכל סעיף בדקו אם הפעולה המוגדרת בו היא קיבוצית.

ב. תהי $*$ פעולה קיבוצית על $A$, ויהיו $a,b,c,d \in A$. הראו:

$$(a*b)*(c*d) = ((a*b)*c)*d$$

**התשובה בעמוד 115**

באמצעות ההגדרה הבאה נאיר היבט נוסף, העושה את החיבור והכפל ל"פשוטים" יותר מן החיסור והחילוק.

**הגדרה 1.1.3 פעולה חילופית (קוֹמוּטָטיבית)**

תהי $A$ קבוצה ותהי * פעולה על $A$. נאמר כי * היא פעולה **חילופית**, אם לכל $a,b \in A$ מתקיים:

$$a * b = b * a$$

החיבור והכפל הן פעולות חילופיות. החיסור והחילוק אינן פעולות חילופיות. למשל,

$$1/2 \neq 2/1, \qquad 1-2 \neq 2-1$$

**שאלה 1.1.3**

א. חזרו לשאלה 1.1.1 ובדקו בכל אחד מן הסעיפים שם, אם הפעולה הנידונה חילופית.

ב. תהי * פעולה על $A$, שהיא חילופית וקיבוצית, ויהיו $a,b,c,d \in A$. הראו:

$$((a*b)*c)*d = (b*a)*(c*d)$$

**התשובה בעמוד 115**

כמעט בכל הדוגמאות עד כה עסקנו בפעולות על קבוצות של מספרים. כעת נדגים פעולות על קבוצות בעלות אופי אחר.

**דוגמאות**

- תהי $X$ קבוצה כלשהי. הקבוצה $P(X)$ - **קבוצת החזקה של** $X$ - היא **אוסף התת־קבוצות** של $X$.[9]

  האיחוד, המתאים לכל $A,B \subseteq X$ (כלומר לכל $A,B \in P(X)$) את $A \cup B$, והחיתוך, המתאים לכל $A,B \subseteq X$ (כלומר לכל $A,B \in P(X)$) את $A \cap B$, הן פעולות על $P(X)$. הקבוצה $P(X)$ סגורה לגבי כל אחת מהן, וכל אחת מהן היא קיבוצית וחילופית (ודאו!).

- אם $A$ היא קבוצה סופית לא ריקה, נוכל להגדיר פעולה על $A$ באופן שרירותי לחלוטין, על־ידי פירוט תוצאת הפעולה לכל זוג איברים בקבוצה.

  לדוגמה, הטבלה הבאה מגדירה פעולה * על $A = \{a,b,c\}$:

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | c | c |

לכל $x,y \in A$, $x * y$ הוא האיבר שרשום במשבצת הנמצאת בשורה שכותרתה $x$, בעמודה שכותרתה $y$ (למשל, $c * b = c$, $b * c = a$). ◀

9 ראו בכרך ההכנה.

**שאלה 1.1.4**

האם הקבוצה $A=\{a,b,c\}$ סגורה לגבי הפעולה * המתוארת בטבלה הקודמת? האם הפעולה קיבוצית? חילופית?

**התשובה בעמוד 115**

נתבונן בקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ ובפעולות החיבור והכפל. כולכם מכירים את הכלל המקשר בין שתי הפעולות האלה, המכונה **חוק הפילוג** (של הכפל מעל החיבור), שלפיו לכל $a,b,c\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a(b+c)=ab+ac$. בהגדרה הבאה נתייחס לשתי פעולות כלשהן על אותה קבוצה, ונגדיר מתי אחת מהן מתפלגת מעל האחרת.

---

**הגדרה 1.1.4 פילוג של פעולה מעל פעולה אחרת (דיסטריבוטיביות)**

תהי $A$ קבוצה, ותהיינה $*,\&$ פעולות על $A$, אשר $A$ סגורה לגביהן. נאמר שהפעולה * **מתפלגת מעל הפעולה** &, אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים:

$$a*(b\,\&\,c)=(a*b)\,\&\,(a*c)$$

---

הסבירו בעצמכם מדוע דרשנו בהגדרה את הסגירות של $A$ לגבי שתי הפעולות.

כאמור, ב־ $\mathbb{Z}$ הכפל מתפלג מעל החיבור. הנה דוגמה נוספת:

**דוגמה**

תהי $P(X)$ קבוצת החזקה של קבוצה כלשהי $X$.

כפי שראיתם בכרך ההכנה, לכל $A,B,C\in P(X)$ מתקיים:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

וכן: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

במונחי הגדרה 1.1.4, פירוש הדבר הוא, שהחיתוך מתפלג מעל האיחוד, והאיחוד מתפלג מעל החיתוך.

◀

האיברים של $P(X)$ הם קבוצות, שנתפסות כאובייקטים מתמטיים בעלי אופי שונה ממספרים. אך עיון בקבוצה $P(X)$ עם פעולות האיחוד והחיתוך, מגלה קווי דמיון לא מעטים בינה ובין קבוצת המספרים השלמים עם פעולות החיבור והכפל. בשני המקרים הקבוצה סגורה לגבי שתי הפעולות; בשני המקרים שתי הפעולות חילופיות וקיבוציות, ובשניהם - הפעולה השנייה מתפלגת מעל הראשונה. למרות שהדמיון אינו מלא (הצביעו בעצמכם על הבדל),[10] מסתמנת אנלוגיה בין שני עולמות מתמטיים שונים. הנה היבט נוסף שלה:

---

10 ב־ $P(X)$, החיתוך מתפלג מעל האיחוד, והאיחוד מתפלג מעל החיתוך. ב־ $\mathbb{Z}$, הכפל מתפלג מעל החיבור, אבל החיבור אינו מתפלג מעל הכפל. למשל, $2+(3\cdot 4)\neq(2+3)\cdot(2+4)$.

לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים: $a + 0 = a$ [11] ; לכל $A \in P(X)$ מתקיים: $A \cup \phi = A$ [12]

כמו כן,

לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים: $a \cdot 1 = a$ [13] ; לכל $A \in P(X)$ מתקיים: $A \cap X = A$ [14]

הטענות שבצד ימין אומרות:

הוספת 0 אינה משפיעה על הסכום; כפל ב־1 אינו משפיע על המכפלה.

או, כפי שמקובל להתבטא:

ב־ $\mathbb{Z}$, המספר 0 נֵיטרלי ביחס לחיבור, והמספר 1 נֵיטרלי ביחס לכפל.

כיוצא בזה אפשר לנסח את הטענות שבצד שמאל כך:

ב־ $P(X)$, הקבוצה הריקה $\phi$ נֵיטרלית ביחס לאיחוד, והקבוצה $X$ נֵיטרלית ביחס לחיתוך.

באופן כללי, נגדיר:

---

**הגדרה 1.1.5 איבר נֵיטְרָלִי**

תהי * פעולה על קבוצה $A$, ויהי $e$ איבר של $A$. נאמר כי $e$ **נֵיטרלי ביחס ל־***, אם לכל $a \in A$ מתקיים:

$$a * e = e * a = a$$

---

**דוגמה**

כאשר $A = \mathbb{Z}$ (קבוצת המספרים השלמים), יש ב־$A$ איבר ניטרלי ביחס לחיבור - המספר 0, ויש ב־$A$ איבר ניטרלי ביחס לכפל - המספר 1. אם מצמצמים את $A$, ומסתפקים ב־$A = \mathbb{N}$ (קבוצת המספרים הטבעיים), שהיא קבוצה חלקית ממש ל־ $\mathbb{Z}$, המספר 1 נותר בה, והוא, כמובן, עדיין ניטרלי ביחס לכפל; אבל המספר 0, שאינו מספר טבעי, נשמט ממנה. ◀

למעשה מתקיימת הטענה שלהלן.

---

**טענה**

בקבוצת המספרים הטבעיים אין איבר ניטרלי ביחס לחיבור.

---

ייתכן שאתם תוהים: מה יש פה להוכיח? הרי "הוצאנו" את 0 הניטרלי!

נכון, $0 \notin \mathbb{N}$, אבל לא הראינו שבין המספרים הטבעיים $1,2,3,\ldots$ (כלומר בין איברי $\mathbb{N}$), אין איזשהו מספר נֵיטרלי ביחס לחיבור. זה מה שנראה כעת.

---

11 וכמובן גם $0 + a = a$, כי פעולת החיבור חילופית.

12 וכמובן גם $\phi \cup A = A$, כי פעולת האיחוד חילופית.

13 וכמובן גם $1 \cdot a = a$, כי פעולת הכפל חילופית.

14 וכמובן גם $X \cap A = A$, כי פעולת החיתוך חילופית.

**הוכחה**

נניח בשלילה שאיזשהו מספר טבעי $e$ הוא ניטרלי ביחס לחיבור.

לאור הנחה זו, לכל $a \in \mathbb{N}$, $e + a = a$, ובפרט - $e + 1 = 1$. מצד שני, $e$ הוא מספר טבעי, לכן $e \geq 1$, ולכן $e + 1 \geq 1 + 1 = 2 > 1$. הסתירה שאליה הגענו ($e + 1 = 1$ ובה בעת $e + 1 > 1$), פוסלת את הנחת השלילה. לכן אין מספר טבעי שהוא ניטרלי ביחס לחיבור.

**מ.ש.ל.**[15]

זאת ועוד, האם מכך ש־$0 \in \mathbb{Z}$ ו־0 ניטרלי ביחס לחיבור ב־$\mathbb{Z}$, נובע שאין מספר שלם אחר שגם הוא ניטרלי ביחס לחיבור? התשובה היא - כן, אך במקום להוכיח זאת, נוכיח (בקלות) טענה כללית יותר, שממנה נובע מיידית ש־0 הוא המספר השלם היחיד שהוא ניטרלי ביחס לחיבור, ו־1 הוא השלם היחיד שהוא ניטרלי ביחס לכפל, ועוד.

---

**משפט 1.1.6**

תהי $*$ פעולה על קבוצה $A$.

ב־$A$ יש **לכל היותר איבר אחד** שהוא ניטרלי ביחס ל־$*$.

---

**הוכחה**

כדי להוכיח את הטענה, נניח ש־$e, e' \in A$, ושניהם ניטרליים ביחס לפעולה $*$, ונַראה שבהכרח $e = e'$. לאור הניטרליות של $e$,
$$e * e' = e'$$
ולאור הניטרליות של $e'$,
$$e * e' = e$$
אם כן, כל אחד מבין $e, e'$ הוא $e * e'$, לכן:
$$e = e'$$

**מ.ש.ל.**

אם בקבוצה כלשהי $A$ יש איבר $e$, שהוא ניטרלי ביחס לפעולה $*$ על $A$, אז לאור משפט 1.1.6, $e$ הוא האיבר **היחיד** של $A$ שהוא ניטרלי ביחס ל־$*$, ואפשר לקרוא לו **ה**איבר **ה**ניטרלי (בהא הידיעה) של $A$ ביחס ל־$*$. ננסח תוצאה חשובה זו כמסקנה ממוספרת, למשמרת:

---

**מסקנה 1.1.7**

אם $e \in A$ הוא ניטרלי ביחס לפעולה $*$ על $A$, אז $e$ הוא האיבר הניטרלי היחיד של $A$ ביחס ל־$*$.

---

איך בודקים אם קיים איבר ניטרלי ביחס לפעולה $*$ על קבוצה $A$? נדגים:

**דוגמה**

נבדוק אם ביחס לפעולת החזקה, המוגדרת על קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ על־ידי $a * b = a^b$, קיים ב־$\mathbb{N}$ איבר ניטרלי:

15 מ.ש.ל. הן ראשי התיבות של 'מה שהיה להוכיח'. סימון מקובל אחר לסיום הוכחה הוא Q.E.D; מקורו בביטוי הלטיני האומר אותו הדבר - 'quod erat demonstrandum'.

אם $e \in \mathbb{N}$ הוא איבר ניטרלי ביחס לפעולה הזאת, אז לכל $a \in \mathbb{N}$, $e * a = a$. בפרט, $e * 1 = 1$, כלומר $e^1 = 1$, כלומר $e = 1$. אם כן, 1 הוא המועמד היחיד לתפקיד האיבר הניטרלי. האם השוויון $1 * a = a$ מתקיים לכל $a \in \mathbb{N}$? לא. למשל, $1 * 2 = 1^2 = 1$, כלומר $1 * 2 \neq 2$. והמסקנה - אין איבר ניטרלי ב־ $\mathbb{N}$ ביחס ל־*. ◀

**שאלה 1.1.5**

חזרו לשאלה 1.1.1 ובדקו קיום של איבר ניטרלי בכל אחד מן הסעיפים של השאלה.

**התשובה בעמוד 116**

**דוגמה**

נחזור לקבוצת החזקה, $P(X)$, של קבוצה נתונה $X$. כאמור, הקבוצה הריקה $\phi$, שהיא איבר של $P(X)$, ניטרלית ביחס לאיחוד, שהרי לכל $B \in P(X)$ מתקיים $B \cup \phi = \phi \cup B = B$. הקבוצה $X$, שאף היא איבר של $P(X)$, ניטרלית ביחס לחיתוך, שהרי לכל $B \in P(X)$ מתקיים:

$$B \cap X = X \cap B = B$$ ◀

האנלוגיה בין $P(X)$ (עם פעולות האיחוד והחיתוך) לבין $\mathbb{Z}$ (עם פעולות החיבור והכפל) מתרחבת; בשני המקרים יש איבר ניטרלי ביחס לכל אחת משתי הפעולות. אבל האנלוגיה אינה מלאה: התכונה הבאה שנגדיר תסייע להצביע על הבדל בולט בין השתיים.

---

**הגדרה 1.1.8 איבר הפיך ביחס לפעולה**

תהי * פעולה על קבוצה $A$, ונניח שב־$A$ יש איבר ניטרלי ביחס ל־*.[16] נסמן איבר זה ב־ $e$. איבר $a \in A$ נקרא איבר **הָפיך ביחס ל־***, אם קיים $b \in A$ המקיים $a * b = b * a = e$.

---

**דוגמאות**

א. $A = \mathbb{Z}$, * פעולת החיבור:

כל איברי $\mathbb{Z}$ הפיכים ביחס לפעולה זו, שכן אם $x$ הוא מספר שלם, אז גם $(-x)$ הוא מספר שלם ומתקיים:

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

ב. $A = \mathbb{N}$, * פעולת החיבור:

ראינו בטענה שלפני משפט 1.1.6, שב־ $\mathbb{N}$ אין איבר ניטרלי. לכן, במקרה זה, אין טעם לדון בשאלת הקיום של איברים הפיכים, שהרי הגדרה 1.1.8 מתייחסת רק לפעולות שעבורן יש בקבוצה הנידונה איבר ניטרלי.

ג. $A = \mathbb{N}$, * פעולת הכפל:

המספר 1 הפיך; הוא עצמו מקיים $1 \cdot 1 = 1$. בקבוצה זו, המספר 1 הוא האיבר היחיד שהוא הפיך ביחס לכפל (נמקו).

---

16 בהכרח יחיד, על פי מסקנה 1.1.7.

ד. $A=\mathbb{Z}$ , * פעולת הכפל.

במקרה זה, האיברים ההפיכים הם המספרים $1,-1$ , והם בלבד (נמקו!).

ה. $A=P(X)$ ( $X$ קבוצה כלשהי), * פעולת האיחוד:

האיבר $\phi\in P(X)$ הפיך, כי $\phi\cup\phi=\phi$ . $\phi$ הוא האיבר **היחיד** של $P(X)$ שהוא הפיך ביחס לאיחוד. אכן, אם $B$ הפיך, אז יש $C\in P(X)$ כך ש־ $B\cup C=\phi$ , ומכיוון ש־ $B\subseteq B\cup C$ , בהכרח $B=\phi$ .

ו. $A=P(X)$ ( $X$ קבוצה כלשהי), * פעולת החיתוך:

$X\cap X=X$ , לכן הקבוצה $X$ היא איבר הפיך של $P(X)$ . $X$ הוא האיבר **היחיד** של $P(X)$ שהוא הפיך ביחס לחיתוך. אכן, אם $B\in P(X)$ איבר הפיך, אז יש $C\in P(X)$ כך ש־ $B\cap C=X$ . מכך ש־ $X\supseteq B\supseteq B\cap C=X$ נובע: $B=X$ . ◀

הדוגמאות הללו חושפות הבדל בין $P(X)$ עם פעולות האיחוד והחיתוך, לבין $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל: ב־ $\mathbb{Z}$, כל האיברים הפיכים ביחס לחיבור, ויש שני איברים הפיכים ביחס לכפל. לעומת זאת, ב־ $P(X)$ יש איבר אחד בלבד שהוא הפיך ביחס לאיחוד, ואיבר אחד בלבד שהוא הפיך ביחס לחיתוך.

ב־ $\mathbb{Z}$ עצמה, הדוגמאות מצביעות על שוני בין תכונות החיבור והכפל. ביחס לחיבור - **כל** איברי $\mathbb{Z}$ הפיכים; ביחס לכפל - רק שניים מהם. ריבוי איברים הפיכים ביחס לפעולה נתונה היא תכונה מתמטית נוחה מאוד. שפע איברים הפיכים ביחס לכפל קיים בקבוצת **המספרים הרציונליים**, שאותה נהוג לסמן ב־ $\mathbb{Q}$.[17]

כמה עובדות על אודות מספרים רציונליים:

- מספר רציונלי הוא מנת החילוק של מספר שלם במספר שלם שונה מ־0.
- $\mathbb{Q}$ מכיל את $\mathbb{Z}$, משום שכל מספר שלם הוא מספר רציונלי (כל מספר שלם $a$ הוא מנת חילוק של עצמו ב־1, $\frac{a}{1}=a$).
- ההצגה של מספר רציונלי כמנה איננה יחידה. כפי שלמדתם בבית־הספר, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc$ (הסימן "$\Leftrightarrow$", המכונה סימן השקילות, מציין את צירוף המילים "אם ורק אם".) למשל:

  $2\cdot 6=4\cdot 3$ , לכן $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ ,

  $4\cdot 1\neq 3\cdot 3$ , לכן $\frac{1}{3}\neq\frac{3}{4}$ .

17 לציון המילה Quotient - מנה.

- חיבור וכפל של מספרים רציונליים, מוגדרים, כידוע, לפי הכללים האלה:

עבור $a,b,c,d$ שלמים, $d,b \neq 0$,
$$\begin{cases} \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd} \end{cases}$$

קבוצת המספרים הרציונליים, עם פעולות החיבור והכפל עליה, היא בעלת שלל תכונות מתמטיות רצויות. את העיקריות שבהן נסכם בטענה הבאה, החותמת את הסעיף.

---

**טענה 1.1.9**

תהי $\mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים ותהיינה $+$ ו־ $\cdot$ פעולות החיבור והכפל עליה. אז:

א. $\mathbb{Q}$ סגורה לגבי שתי הפעולות.

ב. שתי הפעולות הן קיבוציות.

ג. שתי הפעולות הן חילופיות.

ד. ב־ $\mathbb{Q}$ המספר 0 ניטרלי ביחס לחיבור והמספר 1 ניטרלי ביחס לכפל.

ה. הכפל מתפלג מעל החיבור.

ו. כל איברי $\mathbb{Q}$ הפיכים ביחס לחיבור, וכל איברי $\mathbb{Q}$ פרט ל־0 הפיכים ביחס לכפל. אכן,

לכל $a,b$ שלמים, $b \neq 0$,
$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=0$$

לכל $a,b$ שלמים, $a,b \neq 0$,
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$$

---

לא נוכיח טענה זו – אנו משאירים לקוראים לוודא את נכונותה.

# 1.2 שדות

## א. הקדמה

**הַפְשָׁטָה** היא אחד התהליכים הרווחים במתמטיקה. על פי רוב, נקודת המוצא היא אובייקט מתמטי נתון שאנו מתעניינים בו, אשר אחדות מתכונותיו המוכרות לנו נראות בסיסיות או רצויות במיוחד. ההפשטה מתבטאת בכך, שבמקום להמשיך לחקור את התכונות של האובייקט המוכר, אנו אומרים: הבה נחקור את התכונות של אובייקט מתמטי מופשט, אשר לגביו נקבל כ**אקסיומות** את התכונות הרצויות של האובייקט המוכר (שאנו **מניחים** שהאובייקט המופשט ניחן בהן). האובייקט המוכר משמש, אם כן, כמקור השראה להגדרת אובייקט מופשט, אשר מלבד התכונות שבחרנו לייחס לו, איננו יודעים עליו ולא כלום. האובייקט המופשט ישמש כאב טיפוס לאובייקטים בעלי התכונות שמעניינות אותנו; כל טענה שנוכיח ביחס אליו, תהיה בהכרח נכונה לגבי האובייקט המוכר, שכן היא נובעת מתכונות שיש לו. כל טענה כזאת תהיה נכונה גם לגבי כל אובייקט מתמטי אחר שמקיים את האקסיומות. הוכחת טענות הנוגעות לאובייקט המופשט תהיה אפוא בבחינת "תַּפַשְׂתָּ מְרוּבֶּה".

**דוגמה**

בהגדרה 1.1.5 הגדרנו איבר ניטרלי ביחס לפעולה על קבוצה $A$. אחר כך הוכחנו במסקנה 1.1.7, שאם בקבוצה (כלשהי) יש איבר ניטרלי לגבי פעולה (כלשהי), אז יש רק אחד כזה. המסקנה מדברת על אובייקט מופשט (קבוצה) ופעולה עליה. אין בה שום הנחות, לא ביחס לקבוצה ולא ביחס לפעולה. המסקנה מלמדת אפוא על מגוון גדול של פעולות שונות על קבוצות שונות: אם בקבוצה מסוימת כלשהי נמצא איבר ניטרלי ביחס לפעולה מסוימת, אין צורך לבדוק את יחידותו, שכן המסקנה הכללית מבטיחה אותה. ◄

מידת ההצלחה של הפשטה נקבעת במבחן התוצאה. חלק נכבד מניסיונות ההפשטה של מתמטיקאים עולה בתוהו: במשך הזמן מתברר, שחקר האובייקט המופשט שהגדירו אינו מניב ברכה מרובה. ההפשטות המוצלחות הן אלה אשר בדיעבד מסתבר שהיה בהן כדי להוליד תובנות חדשות בעלות ערך.

בסעיף זה נגדיר את אחד המבנים המופשטים המרכזיים של האלגברה – **שָׂדֶה**. האובייקט המוכר שֶׁיְּסַפֵּק את ההשראה להגדרת מבנה זה הוא קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות; לאובייקט המופשט שייקרא "שדה" נייחס תכונות שתיקראנה **אקסיומות השדה**. אלה תהיינה התכונות הבסיסיות של החיבור והכפל על $\mathbb{Q}$, שנמנו בטענה 1.1.9 בסוף הסעיף הקודם.

האובייקט המוכר שבחרנו בו הוא מבנה בעל שלושה מרכיבים: המרכיב הראשון הוא הקבוצה $\mathbb{Q}$, שני המרכיבים האחרים הם פעולות החיבור והכפל על $\mathbb{Q}$. "שדה" מופשט יהיה, בהתאם לכך, מבנה מתמטי בעל שלושה מרכיבים: קבוצה ושתי פעולות עליה. הקבוצה תסומן בדרך כלל באות $F$.[1] שתי הפעולות תסומנה ב־ $+_F$ וב־ $\cdot_F$. לפעולה שסומנה $+_F$ נקרא "חיבור על $F$", ולפעולה שסומנה $\cdot_F$ נקרא "כפל על $F$".

1 להזכירכם, האות $F$ מלשון field – שדה.

בחירת הסימנים והכינויים הללו עבור הפעולות אינה שרירותית: היא נועדה להזכיר את מקור ההשראה - $\mathbb{Q}$ עם פעולות החיבור והכפל של מספרים. כשחושבים על המבנה המסוים הזה, קל להבין את אקסיומות השדה שנציג מיד; מה שהן "אומרות" הוא, ששתי הפעולות במבנה המופשט המכונה "שדה" הן בעלות התכונות הבסיסיות שיש לחיבור ולכפל של מספרים רציונליים. עם זאת, במהלך העיון בהגדרת השדה (הגדרה 1.2.1 להלן), עליכם לזכור ש־ $F$ אינה בהכרח קבוצה של מספרים, ושפעולות החיבור והכפל על $F$ אינן בהכרח חיבור וכפל של מספרים. השֵמות "חיבור" ו"כפל", שיוּחדו במקורם לפעולות מסוימות, משמשים בהגדרת השדה ככינויים לפעולות מופשטות בעלות תכונות מסוימות.

התופעה של מוּתג, שהופך לשם עצם כללי, מוכרת משפת הדיבור: למשל, למקרר חשמלי (כלשהו) נהגו (בעבר הרחוק) לקרוא "פריג'ידר" (המותג של החברה האמריקאית "Frigidaire"); "ג'יפ" - מותג של חברת קרייזלר - הפך בפי רבים לשם גנרי המקביל לרכב שטח; "סלוטייפ" - מותג שהפך לשם גנרי; "ג'קוזי" - בריכה קטנה, המחוממת לטמפרטורה גבוהה, קרוי על שם חברת "ג'קוזי" האמריקאית המייצרת מתקנים כאלה. כך גם לגבי המותגים הישראליים המוכרים סוכרזית, במבה, ארטיק, קרמבו וטרופית. אף על פי כן, בתחילת הדרך נקפיד לסמן את הפעולות של השדה המופשט בדרך המשקפת את כלליותן, ומבהירה את עובדת היותן של הפעולות על הקבוצה $F$, $+_F$ ו־ $\cdot_F$, סימנים שאינם חדשים, אבל גם לא סתם $+$ו־ $\cdot$ לעת עתה.

## ב. הגדרת השדה

**הגדרה 1.2.1 שדה**

**שדה** הוא מבנה מתמטי, המורכב מקבוצה $F$, ומשתי פעולות על $F$ שנקרא להן **חיבור** ו**כפל**, שאותן נסמן $+_F$ ו־ $\cdot_F$ (בהתאמה), כך שמתקיימות הדרישות האלה (**אקסיומות השדה**):

א. הקבוצה $F$ **סגורה** לגבי החיבור ולגבי הכפל.

כלומר, לכל $a,b \in F$ מתקיימים:
$$a +_F b \in F$$
וגם:
$$a \cdot_F b \in F$$

ב. פעולות החיבור והכפל הן **קיבוציות** (אָסוציאטיבִיוֹת).

כלומר, לכל $a,b,c \in F$ מתקיימים:
$$(a +_F b) +_F c = a +_F (b +_F c)$$
וגם:
$$(a \cdot_F b) \cdot_F c = a \cdot_F (b \cdot_F c)$$

ג. פעולות החיבור והכפל הן **חילופיות** (קומוטטיביוֹת).

כלומר, לכל $a,b \in F$ מתקיימים:
$$a +_F b = b +_F a$$
וגם:
$$a \cdot_F b = b \cdot_F a$$

ד. ב־ $F$ יש **איבר ניטרלי** (יחיד)[2] ביחס לחיבור שנסמנו $0_F$, ויש **איבר ניטרלי** (יחיד)[3] ביחס לכפל שנסמנו $1_F$.[4] כלומר, לכל $a \in F$ מתקיים:

$$a +_F 0_F = 0_F +_F a = a$$

וכן:

$$a \cdot_F 1_F = 1_F \cdot_F a = a$$

ה. האיברים הניטרליים ביחס לחיבור וביחס לכפל הם איברים **שונים** של $F$.

כלומר:

$$0_F \neq 1_F$$

ו. **הכפל מתפלג מעל החיבור** (דיסטריבוטיביות).

כלומר, לכל $a,b,c \in F$ מתקיים:

$$a \cdot_F (b +_F c) = (a \cdot_F b) +_F (a \cdot_F c)$$

ז. **כל** איברי $F$ **הפיכים** ביחס לחיבור, **וכל** איברי $F$ **פרט ל־** $0_F$ **הפיכים** ביחס לכפל. כלומר:

לכל $a \in F$ יש $a' \in F$, כך ש־

$$a +_F a' = a' +_F a = 0_F$$

ולכל $a \in F$ המקיים $a \neq 0_F$, יש $a'' \in F$, כך ש־

$$a \cdot_F a'' = a'' \cdot_F a = 1_F$$

---

**הערות**

א. האיברים הניטרליים לגבי החיבור והכפל, הנזכרים באקסיומה ד, סומנו באופן המזכיר את הקֶשֶר המספרי המוכר, $0_F$ ו־ $1_F$. גם את שמותיהם נגזור אפוא מאותו הקשר. $0_F$ ייקרא **האפס** של השדה $F$, ו־ $1_F$ ייקרא **היחידה** של השדה $F$. נאמץ גם את המוסכמה המוכרת בקשר לַסֵדֶר של פעולות החשבון במספרים: ביצוע פעולות כפל קודם לביצוע פעולות חיבור, אלא אם כן יש סוגריים המציינים אחרת. לאור המוסכמה הזאת, הסוגריים בביטוי $(a \cdot_F b) +_F (a \cdot_F c)$ מאקסיומה ו הם מיותרים; אפשר לרשום פשוט $a \cdot_F b +_F a \cdot_F c$. לעומת זאת, בביטוי $a \cdot_F (b +_F c)$ מאותה אקסיומה, הסוגריים הם חיוניים - בלעדיהם, הביטוי היה מסמל את $(a \cdot_F b) +_F c$.

ב. כאשר נרצה להביע טענה כללית על שדות, לרוב נאמר בקצרה "יהי $F$ שדה", כאשר כוונתנו בכך היא, ש־ $F$ היא קבוצה אשר עליה מוגדרות פעולות "חיבור" ו"כפל", כך ש־ $F$, בצירוף הפעולות הללו, מהווה שדה.

ג. באקסיומות א-ה , ההקבלה בין החיבור והכפל היא מלאה. לא כן באקסיומה ו, הקובעת שאחת משתי הפעולות (הכפל) מתפלגת מעל האחרת (החיבור). לא מופיעה בה הדרישה המקבילה, שהחיבור יתפלג מעל הכפל. ההבחנה בין החיבור לכפל ניכרת גם באקסיומה האחרונה (אקסיומה ז). באקסיומה זו, הדרישה לגבי החיבור היא ש**כל** איברי $F$ יהיו הפיכים, בעוד שלגבי הכפל -

---

2 המילה "יחיד" מופיעה בסוגריים, שכן: כאשר בקבוצה יש איבר ניטרלי ביחס לפעולה, בהכרח יש רק איבר אחד כזה (ראו מסקנה 1.1.7). בהתאם לכך, מספיק לקבל כאקסיומה את הקיום של איברים ניטרליים ביחס ל־ $+_F$ וביחס ל־ $\cdot_F$. היחידות נובעת מהקיום.

3 ראו בהערה הקודמת.

4 זכרו ש־ $F$ איננה בהכרח קבוצה של מספרים, וממילא $0_F$ ו־ $1_F$ אינם בהכרח מספרים. האינדקס המופיע בהם נועד להזכיר שאלה איברים של $F$. ה־0 וה־1 בסימונים הללו נועדו להזכיר שבדוגמה המכוננת - קבוצת המספרים הרציונליים עם פעולות החיבור והכפל - האיברים הניטרליים ביחס לחיבור ולכפל הם 0 ו־1 (בהתאמה).

איננו דורשים את ההפיכות של $0_F$. שימו לב, איננו דורשים ש־ $0_F$ לא יהיה הפיך, אבל כפי שנראה בקרוב, מן האקסיומות האחרות נובע ש־ $0_F$ אינו הפיך.

הגדרה 1.2.1 אינה קלה לעיכול; נפרק אותה למרכיביה:

בכל שדה יש שלושה מרכיבים: קבוצה $F$, פעולת "חיבור", ופעולת "כפל".

כל אחת מהפעולות בנפרד מקיימת תנאים ההופכים אותה ל"נוחה": הקבוצה סגורה ביחס לפעולה, הפעולה קיבוצית וחילופית, וקיים ב־ $F$ איבר שהוא ניטרלי ביחס אליה. בנוסף, לגבי פעולת החיבור - כל האיברים הם הפיכים, ולגבי פעולת הכפל - כל האיברים פרט לַאפס של השדה הם הפיכים. תכונת הפילוג של הכפל מעל החיבור (אקסיומה ו) מְקַשֶּׁרֶת בין שתי הפעולות.

**דוגמאות**

- דוגמה אחת לשדה כבר ראיתם - קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות. לשדה הזה נקרא **שדה המספרים הרציונליים,** ובקיצור - **השדה** $\mathbb{Q}$.
- דוגמה נוספת היא **קבוצת המספרים הממשיים**, שסימונה המקובל $\mathbb{R}$.[5] בקורס זה לא נתעמק בשאלה מה הם המספרים הממשיים;[6] נסתפק בהבנה האינטואיטיבית המוקנית בבית הספר, שקבוצה זו כוללת את המספרים הרציונליים, ומספרים נוספים, המכונים אי־רציונליים; שהמספרים הכלולים בה מייצגים את כלל הנקודות על ציר המספרים המוכר, ושהחיבור והכפל של מספרים ממשיים מקיימים את כל אקסיומות השדה. למבנה המורכב מן הקבוצה $\mathbb{R}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות נקרא **שדה המספרים הממשיים,** ובקיצור - **השדה** $\mathbb{R}$. ◀

לאיברים של שדה $F$ נהוג לקרוא **סְקָלָרִים**.[7] למשל, הסקלרים של השדה $\mathbb{Q}$ הם המספרים הרציונליים. הסקלרים של השדה $\mathbb{R}$ הם המספרים הממשיים.

לַמבנה, המורכב מקבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות **לעולם לא נקרא** "שדה המספרים השלמים". המבנה הזה אינו ראוי להיקרא "שדה". אמנם הוא מקיים את האקסיומות א–ו מהגדרה 1.2.1, ובנוסף כל איבריו הפיכים ביחס לחיבור, אבל רק שניים מאינסוף איבריו (המספר 1 והמספר $-1$) הם הפיכים ביחס לכפל.

**שאלה 1.2.1**

א. למבנה המורכב מקבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ עם פעולות החיבור והכפל הרגילות **לעולם לא נקרא** "השדה $\mathbb{N}$". מדוע?

ב. תהי $X$ קבוצה לא ריקה. נניח ש־ $F = P(X)$, ושפעולות ה"חיבור" וה"כפל" על $F$ הן פעולות האיחוד והחיתוך (בהתאמה). האם המבנה שתיארנו הוא שדה?

**התשובה בעמוד 116**

5 הסמל $\mathbb{R}$ נבחר בשל המילה Real - ממשי.

6 בשאלה זו עוסקת היחידה הראשונה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1**.

7 מקור הכינוי יתבהר בהמשך.

## ג. הנגדי וההופכי של איבר בשדה

**טענה 1.2.2**

יהי $F$ שדה, ויהי $a \in F$. קיים איבר **יחיד** $a' \in F$ כך ש- $a +_F a' = 0_F$.

**הוכחה**

כל איבר בשדה $F$ הוא הפיך ביחס לחיבור (אקסיומה ז). לכן בוודאי **קיים** $a' \in F$, העונה על הדרישה $a +_F a' = 0_F$.

להוכחת **היחידות** - נניח שגם $a'' \in F$ עונה על הדרישה, כלומר שמתקיים $a +_F a'' = 0_F$, ונוכיח שבהכרח $a'' = a'$:

מאחר שהחיבור הוא חילופי (אקסיומה ג), ההנחה $a +_F a'' = 0_F$ מבטיחה: $a'' +_F a = 0_F$

כעת נבחן את הביטוי $(a'' +_F a) +_F a'$.

מצד אחד, לפי ההנחה ביחס ל- $a''$, $(a'' +_F a) +_F a' = 0_F +_F a' = a'$

מצד שני, מאחר שהחיבור הוא קיבוצי (אקסיומה ב),

$$(a'' +_F a) +_F a' = a'' +_F (a +_F a') = a'' +_F 0_F = a''$$

לכן $a'' = a'$.

**מ.ש.ל.**

לאור טענה 1.2.2, נוכל להגדיר:

**הגדרה 1.2.3 האיבר הנגדי**

יהי $a$ איבר של שדה $F$. לַאיבר היחיד $a' \in F$ המקיים $a +_F a' = 0_F$ נקרא **האיבר הנגדי** ל- $a$, ונסמנו $-a$.

אם כן, בשדה $F$, לכל $a \in F$ מתקיים $a +_F (-a) = 0_F$, ולאור החילופיות של החיבור בשדה, נובע שמתקיים גם $(-a) +_F a = 0_F$, ובסך הכול: $a +_F (-a) = (-a) +_F a = 0$

הנה "המקבילה הכפלית" של טענה 1.2.2:

**טענה 1.2.4**

יהי $F$ שדה, ויהי $a \in F$, $a \neq 0_F$. קיים איבר **יחיד** $a' \in F$ כך ש- $a \cdot_F a' = 1_F$.

**הוכחה**

נסו כוחכם. אם לא תצליחו - עברו על הוכחת טענה 1.2.2, והחליפו כל הופעה של המילה "חיבור" במילה "כפל", כל הופעה של הסימן $+_F$ בסימן $\cdot_F$, וכל הופעה של $0_F$ ב- $1_F$. התוצאה תהיה ההוכחה המבוקשת.

**מ.ש.ל.**

ייתכן שתתהו מדוע נזקקנו כאן לדרישה $a \neq 0_F$. התשובה תינתן בהמשך.

לאור טענה 1.2.4, נוכל להגדיר:

---

**הגדרה 1.2.5 האיבר ההופכי**

יהי $a \neq 0_F$ איבר של שדה $F$. לאיבר היחיד $a' \in F$, המקיים $a \cdot_F a' = 1_F$ נקרא **האיבר ההופכי** ל־ $a$, ונסמנו $a^{-1}$.

---

אם כן, בשדה $F$, לכל $a \neq 0_F$ מתקיים $a \cdot_F a^{-1} = 1_F$, והחילופיות של הכפל מבטיחה שמתקיים גם $a^{-1} \cdot_F a = 1_F$, כלומר:
$$a \cdot_F a^{-1} = a^{-1} \cdot_F a = 1$$

**שימו לב!** לפי אקסיומה ז של הגדרת השדה, אם $F$ שדה, $a \in F$ ו־ $a \neq 0_F$, אז $a$ הפיך הן ביחס לחיבור, הן ביחס לכפל . למרות ההקבלה בין ה"תפקידים" של $-a$ ו־ $a^{-1}$, בחרנו לסמנם בסימונים שונים ולכנותם בשֵמות שונים: $-a$ הוא **הנגדי ל־** $a$, $a^{-1}$ הוא **ההופכי ל־** $a$. ההבחנה הזאת מקלה על ההתבטאות.

**דוגמאות**

בשדה המספרים הממשיים (השדה $\mathbb{R}$),

**הנגדי** ל- $\frac{\sqrt{2}}{5}$ הוא $\frac{-\sqrt{2}}{5}$, ובסימנים: $$-\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{5}$$

**ההופכי** ל- $\frac{\sqrt{2}}{5}$ הוא $\frac{5}{\sqrt{2}}$, ובסימנים: $$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

▶

**שאלה 1.2.2**

תהי $F$ קבוצת המספרים הרציונליים. נגדיר על $F$ שתי פעולות שיסומנו $+_F$ ו־ $\cdot_F$ כך:

$+_F$ היא פעולת החיבור הרגילה,

$\cdot_F$ מוגדרת באופן הבא: $a \cdot_F b := |ab|$

($|x|$ מציין את הערך המוחלט של המספר $x$).

בבירור, הקבוצה $F$ סגורה לגבי הכפל, והפעולה $\cdot_F$ קיבוצית וחילופית.

א. האם המספר 1 ניטרלי ביחס לפעולה $\cdot_F$?

ב. האם המבנה המורכב מן הקבוצה $F$ בצירוף הפעולות $+_F$ ו־ $\cdot_F$ הוא שדה?

**התשובה בעמוד 116**

משאלה 1.2.2. אנו למדים, שעל אותה קבוצה ניתן להגדיר זוגות שונים של פעולות כך שהקבוצה בצירוף זוג אחד של פעולות תהיה שדה, ובצירוף זוג אחר של פעולות - לא. הקבוצה $\mathbb{Q}$ עם החיבור

והכפל הרגילים היא שדה (זהו **השדה** $\mathbb{Q}$). אותה קבוצה, עם החיבור הרגיל וה"כפל" שהוגדר בשאלה 1.2.2, **איננה** שדה.

אנו מקווים ומאמינים שכבר הורגלתם לכך, שכאשר מדברים על מבנה המורכב מקבוצה שעליה מוגדרות פעולות "חיבור" ו"כפל", הכוונה איננה בהכרח לקבוצה של מספרים, או לחיבור ולכפל הרגילים. נרשה לעצמנו אפוא לְפַשֵּׁט את הסימונים עוד יותר. פעולות החיבור והכפל בשדה כלשהו $F$ יסומנו מעתה ב־ $+$ וב־ $\cdot$, במקום $+_F$ ו־ $\cdot_F$, בהתאמה. האפס (האיבר הניטרלי לגבי $+_F$) יסומן ב־0 (במקום $0_F$), והיחידה (האיבר הניטרלי לגבי $\cdot_F$) - ב־1 (במקום $1_F$). כמו כן, לעיתים נשמיט את סימן הכפל בין שני איברים ובמקום הביטוי $a \cdot b$ נכתוב בקצרה $ab$, בדומה למקובל עבור כפל מספרים.

## ד. תכונות האפס של שדה

**טענה**

בכל שדה $F$, לכל $a \in F$ מתקיים: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

**הוכחה**

מספיק להראות, שלכל $a \in F$ מתקיים $a \cdot 0 = 0$. מכך ומן החילופיות של הכפל נקבל שגם $0 \cdot a = 0$.

ובכן, 0 ניטרלי ביחס לחיבור. לכן לכל $a \in F$, $a + 0 = a$. בפרט, $0 + 0 = 0$

לכן: $a(0+0) = a0$

ולאור הפילוג של הכפל מעל החיבור, נובע מכך ש־ $a0 + a0 = a0$

לשני צדי השוויון האחרון נוסיף כעת את $-a0$, הנגדי ל־ $a0$, ונקבל:

$$(a0 + a0) + (-a0) = a0 + (-a0)$$

מאחר ש־ $a0 + (-a0) = 0$, השוויון הקודם מבטיח ש־ $(a0 + a0) + (-a0) = 0$.

מצד שני, בשל קיבוציות החיבור, $(a0 + a0) + (-a0) = a0 + [a0 + (-a0)] = a0 + 0 = a0$

ולכן $a0 = 0$ כפי שנטען.

**מ.ש.ל.**

הטענה שבשאלה הבאה מבהירה את הצורך בתנאי $a \neq 0$ בטענה 1.2.4.

**שאלה 1.2.3**

יהי $F$ שדה, ויהיו $a, b \in F$. הראו:

אם $ab = 0$ אז לפחות אחד מבין $a, b$ הוא 0.

הדרכה: הניחו ש־ $ab = 0$ וש־ $a \neq 0$. הוכיחו שבהכרח $b = 0$.

**התשובה בעמוד 116**

את האמור בטענה האחרונה ובשאלה 1.2.3 שבעקבותיה, אפשר לסכם בקיצור כך:

**משפט 1.2.6**

יהי $F$ שדה ויהיו $a,b \in F$. השוויון $ab = 0$ מתקיים אם ורק אם $a = 0$ או $b = 0$.[8]

בעזרת משפט 1.2.6 נבהיר כעת מדוע נמנענו מלדרוש באקסיומה ז בהגדרת השדה, ש־0 יהיה הפיך ביחס לכפל.

**מסקנה 1.2.7**

האפס של שדה $F$ **אינו** הפיך ביחס לכפל.

**הוכחה**

לפי משפט 1.2.6, לכל $a \in F$, $0a = 0$. לפי אקסיומה ה בהגדרת השדה, $1 \neq 0$. לכן לכל $a \in F$, $0a \neq 1$. לפיכך אין $a \in F$ כך ש־ $0a = 1$, ומכאן ש־0 אינו הפיך ביחס לכפל.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 1.2.4**

יהי $F$ שדה, ויהיו $a,b \in F$.

א. הוכיחו כי: $-(-a) = a$

ב. הוכיחו כי אם $a \neq 0$, אזי: $(a^{-1})^{-1} = a$

ג. הראו כי $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

ובפרט: $(-1)b = -b$

ד. הראו כי: $(-a)(-b) = ab$

**התשובה בעמוד 116**

## ה. סכומים ומכפלות של איברים רבים

פעולת החיבור בשדה $F$ מתאימה תוצאה לכל זוג איברים מתוך $F$.

בהינתן איברים $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geq 3$, מתוך שדה $F$, נהוג לסמן ב־ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ את האיבר של $F$ המתקבל כך:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n := (\ldots((a_1 + a_2) + a_3)\ldots) + a_n$$

כלומר $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ הוא האיבר של $F$, המתקבל על־ידי חיבור זוגות משמאל לימין: קודם מוסיפים ל־ $a_1$ את $a_2$, אחר־כך מוסיפים ל־ $a_1 + a_2$ את $a_3$, אחר כך מוסיפים לתוצאה את המחובר הבא, וכך הלאה עד $a_n$.

8 במתמטיקה, "או" משמעו "ו/או". בהתאם לכך המשפט "$a = 0$ או $b = 0$" אינו מוציא מכלל אפשרות ש־ $a = 0$ וגם $b = 0$.

**שאלה 1.2.5**

יהיו $a,b,c,d$ איברים של שדה כלשהו $F$. הראו: $a+b+c+d=(d+a)+(b+c)$

**התשובה בעמוד 121**

שאלה 1.2.5 ממחישה תופעה כללית: הסכום $a_1+a_2+\ldots+a_n$ לא ישתנה אם נשנה את סדר ההופעה של המחוברים, או את סדר ביצוע הפעולות של חיבור זוגות. עובדה זו (שעל הוכחתה הכללית נוותר) נובעת מן הקיבוציות והחילופיות של פעולת החיבור בשדה. בשדה הרציונליים אתם רגילים להיעזר בה כדי לפשט חישובים. למשל, $1+7+9+3=(9+1)+(7+3)=10+10$ באופן דומה, בכל שדה $F$, עבור $n\geq 3$, נהוג לסמן ב־ $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$ את האיבר של $F$ המתקבל כך:

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n:=(\ldots((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)\ldots)\cdot a_n$$

כלומר $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$ הוא האיבר של $F$, המתקבל על־ידי כפל זוגות משמאל לימין: קודם כופלים את $a_1$ ב־ $a_2$, אחר־כך כופלים את $a_1\cdot a_2$ ב־ $a_3$, אחר כך כופלים את התוצאה באיבר הבא, וכך הלאה עד $a_n$. מאחר שגם הכפל חילופי וקיבוצי, המכפלה $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_n$ לא תשתנה אם נשנה את סדר ההופעה של הגורמים, או את סדר ביצוע הפעולות של כפל זוגות (לא נוכיח זאת באופן פורמלי).

## ו. שדות סופיים

כל הטענות בנוגע לשדות, שהוכחו בטקסט ובשאלות, הן טענות אשר מראש ידענו שהן נכונות בשדה הרציונליים $\mathbb{Q}$ ובשדה הממשיים $\mathbb{R}$. העובדה שהצלחנו להוכיח אותן בשדה כללי, מלמדת שהן מתחייבות מאקסיומות השדה, כלומר שאין צורך בשום מידע פרט לאקסיומות האלה כדי להוכיח את נכונותן.

השדות $\mathbb{Q}$ ו־ $\mathbb{R}$ הם **שדות אינסופיים**, כלומר שדות שקבוצות האיברים שלהם אינסופיות. האם קבוצת איבריו של כל שדה $F$ בהכרח אינסופית? האינסופיות של $F$ אמנם אינה נזכרת בהגדרת השדה, אבל א־פריורי ניתן להעלות על הדעת שהיא מתחייבת מאקסיומות השדה. כדי להשתכנע שלא כך הדבר, עלינו להצביע על שדה שקבוצת איבריו סופית. לצורך זה ננקוט גישה אחרת מזו שנקטנו עד כה: במקום לתאר קבוצה (סופית) ושתי פעולות עליה, ולבדוק אם המבנה שתיארנו הוא שדה, נבחן את הגדרת השדה וננסה לחלץ מתוכה דוגמה מתאימה, פשוטה ככל האפשר.

כצעד ראשון נשאל: מהי הקבוצה הקטנה ביותר $F$, שעשויה להיות קבוצת האיברים של שדה?

מראש ברור, שב־ $F$ חייבים להיות לפחות שני איברים. זאת - משום שאם $F$ שדה, אז ללא תלות בשאלה כיצד מוגדרות פעולת החיבור והכפל על $F$, יש ב־ $F$ איברים ניטרליים ביחס לחיבור ולכפל (ראו באקסיומה ד), ולפי אקסיומה ה - אלה איברים **שונים** של $F$.

במבט ראשון לא נראה שיתר האקסיומות "כופות" עלינו איברים נוספים. אם כן, הקבוצה הקטנה ביותר שאותה נוכל לשקול כקבוצת האיברים של שדה, היא קבוצה בת שני איברים. יתר על כן, אם יש שדה בן שני איברים, אנו יודעים מראש מה הם ה"תפקידים" המיועדים לשני האיברים הללו. אחד מהם יהיה האפס, והאחר – היחידה של השדה. בהתאם לכך, נסמן אותם ב־ $0$ וב־$1$, בהתאמה. הקבוצה $F$, שאותה ננסה להפוך לשדה על־ידי הגדרת פעולות מתאימות עליה, היא $F = \{0,1\}$.[9]

בְּנִיסיון להגדיר את הפעולות, משחקת לטובתנו העובדה שבקבוצה $F$ יש רק שני איברים, ולפיכך עלינו להגדיר את תוצאות פעולות החיבור והכפל למספר מצומצם של זוגות מתוך $F$. יתר על כן: מאחר ש־ $F$ אמורה להיות סגורה לגבי החיבור והכפל (אקסיומה א), הרי שלכל תוצאת חיבור או כפל יש רק שני ערכים אפשריים – $0$ או $1$. את הפעולות נוח יהיה לתאר בעזרת שתי טבלאות, אחת לכל פעולה:

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | | $x$ |
| $1$ | | |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | | |
| $1$ | $y$ | |

בטבלה השמאלית, במשבצת שבה מופיע כרגע $x$ עלינו לרשום את הערך של $0+1$. לפי אותו עיקרון, בטבלה הימנית, במשבצת שבה רשום $y$ עלינו לרשום את הערך של $1 \cdot 0$. מיד נראה כי השאיפה שהפעולות שנגדיר תקיימנה את אקסיומות השדה, מכתיבה את כל הערכים שעלינו לרשום בטבלאות.

א. $0$ צריך להיות ניטרלי ביחס לחיבור, לפיכך לכל $a \in F$ חייב להתקיים $a = 0 + a = a + 0 = a$. מכאן שבהכרח $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ וכן $0 + 0 = 0$.

$1$ אמור להיות ניטרלי ביחס לכפל, לפיכך לכל $a \in F$ חייב להתקיים $1a = a1 = a$, ומכאן שבהכרח $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$ וכן $1 \cdot 1 = 1$.

האילוצים הללו מכתיבים שלוש מתוך ארבע התוצאות שעלינו לרשום בכל טבלה:

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

בכל טבלה נותרה משבצת ריקה אחת בלבד.

9 נדגיש שוב: הסימנים $0,1$ אינם המספרים הממשיים המוכרים לכם; אנו משתמשים בסמלים הללו רק כדי לזכור את תפקידיהם במבנה שאנו מנסים לבנות.

ב. כדי ש־ $F$ יהווה שדה, כל איבר של $F$, ובפרט 1, חייב להיות הפיך ביחס לחיבור. פירוש הדבר הוא, שחייב להימצא $a \in F$, כך ש־ $1 + a = a + 1 = 0$. יש רק שני מועמדים, $a = 0$ או $a = 1$. המועמד $a = 0$ לא יצלח, כי בטבלה כבר רשום ש־ $1 + 0 = 1$. לכן בהכרח $a = 1$, כלומר בהכרח $1 + 1 = 0$. נשבץ תוצאה זו בטבלת החיבור:

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

ג. להשלמת טבלאות הפעולות נותרה רק משבצת אחת למילוי בטבלת הכפל, וגם עבורה יש אילוץ המכתיב את התוצאה. לפי משפט 1.2.6, לכל איבר $a$ בכל שדה, מתקיים $a \cdot 0 = 0$. לכן, כדי ש־ $F$ יהיה שדה, אין ברירה אלא להגדיר $0 \cdot 0 = 0$.

אם כן,

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

כל המשבצות בטבלאות הפעולה מולאו בלית ברירה; הגדרת הפעולות נכפתה עלינו לפי דרישות המופיעות בהגדרת השדה. עדיין לא הוכחנו כי הקבוצה $F$, בצירוף הפעולות $+,\cdot$ האלה, אכן מהווה שדה. כדי לעשות זאת, צריך לבדוק **שכל** האקסיומות הנזכרות בהגדרה 1.2.1 מתקיימות במבנה $F = \{0,1\}$ עם פעולות ה"חיבור" וה"כפל" שתיארנו. את הבדיקה המאשרת שלפנינו שדה, נשאיר לכם.

- השדה בן שני האיברים שבנינו לעיל יסומן, מעתה ואילך, בסימון $\mathbb{Z}_2$.

**שימו לב!** $\mathbb{Z}_2$ הוא שדה, ובשדה $\mathbb{Z}_2$ מתקיים: $1 + 1 = 0$. עובדה זו מלמדת שהטענה $1 + 1 \neq 0$, שהיא טענה נכונה בשדות $\mathbb{Q}$ ו־ $\mathbb{R}$, **אינה נובעת** מאקסיומות השדה בלבד, אלא היא נסמכת על תכונות נוספות של המספרים הרציונליים/הממשיים: אילו נבעה מן האקסיומות, היא הייתה נכונה בכל שדה, ובפרט ב־ $\mathbb{Z}_2$.

### שאלה 1.2.6

מהו $(-1)$ בשדה $\mathbb{Z}_2$? לשון אחר - מהו האיבר הנגדי ל־1 בשדה $\mathbb{Z}_2$?

**התשובה בעמוד 117**

כדי להרחיב את מגוון הדוגמאות של שדות, נבחר מספר טבעי כלשהו $n \geq 2$, ונסתכל בקבוצה שתסומן $\mathbb{Z}_n$ המורכבת מן המספרים השלמים מ־0 עד $n - 1$:
$$\mathbb{Z}_n = \{0,1,\ldots,n-1\}$$
זוהי קבוצה בת $n$ איברים.

על הקבוצה הזאת נגדיר "חיבור" חדש, שיסומן $+_n$, ו"כפל" חדש, שיסומן $\cdot_n$, כך:
לכל $a,b \in \mathbb{Z}_n$,

- ה"סכום", $a +_n b$ הוא השארית המתקבלת כאשר מחברים את $a$ ו־ $b$ כמספרים שלמים, ומחלקים את התוצאה ב־ $n$.
- ה"מכפלה" $a \cdot_n b$ היא השארית המתקבלת כאשר כופלים את $a$ ו־ $b$ כמספרים שלמים, ומחלקים את התוצאה ב־ $n$.

**דוגמה**

כאשר $n = 7$, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}_7 = \{0,1,\ldots,6\}$
ומתקיים: $5 +_7 5 = 3, \quad 5 \cdot_7 5 = 4$
נסביר:
$5 + 5 = 10$, ושארית החילוק של 10 ב־ 7 היא 3. לכן, $5 +_7 5 = 3$.
$5 \cdot 5 = 25$ ושארית החילוק של 25 ב־ 7 היא 4. לכן, $5 \cdot_7 5 = 4$.

**שאלה 1.2.7**

השלימו את טבלאות הפעולות $+_7$ ו־ $\cdot_7$ על $\mathbb{Z}_7 = \{0,1...,6\}$:

| $+_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | 3 | |
| 6 | | | | | | | |

| $\cdot_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | 4 | |
| 6 | | | | | | | |

**התשובה בעמוד 117**

בהמשך הקורס נראה שכאשר $n$ מספר ראשוני,[10] הקבוצה $\mathbb{Z}_n$, עם הפעולות $+_n$, ו־ $\cdot_n$ היא שדה אשר האיבר הניטרלי שלו לגבי ה"חיבור" הוא 0, והאיבר הניטרלי שלו לגבי ה"כפל" הוא 1.

**שאלה 1.2.8**

א. היעזרו בטבלאות המלאות המופיעות בתשובה 1.2.7 כדי למצוא את האיבר הנגדי לכל איבר של השדה $\mathbb{Z}_7$ ואת ההופכי לכל איבר שונה מ־0 של השדה הזה.
השלימו את טבלאות הפעולות $+_4$, ו־ $\cdot_4$ על $\mathbb{Z}_4 = \{0,1,2,3\}$.

10 מספר ראשוני הוא מספר טבעי $n > 1$, שמתחלק רק ב־1 ובעצמו. מבין עשרים המספרים הטבעיים הראשונים, הראשוניים הם $2,3,5,7,11,13,17,19$.

| $+_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | 1 |
| 3 | | | | |

| $\cdot_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | 1 |

ב. הסיקו מטבלת הכפל של $+_4$, ש־ $\mathbb{Z}_4$ עם הפעולות $+_4$ ו־ $\cdot_4$ אינו שדה.[11]

רמז: היעזרו במשפט 1.2.6.

**התשובה בעמוד 117**

המספר 2 הוא ראשוני, וכאמור לעיל - כאשר $n$ מספר ראשוני, המבנה המורכב מהקבוצה $\mathbb{Z}_n$ עם הפעולות $+_n$ ו־ $\cdot_n$ הוא שדה, אשר האיבר הניטרלי שלו לגבי ה"חיבור" הוא 0, והאיבר הניטרלי שלו לגבי ה"כפל" הוא 1. בהתאם לכך, $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ עם הפעולות $+_2$, ו־ $\cdot_2$ הוא שדה. כפי שראינו קודם, יש רק דרך אחת להגדיר "חיבור" ו"כפל" על קבוצה בת שני איברים כך שהמבנה המתקבל יהיה שדה. אכן, קל לוודא שטבלאות הפעולות $+_2$ ו־ $\cdot_2$ אינן אלא טבלאות החיבור והכפל של השדה $\mathbb{Z}_2$ שבנינו.

## ז. חיסור וחילוק בשדה

**הגדרה 1.2.8 חיסור**

יהי $F$ שדה. לכל $a,b \in F$,

$$a - b := a + (-b)$$

הווי אומר, **לְחַסֵּר** $b$ מ־ $a$ בשדה $F$, משמעו לחבר ל־ $a$ את הנגדי של $b$: $a-b$ מסמן את הסכום $a+(-b)$.

**הגדרה 1.2.9 חילוק**

יהי $F$ שדה. לכל $a,b \in F$, $b \neq 0$,

$$a/b := ab^{-1}$$

הווי אומר, **לְחַלֵּק** את $a$ ב־ $b \neq 0$, משמעו לכפול את $a$ בהופכי של $b$: $a/b$ מסמן את המכפלה $ab^{-1}$.

בכל שדה אפשר לחסר כל איבר מכל איבר, ואפשר לחלק כל איבר בכל איבר שונה מ־0.

11 עם זאת, אפשר להגדיר פעולות אחרות על קבוצה בת ארבעה איברים, כך שביחס לפעולות אלה הקבוצה תהווה שדה.

**שאלה 1.2.9**

יהי $F$ שדה, ויהיו $a,b,c,d \in F$. הוכיחו:

א. $a-0=a,\ \ a/1=a$

ב. $-(a+b)=-a-b$

ג. $a-b=c-d \Leftrightarrow a+d=c+b$

ד. אם $b,d \neq 0$ אז, $a/b=c/d \Leftrightarrow ad=bc$

ובפרט, אם $b \neq 0$ אז, $a/b=c \Leftrightarrow a=bc$

**התשובה בעמוד 118**

**שאלה 1.2.10**

יהי $F$ שדה ויהיו $a,b,c,d \in F$, כך ש־ $b,d \neq 0$. הוכיחו:

א. $(a/b)\cdot(c/d)=(ac)/(bd)$

ב. $(a/b)+(c/d)=(ad+bc)/(bd)$

**התשובה בעמוד 118**

הטענות שבשתי השאלות האחרונות נראות מוכרות, לא כן?

**שאלה 1.2.11**

המספר 5 הוא מספר ראשוני, לכן $\mathbb{Z}_5$ עם הפעולות $+_5$ ו־ $\cdot_5$ שהגדרנו, הוא שדה. בשדה זה חשבו את $2/3-1$.

**התשובה בעמוד 118**

# 1.3 $n$־יות

נתבונן בקבוצה שאיבריה הם שלושת המספרים הטבעיים הראשונים – $1,2,3$. את הקבוצה הזו אנו מסמנים, כרגיל, בעזרת צומדיים כך: $\{1,2,3\}$. אפשר לסמן אותה גם $\{3,2,1\}$, שהרי קבוצה היא אוסף של איברים, ללא חשיבות לַסֵּדֶר ביניהם. במילים אחרות, $\{1,2,3\}$ ו־ $\{3,2,1\}$ מתארים אותו אובייקט מתמטי, ואפשר לציין זאת בעזרת סימן שוויון: $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$. אך לעיתים קרובות במתמטיקה (ובחיים), אנו מתעניינים ברשימות של עצמים אשר בהן יש חשיבות לְסֵדֶר הופעת העצמים ברשימה, ובמקרים רבים אנו מעוניינים לאפשר לעצם מסוים להופיע יותר מפעם אחת. למשל, מספר טלפון (או מספר תעודת זהות) הוא רשימה שמורכבת מִסְפָרות (לאו דווקא שונות) שערוכות בסדר מסוים. לאובייקט שאותו מתאר מספר טלפון בן שבע ספרות נקרא **שביעייה סדורה** (של ספרות), ואם האורך של מספר הטלפון הוא אחר – **שמינייה סדורה**, **חמישייה סדורה**, **שְׁלָשָׁה סדורה** או **זוג סדור**, בהתאם למספר הספרות.

באופן כללי, אם $A$ היא קבוצה ו־ $n$ הוא מספר טבעי נתון, **$n$־יה** (קרי – אֶנִיָּה) **סדורה** של איברים מתוך $A$ היא רשימה באורך $n$ של איברים של $A$, לאו דווקא שונים זה מזה. האיברים ערוכים בסדר מסוים: ראשון, שני, שלישי וכך הלאה, עד המקום ה־ $n$. האיבר של $A$ המופיע במקום ה־ $i$[1] של $n$־יה סדורה מכונה **הרכיב ה־ $i$** שלה. לשם נוחות ההתבטאות, מוותרים בדרך כלל על הסיומת "סדור/ה" ואומרים **$n$־יה** (סתם) במקום **$n$־יה סדורה**.[2]

הדרך המקובלת לרישום $n$־יות היא לרשום את רכיביהן בשורה המוקפת בסוגריים; בקצה השמאלי של השורה רושמים את הרכיב הראשון, לימינו – את השני, לימין השני – השלישי וכולי. בין איברי ה־ $n$־יה מפרידים פסיקים. למשל,

$$(4, -7, 1, 3.5)$$

היא $n$־יה באורך 4 (רביעייה) של מספרים ממשיים; הרכיב הראשון שלה הוא 4, הרכיב השני הוא $-7$, השלישי 1, והרביעי 3.5.

באופן כללי, הרכיב ה־ $i$ ב־ $n$־יה $(a_1,\dots a_n)$ הוא $a_i$.

$n$־יה באורך 1 מתוך $A$ אינה אלא איבר בודד של $A$. את הרכיב הבודד של $n$־יה באורך 1 אין צורך להקיף בסוגריים.

המאפיינים של $n$־יה הם האורך שלה (כלומר מספר המקומות שיש בה), האיברים שהם רכיביה ומיקומם בתוכה. שוויון כל המאפיינים הללו בשתי $n$־יות משמעו שה־ $n$־יות שוות; הבדל כלשהו ביניהם משמעו שהן שונות.

1 לכל $i$ טבעי המקיים $1 \le i \le n$.

2 במונחים "זוג" ו"שלשה", במשמעות של "זוג סדור" ו"שלשה סדורה", כבר השתמשנו בסעיפים קודמים.

**דוגמאות**

בדוגמאות שלהלן קיים אי־שוויון – בכל מקרה הצביעו על המאפיינים שאינם זהים בשתי ה־ $n$ ־יות.

$$(1,2) \neq (2,1)$$
$$(1,2) \neq (3,4)$$
$$(1,2) \neq (1,2,2)$$
$$(0,0) \neq (0,0,0)$$

את האמור לעיל על אודות שוויון ואי־שוויון של $n$ ־יות, ננסח כהגדרה ממוספרת למשמרת:

---

**הגדרה 1.3.1 שוויון $n$ ־יות**

נאמר שה־ $n$ ־יה $(a_1,a_2,...,a_n)$ **שווה** ל־ $m$ ־יה $(b_1,b_2,...,b_m)$ ונרשום:

$$(a_1,a_2,...,a_n) = (b_1,b_2,...,b_m)$$

אם:

א. $n = m$ [3]

ב. לכל $i$, $1 \le i \le n$, מתקיים: $a_i = b_i$

דהיינו[4] $a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n$

---

כאשר נרצה לסמן $n$ ־יה בקצרה, באמצעות אות בודדת, נשתמש באות לטינית מודגשת, למשל:

$$\mathbf{a} = (a_1 \ldots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k), \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_m)$$

הרכיבים של $n$ ־יות יסומנו בדרך כלל באותיות לטיניות נטויות, לא מודגשות, ולעתים באותיות יווניות. נשתדל להקפיד על התאמה בין האות (המודגשת) המציינת את ה־ $n$ ־יה כולה לבין האותיות (הלא־מודגשות) המתארות את רכיביה. למשל, אם סימנו $n$ ־יה באות $\mathbf{a}$, נסמן את רכיביה ב־ $a_1,\ldots,a_n$ או ב־ $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, ואם סימנו $m$ ־יה באות $\mathbf{c}$, נסמן את רכיביה ב־ $c_1,\ldots,c_m$ או ב־ $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$.

- ל־ $n$ ־יה, שכל רכיביה הם איברים של קבוצה נתונה $A$, נקרא **$n$ ־יה מעל** $A$.
- אוסף כל ה־ $n$ ־יות מעל $A$ יסומן $A^n$.

**דוגמאות**

- האוסף המורכב מכל השלשות של מספרים טבעיים (דהיינו כל השלשות מעל $\mathbb{N}$) הוא $\mathbb{N}^3$.
- $\mathbb{Z}^5$ הוא אוסף החמישיות של מספרים שלמים.
- $\mathbb{Q}^2$ הוא אוסף הזוגות של מספרים רציונליים.

---

3 בהתאם לכך, לעולם אין שוויון בין רביעייה לחמישייה, בין זוג לשלשה וכיוצא באלה.

4 שימו לב: $b_n$ אינו אלא $b_m$, שהרי $n = m$.

**שאלה 1.3.1**

תהי $A$ קבוצה סופית בת $k$ איברים. כמה איברים יש בקבוצה $A^n$?

**התשובה בעמוד 118**

כאשר $F$ שדה, פעולת החיבור של $F$ מאפשרת להגדיר באופן טבעי פעולת "חיבור" על הקבוצה $F^n$, כך:

---

**הגדרה 1.3.2 חיבור $n$־יות מעל שדה**

יהי $F$ שדה, יהי $n$ מספר טבעי נתון, ויהיו $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$[5], $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$.

הסכום $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ הוא ה־$n$־יה המתקבלת על־ידי חיבור הרכיבים המתאימים של $\mathbf{a}$ ושל $\mathbf{b}$, כלומר:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b} := (a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$$

---

**דוגמאות**

- נחשב סכומים של $n$־יות מעל שדה המספרים הממשיים (השדה $\mathbb{R}$):

$$(1,2)+(2,1)=(3,3)$$
$$(1,2)+(3,4)=(4,6)$$
$$(\pi,2,3)+(1,2,2)=(\pi+1,4,5)$$
$$(0,0,0,0)+(1,2,3,8)=(1,2,3,8)$$
$$(1,2,3,1,2,3,1,2,3)+(3,2,1,3,2,1,3,2,1)=(4,4,4,4,4,4,4,4,4)$$

- **שימו לב!** סכומים כגון $(1,2)+(3,2,1)$, של $n$־יות שאינן שוות אורך, **אינם מוגדרים**.

- נחשב סכומים של $n$־יות מעל השדה (הסופי) $\mathbb{Z}_2$:[6]

$$(1,1)+(0,1)=(1,0)$$
$$(0,0,0)+(1,1,0)=(1,1,0)$$
$$(1,0,1,0,1)+(1,1,0,1,0)=(0,1,1,1,1)$$

▸

חיבור $n$־יות מתוך $F^n$ משמעו חיבור רכיביהן המתאימים, שהם סקלרים מתוך השדה $F$. לא תתפלאו אפוא שהתכונות של פעולת החיבור של $n$־יות מעל שדה, דומות לתכונות של פעולת החיבור בשדה. לאמיתו של דבר, אלה נגזרות מאלה.

---

5 כלומר $\mathbf{a},\mathbf{b}$ הן $n$־יות של סקלרים מתוך $F$.

6 פעולות החיבור והכפל של שדה זה מופיעות בטבלאות בסעיף 11.2.

**משפט 1.3.3 תכונות של חיבור $n$־יות**

לכל שדה $F$ ולכל מספר טבעי $n$,

א. הקבוצה $F^n$ סגורה לגבי פעולת החיבור של $n$־יות,
כלומר לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ מתקיים: $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in F^n$

ב. פעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$ היא קיבוצית,
כלומר לכל $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in F^n$ מתקיים: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

ג. פעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$ היא חילופית,
כלומר לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ מתקיים: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

ד. ה־ $n$־יה $\mathbf{0} := (0,\dots,0) \in F^n$, שכל רכיביה הם האפס של השדה $F$, היא איבר ניטרלי ביחס לפעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$,[7]
כלומר לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$

ה. כל איברי $F^n$ הפיכים ביחס לפעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$;
לכל $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n) \in F^n$, ה־ $n$־יה $-\mathbf{a} = (-a_1,\dots,-a_n) \in F^n$, שרכיביה הם האיברים הנגדיים של רכיבי $\mathbf{a}$, מקיימת: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a})+\mathbf{a} = \mathbf{0}$

**הוכחה**

יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ איברים כלשהם של $F^n$. כל אחד מהם הוא $n$־יה מעל $F$. נפרט את רכיביהן:

$$\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1,\dots,b_n), \quad \mathbf{c} = (c_1,\dots,c_n)$$

א. לפי ההגדרת החיבור של $n$־יות, $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$
הסגירות של $F$ ביחס לפעולת החיבור מבטיחה שלכל $i$, $1 \le i \le n$, $a_i+b_i \in F$.
$\mathbf{a}+\mathbf{b}$ היא אפוא $n$־יה שכל רכיביה שייכים ל־ $F$, ולכן: $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in F^n$

בכל אחד מיתר סעיפי המשפט נטען שוויון מסוים. להוכחתו, נחשב כל אחד משני האגפים של השוויון הנטען, ונראה שהתוצאות זהות.[8]

ב. לכל $i$, $1 \le i \le n$, הרכיב ה־ $i$ של $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$ הוא $(a_i+b_i)+c_i$
והרכיב ה־ $i$ של $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ הוא: $a_i+(b_i+c_i)$
הקיבוציות של החיבור בשדה $F$ מבטיחה, שלכל $i$, $1 \le i \le n$,

$$(a_i+b_i)+c_i = a_i+(b_i+c_i)$$

לכן, על פי הגדרת השוויון בין $n$־יות, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

ג. $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$

$$\mathbf{b}+\mathbf{a} = (b_1+a_1,\dots,b_n+a_n)$$

חילופיות החיבור בשדה $F$ מבטיחה, שלכל $i$, $1 \le i \le n$, $a_i+b_i = b_i+a_i$
לכן, על פי הגדרת השוויון בין $n$־יות, $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

7 ולפי מסקנה 1.1.7, 0 הוא האיבר הניטרלי היחיד ביחס לפעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$.
8 לאחר שתקראו את הוכחת סעיף ב, כדאי שתנסו להוכיח את הסעיפים הבאים בעצמכם.

ד. לכל $i$, $1 \le i \le n$, הרכיב ה־ $i$ של $\mathbf{a}+\mathbf{0}$ הוא $a_i + 0$
והרכיב ה־ $i$ של $\mathbf{0}+\mathbf{a}$ הוא $0 + a_i$
הניטרליות של 0 ביחס לחיבור בשדה $F$ מבטיחה, שלכל $i$, $1 \le i \le n$,
$$a_i + 0 = 0 + a_i = a_i$$
לכן, על פי הגדרת השוויון בין $n$־יות, $\mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$

ה. לכל $i$, $1 \le i \le n$, הרכיב ה־ $i$ של $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})$ הוא $a_i + (-a_i)$
והרכיב ה־ $i$ של $(-\mathbf{a})+\mathbf{a}$ הוא $(-a_i) + a_i$
$(-a_i)$ הוא האיבר הנגדי ל־ $a_i$ בשדה $F$, ולכן לכל $i$, $1 \le i \le n$,
$$a_i + (-a_i) = (-a_i) + a_i = 0$$
לכן, על פי הגדרת השוויון בין $n$־יות: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a})+\mathbf{a} = 0$

**מ.ש.ל.**

**הערות**

א. לאור סעיף ב במשפט 1.3.3 נוכל לדבר על הסכום של שלוש $n$־יות, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, בלי לטרוח לציין את מיקום הסוגריים.

ב. מסעיפים ב, ג ביחד נובע, שהסכום של מספר כלשהו של $n$־יות לא ישתנה אם נשנה את סדר המחוברים או את סדר ביצוע הפעולות. לא ננסח ולא נוכיח מסקנה זו באופן פורמלי, אבל אתם עשויים להפיק תועלת מבדיקת מקרה פרטי שלה (ראו בשאלה 1.3.2 להלן).

ג. את הסכום $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ נהוג לסמן בקיצור $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. הפעולה המתאימה לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ את $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ נקראת, כצפוי, **חיסור $n$־יות**. לכל $i$, $1 \le i \le n$, הרכיב ה־ $i$ של $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ הוא $a_i - b_i$.

**שאלה 1.3.2**

א. הסיקו ממשפט 1.3.3 שלכל $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in F^n$ מתקיים: $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = (\mathbf{c}+\mathbf{b})+\mathbf{a}$
וזאת - בלי לרשום את רכיבי ה־ $n$־יות. (ציינו בכל שלב על מה הסתמכתם.)

ב. אם לא הצלחתם לפתור את חלק א בכוחות עצמכם והצצתם בתשובה - נסו כוחכם שנית. הפעם הראו כי $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{c}+(\mathbf{b}+\mathbf{a})$
(בלי להסתמך על חלק א של השאלה).

**התשובה בעמוד 118**

בדרך אנלוגית לזו שבה הגדרנו חיבור ב־ $F^n$, כחיבור "רכיב־רכיב" בעזרת פעולת החיבור של $F$, ניתן היה להגדיר כפל ב־ $F^n$ ככפל "רכיב־רכיב", בעזרת פעולת הכפל של $F$. מסתבר, ש"כפל" כזה אינו מביא ברכה מרובה. לעומת זאת, יש תועלת בפעולה אחרת - "כפל $n$־יות בסקלרים".

**הגדרה 1.3.4 כפל $n$־יות בסקלרים**

יהיו $F$ שדה, $n$ מספר טבעי נתון, $t \in F$ סקלר נתון, ו־ $\mathbf{a} \in F^n$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$.
**הכפל $t\mathbf{a}$ של $\mathbf{a}$ בסקלר $t$** מתקבל על־ידי כפל הרכיבים של $\mathbf{a}$ ב־ $t$.
כלומר, $t\mathbf{a} := (ta_1,\dots,ta_n)$

**הערה**

חיבור $n$־יות מעל שדה $F$ הוא פעולה על $F^n$, במובן שתואר בסעיף 1.1; לכל זוג $n$־יות $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ תוצאת הפעולה היא סכומן, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$. כפל $n$־יות מעל $F$ בסקלרים מתוך $F$, המתאים לכל $t \in F$ ולכל $\mathbf{a} \in F^n$ את $t\mathbf{a}$, איננו פעולה על $F^n$ באותו מובן; ב"כפל" הזה מעורבים זוגות של איברים שכל אחד מהם שייך לקבוצה אחרת (האחד הוא סקלר, האחר הוא $n$־יה של סקלרים). כדי להדגיש עובדה זו נקפיד לא לקצר: לְכֶפֶל בסקלר לעולם לא נקרא "כֶּפֶל" (סתם).

**דוגמאות**

בדוגמאות הבאות ה־$n$־יות הן מעל $\mathbb{R}$, והסקלרים הם איברים של $\mathbb{R}$.

1. אם $\mathbf{a} = (1,0,-2,5)$, $t = 3$, אז $t\mathbf{a} = (3,0,-6,15)$
2. $\left(-\frac{1}{2}\right)(2,4,6,8) = (-1,-2,-3,-4)$
3. $1(3,0,-2) = (3,0,-2)$
4. $0(1,2,3,4) = (0,0,0,0)$
5. $(-1)(1,4,9,2,2) = (-1,-4,-9,-2,-2)$

▶

**שאלה 1.3.3**

במקום השלָשה מדוגמה (3), במקום הרביעייה מדוגמה (4), ובמקום החמישיה מדוגמה (5), רשמו $n$־יה כללית $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$. מה תקבלו באגפי ימין? נסחו והוכיחו את ההכללות האלה.

**התשובה בעמוד 119**

---

**משפט 1.3.5 תכונות הכפל בסקלר**

יהי $F$ שדה, ויהי $n$ מספר טבעי נתון.

א. לכל $\mathbf{a} \in F^n$ ולכל סקלר $t \in F$, $t\mathbf{a} \in F^n$

ב. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ [9]

ג. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

ד. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$

ה. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, ולכל $t \in F$, $s$, $(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$

וכן: $(s+t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$

ו. לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ ולכל $t \in F$, $t(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

---

סעיף א של המשפט ברור לפי ההגדרה של כפל בסקלר. סעיפים ב, ג, ד הוכחו בתשובה 1.3.3. את הסעיפים הבאים כדאי שתוכיחו בעצמכם. במידת הצורך - היעזרו בתשובה 1.3.4.

**שאלה 1.3.4**

השלימו את הוכחת משפט 1.3.5.

**התשובה בעמוד 119**

9 0 מציין את האפס של השדה $F$; $\mathbf{0}$ מציין את ה־$n$־יה מתוך $F^n$ שכל רכיביה הם 0.

**שאלה 1.3.5**

נתונים: $\mathbf{a} = (2,0,-1,\frac{1}{2}) \quad \mathbf{b} = (3,-7,\frac{1}{3},2) \quad s = 2 \quad t = 3$

חשבו את $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

**התשובה בעמוד 120**

**שאלה 1.3.6**

נתונים: $\mathbf{a} = (1,1,1) \quad \mathbf{b} = (1,1,0) \quad \mathbf{c} = (1,0,0) \quad \mathbf{d} = (1,2,3)$

מצאו סקלרים (ממשיים) $k,s,t$ שעבורם: $k\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{d}$

**התשובה בעמוד 120**

סכום מהטיפוס $t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k$ שבו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k \in F^n$, ו־ $t_1,\ldots,t_k \in F$, מכונה **צירוף ליניארי** של איברים של $F^n$. הסקלרים $t_1,\ldots,t_k$ מכונים **מקדמי הצירוף**. כל צירוף ליניארי של איברים מתוך $F^n$ הוא, בבירור, איבר של $F^n$.

**דוגמאות**

לשם תרגול, חשבו את הצירופים הליניאריים הבאים של איברים מתוך $\mathbb{R}^4$:

$5(1,0,0,0) + (-4)(0,1,0,0) + 3(0,0,1,0) + (-17)(0,0,0,1)$ [10]

$(-1)(1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) + (-3)(1,1,1,0) + 4(1,1,1,1)$ [11]

▶

**הערה**

בצירוף ליניארי נתון, כאשר אחד המחוברים מופיע עם מקדם שלילי, ניתן במקום זאת לחסר את המחובר המתאים. למשל, את הצירופים הליניאריים שבדוגמאות האחרונות ניתן לרשום כך:

$$5(1,0,0,0) - 4(0,1,0,0) + 3(0,0,1,0) - 17(0,0,0,1)$$

$$-(1,0,0,0) + 2(1,1,0,0) - 3(1,1,1,0) + 4(1,1,1,1)$$

**שאלה 1.3.7**

מידע על הטמפרטורה בעיר מסוימת בארה"ב נתון על־ידי ה־ $n$־יה $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_{12})$ שבה $a_1$ היא הטמפרטורה הממוצעת (במעלות פרנהייט) בחודש ינואר, $a_2$ היא הטמפרטורה הממוצעת (במעלות פרנהייט) בחודש פברואר, וכך הלאה. התייר הישראלי בארה"ב בוודאי יפיק יותר תועלת מן ה־ $n$־יה $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_{12})$, שבה אותן טמפרטורות נתונות במעלות צלסיוס. הציגו את $\mathbf{b}$ כצירוף ליניארי של שתי $n$־יות, שאחת מהן היא $\mathbf{a}$. נעיר, שכדי לקבל את הטמפרטורה במעלות צלסיוס, יש לחסר 32 מן הטמפרטורה במעלות פרנהייט ולכפול את התוצאה ב־ $5/9$. למשל, $86°F$ הן $30°C$, שכן: $86 - 32 = 54, \quad 54 \cdot \frac{5}{9} = 30$

**התשובה בעמוד 120**

---

10 תשובה: $(5,-4,3,17)$

11 תשובה: $(2,3,1,4)$

# 1.4 משוואות לינאריות – מושגים בסיסיים

המשוואות המוכרות לכם מימי בית הספר כ"משוואות לינאריות", הן משוואות כגון:

1. $3x = 5$
2. $2x + 2y + 1 = 5 + 3z + x$
3. $2x_1 - 4x_2 + (1/3)x_3 = (-\sqrt{17})x_4$

המקדמים (המספרים הקבועים) המופיעים בהן הם מספרים ממשיים, והמשתנים המופיעים בהן מייצגים מספרים ממשיים. בהתאם לכך, המשוואות הללו מכונות **משוואות לינאריות מעל שדה המספרים הממשיים, ובקיצור – משוואות לינאריות מעל** $\mathbb{R}$**.**

**המשוואה הראשונה** – $3x = 5$, שהיא משוואה במשתנה אחד, מייצגת מכלול של טענות שוויון, אחת כנגד כל ערך ממשי של $x$. עבור $x = 1$ היא מייצגת את הטענה $3 \cdot 1 = 5$, שאינה נכונה; עבור $x = \sqrt{2}$ היא מייצגת את הטענה $3\sqrt{2} = 5$, שאף היא אינה נכונה. בבירור, מכלל הטענות שהמשוואה מייצגת, יש רק אחת נכונה – הטענה המתאימה ל־ $x = 5/3$, שהיא: $3 \cdot (5/3) = 5$. את המשוואה עצמה אפשר לראות כ**תנאי על מספרים ממשיים**; כפי שראינו, יש רק מספר אחד, כלומר רק ערך אחד של $x$, שמקיים את התנאי הזה.

**המשוואה השנייה** – $2x + 2y + 1 = 5 + 3z + x$ – היא משוואה בשלושה משתנים; גם היא מייצגת טענות שוויון, אלא שהפעם הטענות המיוצגות תלויות בערכים של שלושה משתנים – $x$, $y$ ו־ $z$. מכלול הטענות השונות שהיא מייצגת כולל טענה אחת כנגד כל **שְׁלָשָׁה** $(x, y, z)$ של מספרים ממשיים.

עבור $(x, y, z) = (0,4,0)$, המשוואה מייצגת את הטענה $2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 = 5 + 3 \cdot 0 + 1$ ה"אומרת" $9 = 5$.[1] לא נכון!

עבור $(x, y, z) = (4,0,0)$, המשוואה מייצגת את הטענה $2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 = 5 + 3 \cdot 0 + 0$ ה"אומרת" $9 = 9$. נכון!

את המשוואה עצמה אפשר לראות כ**תנאי על שְׁלָשׁוֹת** מעל $\mathbb{R}$. השלשות מתוך $\mathbb{R}^3$ המקיימות את התנאי הן אלה, אשר כשהמשוואה "מדברת" עליהן, מה שהיא "אומרת" הוא נכון. כבר ראינו שהשלשה $(x, y, z) = (4,0,0)$ מקיימת את התנאי; ב־ $\mathbb{R}^3$ יש שלשות נוספות שמקיימות אותו, ובהן $\left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$, $\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{4}{3}\right)$ (בדקו!), ועוד.

לשְׁלָשָׁה נתונה $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

התנאי $2x + 2y + 1 = 5 + 3z + x$

מתקיים אם ורק אם: $x + 2y - 3z = 4$

ובסימנים – $2x + 2y + 1 = 5 + 3z + x \Leftrightarrow x + 2y - 3z = 4$

---

1 זוהי הטענה שמתקבלת, כאשר במקום כל הופעה של משתנה במשוואה, מציבים את הרכיב המתאים של השלשה $(0,4,0)$.

הווי אומר: על אף שהמשוואות $2x+2y+1=5+3z+x$ ו־ $x+2y-3z=4$ נראות שונות, הן מציבות אותו תנאי על שלשות $(x,y,z)$ מתוך $\mathbb{R}^3$. בהתאם לכך, אנו רואים אותן כהצגות שונות של **אותה משוואה**. בהצגה $x+2y-3z=4$, אגף שמאל הוא סכום של מחוברים, אחד כנגד כל משתנה; כל מחובר הוא מכפלה של משתנה במקדם קבוע;[2] באגף ימין מופיע מספר ממשי בודד. הצגה מסוג זה נקראת "הצגה סטנדרטית". לאותה משוואה יש הצגות סטנדרטיות נוספות, וביניהן $2y+x-3z=4$, $2y-3z+x=4$ ועוד. באופן כללי נגדיר:

---

**הגדרה 1.4.1 משוואה ליניארית מעל שדה**

**משוואה ליניארית סטנדרטית ב־ $n$ משתנים מעל שדה $F$** היא משוואה מהטיפוס

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n=b$$

שבה $x_1,\ldots,x_n$ הם משתנים, ו־ $a_1,\ldots,a_n,b$, המכונים **מקדמי המשוואה**, הם סקלרים (כלומר איברים של $F$). הסקלרים $a_1,\ldots,a_n$ נקראים **מקדמי המשתנים**, הסקלר $b$ נקרא **המקדם החופשי**.

משוואה ב־ $n$ משתנים מעל השדה $F$ נקראת **משוואה ליניארית**, אם התנאי שהיא מציבה על $n$־יות מעל $F$ ניתן להצגה באמצעות משוואה ליניארית סטנדרטית.

---

**דוגמה**

את המשוואה $x_1-x_2+3=0$ ניתן להציג בצורה הסטנדרטית כך:

$$1\cdot x_1+(-1)\cdot x_2=-3$$

כאשר מספר המשתנים של משוואה ליניארית הוא קטן, נוח לוותר על האינדקסים:

משוואה ליניארית כללית במשתנה אחד תוצג בדרך כלל כ־ $ax=b$

משוואה ליניארית כללית בשני משתנים - $ax+by=c$

משוואה ליניארית כללית בשלושה משתנים - $ax+by+cz=d$

אפשר כמובן להשתמש באותיות אחרות במקום $a,b,c,d,x,y,z$, למשל - $\alpha,\beta,\gamma,\delta,r,s,t$ וכדומה.

(כאשר מספר המשתנים גדול מ־3, ניעזר בדרך כלל באינדקסים.) ◀

**דוגמה**

נתבונן במשוואה הליניארית בשני משתנים מעל $\mathbb{R}$, $3x+4y=10$

הזוג $(2,1)\in\mathbb{R}^2$ מקיים את התנאי שהמשוואה מציבה, כי $3\cdot2+4\cdot1=10$. את העובדה הזאת מבטאים באמירה שהזוג $(2,1)$ "פותר" או "מקיים" את המשוואה, או שהוא "פתרון" שלה. זוגות נוספים מתוך $\mathbb{R}^2$ שפותרים אותה הם, למשל, $(-2,4)$, $\left(0,\frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{10}{3}-4\pi,3\pi\right)$.[3] "לפתור" את המשוואה הזאת משמעו: לאפיין במפורש את קבוצת **כל** הזוגות מתוך $\mathbb{R}^2$, שהם פתרונות שלה. ◀

---

2 המקדם במחובר שבו מופיע המשתנה $x$ הוא 1; המקדם במחובר שבו מופיע המשתנה $y$ הוא 2; המקדם במחובר שבו מופיע המשתנה $z$ הוא $(-3)$.

3 $\pi$ הוא המספר הממשי (האי־רציונלי), המבטא את היחס הקבוע שבין ההיקף של מעגל לבין הקוטר שלו.

נכליל את הדוגמה בהגדרה הבאה:

---

**הגדרה 1.4.2 פתרון של משוואה לינארית**

תהי
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
משוואה לינארית ב־ $n$ משתנים מעל שדה $F$.

על $n$־יה $(v_1,\ldots,v_n) \in F^n$ של סקלרים מתוך $F$ נאמר שהיא **פתרון** של המשוואה (או שהיא **פותרת** אותה) אם הטענה שהמשוואה מייצגת כאשר $(x_1,\ldots,x_n) = (v_1,\ldots,v_n)$ היא נכונה.

---

**לפתור** משוואה לינארית ב־ $n$ משתנים, משמעו לאפיין את קבוצת ה־ $n$־יות ב־ $F^n$ שפותרות את המשוואה.

**דוגמה 1**

נפתור את המשוואה הלינארית במשתנה אחד מעל $\mathbb{R}$,
$$2x = 5$$
אם $c$ פותר את המשוואה אז $2c = 5$, ואם נכפול את שני האגפים של השוויון האחרון ב־ $\frac{1}{2}$ נקבל שבהכרח $c = \frac{5}{2}$. כלומר, אם יש למשוואה פתרון, הוא בהכרח שווה ל־ $\frac{5}{2}$, וקל לוודא שאכן $\frac{5}{2}$ הוא פתרון. לכן למשוואה הנתונה יש פתרון יחיד והוא $x = \frac{5}{2}$.

בקצרה, יכולנו לרשום: $2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ ולהגיע לאותה מסקנה. ◀

**דוגמה 2**

נפתור את המשוואה הלינארית בשני משתנים מעל $\mathbb{R}$:
$$2x - 3y = 7$$
נבחין כי
$$2x - 3y = 7 \Leftrightarrow -3y = 7 - 2x \Leftrightarrow 3y = 2x - 7 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$
ההצגה הימנית מלמדת שלכל ערך של $x$, יש ערך יחיד של $y$ שעבורו הזוג $(x,y)$ פותר את המשוואה, והוא $y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.

אם נבחר $x = 0$ נקבל את הפתרון
$$(x,y) = \left(0,-\frac{7}{3}\right)$$
אם נבחר $x = 1$ נקבל את הפתרון
$$(x,y) = \left(1,-\frac{5}{3}\right)$$
אלה **פתרונות פרטיים**. ◀

באופן כללי, לכל $t \in \mathbb{R}$ יש זוג יחיד שפותר את המשוואה, אשר הרכיב הראשון שלו הוא $t$, והוא הזוג:
$$(x,y) = \left(t,\frac{2}{3}t - \frac{7}{3}\right)$$
זהו **הפתרון הכללי** של המשוואה.

הסימן $t$ המופיע בפתרון הכללי מכונה **פָּרָמֶטֶר**. כל מספר ממשי הוא ערך אפשרי של הפרמטר $t$. ערכים שונים של $t$ מניבים פתרונות פרטיים שונים. "כמות" הפתרונות השונים, כ"כמות" המספרים הממשיים, היא אפוא אינסופית.

כדי לפתור את המשוואה מצאנו מהו הערך של $y$, המתאים לערך נתון של $x$. אפשר לפתור את המשוואה גם על־ידי מציאת הערך של $x$ המתאים לערך נתון של $y$, כך:

$$2x-3y=7 \Leftrightarrow 2x=3y+7 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}$$

ההצגה הימנית מלמדת, שלכל ערך של $y$ יש ערך יחיד של $x$ שעבורו הזוג $(x,y)$ פותר את המשוואה, והוא $x=\frac{3}{2}y+\frac{7}{2}$. הפתרון הכללי המתקבל מהצגה זו הוא:

$$(x,y)=\left(\frac{3}{2}t+\frac{7}{2},t\right)$$

גם הפעם הפתרון הכללי מוצג בעזרת פרמטר. אבל בעוד שבהצגה הקודמת הפרמטר ייצג את הערך של המשתנה $x$, בהצגה הנוכחית הפרמטר מייצג את הערך של המשתנה $y$.

שתי ההצגות של הפתרון הכללי, $(x,y)=\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$ ו־ $(x,y)=\left(\frac{3}{2}t+\frac{7}{2},t\right)$, מתארות, בהכרח, אותה תת־קבוצה של $\mathbb{R}^2$ (כלומר אותה קבוצה של זוגות מעל $\mathbb{R}$).

אפשר, כמובן, להשתמש באות אחרת לציון הפרמטר. למשל, גם $(x,y)=\left(\frac{3}{2}s+\frac{7}{2},s\right)$ ו־ $(x,y)=\left(\alpha,\frac{2}{3}\alpha-\frac{7}{3}\right)$ הן הצגות של הפתרון הכללי של המשוואה. אפשר לתת גם הצגות נוספות של הפתרון הכללי, כגון $(x,y)=\left(3t+\frac{7}{2},2t\right)$.

לשם תרגול, מצאו זוג אחד שפותר את המשוואה אשר בו הרכיב הראשון הוא 3, וזוג אחר שפותר את המשוואה אשר הרכיב השני בו הוא 3.[4]

עד כאן התבוננו במשוואה $2x-3y=7$ כמשוואה מעל השדה $\mathbb{R}$. אולם, המקדמים של המשוואה $2x-3y=7$ הם מספרים רציונליים. לפיכך המשוואה הזאת היא גם משוואה ליניארית מעל השדה $\mathbb{Q}$. לפי הגדרה 1.4.2, כמשוואה מעל $\mathbb{Q}$, פתרונותיה הם זוגות מתוך $\mathbb{Q}^2$, כלומר זוגות של **מספרים רציונליים** שמקיימים את התנאי שהיא מציבה. השיקול שהוביל למסקנה שהפתרון הכללי הוא

$$(x,y)=\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$$

4 למציאת פתרון שרכיבו הראשון הוא 3, נציב $t=3$ בפתרון הכללי $\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$, ונקבל את הפתרון הפרטי $\left(3,-\frac{1}{3}\right)$ (בִּדקו על־ידי הצבת $x=3,\ y=-\frac{1}{3}$ במשוואה $2x-3y=7$); למציאת פתרון שרכיבו השני הוא 3, נציב $s=3$ בפתרון הכללי $\left(\frac{3}{2}s+\frac{7}{2},s\right)$, ונקבל את הפתרון הפרטי $(8,3)$ (בִּדקו על־ידי הצבת $x=8,\ y=3$ במשוואה $2x-3y=7$).

עדיין תקף, אבל הפעם הפרמטר $t$ מייצג רק מספרים רציונליים, שכן אם $t$ מספר ממשי שאינו רציונלי, הזוג $(x,y)=\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$ אינו זוג של מספרים רציונליים.[5] אם כן, רק חלק מפתרונות המשוואה שלנו כמשוואה מעל $\mathbb{R}$, הם פתרונות שלה גם כמשוואה מעל $\mathbb{Q}$. עם זאת, מאחר שיש אינסוף מספרים רציונליים שונים, גם כמשוואה מעל $\mathbb{Q}$ יש לה אינסוף פתרונות.

בעזרת הפתרון הכללי של המשוואה $2x-3y=7$, $\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$, אפשר לאפיין את קבוצת "הפתרונות הממשיים" שלה, כלומר את קבוצת הזוגות של **מספרים ממשיים** שמקיימים את התנאי שהיא מציבה. הפתרונות הממשיים הם כלל הזוגות המתקבלים ממנו כאשר $t$ "עובר" על כל המספרים הממשיים.

בעזרת אותו ביטוי אפשר לאפיין גם את קבוצת "הפתרונות הרציונליים" של המשוואה הנידונה (כלומר את קבוצת הזוגות של **מספרים רציונליים**, שמקיימים את התנאי שהיא מציבה). הפתרונות הרציונליים הם כלל הזוגות המתקבלים ממנו כאשר $t$ "עובר" על כל המספרים הרציונליים.

לעומת זאת, קבוצת "הפתרונות הטבעיים" של המשוואה אינה קבוצת הזוגות המתקבלים מן הפתרון הכללי, כאשר $t$ "עובר" על כל המספרים הטבעיים. אמנם לכל מספר טבעי $t$, הזוג $\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$ הוא פתרון שלה, אבל זה אינו בהכרח זוג של מספרים טבעיים. למשל, כאשר $t=1$, הפתרון המתקבל, $\left(1,-\frac{5}{3}\right)$, אינו שייך לקבוצת הפתרונות הטבעיים של המשוואה (וגם לא לקבוצת הפתרונות השלמים שלה), משום שהרכיב השני שלו, המייצג את הערך של $y$, אינו מספר טבעי (או שלם).

בדיון האחרון ראינו הבדל בין $\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{Q}$ לבין $\mathbb{N}$ ו־$\mathbb{Z}$. ההבדל נובע מכך ש־$\mathbb{R}$ ו־$\mathbb{Q}$ (עם החיבור והכפל הרגילים) הם שדות, ואילו $\mathbb{N}$ ו־$\mathbb{Z}$ (עם אותן פעולות) אינם שדות. נסביר: בכל שדה $F$, לכל $a\in F$ יש איבר נגדי $(-a)$, ואם $a\neq 0$ אז ל־$a$ יש גם איבר הופכי - $a^{-1}$. לכן בכל שדה $F$, לכל $a,b\in F$, ההפרש $a-b$ הוא איבר של $F$, ואם $b\neq 0$ אז גם המנה $a/b$ היא איבר של $F$.

בהתאם לכך,
$$t\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\in\mathbb{R}$$

(את הסימן "$\Rightarrow$", המכונה סימן הגרירה, פגשנו כבר בכרך ההכנה, בסעיף ב של פרק I)

וכמובן גם:
$$t\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\in\mathbb{Q}$$

לעומת זאת,
$$t\in\mathbb{N}\not\Rightarrow\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\in\mathbb{N}$$

וכן:
$$t\in\mathbb{Z}\not\Rightarrow\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\in\mathbb{Z}$$

כלומר, מכך ש־$t$ מספר טבעי/שלם, לא נובע ש־$\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}$ הוא מספר טבעי/שלם.

5 וכאשר $t$ מספר רציונלי, גם $\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}$ הוא רציונלי, לכן במקרה זה $\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$ הוא זוג מספרים רציונליים.

בהמשך הפרק נציג שיטה שמאפשרת לאפיין לא רק את קבוצת הפתרונות של כל משוואה ליניארית מעל $\mathbb{R}$, אלא גם את קבוצת הפתרונות של כל **מערכת** ליניארית מעל $\mathbb{R}$.[6] כפי שתראו, השיטה נסמכת רק על התכונות של $\mathbb{R}$ שמתחייבות מעובדת היותו שדה. בהתאם לכך, אותה שיטה תתאים גם לאפיון קבוצות הפתרונות של משוואות (ומערכות) ליניאריות מעל $\mathbb{Q}$, או מעל כל שדה אחר $F$.

**דוגמה 3**

נתבונן במשוואה $x + y = 0$

שהיא המשוואה הליניארית הסטנדרטית בשני משתנים: $1 \cdot x + 1 \cdot y = 0$

בכל שדה $F$ יש איבר ניטרלי 0 ביחס לחיבור, ויש איבר ניטרלי 1 ביחס לכפל. המשוואה הזאת היא אפוא משוואה ליניארית בשני משתנים מעל כל שדה $F$.

- הבה נפתור אותה כמשוואה מעל השדה $\mathbb{Z}_2$:[7]

  בשדה $\mathbb{Z}_2$ יש שני איברים בלבד - 0 ו־1. מספר זוגות האיברים הוא 4. הזוגות הם

  $$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0),\quad (1,1)$$

  החיבור בשדה הזה מוגדר, כזכור, כך: $0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1,\quad 1+1=0$

  הזוגות המקיימים את התנאי $x + y = 0$ הם $(0,0)$ ו־$(1,1)$. אם כן, ל־$x + y = 0$, כמשוואה מעל $\mathbb{Z}_2$, יש שני פתרונות.

- נפתור כעת אותה משוואה כמשוואה מעל השדה $\mathbb{Z}_7$:[8]

  כדי למצוא את זוגות האיברים מתוך $\mathbb{Z}_7$ שמקיימים את התנאי $x + y = 0$, נסרוק את המשבצות בטבלת הפעולה $+_7$, שבהן רשום 0, ונאתר את הזוגות שמהם התקבל הסכום הזה.[9] 0 מופיע ב־7 משבצות, אחת בכל שורה בטבלה; הזוגות שסכומם 0 הם:

  $$(0,0),\ (1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)$$

  אם כן, כמשוואה מעל $\mathbb{Z}_7$, 7 הזוגות שמנינו הם כל הפתרונות שלה.

- כעת נפתור את המשוואה כמשוואה מעל שדה כללי $F$.

  מאחר ש־ $x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$,

  הפתרון הכללי הוא, בבירור: $(t,-t)$

  הַפָּרָמֶטֶר $t$, המופיע בפתרון הכללי, מייצג סקלר כלשהו **מתוך השדה** $F$. ◀

שימו לב, כאשר $F = \mathbb{Z}_2$, הזוג $(1,-1)$ המתקבל עבור $t = 1$, אינו אלא הפתרון $(1,1)$ שמצאנו קודם, כי בשדה $\mathbb{Z}_2$ האיבר $-1$, המסמל את הנגדי ל־1, הוא 1. באופן דומה, כאשר $F = \mathbb{Z}_7$, הזוג $(3,-3)$ המתקבל עבור $t = 3$, אינו אלא הפתרון $(3,4)$ שמצאנו קודם, כי בשדה $\mathbb{Z}_7$, האיבר $-3$, המסמל את הנגדי ל־3, הוא 4.

---

6 מערכות ליניאריות תוגדרנה בסעיף הבא.

7 ראו בסעיף 11.2.

8 טבלת הפעולה $+_7$, שהיא פעולת החיבור בשדה $\mathbb{Z}_7$, נמצאת בסעיף 11.2.

9 הטבלה מופיעה בתשובה 1.2.7.

כאשר $F$ הוא שדה המספרים הממשיים $\mathbb{R}$, או שדה המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}$, כמות הערכים האפשריים עבור $t$ היא אינסופית, ולכן למשוואה $x + y = 0$ יש אינסוף פתרונות.

שימו לב, הזוג $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$, שהוא הפתרון של המשוואה מעל $\mathbb{R}$ המתקבל עבור הערך $t = \sqrt{2}$, אינו פתרון של אותה משוואה כמשוואה מעל $\mathbb{Q}$, כי $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (כבר הזכרנו עובדה זו במבוא, ובהמשך הקורס נוכיח אותה).

עוד נקודה ראויה לציון: מלבד $(0,0)$, אף אחד מהזוגות שפותרים את המשוואה מעל $\mathbb{Z}_2$ או מעל $\mathbb{Z}_7$, אינו פתרון שלה כמשוואה מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{Q}$. לאלה מכם שתוהים "כיצד ייתכן שהזוג $(3,4)$ לפעמים פותר את המשוואה $x + y = 0$ ולפעמים לא?", נזכיר שהסימן "+" המופיע בה מציין פעולות שונות בשדות שונים. בשדות $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{Q}$, $3 + 4 = 7 \neq 0$, ובשדה $\mathbb{Z}_7$ מתקיים $3 + 4 = 0$.

הלקח מדוגמה 3 הוא, שהפתרון הכללי $(t,-t)$ מייצג נאמנה את הפתרונות של המשוואה $x + y$ כמשוואה מעל כל שדה שהוא. עם זאת, בשדות שונים, הכמות והמהות של הפתרונות הפרטיים המתקבלים ממנו כאשר הפרמטר $t$ "עובר" על כל איברי השדה, תלויים בכמות האיברים שיש בשדה, ובהגדרה הספציפית של פעולות השדה עליו.

**דוגמה 4**

נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה הלינארית הכללית בשלושה משתנים

$$ax + by + cz = d$$

כמשוואה מעל שדה כלשהו $F$, אשר המקדמים $a,b,c,d$ הם איברים שלו.

לצורך זה עלינו להבחין בין שתי אפשרויות בנוגע למקדמים:

א. $a = b = c = 0$. במקרה זה, המשוואה היא $0x + 0y + 0z = d$

ולכל שלשה $(t_1,t_2,t_3)$ של איברים מתוך $F$ מתקיים: $0t_1 + 0t_2 + 0t_3 = 0$

לפיכך,

אם $d = 0$, אז כל שְׁלָשָׁה של סקלרים היא פתרון – קבוצת הפתרונות היא $F^3$.[10]

אם $d \neq 0$, אז אין שְׁלָשָׁה של סקלרים שהיא פתרון – קבוצת הפתרונות ריקה.

ב. לפחות אחד מבין $a,b,c$ שונה מ־0. נניח ש־ $c \neq 0$.

במקרה זה, $ax + by + cz = d \Leftrightarrow cz = d - ax - by \Leftrightarrow z = \dfrac{d}{c} - \dfrac{a}{c}x - \dfrac{b}{c}y$

ההצגה הימנית מלמדת, שלכל בחירה של ערכים מתוך $F$ עבור המשתנים $x$ ו־ $y$, יש ערך יחיד של $z$ המשלים את זוג הערכים שבחרנו לשלשה שהיא פתרון: עבור $x = s$, $y = t$, הערך היחיד של $z$ המניב פתרון הוא: $z = \dfrac{d}{c} - \dfrac{a}{c}s - \dfrac{b}{c}t$

בפתרון הכללי יש שני פרמטרים;

הפתרון הכללי הוא: $\left(s,t,\dfrac{d}{c} - \dfrac{a}{c}s - \dfrac{b}{c}t\right)$

10 $F^3$ היא הקבוצה המורכבת מכל השְׁלָשׁוֹת מעל $F$.

הפתרון הפרטי המתאים ל־ $s = t = 0$ הוא $\left(0,0,\frac{d}{c}\right)$

הפתרון הפרטי המתאים ל־ $s = t = 1$ הוא $\left(1,1,\frac{d}{c}-\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\right)$

הפתרון הפרטי המתאים ל־ $s = 0,\ t = 0$ הוא: $\left(0,1,\frac{d}{c}-\frac{b}{c}\right)$

מצאו בעצמכם את הפתרון הפרטי המתאים ל־ $s = 1,\ t = 0$, וכן את הפתרון הפרטי המתאים ל־ $s = t = c$.

**הערה**

משוואה לינארית, שכל המקדמים שלה (הן מקדמי המשתנים, הן המקדם החופשי) הם אפסים (בשדה הנתון), נקראת **משוואת אפס**.

**דוגמה 5**

משוואת האפס בשני משתנים, $0x + 0y = 0$, היא משוואה אחרת מאשר משוואת האפס בשלושה משתנים, $0x + 0y + 0z = 0$. הראשונה מציבה תנאי על **זוגות** של סקלרים, ואילו השנייה מציבה תנאי על **שְׁלָשׁוֹת** של סקלרים. בכל הצבה של ערכים במקום המשתנים, כל אחת מהן "אומרת" $0 = 0$. לפיכך, קבוצת הפתרונות של $0x + 0y = 0$ היא קבוצת כל **הזוגות** מעל $F$, כלומר הקבוצה $F^2$; קבוצת הפתרונות של $0x + 0y + 0z = 0$ היא קבוצת כל **השְׁלָשׁוֹת** מעל $F$, שהיא הקבוצה $F^3$.

מעל $\mathbb{Z}_2$ למשל, כמות הפתרונות של $0x + 0y = 0$ היא 4 (כמספר הזוגות מעל הקבוצה $\{0,1\}$), ואילו ל־ $0x + 0y + 0z = 0$ יש 8 פתרונות (כמספר השלשות מעל הקבוצה $\{0,1\}$).

המשוואה הלינארית הכללית ב־ $n$ משתנים, מעל שדה כלשהו $F$, היא:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

דרך דומה לזו שאותה נקטנו בדוגמה 4 מובילה למסקנות האלה:

א. אם המשוואה היא משוואת אפס, אז כל $n$־יה מעל $F$ היא פתרון שלה. קבוצת פתרונותיה היא $F^n$.

ב. אם מקדמי כל המשתנים הם 0, והמקדם החופשי שונה מ־0, אז אין $n$־יה מעל $F$ שהיא פתרון שלה. קבוצת הפתרונות של המשוואה היא הקבוצה הריקה $\phi$.

ג. אם לפחות אחד ממקדמי המשתנים שונה מאפס, אז למשוואה יש פתרון, וכאשר מספר המשתנים גדול מאחד, למשוואה יש יותר מפתרון אחד.

במקרה ג, אם $F$ הוא שדה אינסופי כגון $\mathbb{Q}$ או $\mathbb{R}$, כמות הפתרונות היא אינסופית; כדי לאפיין את קבוצת הפתרונות עלינו להציג את הפתרון הכללי שלה. לעומת זאת, אם $F$ הוא **שדה סופי** בן $k$ איברים, קבוצת הפתרונות היא סופית, שהרי הכמות הכוללת של $n$־יות מעל $F$ היא סופית. במקרה זה, אין הכרח למצוא את הפתרון הכללי; יש דרך אחרת - דרך הניסוי: אפשר להציב במשוואה, בזו אחר זו, כל אחת מ־ $k^n$ ה־ $n$־יות של סקלרים מתוך $F$, ולברור מתוכן את כל אלה שהן פתרונות. עם זאת, גם במקרה זה עדיף לתאר את הפתרון הכללי.

**דוגמה 6**

כדי למצוא בדרך הניסוי את כל הפתרונות מעל $\mathbb{Z}_7$ של המשוואה $2x+4y-5z=3$ עלינו למצוא מה היא "אומרת" על כל אחת מ־$7^3=343$ השְלָשות של איברים מתוך הקבוצה $\{0,1,2,3,4,5,6\}$. בפתרון הכללי של המשוואה הזאת יש שני פרמטרים. לכל אחד מהם יש 7 ערכים אפשריים. בסך הכל ישנם 49 צירופי ערכים לפרמטרים. 49 חישובים פשוטים יספיקו אפוא כדי להצביע על כל הפתרונות באופן מפורש. ◀

**דוגמה 7**

- הפתרון הכללי של $x+y=0$ (מדוגמה 3), שהוא $(t,-t)$, ניתן להצגה כ־ $t(1,-1)$, כלומר **כצירוף לינארי** (בעל מחובר אחד), שבו הפרמטר מופיע כמקדם.
- גם הפתרון הכללי של $2x-3y=7$ (מדוגמה 2), שהוא $\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)$, ניתן להצגה כצירוף לינארי שבו הפרמטר $t$ מופיע כמקדם, כך:

$$\left(t,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)=\left(t+0,\frac{2}{3}t-\frac{7}{3}\right)=\left(t,\frac{2}{3}t\right)+\left(0,-\frac{7}{3}\right)=t\left(1,\frac{2}{3}\right)+\left(0,-\frac{7}{3}\right)$$

(הפעם יש בצירוף שני מחוברים, המקדם של אחד מהם הוא $t$ ושל האחר – 1.) ◀

**שאלה 1.4.1**

הפתרון הכללי של $2x-3y=7$ ניתן להצגה גם כ־$\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}t,t\right)$. השלימו:

$$\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}t,t\right)=\left(\frac{7}{2},\_\_\right)+t\left(\frac{3}{2},\_\_\right)$$

**התשובה בעמוד 120**

**דוגמה 8**

את הרביעייה מעל $\mathbb{R}$, שבה מופיעים הפרמטרים $s$ ו־$t$: $(3,\ t-2s,\ 4+5s-t,\ s,\ t)$, נציג כך:

$$\begin{aligned}(3,t-2s,4+5s-t,s,t)&=(3+0s+0t,0-2s+t,4+5s-t,0+s+0t,0+0s+t)\\&=(3,0,4,0,0)+(0s,-2s,5s,s,0s)+(0t,t,-t,0t,t)\\&=(3,0,4,0,0)+s(0,-2,5,1,0)+t(0,1,-1,0,1)\end{aligned}$$

◀

**שאלה 1.4.2**

מצאו את הפתרון הכללי של כל אחת מן המשוואות שלהלן, והציגו אותו כצירוף לינארי של $n$־יות קבועות, שבו הפרמטרים מופיעים כמקדמים. המשוואות הן מעל $\mathbb{R}$.

א. $2x+4y-5z=3$

ב. $x+y-2z+3w=0$

**התשובה בעמוד 120**

**הערה**

בהגדרות ובמשפטים שבהמשך, נמשיך לדבר על משוואות לינאריות (ועל מערכות לינאריות) **מעל שדה** כלשהו $F$. זאת – משום שבהוכחות המשפטים נזדקק רק לתכונות של החיבור והכפל שמתקיימות בכל שדה. עם זאת, בדרך כלל נתמקד במשוואות לינאריות ובמערכות לינאריות מעל $\mathbb{R}$, ולא תמיד נקפיד לציין זאת, משום שזו תהיה עבורנו ברירת המחדל. יתר על כן, כמו קודם, המקדמים במערכות שנבחן יהיו בדרך כלל מספרים שלמים, כדי להקל על החישובים ולמנוע סרבול שאינו חיוני.

משוואות (ומערכות) לינאריות עם מקדמים שלמים או רציונליים בלבד, הן גם משוואות (ומערכות) לינאריות מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$. ההבדל היחיד בין הפתרונות הכלליים שלהם מעל $\mathbb{R}$ ומעל $\mathbb{Q}$ הוא בערכים שעליהם הפרמטרים "עוברים". לפיכך, במהלך כל הדיון, ההבדל בין השדות $\mathbb{Q}$ ו־$\mathbb{R}$ לא יבוא לידי ביטוי. כפי שעשינו בסעיף זה, נבחן מדי פעם משוואות מעל שדות סופיים, בפרט $\mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_7$, כדי שתראו כיצד מהות השדה שממנו לקוחים המקדמים באה לידי ביטוי. בדוגמאות שבהן הכוונה היא לשדה אחר מ־$\mathbb{R}$, תמיד נקפיד לציין זאת.

# 1.5 מערכות לינאריות

**מערכת משוואות לינארית**, או בקצרה – **מערכת לינארית**, מעל שדה $F$, היא אוסף המורכב ממספר סופי כלשהו של משוואות לינאריות מעל $F$. לדוגמה, המערכת

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ y + 3z &= 3 \\ z - x &= 5 \end{aligned}$$

היא מערכת לינארית מעל $\mathbb{R}$,[1] בת 3 משוואות. "לפתור" את המערכת משמעו למצוא עבור אילו ערכים של המשתנים, **כל** משוואות המערכת מייצגות טענות שוויון נכונות. במערכת שהדגמנו, מספר המשתנים שבמקומם צריך להציב סקלרים מסוימים הוא 3; לכן, למרות שבכל אחת ממשוואות המערכת יש רק שני משתנים, המערכת כולה היא בת שלושה משתנים, כמספר המשתנים השונים בכל המשוואות יחד. אמרו מעתה:

- כל משתנה של כל אחת מהמשוואות של מערכת לינארית הוא **משתנה של המערכת.**

כאשר מספר המשתנים של מערכת הוא 3, פתרונותיה (אם יש כאלה) הם שְׁלָשׁות; באופן כללי,

- הפתרונות של מערכת לינארית ב־ $n$ משתנים הם $n$־יות של סקלרים.

בכל מערכת לינארית אפשר להוסיף לכל משוואה את המשתנים של המערכת שאינם מופיעים בה, עם מקדם 0. התוספת אינה משנה את קבוצת הפתרונות של המערכת. כמו כן, אפשר לשנות את סדר המחוברים במשוואות ולהביא לכך שבכל המשוואות יופיעו המשתנים באותו סדר. בדוגמה שלנו, למשל, אפשר להציג את המערכת כך:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ y + 3z &= 3 \\ z - x &= 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y + 0z &= 2 \\ 0x + y + 3z &= 3 \\ -x + 0y + z &= 5 \end{aligned}$$

ההצגה שמימין מכונה "הצגה סטנדרטית" של המערכת.[2] ההצגה הסטנדרטית מאירה את העובדה שמדובר במערכת בת שלושה משתנים, שפתרונותיה אמורים להיות שלָשות. היא קובעת סדר מסוים ביניהם (כאן – $x$ המשתנה הראשון, $y$ השני, $z$ השלישי) ובכך מבהירה גם שבכל פתרון $(r,s,t)$, $r$ הוא הערך של $x$, $s$ הוא הערך של $y$ ו־ $t$ הוא הערך של $z$.

המערכת שהדגמנו, שהיא מערכת בת 3 משוואות ב־3 משתנים, מכונה "מערכת לינארית מסדר $3 \times 3$" (ובקיצור – "מערכת מסדר $3 \times 3$"). באופן כללי נגדיר:

---

1 כאמור בהערה מסוף הסעיף הקודם, השדה $\mathbb{R}$ שמעליו המערכת מוגדרת, הוא ברירת המחדל. בהמשך, בהעדר ציון השדה אנו מניחים שהמערכת היא מעל $\mathbb{R}$.

2 בהצגה הסטנדרטית שבחרנו, סדר הופעת המשתנים בכל המשוואות הוא $(x,y,z)$. יכולנו לבחור, כמובן, כל סדר הופעה אחר.

**הגדרה 1.5.1 מערכת לינארית סטנדרטית מסדר $m \times n$ מעל שדה $F$**

**מערכת לינארית סטנדרטית מסדר** $m \times n$ (קרי: "$m$ על $n$"), היא מערכת מהטיפוס:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

$x_1,\ldots,x_n$ הם המשתנים, $a_{ij}$ $(1 \le j \le m,\ \ 1 \le i \le n)$ הם מקדמי המשתנים, $b_i$ הם המקדמים החופשיים.

---

המשתנים, שכולם מופיעים בכל משוואות המערכת באותו סדר, סומנו $x_1,\ldots,x_n$, לפי סדר הופעתם. לסימול מקדמי המשתנים נעזרנו בשני אינדקסים: במקדם $a_{ij}$, האינדקס הראשון, $i$, מציין את מספר המשוואה שבה המקדם מופיע; האינדקס השני, $j$, מציין את המשתנה שאותו המקדם כופל. אם כן, לכל $i$ $(1 \le i \le m)$ ולכל $j$ $(1 \le j \le n)$, $a_{ij}$ מופיע במשוואה ה־$i$ כְּמקדם של $x_j$. לסימול המקדמים החופשיים נזקקנו לאינדקס בודד, המציין את מספר המשוואה שבה הוא מופיע.

נוכל לראות משוואה לינארית בודדת ב־$n$ משתנים כמערכת לינארית מסדר $1 \times n$.

**דוגמאות**

השלימו בעצמכם את החסר במשפטים הבאים:

- מערכת לינארית שיש בה 6 משוואות ומספר המשתנים בה הוא 5, היא מערכת מסדר _ × _.
- במערכת מסדר $7 \times 10$ יש _ משוואות ו_ משתנים. במערכת כזאת, $a_{23}$ הוא המקדם של $x_3$ במשוואה השנייה; $a_{54}$ הוא המקדם של _ במשוואה החמישית. $a_{64}$ מופיע במשוואה ה _, כְּמקדם של _.
- במערכת מסדר $m \times n$, $m > 1$, המקדם של המשתנה הראשון במשוואה האחרונה הוא _; המקדם של המשתנה האחרון במשוואה הראשונה הוא _; המקדם של המשתנה האחרון במשוואה האחרונה הוא _, והמקדם של המשתנה הלפני אחרון במשוואה האחרונה הוא _. ◄

מעתה ואילך נתייחס רק למערכות שכבר מוצגות בצורה סטנדרטית. כאשר מספר המשתנים קטן – אחד עד שלושה – נסמן אותם בדרך כלל כ־$x, y$ או $x, y, z$, במקום $x_1, x_2$ או $x_1, x_2, x_3$ (בהתאמה).

---

**הגדרה 1.5.2 פתרון של מערכת לינארית**

תהי נתונה מערכת לינארית מסדר $m \times n$, מעל שדה $F$. נסמן ב־$(x_1,\ldots,x_n)$ את $n$־יית המשתנים שלה.

$n$־יה $(v_1,\ldots,v_n)$ של סקלרים מתוך $F$ נקראת **פתרון של המערכת**, אם היא פותרת כל אחת מ־$m$ המשוואות של המערכת, כלומר אם עבור $(x_1,\ldots,x_n) = (v_1,\ldots,v_n)$, כל טענות השוויון המתקבלות ממנה הן נכונות.

---

**לפתור** מערכת לינארית מסדר $m \times n$ משמעו לאפיין את קבוצת כל הפתרונות שלה.

**הערה**

כל $n$־יה שפותרת מערכת לינארית מסדר $m \times n$ היא פתרון של כל אחת מ־ $m$ המשוואות של המערכת. כל משוואה של המערכת מציבה תנאי על ה־ $n$־יות, ויש לה קבוצה של $n$־יות שמקיימות תנאי זה, כלומר – פותרות אותה. פתרונות המערכת הם ה־ $n$־יות שממלאות את כל התנאים בבת אחת. מכאן שקבוצת הפתרונות של המערכת היא קבוצת ה־ $n$־יות השווה לחיתוך קבוצות הפתרונות של המשוואות הבודדות. לפעמים אין $n$־יות כאלה (חיתוך קבוצות הפתרונות של המשוואות הבודדות ריק), ואז קבוצת הפתרונות של המערכת **ריקה**.

- אם למערכת לינארית יש פתרון (אחד לפחות) אומרים שהמערכת **עקבית**.[3]
  מערכת לינארית שקבוצת הפתרונות שלה ריקה מכונה **בלתי־עקבית**.

יש סוג אחד של אי־עקביות שקל מאוד להבחין בו: כאשר במערכת לינארית ב־ $n$ משתנים יש משוואה מהטיפוס $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b(\neq 0)$
המערכת היא בבירור בלתי־עקבית; למשוואה כזאת, וכמובן גם לְמערכות שבהן היא מופיעה, אין פתרונות, שהרי לכל $n$־יית סקלרים $(v_1,\ldots,v_n)$, מתקיים: $0v_1 + \ldots + 0v_n = 0 \neq b$
מערכת עלולה להיות בלתי־עקבית גם כשאין בה משוואה מהטיפוס האמור לעיל.

**דוגמה**

המערכת

$$\begin{aligned} 3x + 5y - 2z &= 0 \\ 7x + 4y + 6z &= 7 \\ 10x + 0y + 4z &= 11 \end{aligned}$$

היא מערכת בלתי־עקבית; אין שְׁלָשָׁה של סקלרים שפותרת את שלוש המשוואות כאחת, למרות שלכל אחת מהן בנפרד יש אינסוף פתרונות. ננמק: שְׁלָשַׁת סקלרים שפותרת את שתי המשוואות הראשונות בהכרח פותרת גם את המשוואה שמתקבלת על־ידי חיבור שתי המשוואות הללו (נמקו!), שהיא:

$$10x + 9y + 4z = 7$$

אבל שְׁלָשָׁה שפותרת את המשוואה הזאת בוודאי אינה פותרת את המשוואה השלישית של המערכת, שהיא: $10x + 9y + 4z = 11$

▸

האי־עקביות של המערכת שהדגמנו לעיל אינה בולטת לעין, וייתכן שמלכתחילה לא הבחנתם בה. בהמשך נציג שיטה כללית לפתרון מערכות לינאריות, שמבוססת על מעבר מן המערכת שאותה רוצים לפתור, למערכת שאותה קל לפתור ושקבוצת פתרונותיה מתלכדת עם קבוצת הפתרונות של המערכת

3 בלעז – **קונסיסטנטית**.

המקורית. כשנפעיל את השיטה על מערכת בלתי־עקבית, נגיע תמיד למערכת שבה מופיעה משוואה מהטיפוס:

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \neq 0$$

האי־עקביות של מערכות שבהן יש משוואה כזאת מזדקרת לעין.

**הערה**

המשוואה

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$$

מכונה, כזכור, **משוואת אפס**. כל $n$־יה של סקלרים פותרת משוואה זו. כאשר משוואת האפס מופיעה במערכת ליניארית, והיא אינה המשוואה היחידה במערכת, היא מיותרת ואפשר להתעלם ממנה; נוכחותה במערכת אינה מעלה ואינה מורידה; כל פתרון של המערכת המורכבת מן המשוואות האחרות ממילא פותר גם אותה.

משוואה מתוך מערכת ליניארית עשויה להיות מיותרת גם כאשר היא אינה משוואת אפס.

**דוגמה**

במערכת מסדר $3 \times 2$ הבאה,

$$\begin{aligned} 2x + \phantom{2}y &= 10 \\ 3x + 2y &= 20 \\ 5x + 3y &= 30 \end{aligned}$$

המשוואה השלישית היא הסכום של שתי קודמותיה. כל זוג שפותר את שתי המשוואות הראשונות בהכרח פותר גם אותה;[4] משוואה זו אינה מוסיפה תנאי חדש על הזוגות הפותרים. קבוצת הפתרונות של המערכת הזאת מתלכדת עם קבוצת הפתרונות של המערכת מאותו סדר:

$$\begin{aligned} 2x + \phantom{2}y &= 10 \\ 3x + 2y &= 20 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

השיטה הכללית לפתרון מערכות ליניאריות שתוצג בהמשך הפרק, תאפשר להמיר כל מערכת שיש בה משוואה או משוואות מיותרות, במערכת מאותו סדר בעלת אותה קבוצת פתרונות שאין בה משוואות מיותרות (מלבד משוואות אפס, שעובדת היותן מיותרות מזדקרת לעין).

למערכות ליניאריות בעלות מאפיינים נוספים, מייחדים לעיתים כינויים מיוחדים. למשל:

4 למעשה, כל זוג שפותר שתיים כלשהן מן המשוואות בהכרח פותר גם את השלישית. מדויק יותר אפוא לומר שבמערכת הזאת יש משוואה מיותרת (לאו דווקא השלישית).

**הגדרה 1.5.3 מערכת הומוגנית/אי־הומוגנית**

מערכת לינארית, שכל המקדמים החופשיים שלה הם אפסים, נקראת **מערכת** (לינארית) **הומוגנית**.
הצורה הכללית של מערכת הומוגנית היא:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \quad + \ldots + \ a_{1n}x_n \ &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad & \\ a_{m1}x_{12} + \ldots + a_{mn}x_n \ &= 0 \end{aligned}$$

מערכת לינארית שאינה הומוגנית נקראת **מערכת אי־הומוגנית**.

**דוגמה**

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ x - \ y \qquad &= 0 \end{aligned}$$

היא מערכת לינארית הומוגנית (מסדר $2 \times 3$ – שתי משוואות, שלושה משתנים). ◀

לכל מערכת הומוגנית ב־$n$ משתנים יש פתרון: ה־$n$־יה $(0,...,0)$ פותרת אותה. פתרון זה מכונה **הפתרון הטריוויאלי** של המערכת. אם כן, **כל מערכת לינארית הומוגנית היא עקבית**.

**שאלה 1.5.1**

הציגו כל אחת ממערכות המשוואות שלהלן בצורה סטנדרטית; קבעו אם היא הומוגנית אם לאו; ציינו לגבי כל אחת מהן מהו $m$ – מספר המשוואות, ומהו $n$ – מספר המשתנים; מצאו בכל אחת מהן את $b_1$, $a_{32}$, $a_{23}$, $a_{41}$, $a_{33}$.

א.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 \ &= 0 \\ x_1 \ &= \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 \ &= 0 \\ x_1 \ &= -x_2 + x_3 \end{aligned}$$

ב. $x = 1 - z - y$
$$\begin{aligned} y &= 5 - x \\ z &= 2x \end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \ &= \frac{1}{2} \\ 2x_2 - x_3 - x_4 \ &= 0 \\ x_4 \ &= 0 \end{aligned}$$

**התשובה בעמוד 120**

**שאלה 1.5.2**

ציינו אילו מבין ה־$n$־יות $(0,0,0)$, $(0,0,0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1,0,2)$, מהוות פתרון לאחת (או יותר) מהמערכות א, ב ו־ג מהשאלה הקודמת.

**התשובה בעמוד 121**

**שאלה 1.5.3**

האם קיימת מערכת ליניארית אי־הומוגנית מעל שדה כלשהו אשר $(0,0,0)$ הוא פתרון שלה?

**התשובה בעמוד 122**

**שאלה 1.5.4**

א. הדגימו מערכת ליניארית מעל הממשיים שאין לה פתרון (מספר הנעלמים ומספר המשוואות לבחירתכם).

ב. האם המערכת שרשמתם הומוגנית או אי־הומוגנית?

ג. האם ייתכן שסטודנט אחר ענה בסעיף ב תשובה שונה וגם תשובתו נכונה?

**התשובה בעמוד 122**

**שאלה 1.5.5**

נתון כי $(v_1,\ldots,v_n)$ הוא פתרון של מערכת ליניארית מסוימת. כמה משתנים יש במערכת? כמה משוואות יש במערכת?

**התשובה בעמוד 122**

**שאלה 1.5.6**

האם קיימת מערכת ליניארית ב־3 משתנים, אשר כל שְלָשה של סקלרים היא פתרון שלה?

**התשובה בעמוד 123**

**שאלה 1.5.7**

נתונה מערכת ליניארית הומוגנית כלשהי ב־ $n$ משתנים מעל שדה כלשהו $F$.

א. הוכיחו: אם $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$ הוא פתרון של המערכת, אז לכל סקלר $s\in F$ גם $s\mathbf{c}$ הוא פתרון.

ב. הוכיחו: אם $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ פותרים את המערכת, אז גם $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ פותר אותה.

ג. תוך הסתמכות על התוצאות א ו־ב, הוכיחו: אם $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הם פתרונות של המערכת ו־ $s,t$ הם סקלרים כלשהם, אז גם הצירוף הלינארי $s\mathbf{c}+t\mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת.

**התשובה בעמוד 124**

**שאלה 1.5.8**

בשאלה הקודמת הוכחתם שלמערכות הומוגניות יש התכונות האלה:

א. כפולה בסקלר של פתרון היא פתרון.

ב. הסכום של שני פתרונות הוא פתרון.

האם אותן תכונות מתקיימות גם במערכות אי־הומוגניות?

**התשובה בעמוד 124**

# 1.6 מטריצת המקדמים של מערכת לינארית

מערכת לינארית מעל שדה $F$ מאופיינת לחלוטין על־ידי המקדמים שלה. אי לכך, במקום לרשום מערכת לינארית במלואה, נוח לרשום בקיצור רק את המקדמים שלה.

המערכת הלינארית הכללית מסדר $m \times n$ נראית כך:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \qquad \vdots & \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

בדרך הרישום המקוצרת אפשר להציג את המערכת באמצעות מלבן של סקלרים כך:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_2 & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

במלבן יש $m$ **שורות** ו־$(n+1)$ **עמודות**:

**בשורה** הראשונה נראים המקדמים של המשוואה הראשונה (לפי סדר הופעתם);

**בשורה** השנייה - המקדמים של המשוואה השנייה;

$\vdots$

**בשורה** ה־$m$ - המקדמים של המשוואה האחרונה.

**בעמודה** הראשונה נראים המקדמים של $x_1$ בכל משוואות המערכת;

**בעמודה** השנייה - המקדמים של $x_2$;

$\vdots$

**בעמודה** ה־$n$ נראים המקדמים של $x_n$ בכל משוואות המערכת;

**בעמודה** האחרונה, שמספרה $n+1$, רשומים לפי סדרם המקדמים החופשיים של המערכת.

- מלבן של סקלרים שיש בו $m$ שורות ו־$n$ עמודות מכונה **מטריצה** מסדר $m \times n$. בסימון מטריצה נקיף את מלבן איבריה בסוגריים (מרובעים או עגולים - שני הסימונים מקובלים). לסימון מטריצות נשתמש באותיות לטיניות גדולות.

**דוגמה**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{2}{3} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 7 & 0 & 8 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

זוהי מטריצה מסדר $4 \times 5$ (4 שורות, 5 עמודות). ◀

מערכת לינארית בת $m$ משוואות ב־ $n$ משתנים (לשון אחר – מערכת לינארית מסדר $m \times n$) מיוצגת באמצעות מטריצה מסדר $m \times (n+1)$.

- המטריצה המייצגת מערכת לינארית נתונה ב־ $n$ משתנים מכונה **מטריצת המקדמים של המערכת**. מספר שורותיה הוא כמספר המשוואות במערכת, ומספר עמודותיה גדול ב־1 ממספר המשתנים של המערכת. בכל אחת מ־ $n$ העמודות הראשונות שלה רשומים המקדמים של אחד ממשתני המערכת, ובעמודתה האחרונה – העמודה ה־$(n+1)$ – רשומים המקדמים החופשיים של המערכת.

**הערה חשובה**

בהמשך הפרק נעסוק בהרחבה בקשר שבין תכונות של מערכות משוואות לינאריות ותכונות של מטריצות המקדמים שלהן; עיסוק אינטסיבי זה עלול ליצור את הרושם שמערכת משוואות ומטריצה מייצגות אותו הדבר. אך יש לדייק – בהמשך הקורס נעסוק במטריצות גם שלא בהקשר של מערכות משוואות לינאריות. מערכת לינארית היא אוסף של משוואות לינאריות, בעוד שמטריצה היא מלבן של סקלרים ותו לא.

מטריצת המקדמים של המערכת הלינארית הכללית מסדר $m \times n$ שרשמנו בראש סעיף זה היא המטריצה מסדר $m \times (n+1)$ שרשמנו בעקבותיה. הקו המפריד האנכי, המופיע במטריצה הזאת לפני העמודה האחרונה, אינו מהותי ואין הכרח להוסיף אותו. רשמנו אותו רק כדי להדגיש את ההבדל בין $n$ העמודות הראשונות, שהן עמודות המקדמים של משתני המערכת, לבין העמודה האחרונה – עמודת המקדמים החופשיים.[1]

**דוגמה**

מטריצת המקדמים של המערכת מסדר $3 \times 3$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & - & 5x_2 & - & 8x_3 & = & -2 \end{array}$$

היא המטריצה מסדר $3 \times 4$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \end{array}\right]$$

◄

1 על אף שאין בכך הכרח, גם להבא נוסיף לפעמים את הקו האנכי במטריצות מקדמים של מערכות לינאריות, כדי להדגיש את ההבחנה בין עמודת המקדמים החופשיים לשאר העמודות. יש הנעזרים בקו אנכי מקווקו למטרה זו, במקום בקו רציף.

**שאלה 1.6.1**

רשמו באופן מלא מערכת לינארית שמטריצת המקדמים שלה היא

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

והשלימו את המשפטים האלה:

א. המטריצה היא מסדר _ × _ .

ב. מספר המשוואות במערכת הוא _ .

ג. מספר המשתנים של המערכת הוא _ .

האם המערכת הומוגנית?

**התשובה בעמוד 125**

# 1.7 מערכות לינאריות שקולות

לפניכם ארבע מערכות לינאריות בשלושה משתנים (מעל שדה הממשיים $\mathbb{R}$):

I
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x &+& 2y &+& 5z &=& 7 \\ 2x &+& 3y &+& 4z &=& 5 \end{array}$$

II
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& 3y &+& 4z &=& 5 \\ 4x &+& 2y &+& 5z &=& 7 \end{array}$$

III
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& 3y &+& 4z &=& 5 \\ 4x &+& 2y &+& 5z &=& 7 \\ 0x &+& 0y &+& 0z &=& 0 \end{array}$$

IV
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x &+& 3y &+& 4z &=& 5 \\ 4x &+& 2y &+& 5z &=& 7 \\ 0x &+& 0y &+& 0z &=& 0 \\ 6x &+& 5y &+& 9z &=& 12 \end{array}$$

אין צורך לפתור אותן כדי לקבוע בוודאות שקבוצות הפתרונות שלהן זֵהות. נסביר: לגבי המערכות I ו־II הדבר ברור, שכן הן כוללות אותן משוואות – ההבדל הוא רק בסדר שבו הן מוצגות. במערכת III יש אמנם משוואה אחת נוספת, אבל זו משוואת אפס שכל שְׁלָשָׁה היא פתרון שלה, ולכן נוכחותה אינה מצמצמת את קבוצת הפתרונות, שנשארת זהה לזו של המערכות I ו־II. המשוואה הנוספת של המערכת IV היא הסכום של שתי המשוואות הראשונות שהופיעו במערכות הקודמות. כל שְׁלָשָׁה שפותרת אותן פותרת גם אותה, לכן גם היא אינה גורעת פתרונות, ובוודאי שאינה מוסיפה. בשל כך נאמר שארבע המערכות שהדגמנו הן שקולות. הנה ההגדרה הרשמית של מערכות שקולות:

**הגדרה 1.7.1 מערכות לינאריות שקולות**

שתי מערכות לינאריות ב־ $n$ משתנים מעל שדה נתון הן **שקולות** זו לזו, אם יש לשתיהן אותה קבוצת פתרונות.

שיטת החילוץ, שאותה נציג בקרוב, היא שיטה כללית לפתרון מערכות לינאריות.[1] הרעיון שבבסיסה הוא לעבור מהמערכת שאותה **רוצים** לפתור, למערכת שקולה שניתנת לפתרון בקלות. המעבר מן המערכת המקורית למערכת השקולה, הקלה לפתרון, נעשה באופן הדרגתי: צעד אחר צעד משנים את המערכת, באופן שאינו משנה את קבוצת הפתרונות שלה. השינוי שנעשה בכל צעד מכונה **שינוי אֶלֶמֶנְטָרִי** (כלומר, שינוי **יסודי**). כל שינוי אלמנטרי מעביר את המערכת למערכת שקולה, קצת יותר קרובה בצורתה לצורה הסופית המבוקשת. מספר הצעדים הדרוש כדי להגיע למערכת נוחה לפתרון הוא סופי.

1 השיטה ידועה בשם **שיטת החילוץ של גאוס** – Gauss' elimination method, על שם המתמטיקאי הגרמני Karl Friedrich Gauss (1777-1855), שפיתח אותה. גאוס, הידוע בכינוי "נסיך המתמטיקאים", נחשב לאחד מגדולי המתמטיקאים בכל הדורות.

נגדיר מהו שינוי אלמנטרי:

**הגדרה 1.7.2 שינוי אלמנטרי במערכת לינארית**

**שינוי אלמנטרי** במערכת לינארית הוא שינוי מאחד הטיפוסים האלה:

1. החלפת סדר הופעתן של שתי משוואות במערכת.
2. כפל אחת המשוואות בסקלר שונה מאפס.
3. הוספת כפולה בסקלר של אחת ממשוואות המערכת למשוואה אחרת של המערכת.

נדגים תחילה כל אחד מסוגי השינויים הנזכרים בהגדרה 1.7.2, ולאחר מכן נראה ששינויים אלמנטריים במערכת לינארית נתונה אינם משנים את קבוצת הפתרונות שלה.

**דוגמה 1 – שינוי סדר הופעת המשוואות במערכת**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x &+& 4y &+& 4z &=& 10 \\ 2x &-& 6y &+& 3z &=& 8 \\ 3x &+& 2y &-& 5z &=& 7 \end{array} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{array}{rcrcrcr} 3x &+& 2y &-& 5z &=& 7 \\ 2x &-& 6y &+& 3z &=& 8 \\ 4x &+& 4y &+& 4z &=& 10 \end{array}$$

המערכת הימנית התקבלה מן המערכת השמאלית על־ידי החלפת סדר ההופעה של **המשוואות** הראשונה והאחרונה. מטריצת המקדמים של המערכת הימנית מתקבלת ממטריצת המקדמים של המערכת השמאלית על־ידי החלפת **השורות** הראשונה והשלישית זו בזו:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 4 & 10 \\ 2 & -6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -5 & 7 \\ 2 & -6 & 3 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right]$$

**שימו לב לדרך הסימון!**

$R_1 \leftrightarrow R_3$ מציין שהשינוי היה החלפת המשוואות הראשונה והשלישית זו בזו.

**באופן כללי**, במערכת המשוואות, $R_i \leftrightarrow R_j$ מסמל את החלפת **המשוואות** ה־$i$ וה־$j$ זו בזו, ובמטריצת המקדמים הוא מסמל את החלפת **השורות** ה־$i$ וה־$j$ של המטריצה זו בזו.[2] באמצעות מספר סופי של שינויים מהטיפוס $R_i \leftrightarrow R_j$ ניתן להציג את המשוואות של כל מערכת לינארית בכל סדר רצוי.

2 האות $R$ היא ראש התיבה האנגלית Row שמשמעה **שורה**. שימו לב להבדל הוויזואלי בין סמל זה לסמל $\mathbb{R}$, המציין את קבוצת המספרים הממשיים.

**דוגמה 2 – כפל אחת ממשוואות המערכת בסקלר שונה מאפס**

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 4y & + & 4z & = & 10 \\ 2x & - & 6y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 7 \end{array} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 2x & - & 6y & + & 3z & = & 8 \\ 3x & + & 2y & - & 5z & = & 7 \end{array}$$

המערכת הימנית התקבלה מן המערכת השמאלית על־ידי כפל **המשוואה הראשונה** ב־ $\frac{1}{2}$.

מטריצת המקדמים של המערכת הימנית מתקבלת ממטריצת המקדמים של המערכת השמאלית על־ידי כפל **השורה הראשונה** ב־ $\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 4 & 10 \\ 2 & -6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \end{array}\right]$$

**שימו לב לדרך הסימון!**

$R_1 \to \frac{1}{2}R_1$ מציין, שהשינוי הוא כפל המשוואה הראשונה (או השורה הראשונה של מטריצת המקדמים) ב־ $\frac{1}{2}$. ◄

**באופן כללי,** $R_i \to tR_i$ מסמל את השינוי האלמנטרי של כפל המשוואה ה־ $i$ של המערכת בסקלר $t$ (או כפל השורה ה־ $i$ של מטריצת המקדמים בסקלר $t$).

**שימו לב**, הסייג $t \neq 0$ הוא חיוני! כפל אחת המשוואות של מערכת ב־0 עלול להניב מערכת שאינה שקולה למערכת המקורית.

**דוגמה**

עיינו במערכת הממשית:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$$

הזוג $(2,3)$ פותר את המשוואה הראשונה, אבל לא את השנייה. לכן הוא אינו פתרון של המערכת. אבל אם נכפול את המשוואה השנייה ב־0 נקבל את המערכת:

$$\begin{aligned} x + \phantom{0}y &= 5 \\ 0x - 0y &= 0 \end{aligned}$$

כל זוג פותר את המשוואה השנייה, לכן הזוג $(2,3)$, הפותר את המשוואה הראשונה, הוא פתרון של המערכת כולה לאחר השינוי. קבוצות הפתרונות של שתי המערכות אינן זֵהוֹת; המערכות אינן שקולות. ◄

**דוגמה 3 – הוספת כפולה של אחת ממשוואות המערכת למשוואה אחרת של המערכת**

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ x + 4y &=& 1 \end{array} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{array}{rcl} x + y &=& 2 \\ -3x &=& -7 \end{array}$$

ובקיצור,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -7 \end{array}\right]$$

**שימו לב לדרך הסימון!**

- $R_2 \to R_2 - 4R_1$ מציין שלמשוואה השנייה הוספנו את הכפולה ב־ $(-4)$ של המשוואה הראשונה.

**באופן כללי**, $R_i \to R_i + tR_j$ מייצג את השינוי האלמנטרי של הוספת כפולה ב־ $t$ של השורה ה־ $j$ לשורה ה־ $i$ של מטריצת המקדמים.

נוכיח כעת שכל אחד מן השינויים האלמנטריים שהגדרנו מעביר את המערכת המקורית למערכת שקולה לה.

---

**טענה 1**

שינוי אלמנטרי מהטיפוס $R_i \leftrightarrow R_j$ מניב מערכת משוואות שהיא שקולה למערכת המקורית.

---

**הוכחה**

כאשר מערכת אחת מתקבלת ממערכת אחרת על־ידי שינוי אלמנטרי מהטיפוס הזה, בשתי המערכות מופיעות אותן משוואות; ההבדל הוא רק בסדר ההופעה. ברור אפוא שכל $n$־יה שפותרת אחת מן המערכות פותרת גם את האחרת, לכן שתי המערכות – זו שלפני השינוי וזו שאחריו – שקולות.

**מ.ש.ל.**

---

**טענה 2**

השינוי האלמנטרי $R_i \to tR_i$, כאשר $t \neq 0$, מניב מערכת משוואות שהיא שקולה למערכת המקורית.

---

**הוכחה**

השינוי האלמנטרי $R_i \to tR_i$, כאשר $t \neq 0$, משנה רק את המשוואה ה־ $i$ של המערכת.

במערכת המקורית, המשוואה ה־ $i$ היא $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

במערכת החדשה, המשוואה ה־ $i$ היא $ta_{i1}x_1 + ta_{i2}x_2 + \ldots + ta_{in}x_n = tb_i$

נניח ש־ $n$־יה מסוימת של סקלרים פותרת את המשוואה המקורית, כלומר הופכת אותה לשוויון. השוויון ייוותר בעינו גם אם נכפול את שני אגפיו ב־ $t$, לכן אותה $n$־יה פותרת גם את המשוואה

החדשה. ולהפך – נניח ש־$n$־יה מסוימת של סקלרים פותרת את המשוואה החדשה, כלומר הופכת אותה לשוויון. השוויון ייוותר בעינו גם אם נכפול את שני אגפיו ב־$t^{-1}$, ולכן אותה $n$־יה פותרת גם את המשוואה המקורית. שינוי מהטיפוס $R_i \to tR_i$, כאשר $t \neq 0$, אינו משנה אפוא את קבוצת הפתרונות של המשוואה ה־$i$, ומאחר שהמשוואות האחרות אינן משתנות בכלל, גם קבוצות הפתרונות שלהן אינן משתנות, ולכן קבוצת הפתרונות של המערכת כולה אינה משתנה (ראו הערה לאחר הגדרה 1.5.2). בזאת הוכחנו כי שינוי מטיפוס זה מוביל למערכת שקולה.

**מ.ש.ל.**

---

**טענה 3**

השינוי האלמנטרי $R_i \to R_i + tR_j$, מניב מערכת משוואות שהיא שקולה למערכת המקורית.

---

**הוכחה**

השינוי משנה רק את המשוואה ה־$i$ של המערכת (השורה ה־$i$ של מטריצת המקדמים).

במערכת המקורית, המשוואה ה־$i$ היא $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$

במערכת החדשה, המשוואה ה־$i$ היא

$$(a_{i1} + ta_{j1})x_1 + (a_{i2} + ta_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + ta_{jn})x_n = b_i + tb_j$$

**חלק א של ההוכחה**

נַראה, שכל $n$־יה שפותרת את המערכת המקורית, פותרת גם את המערכת המתקבלת ממנה בעקבות השינוי האלמנטרי $R_i \to R_i + tR_j$.

לשם כך, נניח שה־$n$־יה $(v_1,\dots,v_n)$ פותרת את המערכת הנתונה, ונוכיח שהיא פותרת את המערכת החדשה:

$(v_1,\dots,v_n)$ בוודאי פותרת את המשוואות של המערכת שלא השתנו. כל שעלינו להוכיח הוא שהיא פותרת גם את המשוואה ה־$i$ של המערכת החדשה. ובכן, $(v_1,\dots,v_n)$, שפותרת את המערכת המקורית, בוודאי פותרת את המשוואות ה־$i$ וה־$j$ שלה. לכן:

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \dots + a_{in}v_n = b_i$$
$$a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + \dots + a_{jn}v_n = b_j$$

נכפול את שני אגפי השוויון השני ב־$t$, נוסיף אותם לאגפי השוויון הראשון ונקבל:

$$(a_{j1}v_1 + \dots + a_{jn}v_n) + t(a_{i1}v_1 + \dots + a_{in}v_n) = b_j + tb_i$$

ומכאן:

$$(a_{j1} + ta_{i1})v_1 + \dots + (a_{jn} + ta_{in})v_n = b_j + tb_i$$

לכן $(v_1,\dots,v_n)$ אכן פותרת את המשוואה ה־$i$ של המערכת החדשה.

**חלק ב של ההוכחה**

נראה שאם $n$־יה כלשהי פותרת את המערכת החדשה, אז היא פותרת גם את המערכת המקורית.

אם נתבונן במערכת החדשה שהתקבלה מהמקורית בעקבות השינוי $R_i \to R_i + tR_j$, ונפעיל עליה את השינוי $R_i \to R_i - tR_j$, נקבל בחזרה את המערכת המקורית. אכן, קודם הוספנו את $tR_j$ לשורה $R_i$, ואחר כך הפחתנו את $tR_j$ משורה זו. את השינוי האלמנטרי $R_i \to R_i - tR_j$ נוכל אפוא לכתוב באופן הבא: $R_i \to R_i + (-t)R_j$; זהו אותו שינוי מהסוג שבו דנו בחלק א של ההוכחה (עם הסקלר $-t$ במקום הסקלר $t$), ולכן לפי חלק א, אם $n$־יה כלשהי פותרת את המערכת החדשה, היא פותרת גם את המערכת המתקבלת ממנה בעקבות השינוי $R_i \to R_i - tR_j$, ולכן היא פותרת את המערכת המקורית, כפי שרצינו להוכיח.

חלקים א ו־ב ביחד משלימים את הוכחת הטענה.

**מ.ש.ל.**

במהלך הדיון לעיל הוכחנו, ששינוי אלמנטרי של מערכת לינארית, מכל אחד משלושת הסוגים שתוארו בהגדרה 1.7.2, אינו משנה את קבוצת הפתרונות של המערכת, כלומר הוא מניב מערכת לינארית שקולה למערכת המקורית. מכאן נובע מִיָּדִית:

---

**משפט 1.7.3**

אם מערכת לינארית מתקבלת ממערכת נתונה באמצעות סדרה סופית של שינויים אלמנטריים עוקבים, אז היא שקולה למערכת המקורית.

---

כפי שתראו בהמשך, בעזרת סדרה סופית של שינויים כאלה אפשר להמיר כל מערכת לינארית במערכת לינארית שניתן לפתור אותה בקלות.

## 1.8 מטריצות שקולות־שורה

כפי שראינו בסעיף הקודם, מערכות ליניאריות מאופיינות על־ידי מטריצות המקדמים שלהן. שינויים אלמנטריים במערכת משתקפים כפעולות על שורות מטריצת המקדמים שלה. פעולה על מטריצת סקלרים, המבטאת שינוי אלמנטרי במערכת הליניארית שהמטריצה מייצגת, מכונה **פעולת־שורה**.

פעולות־השורה המתאימות לשלושת סוגי השינויים האלמנטריים שתיארנו בסעיף הקודם הן:

א. החלפת שתי שורות של המטריצה זו בזו (סימון: $R_i \leftrightarrow R_j$).

ב. כפל שורה אחת של המטריצה בסקלר $t$ שונה מאפס (סימון: $R_i \to tR_i$).

ג. הוספת כפולה בסקלר של אחת משורות המטריצה לשורה אחרת (סימון: $R_i \to R_i + tR_j$).

אם פעולת־שורה כלשהי על מטריצה נתונה $A$ הופכת אותה למטריצה $B$, אז מ־$B$ אפשר לחזור ל־$A$ בעזרת פעולת־שורה מאותו סוג. נפרט:

- אם $B$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפת השורות ה־$i$ וה־$j$ של $A$ זו בזו, אז $A$ מתקבלת מ־$B$ על־ידי החלפת השורות ה־$i$ וה־$j$ של $B$ זו בזו.

**דוגמה**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

◀

- אם $B$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי כפל השורה ה־$i$ של $A$ בסקלר $t \neq 0$, אז $A$ מתקבלת מ־$B$ על־ידי כפל השורה ה־$i$ של $B$ בסקלר $t^{-1}$.

**דוגמה**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

◀

- אם $B$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת הכפולה בסקלר $t$ של השורה ה־$j$ של $A$, לשורה ה־$i$ של $A$, אז $A$ מתקבלת מ־$B$ על־ידי הוספת הכפולה בסקלר $-t$ של השורה ה־$j$ של $B$, לשורה ה־$i$ של $B$.

**דוגמה**

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+3R_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\7&11&15\\7&8&9\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

◀

**הגדרה 1.8.1 מטריצות שקולות־שורה**

תהיינה $A,B$ מטריצות מאותו סדר. נאמר ש־ $A$ **שקולת־שורה** (Row equivalent) ל־ $B$, אם יש סדרה סופית של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $A$ ל־ $B$.

כפל אחת השורות של מטריצה $A$ בסקלר $t=1$ אינו משנה את $A$. אם כן, לכל מטריצה $A$ יש סדרה סופית של פעולות־שורה שמובילה מ־ $A$ ל־ $A$. כל מטריצה היא אפוא שקולת־שורה לעצמה. את העובדה הזאת מבטאים באמירה:

- יחס[1] שקילות־שורה הוא יחס **רפלקסיבי**.

האמור בפסקה שקדמה להגדרה 1.8.1 מלמד, שאם יש סדרה של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $A$ ל־ $B$, אז יש גם סדרה של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $B$ ל־ $A$. הווי אומר: אם $A$ שקולת־שורה ל־ $B$, אז $B$ שקולת־שורה ל־ $A$. במילים אחרות, כאשר אחת משתי מטריצות היא שקולת־שורה לאחרת, אפשר לומר ששתי המטריצות הן שקולות־שורה זו לזו. את העובדה הזאת מבטאים באמירה:

- שקילות־שורה הוא יחס **סימטרי**.

נניח שסדרה סופית כלשהי של פעולות־שורה עוקבות מובילה מ־ $A$ ל־ $B$, וסדרה סופית נוספת של פעולות־שורה עוקבות מובילה מ־ $B$ ל־ $C$. שרשור הפעולות שבשתי הסדרות מניב סדרה סופית של פעולות־שורה עוקבות, המובילה מ־ $A$ ל־ $C$. לפיכך, אם $A$ שקולת־שורה ל־ $B$, ו־ $B$ שקולת־שורה ל־ $C$, אז $A$ שקולת־שורה ל־ $C$. את העובדה הזאת מבטאים באמירה:

- שקילות־שורה הוא יחס **טרנזיטיבי**.

**הערה**

במתמטיקה נוהגים לייחד את הכינוי "שקילות" ליחסים שהם רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים.

1 **יחס** הוא מושג מתמטי פורמלי; לא נביא כאן הגדרה מסודרת של מושג זה (ולא נזדקק לה) – תוכלו להסתפק בהבנה האינטואיטיבית של התכונות המפורטות בהמשך, ואין צורך כי תתעמקו בפרטים הטכניים. על יחסים בכלל, ויחסי שקילות בפרט, תוכלו ללמוד בהרחבה במסגרת הקורס **מתמטיקה בדידה**.

**דוגמאות**

א. יחס הדמיון בין משולשים במישור ראוי להיקרא יחס שקילות:[2]

היחס רפלקסיבי - כל זווית של משולש נתון שווה לעצמה;

היחס סימטרי - אם הזוויות של $\triangle ABC$ שוות לזוויות המתאימות של $\triangle A'B'C'$, אז הזוויות של $\triangle A'B'C'$ שוות לזוויות המתאימות של $\triangle ABC$;

היחס טרנזיטיבי - אם הזוויות של $\triangle ABC$ שוות לזוויות המתאימות של $\triangle A'B'C'$, והזוויות של $\triangle A'B'C'$ שוות לזוויות המתאימות של $\triangle A"B"C"$, אז הזוויות של $\triangle ABC$ שוות לזוויות המתאימות של $\triangle A"B"C"$.

ב. יחס הסדר בין מספרים טבעיים, שסימונו "$<$", **אינו** ראוי להיקרא יחס שקילות:

היחס אינו רפלקסיבי - למשל, $5 \nless 5$.

ג. יחס השקילות בין מערכות לינאריות ב־$n$ משתנים שהוגדר בסעיף הקודם הוא בבירור רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי (נמקו!).

ד. כפי שראינו לעיל, גם היחס של שקילות־שורות בין מטריצות ניחן בתכונות הללו.[3]

מטריצות שקולות־שורה מייצגות מערכות לינאריות המתקבלות זו מזו באמצעות סדרה של שינויים אלמנטריים עוקבים. לאור משפט 1.7.3, פירוש הדבר הוא:

- **אם שתי מטריצות הן שקולות־שורה, אז המערכות הלינאריות שהן מייצגות הן שקולות.**

לפיכך, בהינתן מערכת משוואות לינאריות, ניתן לבצע סדרת פעולות אלמנטריות ולקבל מערכת שקולה, כלומר מערכת שקבוצת הפתרונות שלה זהה לקבוצת הפתרונות של המערכת המקורית.

---

2 משולש $\triangle A'B'C'$ **דומה** למשולש $\triangle ABC$ אם ורק אם: $\sphericalangle A' = \sphericalangle A,\ \sphericalangle B' = \sphericalangle B,\ \sphericalangle C' = \sphericalangle C$.

3 בהקשר זה נעיר עוד שבמתמטיקה, כשאומרים ששתי טענות הן שקולות, מתכוונים לכך שכל אחת מהן נובעת מן האחרת. גם היחס הזה הוא, בבירור, רפלקסיבי, סימטרי, וטרנזיטיבי, וראוי להיקרא "יחס שקילות" (בין טענות).

# 1.9 שיטת החילוץ – דוגמאות ראשונות

שיטת החילוץ מבוססת על שימוש בשינויים אלמנטריים לשם פישוט מערכות לינאריות שאותן רוצים לפתור. לפני שנציג אותה במלוא כלליותה, נפתור בעזרתה מערכות אחדות, פשוטות למדי. בכל דוגמה נעבור, בעזרת מספר סופי של שינויים אלמנטריים, מהמערכת הנתונה למערכת שקולה, קלה לפתרון, ונפתור אותה.

**דוגמה 1**

נפתור את המערכת מעל הממשיים שמטריצת המקדמים שלה היא

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

מטריצה זו מתאימה למערכת

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

המשימה הראשונה תהיה לעבור למערכת שקולה, שבה המשתנה השמאלי ביותר, $x$, מופיע רק במשוואה אחת - העליונה. לשון אחר, המשימה היא **לחלץ** את $x$ מן המשוואות האחרות.

במשוואה הראשונה, המקדם של $x$ הוא 3, ובמשוואה השלישית המקדם של $x$ הוא 1. מסיבות שתתבהרנה מייד, כדאי להחליף את המשוואות הראשונה והשלישית זו בזו (שינוי אלמנטרי מטיפוס 1):

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

כעת נוסיף **למשוואות שמתחת לראשונה** כפולות של **המשוואה הראשונה**, כדי להיפטר מההופעות של $x$ במשוואות הללו.[1] אנו זקוקים אפוא לשני שינויים אלמנטריים מטיפוס 3:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - 3R_1} \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & & -5y & - & 8z & = & -2 \end{array}$$

1 כעת ברורה הסיבה לשינוי האלמנטרי הראשון שעשינו במערכת המשוואות. בחרנו לשבץ בשורה הראשונה משוואה שהמקדם של המשתנה הראשון שלה הוא 1, כדי שהכפולות של משוואה זו שנוסיף למשוואות שתחתיה יניבו משוואות עם מקדמים שלמים והחישוב יהיה נוח.

במערכת שאליה הגענו, $x$ אינו מופיע מתחת למשוואה הראשונה; $x$ **חולץ** מן המשוואות השנייה והשלישית. במשוואות שמתחת לראשונה, המשתנה השמאלי ביותר הוא $y$. $y$ מופיע במשוואה השנייה, והמשימה הבאה היא לחלץ את $y$ מהמשוואות שמתחת לשנייה, כלומר מהמשוואה השלישית. את זה נשיג על־ידי הוספת כפולה מתאימה של המשוואה השנייה לשלישית. כדי להקל את המשך החישוב, "נצמצם" קודם את המשוואה השנייה בגורם $-3$, כלומר נכפול אותה ב־ $-\frac{1}{3}$ (שינוי אלמנטרי מטיפוס 2):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ & - & 5y & - & 8z & = & -2 \end{array} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & - & 5y & - & 8z & = & -2 \end{array}$$

וכעת נחלץ את $y$ מן המשוואה השלישית כך:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & - & 5y & - & 8z & = & -2 \end{array} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & -2 \end{array}$$

כדי להיפטר מסימני המינוס במשוואה השלישית, נכפול אותה ב־ $(-1)$ (שינוי אלמנטרי מטיפוס 2):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & - & 3z & = & -2 \end{array} \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 3z & = & 2 \end{array}$$

המערכת שאליה הגענו התקבלה מן המערכת המקורית באמצעות סדרה סופית של שינויים אלמנטריים, לכן היא שקולה למערכת המקורית. במערכת הזאת, המשתנה הראשון שמופיע בכל משוואה איננו מופיע במשוואות שמתחתיה. בכל משוואה, נעביר לאגף ימין את כל המחוברים פרט לראשון (תוך היפוך סימניהם)[2] ונקבל:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & = & 1 & - & 2y & - & 3z \\ & & y & = & -z & & \\ & & & & 3z & = & 2 \end{array}$$

את המערכת הזאת נפתור מן הסוף להתחלה, ב**הצבה לאחור**:

מן המשוואה השלישית נקבל: $\boxed{z = \frac{2}{3}}$

נציב תוצאה זו במשוואה השנייה ונקבל: $\boxed{y = -\frac{2}{3}}$

נציב את הערכים האלה במשוואה הראשונה ונקבל: $\boxed{x = \frac{1}{3}}$

אם כן, למערכת יש **פתרון יחיד** והוא: $\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

2 כלומר, נוסיף לשני האגפים של כל משוואה את הנגדיים לכל המחוברים, פרט לראשון. שינוי זה בהצגה מעביר את המערכת למערכת שקולה לה.

הציבו את השְׁלָשָׁה $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ במערכת המקורית ובדקו שהיא אכן פותרת את כל המשוואות שבה. ◀

בדוגמה הבאה ננקוט דרך דומה, אך נסתייע במטריצת המקדמים של המערכת. במקום לשנות את המערכת באמצעות שינויים אלמנטריים, נשנה את מטריצת המקדמים שלה באמצעות פעולות שורה.

**שימו לב:**

'לחלץ' את המשתנה ה־ $j$ מן המשוואה ה־ $i$, כלומר לגרום לכך ש־ $x_j$ לא יופיע בה, משמעו: לְאַפֵּס את המקדם שלו, שהוא האיבר המופיע בשורה ה־ $i$ בעמודה ה־ $j$ במטריצת המקדמים (האיבר $a_{ij}$ שלה).

**דוגמה 2**

נפתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 16x_4 & + & 22x_5 & = & 28 \\
 & & & & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\
 & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & 5x_5 & = & 6
\end{array}$$

מטריצת המקדמים שלה היא:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}\right]$$

הצעד הראשון יהיה לחלץ את $x_1$ - המשתנה הראשון במשוואה הראשונה - מכל המשוואות שמתחת לראשונה, כלומר לְאַפֵּס את האיברים שמתחת לאיבר הראשון **בעמודה** הראשונה של המטריצה. בעמודה הזאת, מתחת לשורה הראשונה, יש רק איבר אחד שונה מ־0, והוא בשורה הרביעית. נאפס אותו בעזרת פעולת־שורה מטיפוס 3:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}\right]
\xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
0 & 0 & -4 & -12 & -17 & -22
\end{array}\right]$$

המערכת שאותה מייצגת המטריצה הימנית היא:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 16x_4 & + & 22x_5 & = & 28 \\
 & & & & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\
 & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5 \\
 & & & - & 4x_3 & + & 12x_4 & - & 17x_5 & = & -22
\end{array}$$

הפעם, שלא כמו בדוגמה 1, תוך כדי החילוץ של $x_1$ מן המשוואות שמתחת לראשונה, גם $x_2$ חולץ מהן. המשתנה הראשון שמופיע באיזושהי מן המשוואות הבאות הוא $x_3$. נתבונן כעת במערכת שמתחת למשוואה הראשונה:

המשימה הבאה תהיה לדאוג לכך שבמערכת זו, $x_3$ יופיע במשוואה העליונה ולא יופיע באלה שמתחתיה. כאמור, מעתה ואילך אנו מתרכזים במשוואות שמתחת לראשונה; במטריצת המקדמים נמתח קו בין השורה הראשונה לשורות הנמוכות יותר, ונתרכז במטריצה שמתחתיו.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -17 & -22 \end{array}\right]$$

במטריצה שמתחת לקו, העמודה הראשונה שאינה עמודת אפסים היא העמודה השלישית - עמודת המקדמים של $x_3$. נחליף שורות, כדי להביא לכך שבראש העמודה הזאת, כלומר במקום האיבר $a_{23}$ של המטריצה המלאה, יהיה איבר שונה מ־0.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -17 & -22 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -17 & -22 \end{array}\right]$$

מתחת ל־ $a_{23}$ יש רק איבר אחד שאינו 0, והוא $a_{43} = -4$. נאפס אותו על־ידי הוספת כפולה מתאימה של השורה השנייה לשורה הרביעית:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 & -17 & -22 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_2} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -9 & -12 \end{array}\right]$$

המערכת שאותה מייצגת המטריצה המלאה שקיבלנו (כולל השורה הראשונה) היא:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 16x_4 & + & 22x_5 & = & 28 \\ & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5 \\ & & & & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \\ & & & & & - & 6x_4 & - & 9x_5 & = & -12 \end{array}$$

בשלב זה נעזוב גם את המשוואה השנייה, ונתרכז במשוואות שמתחתיה. במטריצת המקדמים - נמתח קו בין השורה השנייה לשורות הנמוכות יותר, ונתרכז בהן.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -9 & -12 \end{array}\right]$$

במטריצה החלקית הנוכחית, העמודה הראשונה שאינה עמודת אפסים היא העמודה הרביעית - עמודת המקדמים של $x_4$. האיבר הראשון בה הוא $a_{34} = 2$. נאפס את האיבר שמתחתיו על־ידי הוספת כפולה מתאימה של השורה השלישית לשורה הרביעית.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -9 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 3R_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & 16 & 22 & 28 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

המטריצה (המלאה) שאליה הגענו התקבלה ממטריצת המקדמים של המערכת המקורית באמצעות סדרת פעולות־שורה, לכן היא מייצגת מערכת שקולה למערכת המקורית.

השורה האחרונה במטריצה הזאת מייצגת את המשוואה: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0$

זוהי משוואת אפס; כל חמישייה פותרת אותה. נוכחותה במערכת אינה מעלה ואינה מורידה, וברור שהיא מיותרת. לפיכך, המערכת המקורית (שהייתה מסדר $4 \times 5$) שקולה למערכת מסדר $3 \times 5$:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & + & 16x_4 & + & 22x_5 & = & 28 \\ & & & & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & = & 5 \\ & & & & & & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 4 \end{array}$$

כמו בדוגמה הקודמת, גם הפעם הגענו למערכת שבה המשתנה הראשון שמופיע בכל משוואה אינו מופיע במשוואות שמתחתיה, וכמקודם- נציג אותה כך:

$$\begin{aligned} x_1 &= 28 - 2x_2 - 7x_3 - 16x_4 - 22x_5 \\ 2x_3 &= 5 - 3x_4 - 4x_5 \\ 2x_4 &= 4 - 3x_5 \end{aligned}$$

כעת נציב לאחור (נפתור מהסוף להתחלה):

מן המשוואה האחרונה נסיק: $\boxed{x_4 = 2 - \frac{3}{2}x_5}$

נציב במשוואה הקודמת ונקבל: $2x_3 = 5 - 3\left(2 - \frac{3}{2}x_5\right) - 4x_5$

כלומר: $\boxed{x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_5}$

נציב במשוואה הראשונה ונקבל: $x_1 = 28 - 2x_2 - 7\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_5\right) - 16\left(2 - \frac{3}{2}x_5\right) - 22x_5$

ומכאן: $\boxed{x_1 = -\frac{1}{2} - 2x_2 + \frac{1}{4}x_5}$

המסקנה היא, שאת $x_1$, $x_3$, ו־ $x_4$ אפשר לבטא בעזרת $x_2$ ו־ $x_5$. את הערכים של $x_2$ ו־ $x_5$ אנו חופשיים לבחור כרצוננו, וכל בחירה תקבע את הערכים של $x_1$, $x_3$, ו־ $x_4$. למשל, אם נבחר $x_2 = x_5 = 0$ נקבל: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = 2$. אכן, קל לבדוק שהחמישייה $\left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 2, 0\right)$ פותרת את המערכת המקורית - ודאו זאת על־ידי הצבה.

הפתרון הכללי הוא חמישייה עם שני פרמטרים, במקומות השני והחמישי (המקומות של $x_2$ ושל $x_5$):

$$\left(\underbrace{-\frac{1}{2}-2s+\frac{1}{4}t}_{x_1},\ \underbrace{s}_{x_2},\ \underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t}_{x_3},\ \underbrace{2-\frac{3}{2}t}_{x_4},\ \underbrace{t}_{x_5}\right)$$

לכל פרמטר יש אינסוף ערכים אפשריים, ולכן **למערכת יש אינסוף פתרונות**. כפי שראינו בסעיף 1.4, ניתן להציג את הפתרון הכללי כצירוף ליניארי, שבו הפרמטרים $s$ ו־$t$ מופיעים כמקדמים של חמישיות קבועות:

$$\left(-\frac{1}{2}-2s+\frac{1}{4}t,\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t,\quad 2-\frac{3}{2}t,\quad t\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},2,0\right)+s(-2,1,0,0,0)+t\left(\frac{1}{4},0,\frac{1}{4},-\frac{3}{2},1\right)$$

שימו לב שהחמישייה $\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},2,0\right)$, זו שהמקדם שלה בצירוף הליניארי אינו פרמטר, היא הפתרון הפרטי המתקבל כשערכי הפרמטרים הם $s=t=0$.

בשיטה שנקטנו כאן הגענו להצגה של הפתרון הכללי שבה ערכי המשתנים השני והחמישי מיוצגים על־ידי פרמטרים, ואילו שאר המשתנים מיוצגים באמצעות פרמטרים אלה. נעיר כי זו אינה ההצגה היחידה של הפתרון הכללי - ניתן לבצע סדרות שונות של פעולות על אותה המערכת, המובילות להצגות שונות של הפתרון הכללי (שונות בכך שמשתנים אחרים מיוצגים על־ידי פרמטרים). עם זאת, בכל דרך שבה נציג את הפתרון הכללי, תתואר אותה קבוצת הפתרונות. ◄

**דוגמה 3**

נפתור את המערכת הממשית הבאה:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ -3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

מטריצת המקדמים היא:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right]$$

הפעם נעבוד רק עם מטריצת המקדמים, ונקמץ בהסברים. המעוניינים מוזמנים לרשום בעצמם את המערכת המלאה שאותה מייצגת המטריצה המתקבלת בעקבות כל סֶבֶב של פעולות־שורה.

ראשית נחליף שורות, כדי שבעמודה הראשונה יופיע איבר שונה מ־0 בשורה הראשונה. במילים אחרות, נשבץ בראש המערכת משוואה שהמשתנה הראשון המופיע בה הוא $x_1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

כעת נאפס את יתרת העמודה הראשונה, כלומר נחלץ את $x_1$ מהמשוואות שמתחתיה.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

נמתח קו בין השורה הראשונה לבאות אחריה.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

מתחת לקו, העמודה הראשונה שיש בה איברים שונים מ־0 היא השנייה. נְאַפֵּס בה את האיברים שמתחת ל־ $a_{22}$ (אצלנו - $a_{22} = 3$), ועלינו לאפס את $a_{23}$, שהוא כרגע, 1).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

המטריצה שאליה הגענו מייצגת מערכת, שהמשוואה השלישית בה היא:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -\frac{1}{3}$$

למשוואה הזאת אין פתרון. לכן למערכת כולה אין פתרון, ומאחר שהמערכת שקולה למערכת המקורית, הרי שגם למערכת המקורית **אין פתרון** - המערכת בלתי עקבית. ◀

# 1.10 מטריצות מדרגות

בכל שלוש הדוגמאות מסעיף 1.9 השיטה הייתה דומה: בכל אחד מהמקרים עברנו, באמצעות שינויים אלמנטריים, מן המערכת שנתבקשנו לפתור למערכת שקולה לה, שאותה הצלחנו לפתור בקלות בהצבה לאחור.

מטרתנו היא להראות שהשיטה הזאת "פועלת" תמיד, ללא תלות במערכת שממנה מתחילים. כצעד ראשון - נאפיין את טיפוס המערכת שאליה אנו רוצים להגיע במקרה הכללי; ליתר דיוק - נאפיין את מבנה מטריצת המקדמים של המערכת. לשם כך נגדיר תחילה:

---

**הגדרה 1.10.1 שורת אפס, איבר פותח**

א. שורה של מטריצה, שכל איבריה הם אפסים, מכונה **שורת אפס**.[1]

ב. שורה של מטריצה שאיננה שורת אפס, האיבר הראשון בה משמאל השונה מ־0 מכונה **האיבר הפותח**[2] של השורה.

ג. איבר של מטריצת מדרגות, שהוא **ה**איבר **ה**פותח של אחת משורותיה, יכונה להבא **איבר פותח** של המטריצה.

---

**דוגמה**

אם המטריצה היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

אז:

בשורה הראשונה, האיבר הפותח הוא $a_{14} = 8$ (האיברים הקודמים בשורה זו הם אפסים);

בשורה השנייה, האיבר הפותח הוא $a_{21} = 7$;

השורה השלישית היא שורת אפס, אין לה איבר פותח;

בשורה הרביעית האיבר הפותח הוא $a_{42} = \_\_$, ובשורה החמישית האיבר הפותח הוא $a_{\_\_} = \_\_$

(השלימו בעצמכם את החסר).[3] ◄

---

1 שורת אפס במטריצת המקדמים של מערכת לינארית מייצגת משוואת אפס במערכת עצמה.

2 כאשר המטריצה היא מטריצת המקדמים של מערכת לינארית, האיבר הפותח של שורה בה הוא המקדם של המשתנה הראשון שמופיע במשוואה המתאימה.

3 $a_{42} = 9$ , $a_{52} = 6$ .

כעת נגדיר:

**הגדרה 1.10.2 מטריצת מדרגות**

**מטריצת מדרגות** היא מטריצה שעונה על הדרישות האלה:

א. בכל שורה שאינה שורת אפס, האיבר הפותח הוא מימין לאיברים הפותחים של השורות שמעליו (כשיש שורות כאלה).

ב. כל שורות האפס (אם יש כאלה) הן מתחת לכל השורות שאינן שורות אפס.

**דוגמה 1**

ארבע המטריצות שלפניכם הן מטריצות מדרגות. השמאלית ביותר היא **מטריצת אפס** - מטריצה שכל איבריה אפסים. היא עונה על הדרישות למטריצת מדרגות, כי אין בה שורות שאינן שורות אפס; בשלוש המטריצות האחרות - האיברים הפותחים "יושבים" על גֶּרֶם מדרגות שיורד משמאל לימין. המדרגות "שוות גובה" (כי בכל שורה שאינה שורת אפס יש איבר פותח, ושורות אפס - כאשר יש כאלה - הן בתחתית). ה"רוחב" של המדרגות אינו בהכרח אחיד, כי לא נדרש שבכל **עמודה** יהיה איבר שהוא האיבר הפותח של שורתו.[4]

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&6&1\\0&2&5&0\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&5\\0&0&0&7\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&7&6&2&4&8\\0&0&5&1&3&3\\0&0&0&1&3&2\end{bmatrix}$$

(בין המטריצות המודגמות לעיל, קל לאתר אחת המייצגת מערכת בלתי עקבית. נסו כוחכם![5])

▸

**דוגמה 2**

שלוש המטריצות הבאות **אינן** מטריצות מדרגות:

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&2&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}5&1&1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}$$

במטריצה השמאלית ביותר יש שורת אפס מעל שורה שאינה שורת אפס; במטריצה האמצעית, האיבר הפותח של $R_3$ הוא משמאל לאיבר הפותח של $R_2$ שמעליה.

במטריצה הימנית, האיבר הפותח של $R_2$ הוא מתחת, ולא מימין, לאיבר הפותח של $R_1$ שמעליה.

▸

4 למשל, במטריצה הימנית, בעמודה השנייה אין איבר פותח של שורה כלשהי.

5 במערכת שאותה מייצגת המטריצה השלישית משמאל, המשוואה השלישית היא $0x + 0y + 0z = 7$. למשוואה זו אין פתרון, לכן כל מערכת שמכילה אותה היא בלתי עקבית (כלומר חסרת פתרונות).

**דוגמה 3**

כל מטריצה מסדר $n \times 1$ (שורה אחת, $n$ עמודות) היא, בבירור, מטריצת מדרגות. שימו לב, מטריצה כזאת מייצגת משוואה ליניארית רק אם $n \geq 2$, שכן בכל משוואה ליניארית יש לפחות משתנה אחד, ומספר העמודות של מטריצת המקדמים גדול ב־1 ממספר המשתנים, כלומר הוא לפחות 2.

◀

התרשים שלפניכם מתאר את המבנה של מטריצת מדרגות באופן סכמתי. (העיגולים מסמלים איברים פותחים, הכוכביות – סקלרים כלשהם). הביאו בחשבון שהאיור הוא סכמתי בלבד: האיבר הפותח האחרון לא חייב להימצא **בעמודה** האחרונה; אין הכרח **שהשורה** האחרונה תהיה שורת אפס, ואפשר גם שבתחתית המטריצה יהיו שורות אפס אחדות, או כלל לא.

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lfloor\bullet & * & * & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lfloor\bullet & * & * & \cdots & * & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lfloor\bullet & * & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \lfloor\bullet \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

בבירור,

- בכל עמודה של מטריצת מדרגות יש לכל היותר איבר אחד שהוא איבר פותח.

כמו כן,

- אם בעמודה של מטריצת מדרגות יש איבר פותח, אז מתחתיו (באותה עמודה) יש רק אפסים.

**שאלה 1.10.1**

א. נמקו את שתי הקביעות דלעיל, על סמך ההגדרה של מטריצת מדרגות.

ב. האם אפשר שבמטריצת מדרגות, מעל איבר פותח, באותה עמודה, יימצאו איברים שונים מ־0? (אם אפשר – הדגימו מטריצת מדרגות שבה זה המצב, ואם לא – נמקו מדוע!)

ג. נניח ש־ $a_{ij}$ ו־ $a_{i'j'}$ הם איברים פותחים במטריצת מדרגות $A$. הראו ש־ $i > i'$ אם ורק אם $j > j'$. (במילים: השורה שבה נמצא $a_{ij}$ היא **מתחת** לשורה שבה נמצא $a_{i'j'}$, אם ורק אם העמודה שבה נמצא $a_{ij}$ היא **מימין** לעמודה שבה נמצא $a_{i'j'}$.)

**התשובה בעמוד 125**

---

**הגדרה 1.10.3 מערכת ליניארית מְדוֹרֶגֶת**

מערכת ליניארית, אשר מטריצת המקדמים שלה היא מטריצת מדרגות, נקראת **מערכת (ליניארית) מְדוֹרֶגֶת**.

---

"לדרג מערכת ליניארית" משמעו לעבור ממנה למערכת מדורגת, באמצעות מספר סופי של שינויים אלמנטריים עוקבים.

העניין שלנו במערכות מדורגות נעוץ בעובדה שהן נוחות לפתרון. כדי להבהיר זאת נגדיר תחילה:

**הגדרה 1.10.4 משתנים קשורים ומשתנים חופשיים של מערכת מדורגת**

משתנה של מערכת מדורגת נקרא **משתנה קשור**, אם המקדם המופיע לצדו הוא איבר פותח.

משתנה של המערכת שאינו קשור נקרא **משתנה חופשי**.

**דוגמה**

במערכת המדורגת ב־7 משתנים,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{2x_1} & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & + & x_7 & = & 9 \\
 & & & & \boxed{5x_3} & + & x_4 & + & & & & & 6x_7 & = & 0 \\
 & & & & & & \boxed{2x_4} & + & 3x_5 & & & & & = & 1 \\
 & & & & & & & & & & 2x_6 & + & 3x_7 & = & 2
\end{array}$$

המשתנים הקשורים הם $x_1, x_3, x_4, x_6$. יתר המשתנים – $x_2, x_5, x_7$ – הם חופשיים. ◀

גם במטריצת המקדמים של מערכת מדורגת, קל להבחין בין המשתנים הקשורים למשתנים החופשיים: לכל משתנה של מערכת מדורגת ב־ $n$ משתנים, מתאימה אחת מ־ $n$ העמודות הראשונות במטריצת המקדמים שלה. המשתנים הקשורים הם אלה אשר בעמודה שמתאימה להם **יש** איבר פותח, והמשתנים החופשיים הם אלה אשר בעמודה שמתאימה להם **אין** איבר פותח.

**דוגמה**

במערכת המדורגת שאותה מייצגת מטריצת המדרגות הבאה (שבה סימנו בקו תחתון את האיברים הפותחים),

$$\begin{bmatrix}
\underline{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
0 & 0 & \underline{7} & 8 & 9 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \underline{2} & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{4}
\end{bmatrix}$$

העמודות שיש בהן איברים פותחים הן הראשונה, השלישית, החמישית והשישית. זכרו שהעמודה השישית אינה עמודה של משתנה. המשתנים הקשורים הם אפוא $x_1, x_3, x_5$; המשתנים החופשיים הם $x_2, x_4$. (שאלה: מה אפשר ללמוד מכך שבעמודה האחרונה יש איבר פותח?[6]) ◀

6 תשובה: קיומו של איבר פותח בעמודה האחרונה מלמד שהמערכת שאותה מייצגת המטריצה אינה עקבית.

**דוגמאות**

זַהו את המשתנים הקשורים ואת המשתנים החופשיים של המערכות המדורגות שמטריצות המקדמים שלהן הן:[7]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

כאשר מערכת לינארית היא מדורגת, הצבה לאחור מאפשרת לבטא את המשתנים הקשורים שלה באמצעות המשתנים החופשיים. אם נבחר סקלרים כלשהם, נקבע אותם כערכי המשתנים החופשיים ונחשב עבורם את ערכי המשתנים הקשורים, נקבל פתרון למערכת. את ערכי המשתנים החופשיים אנו רשאים לבחור כאוות נפשנו; בפתרון הכללי יהיו פרמטרים. (זה מקור המינוח "משתנה קשור" ו"משתנה חופשי".) ◀

אם כן, מערכות מדורגות הן נוחות לפתרון. יתר על כן: בסעיף 1.12 נראה, שעיון חטוף במערכת מדורגת או במטריצת המדרגות המייצגת אותה, מספיק כדי לקבוע אם המערכת עקבית או לא, ואם היא עקבית – גם לקבוע (בלי לפתור אותה) כמה פתרונות יש לה.

האם ניתן לדרג **כל** מערכת לינארית? התשובה היא **כן**. כדי להיווכח בזאת, נַראה שמכל מטריצה אפשר לעבור למטריצת מדרגות באמצעות סדרה סופית של פעולות שורה. נאמר זאת בקיצור כך: כל מטריצה ניתנת לדירוג.

---

**משפט 1.10.5 משפט הדֵירוג**

כל מטריצה מעל כל שדה ניתנת לדירוג.

---

**הוכחה**

תהי $A$ מטריצה. נתאר סדרה של פעולות־שורה עוקבות, שמובילה מ־$A$ למטריצת מדרגות.[8]

במקביל, נמחיש את דברינו על־ידי ביצוע סדרת הפעולות המתוארת על המטריצה הממשית מסדר $4 \times 6$:

7 במערכת השמאלית, שהיא בת 5 משתנים, המשתנים הקשורים הם $x_1, x_2, x_4, x_5$. המשתנה החופשי היחיד הוא $x_3$. במערכת הימנית, שהיא בת 3 משתנים, כל המשתנים קשורים.

8 מתכון הדירוג המוצע כאן אינו בהכרח הנוח ביותר מבחינה חישובית למטריצה כלשהי, אבל הוא מבטיח תוצאות. בהמשך, לאחר שתדרגו כמה מטריצות, בעזרתנו ובעצמכם, תקנו מיומנות שתאפשר לכם לדרג מטריצות ביעילות.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

(בהוכחה, שלא כמו בהמחשה, לא נניח שמקדמי המערכת הם מספרים ממשיים; התהליך "עובד" לכל מטריצה מעל כל שדה.)

אם כל איברי $A$ הם אפסים, $A$ עצמה היא מטריצת מדרגות. אחרת - יש ב־$A$ איברים שונים מ־0. במקרה זה -

1. בוחרים את **העמודה** הראשונה של המטריצה שיש בה איבר שונה מ־0, ואם האיבר העליון בעמודה הזאת הוא 0, מחליפים שורות (פעולת־שורה מטיפוס 1) כדי להביא לכך שהאיבר העליון בעמודה הנבחרת יהיה שונה מ־0:

   בדוגמה שלנו, העמודה הנבחרת היא **השנייה**; האיבר העליון בה הוא 0, לכן נחליף את השורה הראשונה בשורה אחרת - למשל השורה השלישית.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

2. אם אחרי הצעד הקודם נותרו בעמודה הנבחרת איברים שונים מ־0 מלבד האיבר העליון - מאפסים אותם על־ידי הוספת כפולות מתאימות של השורה הראשונה לשורות שבהן הם נמצאים.
   בדוגמה שלנו - האיבר העליון בעמודה השנייה הוא כרגע $a_{12} = 1$; מתחתיו: $a_{22} = 3$, $a_{32} = 0$, $a_{42} = 2$. עלינו לְאַפֵּס אפוא שני איברים של העמודה השנייה - את $a_{22}$ ואת $a_{42}$. לשם כך, נוסיף כפולות של השורה הראשונה לשורותיהם (שתי פעולות־שורה עוקבות מטיפוס 3):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 2R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

3. מותחים קו מתחת לשורה העליונה של המטריצה שאליה הגענו,[9] ומפעילים את התהליך מחדש על המטריצה החלקית שמן השורה הבאה ואילך, שהיא מטריצה חלקית שמספר שורותיה קטן באחת ממספר השורות של המטריצה הקודמת (מספר העמודות אינו משתנה). חוזרים על התהליך עד אשר המטריצה החלקית שבה מטפלים היא מטריצת אפס או מטריצה בת שורה אחת.

9 הקו שבעקבות השורה העליונה משמש להבהרת התהליך בלבד. לכשתקנו מיומנות בדירוג מטריצות תוכלו להשמיט אותו.

בדוגמה הממחישה, כשמותחים קו מתחת לשורה העליונה, נותרת מתחתיה מטריצה בת 3 שורות, ועליה מפעילים מחדש את סבב ההוראות. בתיאור פעולות השורה שנבצע בהמשך, נמשיך לקרוא לכל שורה לפי מספרה הסידורי במטריצה המלאה (אם כן, השורה העליונה כרגע היא $R_2$).

העמודה הראשונה מתחת לקו, שאינה עמודת אפסים, היא הרביעית: נעביר לראשה איבר שונה מ־0, ואחר כך נאפס את יתרת העמודה.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(*) R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

פעולת השורה המסומנת ב־(*) אינה נזכרת במתכון הכללי; הוספנו אותה לנוחות החישוב בדוגמה המסוימת שלנו. כעת נמתח קו מתחת ל־ $R_2$, ונחזור על התהליך עם החלק שמתחתיו. השורה העליונה בסבב הבא היא $R_3$; המטריצה שאליה ההוראות מתייחסות היא בת שתי שורות. העמודה הראשונה מתחת לקו, שאינה עמודת אפסים, היא השישית (העמודה הימנית של המטריצה). בראשה יש כבר איבר שונה מ־0, ונאפס את האיבר שמתחתיו.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - 3R_3} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

התהליך הסתיים, והתוצאה היא מטריצת המדרגות:

$$\begin{bmatrix} 0 & \underline{1} & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מעצם טיבו של התהליך שתיארנו ברור שמספר הצעדים בו סופי. הצעד הראשון בתהליך מבטיח שכל האיברים הפותחים המופיעים לימינו של האיבר הפותח השמאלי ביותר, מופיעים מתחתיו. באופן דומה, החזרה על צעד זה בפעם השנייה מבטיחה שכל האיברים הפותחים המופיעים לימינו של האיבר הפותח השני משמאל, מופיעים מתחתיו, וכן הלאה. בכל שלב של התהליך אנו מתחילים מאיבר פותח, שמעצם הגדרתו מופיע בשורה שאינה שורת־אפסים, ועוברים לאיבר פותח הנמצא בשורה נמוכה יותר. התהליך מסתיים כאשר לא נותרו איברים כאלה, כלומר כאשר כל השורות

שנותרו בתחתית המטריצה הן שורות־אפסים או שלא נותרו עוד שורות. מכאן שהמטריצה המתקבלת היא מטריצת מדרגות.

**מ.ש.ל.**

**הערות בנוגע לדירוג מטריצות**

**א. שאלת היחידות:** בדרך כלל אפשר לדרג מטריצה נתונה בדרכים שונות, ואף להגיע למטריצות מדרגות שונות.

להמחשה, נדרג בכמה אופנים את המטריצה מסדר $2 \times 3$: $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 3R_2]{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 15 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

כל המטריצות השונות שקיבלנו הן מטריצות מדרגות. כל אחת מהן שקולת־שורות למטריצה המקורית. **שימו לב!** מאחר ששקילות־שורות הוא יחס טרנזיטיבי, הרי שכל שתיים מהן שקולות־שורה (זו לזו).

**ב. אזהרה מפני שגיאה נפוצה:** פעולות־שורה אמורות להתבצע **בזו אחר זו**; צריך להקפיד לבצע את סדרת הפעולות צעד אחר צעד, כלומר לבצע כל פעולה על המטריצה שהתקבלה כַּתּוֹצָאָה של הפעולה הקודמת. הקפדה זו חיונית כדי להבטיח שהמטריצה שתתקבל עם השלמת סדרת הפעולות תהיה שקולת־שורות למטריצה המקורית.

לפעמים סדר הביצוע של שתי פעולות־שורה או יותר, אינו משנה את התוצאה. למשל, כדי לְאַפֵּס את האיברים שמתחת לאיבר הראשון בעמודה הראשונה של מטריצה מהטיפוס

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 2 & * & * & * \\ 3 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

(הכוכביות מציינות סקלרים כלשהם) דרושות שתי פעולות השורה המסומנות מעל לחץ ומתחתיו:

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

סדר הביצוע לא משנה, משום שאף אחת מן הפעולות המסומנות אינו משנה את השורות שמעורבות בפעולה האחרת.

באופן דומה, סדר הביצוע של

$$\xrightarrow[R_2 \to 3R_2]{R_1 \to 2R_1}$$

אינו משנה, כי אף אחת מהן אינה משנה שורה שרלוונטית לאחרת.

להמחשה, נבצע אותן פעולות־שורה על המטריצה מהערה א לעיל בסדר שונה.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 3R_2]{} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 15 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 3R_2]{} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 15 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 2R_1} \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 15 & 24 \end{bmatrix}$$

במקרים כאלה, הכללת פעולות אחדות בצעד אחד אינה אלא דרך יעילה לחסוך כתיבה מיותרת.

לעומת זאת, את הפעולות הרשומות מעל לחץ ומתחתיו,

$$\xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{R_1 \to R_1 + R_2}$$

**אסור** לבצע על המטריצה $A$ בבת אחת. נסביר מדוע:

הפעולה העליונה משנה את השורה הראשונה של $A$ – היא מוסיפה לה את השורה השנייה. לבצע בעקבותיה את הפעולה התחתונה, משמעו להוסיף לשורה השנייה את השורה הראשונה **המעודכנת**, ולא את השורה הראשונה המקורית של $A$. באופן דומה, אם מבצעים קודם את הפעולה התחתונה, השורה השנייה של $A$ משתנה. לבצע בעקבותיה את הפעולה העליונה משמעו להוסיף לשורה הראשונה את השורה השנייה **המעודכנת**, ולא את השורה השנייה המקורית של $A$

.

כאשר שתי הפעולות מתבצעות על $A$ בבת אחת, בלי לעדכן את $A$, התוצאה עלולה להיות מטריצה שאינה שקולת־שורות ל־$A$. להמחשה, נבצע בבת אחת את שתי הפעולות שתוארו לעיל על המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ונקרא למטריצה המתקבלת $B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_1]{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$A$ ו־$B$ הללו אינן שקולות־שורה; נוכיח זאת בדרך השלילה. אילו הן היו שקולות־שורה, היו המערכות הליניאריות שהן מייצגות שקולות.

$A$ מייצגת את המערכת

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

שפתרונה היחיד הוא $(x, y) = (0,0)$.

$B$ מייצגת את המערכת

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x + y &= 0 \end{aligned}$$

למערכת ש־ $B$ מייצגת יש פתרונות נוספים רבים, ובהם - $(1,-1)$, שאינו פותר את המערכת ש־$A$ מייצגת. לכן $A$ ו־ $B$ אינן שקולות־שורה.

תוצאת ביצוע הפעולות הנידונות צעד אחר צעד תלויה בסדר הביצוע:

בסדר אחד:
$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\end{bmatrix}$$

ובסדר ההפוך:
$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

התוצאות שונות. עם זאת, לאור המשפטים שהוכחנו, מובן שבשני המקרים המטריצה שאליה מגיעים שקולת־שורות ל־ $A$ (ולכן הן גם שקולות־שורה זו לזו).

במהלך ההתנסויות הראשונות שלכם בדירוג מטריצות כדאי לכם להימנע מקיצורי דרך. עדיף לתעד במלואה את התוצאה של כל פעולה אלמנטרית לפני שתעברו לפעולה הבאה. יצירתיות וקיצורי דרך מומלצים רק למי שכבר קנה מיומנות בדירוג מטריצות ואין חשש שיתבלבל.

---

**מסקנה 1.10.6**

כל מערכת לינארית שקולה ל**מערכת מדורגת**.

---

**הוכחה**

בהינתן מערכת כלשהי, נדרג את מטריצת המקדמים שלה. מטריצת המדרגות שנקבל שקולת־שורות למטריצת המקדמים המקורית, ולכן המערכת המדורגת שהיא מייצגת שקולה למערכת המקורית.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 1.10.2**

פתרו את המערכות הבאות מעל הממשיים:

קודם דרגו את מטריצת המקדמים, אחר־כך בטאו את המשתנים הקשורים בעזרת המשתנים החופשיים (הצבה לאחור).

א.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1\\ 3x_1 + 2x_2 &= 1\end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0\\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1\\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1\\ 2x_1 + 7x_2 \phantom{{}+x_3} &= 0\end{aligned}$$

ד.
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ -3x_1 & + & & & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

**התשובה בעמוד 126**

משפט הדירוג הוכח עבור מערכות ליניאריות מעל שדה כלשהו, אבל עד כה - כל המערכות שהדגמנו היו מעל שדה הממשיים. נדגים עתה איך מדרגים ופותרים מערכת ליניארית מעל שדה אחר.

**דוגמה**

נפתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}$$

כצעד ראשון נדרג את מטריצת המקדמים. ההבדל היחיד בין הדוגמה הזאת לדוגמאות הקודמות הוא, שאת פעולות החשבון נבצע לפי טבלאות החיבור והכפל של השדה $\mathbb{Z}_2$.[10] במידה רבה החישוב יהיה קל יותר: השוויון $-1 = 1$, המתקיים בשדה זה,[11] מְפַשֵּׁט חישובים:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

מטריצת המדרגות שאליה הגענו מייצגת את המערכת הליניארית (השקולה למערכת המקורית):

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & y & & & = & 1 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}$$

שלושת המשתנים קשורים (אין משתנים חופשיים). לפי שתי המשוואות האחרונות, $\boxed{y=1}$, $\boxed{z=0}$. הצבת הערכים האלה במשוואה הראשונה מניבה: $x+1+0=1$

לכן, $\boxed{x=0}$

ולמערכת יש פתרון יחיד - השְׁלָשָׁה $(0,1,0)$. ◄

**דוגמה**

נפתור את המערכת הבאה מעל $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

10 הטבלאות מופיעות בסעיף 1.2ו.

11 ראו שאלה 1.2.6.

נדרג קודם את מטריצת המקדמים:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

במערכת (המדורגת) השקולה, המשוואה השלישית היא משוואת אפס, שממנה אפשר להתעלם.[12]
אם כן, המערכת המקורית שקולה למערכת:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

המשתנים $x$ ו־ $y$ קשורים, $z$ הוא משתנה חופשי.
מהמשוואה השנייה מקבלים: $\boxed{y = 1 - z}$

ומהמשוואה הראשונה $x = -y = -(1-z)$, כלומר: $\boxed{x = z - 1}$

בפתרון הכללי, הערך של $z$ הוא הפרמטר $t$. הפתרון הכללי הוא: $(t-1,\ 1-t,\ t)$ [13]

שימו לב, למרות שבפתרון הכללי יש פרמטר, מספר הפתרונות **הוא סופי**. השדה $\mathbb{Z}_2$ הוא שדה סופי בן שני איברים. לפרמטר $t$ יש רק שני ערכים אפשריים, 0 או 1.

עבור $t = 0$ מתקבל הפתרון $(1,1,0)$, ועבור $t = 1$ - הפתרון $(0,0,1)$. למערכת יש אפוא בדיוק שני פתרונות.

**שאלה 1.10.3**

בעזרת פעולות השורה שבהן השתמשנו בדוגמה האחרונה, דרגו שוב את המערכת

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 1 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

אך הפעם כמערכת לינארית מעל הממשיים (שימו לב לשלב בדירוג שבו המטריצה המתקבלת נראית אחרת מזו שהתקבלה כאשר דירגנו אותה כמטריצה מעל $\mathbb{Z}_2$). כמה פתרונות יש לה הפעם?

**התשובה בעמוד 129**

**שאלה 1.10.4**

מצאו את הפתרון הכללי של המערכת מעל $\mathbb{Z}_2$,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}$$

ורשמו במפורש את כל פתרונותיה.

**התשובה בעמוד 130**

12 כל שלושה של סקלרים מתוך $\mathbb{Z}_2$ פותרת אותה.
13 בשדה $\mathbb{Z}_2$ מתקיים $-1 = 1$, ובכלל $-t = t$ (מדוע?). לכן את הפתרון הכללי ניתן להציג גם כך: $(t+1,\ t+1,\ t)$.

# 1.11 ההצגה הקנונית של מטריצה

מטריצות מדרגות **קנוניות** הן מטריצות מדרגות מסוג מיוחד, שיוגדר מייד. למטריצות אלה יש כמה תכונות בעלות חשיבות ייחודית לענייננו; בפרט - המערכות הליניאריות שהן מייצגות ניתנות לפתרון מיידי, ללא צורך בהצבה לאחור.

---

**הגדרה 1.11.1 מטריצת מדרגות קנונית**

**מטריצת מדרגות קנונית** היא מטריצת מדרגות אשר כל האיברים הפותחים בה הם 1, ובכל עמודה שבה יש איבר פותח, וכל יתר האיברים הם 0.

---

**דוגמה 1**

מטריצת המדרגות

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 3 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא קנונית - על כך מעידים האיברים הפותחים שסימנו בקו תחתון, שכולם 1, ויתר האיברים בעמודותיהם, שכולם 0. ◀

**שאלה 1.11.1**

מבין המטריצות שלהלן, זהו את מטריצות המדרגות וציינו אילו מהן הן קנוניות.

א. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ב. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$

ג. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ד. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ה. $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ו. $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 130**

**דוגמה**

כדי להמחיש את קלות הפתרון של מערכות שמטריצות המקדמים שלהן הן מטריצות מדרגות קנוניות, נחזור לדוגמה 1.

המערכת הלינארית, שאותה מייצגת מטריצת המדרגות הקנונית

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא המערכת המדורגת:

$$\begin{array}{cccccccc} \boxed{x_1} & & -\ 2x_3 & & & +\ 5x_6 & = & 0 \\ & \boxed{x_2} & +\ 3x_3 & & & +\ 4x_6 & = & -1 \\ & & & \boxed{x_4} & & +\ 3x_6 & = & 2 \\ & & & & \boxed{x_5} & & = & 1 \end{array}$$

המשתנים הקשורים של המערכת הם $x_1, x_2, x_4, x_5$, והמשתנים החופשיים הם $x_3, x_6$. נעביר מאגף לאגף ונקבל:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 - 5x_6 \\ x_2 &= -1 - 3x_3 - 4x_6 \\ x_4 &= 2 - 3x_6 \\ x_5 &= 1 \end{aligned}$$

אין צורך בהצבה לאחור - המשתנים הקשורים כבר מבוטאים באמצעות המשתנים החופשיים. מתוך ההצגה הזאת אפשר לקרוא את הפתרון הכללי ישירות: הפרמטרים $s,t$ מייצגים בו את ערכי $x_3, x_6$ (בהתאמה).

$$\Big(\overbrace{2s-5t}^{x_1},\ \overbrace{-1-3s-4t}^{x_2},\ \overbrace{s}^{x_3},\ \overbrace{2-3t}^{x_4},\ \overbrace{1}^{x_5},\ \overbrace{t}^{x_6}\Big)$$

$$= s(2,-3,1,0,0,0) + t(-5,-4,0,-3,0,1) + (0,-1,0,2,1,0)$$

◀

התופעה שהומחשה בדוגמה היא כללית: כאשר מטריצת המקדמים של מערכת לינארית היא מטריצת מדרגות קנונית, כל משתנה קשור מופיע במשוואה אחת ויחידה, ובמשוואה זו הוא המשתנה הראשון שמופיע והמקדם שלו בה הוא 1. יתר המשתנים שמופיעים במשוואה (אם יש כאלה) הם חופשיים. העברה מאגף לאגף היא כל הדרוש לביטוי המשתנים הקשורים באמצעות המשתנים החופשיים. הפתרון הכללי מתקבל מיידית, והמשתנים החופשיים (כשיש כאלה) הם הפרמטרים שלו.

האם כל מטריצה ניתנת לדירוג לצורת מדרגות קנונית? התשובה היא - כן. זהו תוכן המשפט הבא.

תנו דעתכם לכך שמשפט הדירוג שהוכח בסעיף הקודם, מבטיח שכל מטריצה ניתנת לדירוג; על פי רוב, ניתן לדרג מטריצה נתונה $A$ בדרכים שונות, ובדרך כלל מגיעים למטריצות מדרגות שונות. כולן שקולות־שורה ל־$A$, ולכן כל שתיים מהן שקולות־שורה זו לזו. המשפט הבא מלמד, שבאוסף המורכב מכל מטריצות המדרגות שהן שקולות־שורה ל־$A$, תמיד יש מטריצת מדרגות קנונית. על מטריצה כזאת נאמר שהיא **הצגה קנונית של** $A$.[1]

---

**משפט 1.11.2 קיום הצגה קנונית**

לכל מטריצה, מעל כל שדה, **יש** הצגה קנונית.

לשון אחר - כל מטריצה היא שקולת־שורה למטריצת מדרגות קנונית.

---

**הוכחה**

לאור משפט הדירוג, מספיק להוכיח את הטענה למערכות לינאריות מדורגות. לשם כך, נצא ממטריצת מדרגות $A$ ונתאר תהליך שמוביל ממנה למטריצת מדרגות קנונית, באמצעות מספר סופי של פעולות־שורה עוקבות.

במקביל להוכחה הכללית, נמחיש אותה על־ידי ביצוע התהליך המתואר על מטריצת המדרגות הממשית:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

1 מקובל לומר גם **צורה קנונית**.

יהי $a_{ij}$ האיבר הפותח הימני ביותר של $A$.[2]

בשורה ה־ $i$, כל האיברים לשמאלו הם 0, כי $a_{ij}$ הוא האיבר הפותח שלה;

בעמודה ה־ $j$ , כל האיברים מתחתיו הם 0 (כי $A$ היא מטריצת מדרגות).

נכפול את השורה ה־ $i$ בהופכי של $a_{ij}$ (פעולת־שורה מטיפוס 1); אחרי פעולה זו, האיבר הפותח $a_{ij}$ של השורה ה־ $i$ הוא 1.

נְאַפֵּס בזה אחר זה את כל האיברים שמעליו (בעמודה ה־ $j$ ), בעזרת פעולות־שורה מטיפוס 3.

בדוגמה שלנו, האיבר הפותח הימני ביותר הוא $a_{45} = 3$. סדרת פעולות השורה שתיארנו היא:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to \frac{1}{3}R_4} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_4} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \boxed{0} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 10R_4} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & \boxed{0} & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 9R_4} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & \boxed{0} & -19 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

פעולות־השורה הללו מובילות למטריצה שקולת־שורה ל־ $A$ , שבה העמודה של האיבר הפותח הימני ביותר היא בעלת המבנה הרצוי. העמודות שלשמאלה לא השתנו (מדוע?).

נעבור לאיבר הפותח השני מימין, ונחזור על התהליך.

בדוגמה שלנו, האיבר הפותח השני מימין הוא $a_{34} = 2$. סדרת פעולות השורה הנדרשת היא:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 7R_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & -19 \\ 0 & 5 & 3 & \boxed{0} & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & \boxed{0} & 0 & -\frac{35}{2} \\ 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

נמשיך להתקדם מימין לשמאל, עד למיצוי העמודות שבהן יש איבר פותח.

2 $a_{ij}$ הוא, כמובן, האיבר הפותח התחתון של $A$ . כל השורות שמתחת לשורתו (השורה ה־ $i$ ) הן שורות אפס.

בדוגמה שלנו, השלב הבא הוא:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & -\frac{35}{2} \\ 0 & \boxed{5} & 3 & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & -\frac{35}{2} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 4R_2} \begin{bmatrix} 3 & \boxed{0} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 & -\frac{99}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{33}{10} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{19}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

המטריצה שהתקבלה היא מטריצת מדרגות קנונית.

הטיפול בעמודה של כל איבר פותח שאינו האחרון, אינו משנה את העמודות שלשמאלה, וגם לא את העמודות שלימינה שבהן יש איבר פותח, שהן העמודות שבהן טיפלנו קודם (נמקו!). לפיכך, התהליך מסתיים במטריצת מדרגות קנונית, שקולת־שורה ל־ $A$ . (שימו לב, במהלך המעבר לצורה הקנונית, המיקום של האיברים הפותחים לא השתנה. במטריצת המדרגות הקנונית שאליה הגענו, $a_{ij}$ הוא איבר פותח אם ורק אם $a_{ij}$ היה איבר פותח של מטריצת המדרגות המקורית.)

**מ.ש.ל.**

**שאלה 1.11.2**

לפניכם מערכות ליניאריות אחדות (מעל $\mathbb{R}$). פתרו אותן על־ידי דירוג מטריצות המקדמים לצורת מדרגות קנונית.

א.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

ד.
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 7 \\ -7x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 &= -11 \end{aligned}$$

**התשובה בעמוד 130**

יתרון חשוב נוסף של מטריצות המדרגות הקנוניות הוא יחידותן: למטריצה נתונה $A$ עשויות להיות הצגות שונות כמטריצת מדרגות, אבל ההצגה הקנונית של $A$ היא יחידה – רק אחת מכלל מטריצות

המדרגות שהן שקולות־שורה ל־ $A$ היא מטריצת מדרגות קנונית. על החשיבות של תכונה זו נעמוד מיד לאחר שנוכיח אותה.

**משפט 1.11.3 יחידות ההצגה הקנונית**

ההצגה הקנונית של כל מטריצה היא **יחידה**.

לשון אחר – כל מטריצה היא שקולת־שורות למטריצת מדרגות קנונית **יחידה**.

את הוכחת משפט 1.11.3 נדחה להמשך הפרק, לאחר שנוכיח כמה תוצאות נוספות המקלות על הוכחתו. חשיבות המשפט טמונה בכך שהוא נותן בידינו מתכון לבדיקה האם שתי מטריצות נתונות הן שקולות־שורה. כל שעלינו לעשות הוא להביא כל אחת מהן בנפרד לצורת מדרגות קנונית. המטריצות המקוריות שקולות־שורה **אם ורק אם** לשתיהן אותה הצגה קנונית.

שימו לב כי המשפט טוען ליחידות ההצגה הקנונית, אך **לא ליחידות סדרת הפעולות המובילה אליה**. מכאן, שאם יצאתם ממטריצה מסוימת ומצאתם סדרה כלשהי של פעולות־שורה עוקבות, המובילה למטריצת מדרגות קנונית, הגעתם בהכרח למטריצה ה"נכונה", גם אם לא בחרתם בסדרת הפעולות של המתכון שניתן במהלך הוכחת קיום ההצגה הקנונית. לכן, אם אתם מגלים "קיצורי דרך" במהלך הדירוג של מטריצה נתונה לצורת מדרגות קנונית, אל תחששו להשתמש בהם.

**שאלה 1.11.3**

הראו כי מטריצות המדרגות הקנוניות המתקבלות מהמערכת שלהלן על־ידי שתי סדרות שונות של פעולות אלמנטריות, שאותן תבחרו כרצונכם, הן שוות.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

**התשובה בעמוד 133**

**שאלה 1.11.4**

מיינו את שלוש המטריצות שלפניכם לפי יחס שקילות־השורות, כלומר מצאו אילו זוגות מתוכן הם זוגות של מטריצות שקולות־שורה.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 10 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 134**

# 1.12 כמות הפתרונות של מערכת ליניארית

בהקשרים רבים, השאלה הרלוונטית ביחס למערכת ליניארית איננה "**מה הם** פתרונותיה?", אלא רק "**האם יש** לה פתרונות?" (לשון אחר – "האם המערכת עקבית ?"). כאשר המערכת עקבית, יש גם עניין במספר הפתרונות – האם למערכת יש פתרון יחיד, או שמא מספר פתרונותיה גדול מ־1? ואם המספר גדול מ־1, מה הוא עשוי להיות?

ראשית, נסדיר עניין מינוחי פעוט: כל מערכת ליניארית מאופיינת על־ידי מטריצת המקדמים שלה. בהינתן מערכת ליניארית שמטריצת המקדמים שלה היא מטריצה נתונה $A$, נקרא למערכת בקיצור **המערכת** $A$.

נפתח את הדיון בהתייחסות **לשאלת העקביות** של מערכת ליניארית $A$, כלומר לשאלה האם כמות הפתרונות שלה גדולה מאפס.

דבר אחד ברור לגמרי: אם במטריצה $A$ יש שורה שהאיבר הפותח שלה הוא בעמודה האחרונה, כלומר שורה מהטיפוס

$$[0,\ldots,0,a] \quad (a \neq 0)$$

אז המערכת $A$ בלתי עקבית. זאת, משום ששורה מטיפוס זה מעידה על קיומה במערכת של משוואה שצורתה

$$0x_1 + \ldots + 0x_n = a(\neq 0)$$

אשר לה כשלעצמה אין פתרון.

אבל אי־קיומה של שורה מהסוג הנ"ל במטריצה $A$, אינו ערובה לעקביות של המערכת $A$.

**דוגמה**

התבוננו במערכת, הבלתי־עקבית בבירור,

$$x + y = 7$$
$$x + y = 4$$

כל אחת משתי המשוואות שלה היא עקבית. מקור האי־עקביות של המערכת נעוץ בכך, שהן אינן מתיישבות זו עם זו. הבה נדרג את המערכת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

במערכת המדורגת, השקולה למערכת המקורית, האי־עקביות מתבטאת בקיומה של משוואה בלתי עקבית כשלעצמה – המשוואה השנייה. ◀

**דוגמה**

נסתכל במערכת

$$\begin{aligned} 2x_1 &+ 2x_2 &+ 3x_3 &+ x_4 &= 5 \\ & \quad 2x_2 &+ 4x_3 &+ x_4 &= 1 \\ x_1 & &+ x_3 &+ 5x_4 &= 3 \\ 6x_1 &+ 8x_2 &+ 16x_3 &+ 14x_4 &= 20 \end{aligned}$$

אם מחברים את שלוש המשוואות הראשונות, וכופלים את התוצאה ב־2, מתקבלת המשוואה

$$6x_1 + 8x_2 + 16x_3 + 14x_4 = 18$$

שאינה מתיישבת עם המשוואה הרביעית. לכן גם המערכת הזאת אינה עקבית. את ההבחנה הזאת קל להחמיץ, אבל כשמדרגים את מטריצת המקדמים המצב משתנה. הנה דירוג אפשרי:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 16 & 14 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 7 & 11 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

במערכת הימנית, השקולה למערכת המקורית, המשוואה האחרונה בלתי עקבית כשלעצמה. מכאן שהמערכת הנתונה בלתי עקבית. ◀

בשתי הדוגמאות, הדירוג של מערכת בלתי עקבית הוביל למערכת שהאי־עקביות שלה מזדקרת לעין, ולא במקרה:

---

**משפט 1.12.1 בוחן לעקביות של מערכות לינאריות מדורגות**

תהי נתונה מערכת לינארית **מדורגת** $A$, מעל שדה כלשהו $F$. המערכת $A$ היא עקבית אם ורק אם במטריצה המתאימה $A$ אין שורה מהטיפוס: $[0,\dots,0,a] \quad (a \neq 0)$

(כלומר, אם ורק אם במטריצה אין שורה, שהאיבר הפותח שלה הוא בעמודה האחרונה.)

---

**הוכחה**

נניח ש־$A$ היא מערכת לינארית ב־$n$ משתנים.

**כיוון אחד:** נניח שהמערכת $A$ עקבית. בפרט, אין ב־$A$ שורה מהטיפוס $(a \neq 0) \quad [0,\dots,0,a]$, שהרי המשוואה ששורה כזאת מייצגת, היא חסרת פתרון.

**הכיוון האחר:** נניח שבמטריצה $A$ אין שורה מהטיפוס $[0,...,0,a]$, עם $(a \neq 0)$, ונוכיח שהמערכת $A$ עקבית.

אם המטריצה $A$ היא מטריצת אפסים, אז המערכת $A$ היא מערכת של משוואות אפס, שהיא בוודאי עקבית. אחרת, יש במטריצה $A$ לפחות שורה אחת שאינה שורת אפס, ומכאן שלפחות באחת משורותיה יש איבר פותח. נסמן ב־$k$ את מספר השורות של המטריצה $A$, שבהן יש איבר פותח $(k \geq 1)$. $k$ השורות הללו הן $k$ השורות העליונות של $A$; כל השורות שמתחתיהן הן שורות אפס. אי־קיומה ב־$A$ של שורה מהטיפוס $(a \neq 0) \quad [0,...,0,a]$ מבטיח, שבכל אחת מ־$k$ השורות

העליונות של $A$, האיבר הפותח נמצא באחת מ־ $n$ העמודות הראשונות (כל אחד מהם בעמודה אחרת, כמובן). העמודות שבהן נמצאים $k$ האיברים הפותחים של המטריצה $A$, הן עמודות המקדמים של המשתנים הקשורים של המערכת $A$.[1] אם כן, במערכת $A$ יש $k$ משתנים קשורים.

את העקביות של $A$ מספיק להוכיח תחת ההנחה הנוספת, ש־ $A$ היא מטריצת מדרגות **קנונית**. הנחה זו אינה מגבילה את הכלליות, משום שאם $A$ אינה מטריצת מדרגות קנונית, אלא מטריצת מדרגות סתם, אז ניתן לעבור מ־ $A$ למטריצת מדרגות קנונית $B$ באמצעות התהליך שתואר בהוכחת משפט 1.11.2. שם ראינו שמיקום האיברים הפותחים במטריצה $B$ זהה לזה שבמטריצה המקורית $A$,[2] ולכן המשתנים הקשורים של המערכת $B$ הם המשתנים הקשורים של המערכת $A$, ובבירור – המערכת $B$ עקבית אם ורק אם המערכת $A$ עקבית. כמו כן, מאותה סיבה, אם אין במטריצה $A$ שורה מהצורה $[0,\ldots,0,a]$ $(a \neq 0)$, אין שורה כזאת גם ב־ $B$.

ההנחה ש־ $A$ היא מטריצת מדרגות קנונית, מבטיחה שכל אחד מ־ $k$ המשתנים הקשורים של המערכת $A$ מופיע במשוואה אחת ויחידה מבין $k$ המשוואות העליונות, שהמקדם שלו במשוואה הזאת הוא 1, ושכל יתר המשתנים שמופיעים בה (אם יש כאלה) הם חופשיים. אם בכל אחת מ־ $k$ המשוואות הללו נציב, למשל, את הסקלר 1 במקום כל משתנה חופשי, ונְחַשֵּׁב את ערכו של המשתנה הקשור היחיד שבה (השונה משורה לשורה), נקבל $n$־יה שפותרת את כל המשוואות של המערכת $A$. ה־ $n$־יה שמצאנו מעידה על כך שהמערכת $A$ עקבית.

**מ.ש.ל.**

אם כן, כדי לקבוע אם מערכת לינארית כלשהי היא עקבית, כל שעלינו לעשות הוא לדרג אותה בדרך הנוחה ביותר, ואין צורך לטרוח להגיע דווקא למערכת קנונית. יתר על כן: מאחר שכל המטריצות ש"דרכן עוברים" במהלך הדירוג, הן שקולות־שורה למטריצת המקדמים של המערכת המקורית, הרי שאם בשלב כלשהו נגיע למטריצה שבה יש שורה מהטיפוס $(a \neq 0)$ $[0,\ldots,0,a]$
אפשר לעצור! שורה כזאת היא עֵדוּת לכך שהמערכת בלתי עקבית.

כאשר הדירוג מוביל למסקנה שהמערכת עקבית, אפשר לדלות ממטריצת המדרגות שאליה מגיעים מידע גם בנוגע לכמות הפתרונות. נפרט:

נקודת המוצא לדיון הנוכחי היא מערכת $A$ בת $n$ משתנים,[3] שהיא מדורגת ועקבית. המטריצה המתאימה $A$ שקולת־שורה למטריצת מדרגות קנונית $B$, אשר לפי הבוחן לעקביות, אין בה שורה שצורתה $[0,\ldots,0,1]$. נסמן ב־ $k$ את מספר השורות של $B$ שאינן שורות אפס. $k$ הוא מספר המשתנים הקשורים של המערכת $B$, ולכן $1 \leq k \leq n$. כל משתנה קשור מופיע במשוואה אחת בלבד. לפיכך:

---

1 ראו בדיון בסעיף 1.10, אחרי הגדרה 1.10.4.

2 ראו הערה בסוגריים בסוף הוכחת משפט 1.11.2.

3 כמקודם, אנו מניחים שבמערכת $A$ יש לפחות משוואה אחת שאינה משוואת אפס: בנוגע למערכות שכל המשוואות בהן הן משוואות אפס, הכל ידוע מראש.

**אם $k = n$**, כלומר אם כל המשתנים קשורים, אז בכל אחת מ־$k(= n)$ המשוואות העליונות של המערכת $B$, אין משתנים אחרים. אם כן, כל שורה כזאת היא מהצורה: $x_i = b_i$. לכן, מכיוון שהמערכת מדורגת, בהכרח $n$ המשוואות העליונות של המערכת $B$ נראות כך,

$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = b_1 \\ & x_2 & & = b_2 \\ & & \ddots & \ \ \vdots \\ & & x_n & = b_n \end{array}$$

ואלה כל משוואות המערכת. ברור אפוא שלמערכת $B$ יש **פתרון יחיד**, וכך גם למערכת $A$, השקולה לה.

**אם $k < n$**, אז במערכת $B$ יש משתנה חופשי אחד לפחות. את הערכים של המשתנים החופשיים אנו רשאים לבחור כרצוננו - ערכיהם הם פרמטרים בפתרון הכללי. בכל שדה $F$ יש לפחות שני איברים שונים, לכן ללא תלות בשאלה מהו השדה שמעליו המערכת, אפשר לקבוע בוודאות שלמערכת $B$ יש יותר מפתרון אחד, וכך גם למערכת $A$, השקולה לה. נסכם:

---

**משפט 1.12.2 כמות הפתרונות של מערכת לינארית מדורגת**

תהי נתונה מערכת לינארית מדורגת $A$ מעל שדה כלשהו $F$, ונניח שהמערכת $A$ עקבית.

א. אם כל המשתנים של המערכת הם קשורים, אז למערכת יש פתרון יחיד.

ב. אם במערכת יש משתנה חופשי אחד לפחות, אז למערכת יש יותר מפתרון אחד.
כמות הפתרונות תלויה, במקרה זה, בכמות איברי השדה $F$:
אם $F$ שדה אינסופי, אז למערכת יש אינסוף פתרונות;
אם $F$ שדה סופי - כמות הפתרונות היא סופית, ושווה למספר איברי $F$ בחזקת מספר המשתנים החופשיים של המערכת.

---

**שאלה 1.12.1**

א. הוכיחו את החלק השני של סעיף ב במשפט 1.12.2.

ב. נתונה מערכת לינארית ב־5 משתנים מעל השדה הסופי $\mathbb{Z}_2$ (לאו דווקא מדורגת, לאו דווקא עקבית). מה אפשר לומר על כמות הפתרונות שלה?

**התשובה בעמוד 135**

---

**מסקנה 1.12.3 כמות הפתרונות של מערכת לינארית מעל $\mathbb{R}$**

לכל מערכת לינארית מעל $\mathbb{R}$ מתקיימת אחת משלוש האפשרויות האלה:

1. למערכת אין פתרון,
2. למערכת יש פתרון יחיד,
3. למערכת יש אינסוף פתרונות.

---

המסקנה נכונה, כמובן, גם למערכות מעל $\mathbb{Q}$, או מעל כל שדה אינסופי אחר. אין לצפות אפוא לקיומה של מערכת ליניארית מעל $\mathbb{R}$, שלה שני פתרונות, או שלושה, או כל מספר סופי אחר שגדול מ-1.

**שאלה 1.12.2**

הוכיחו את מסקנה 1.12.3.

**התשובה בעמוד 135**

**שאלה 1.12.3**

נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & \gamma_1 \\
 & & & & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & \gamma_2 \\
2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & & & x_5 & = & \gamma_3 \\
x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & & & x_5 & = & \gamma_4 \\
 & & & & 2x_3 & - & 4x_4 & + & 2x_5 & = & \gamma_5 \\
-x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & \gamma_6
\end{array}$$

כאשר $\gamma_1,\dots,\gamma_6$ הם מספרים ממשיים מסוימים כלשהם.

הראו שלמערכת יש פתרון אם ורק אם מתקיימים התנאים האלה:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
3\gamma_1 & - & \gamma_3 & + & \gamma_6 & = & 0 \\
4\gamma_1 & - & 2\gamma_3 & + & \gamma_5 & = & 0
\end{array}$$

**התשובה בעמוד 135**

**שאלה 1.12.4**

בדקו האם המערכות הבאות עקביות, ואם כן - ציינו כמה פתרונות יש להן.

א.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\
2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 4 \\
x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 2
\end{array}$$

(מעל שדה המספרים הממשיים)

ב.

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\
x_1 & + & & & x_3 & = & 0 \\
 & & x_2 & + & x_3 & = & 1
\end{array}$$

(מעל השדה $\mathbb{Z}_2$)

**התשובה בעמוד 135**

# 1.13 מערכות הומוגניות

במערכות הומוגניות עסקנו כבר בסעיף 1.5. כעת נתייחס לתכונות נוספות שלהן.

כבר למדנו שכל מערכת הומוגנית היא עקבית; תמיד יש לה פתרון - הפתרון הטריוויאלי.
אם כך, השאלה המעניינת לגבי מערכת הומוגנית אינה "האם **יש** לה פתרון?", אלא: "האם **יש** לה פתרון **לא־טריוויאלי**?".

כאשר מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, התשובה היא **כן**, כאמור במשפט הבא:

---

**משפט 1.13.2**
אם במערכת הומוגנית מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, אז למערכת **יש** פתרון לא־טריוויאלי.

---

**הוכחה**
תהי נתונה מערכת לינארית הומוגנית $A$ בת $m$ משוואות ב־ $n$ משתנים, עם $n > m$ (יותר משתנים מאשר משוואות). דֵירוג המטריצה המתאימה $A$ לצורת מדרגות קנונית, מוביל למטריצת מדרגות קנונית $B$ בת $m$ שורות. המערכת $B$ שקולה למערכת $A$, שהיא עקבית (כי זוהי מערכת הומוגנית). לכן גם המערכת $B$ עקבית. מספר המשתנים הקשורים של המערכת $B$ אינו עולה על מספר המשוואות הכולל $m$, כי בכל משוואה של המערכת $B$ יש לכל היותר משתנה קשור אחד. מספר המשתנים הכולל של המערכת $B$ הוא $n$, ו־ $n > m$; לכן מספר המשתנים הקשורים של המערכת $B$ קטן ממספר המשתנים הכולל שלה. נסיק מכך, שלפחות אחד מהמשתנים של המערכת $B$ הוא משתנה חופשי. לפי משפט 1.12.2, די בכך כדי להבטיח שלמערכת $B$ יש יותר מפתרון אחד, כלומר שיש לה פתרון לא־טריוויאלי, וכך גם למערכת $A$, השקולה לה.

**מ.ש.ל.**

כדאי לשים לב, שהשתמשנו בנתון שהמערכת הומוגנית. זה מה שהבטיח שהמערכת עקבית, ואִפשֵר להשתמש במשפט 1.12.2.

במטריצת המקדמים של מערכת הומוגנית, העמודה האחרונה היא עמודת אפסים. צורתה הכללית היא:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & 0 \end{bmatrix}$$

פעולות־שורה על מטריצה כזאת אינן משנות את עמודת האפסים (נמקו בעצמכם). לכן כל מערכת ששקולה למערכת הומוגנית היא עצמה הומוגנית.[1]

בתהליך הדירוג של מערכת הומוגנית אפשר אפוא להסתפק בדירוג המטריצה המורכבת מ־ $n$ העמודות הראשונות, תוך התעלמות מעמודת האפסים הימנית (שאותה אפשר להחזיר בסוף התהליך). בכך נחסכת כתיבה מיותרת. למטריצת המקדמים של מערכת שממנה הושמטה העמודה האחרונה, יש שם משלה:

---

**הגדרה 1.13.3 מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת ליניארית**

**מטריצת המקדמים המצומצמת** של מערכת ליניארית $A$ מסדר $m \times n$ היא המטריצה מסדר $m \times n$, המורכבת מ־ $n$ העמודות הראשונות של מטריצת המקדמים של $A$, כלומר מעמודות המקדמים של משתני המערכת בלבד.

---

אם מטריצת המקדמים של מערכת ליניארית מסדר $m \times n$ היא

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

אז מטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

אם $A'$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת $A$ ו־ $\mathbf{b}$ היא עמודת המקדמים החופשיים של $A$, אז:

$$A = \left[A' \mid \mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

כמובן, אין די במטריצת המקדמים המצומצמת כדי לאפיין מערכת ליניארית. כל מטריצה מסדר $m \times n$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת של משפחה שלמה של מערכות ליניאריות שונות מסדר $m \times n$, שההבדל ביניהן הוא בעמודת המקדמים החופשיים. עם זאת, כפי שתראו בהמשך, תכונות רבות של מערכות ליניאריות נקבעות על פי המטריצות המצומצמות בלבד. מערכת **הומוגנית**, על כל פנים, מאופיינת לחלוטין על־ידי מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, ובעת טיפול במערכת כזאת אפשר להסתפק במטריצה המצומצמת כתחליף למטריצת המקדמים המלאה.

---

1 שימו לב, מערכות הומוגניות מדורגות עונות על תנאי הבוחן לעקביות, ממשפט 1.12.1: אין בהן שורה מהטיפוס $[0,...,0,a]$ $(a \neq 0)$.

# 1.14 מערכות מסדר $n \times n$

סוג חשוב נוסף של מערכות לינאריות הן המערכות מסדר $n \times n$ – מערכות שבהן מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים. הצורה הכללית של מערכות כאלה היא:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

מטריצת המקדמים של מערכת מסדר $n \times n$ היא מסדר $n \times (n+1)$; מטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא מטריצה מסדר $n \times n$ – מספר שורותיה שווה למספר עמודותיה.

- מטריצה, שמספר שורותיה שווה למספר עמודותיה מכונה, מסיבות מובנות, **מטריצה ריבועית**. על מטריצה ריבועית בעלת $n$ שורות (ו־ $n$ עמודות) נאמר (בקיצור) שהיא **מסדר $n$**. למערכת מסדר $n \times n$ מתאימה, אם כן, מטריצה **מצומצמת** ריבועית מסדר $n$.

  הצורה הכללית של מטריצה ריבועית מסדר $n$ היא:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- האלכסון היורד מן הפינה השמאלית העליונה לפינה הימנית התחתונה של מטריצה ריבועית מסדר $n$, מכונה **האלכסון הראשי.** איברי האלכסון הראשי של המטריצה הם:

$$a_{11},\ a_{22}, \ldots,\ a_{nn}$$

- המטריצה הריבועית מסדר $n$, שאיברי האלכסון הראשי שלה שווים כולם ל־1 וכל יתר איבריה הם אפסים, מכונה **מטריצת היחידה מסדר $n$**, וסימונה המקובל הוא $I_n$. אם כן,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

(בשיטת סימון זו האפסים "הגדולים" מציינים שכל האיברים מעל ומתחת לאלכסון הראשי מתאפסים).

אם $a_{ij}$ הוא האיבר הנמצא בשורה ה־ $i$ ובעמודה ה־ $j$ של $I_n$ $(1 \le i,\ j \le n)$, אז $a_{ij} = 1$ אם $i = j$, אחרת – $a_{ij} = 0$.

מטריצת היחידה מסדר $n$ היא, בבירור, מטריצת מדרגות קנונית, שבה בכל שורה יש איבר פותח. התכונות המאפיינות את $I_n$ הן אלה:

---

**משפט 1.14.1**

אם $A$ מטריצת מדרגות קנונית, ריבועית מסדר $n$, שבה בכל שורה יש איבר פותח, אז $A = I_n$.

---

**הוכחה**

תהי $A$ מטריצה מהסוג המתואר במשפט. בכל שורה של $A$ יש איבר פותח אחד, ולכן מספר האיברים הפותחים של $A$ הוא $n$.

נתבונן באיבר הפותח של השורה ה־ $n$ (האחרונה). האיברים הפותחים של $n-1$ השורות שמעליו נמצאים בעמודות שלשמאלו (כי $A$ מטריצת מדרגות), וכל אחד מהם בעמודה אחרת, כי בכל עמודה של מטריצת מדרגות יש לכל היותר איבר פותח אחד. אם כן, משמאל לעמודת איבר זה יש לפחות $n-1$ עמודות נוספות. בסך הכול יש ב־ $A$ בדיוק $n$ עמודות, ולכן האיבר הפותח של השורה ה־ $n$ הוא בהכרח בעמודה ה־ $n$, כלומר זהו $a_{nn}$.

באופן כללי, לכל $i$, $1 \le i \le n$, האיבר הפותח של השורה ה־ $i$ הוא בעמודה ה־ $i$, כלומר הוא $a_{ii}$.
ננמק: נסמן ב־ $j$ את מספר העמודה שבה נמצא האיבר הפותח של השורה ה־ $i$ (ונוכיח כי $j=i$).
מעל השורה ה־ $i$ יש $i-1$ שורות; האיברים הפותחים של השורות הללו הם בעמודות שמשמאל לעמודה ה־ $j$ (כל אחד בעמודה אחרת), לכן $\boxed{i-1<j}$. מתחת לשורה ה־ $i$ יש $n-i$ שורות; האיברים הפותחים של השורות הללו הם בעמודות שמימין לעמודה ה־ $j$ (כל אחד בעמודה אחרת), לכן $j+(n-i) \le n$, ומכאן נובע ש־ $\boxed{j \le i}$. משני האי־שוויונות המובלטים נובע כי $j=i$, כלומר האיבר הפותח של השורה ה־ $i$ הוא בעמודה ה־ $i$. אם כן, האיברים הפותחים של $A$ הם:

$$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$$

(בכל עמודה של $A$ יש איבר פותח).

$A$ היא מטריצת מדרגות קנונית, לכן כל האיברים הפותחים שלה שווים ל־1. בכל עמודה שבה יש איבר פותח, וכל יתר האיברים הם 0. לכן
$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = 1$$
ולכל $i \ne j$
$$a_{ij} = 0$$
הווי אומר:
$$A = I_n$$

**מ.ש.ל.**

---

**משפט 1.14.2**

למערכת ליניארית מסדר $n \times n$ מעל שדה $F$ יש פתרון יחיד אם ורק אם מטריצת המקדמים המצומצמת שלה שקולת־שורות למטריצת היחידה $I_n$.

---

**הוכחה**

ראשית נוכיח טענת עזר פשוטה, שתועיל בהמשך:

---

**למה**[1]

תהיינה $A$ ו־ $C$ מטריצות שקולות־שורה.

אם $A'$ מתקבלת מ־ $A$ על־ידי מחיקת אחת מן העמודות של $A$, ו־ $C'$ מתקבלת מ־ $C$ על־ידי מחיקת העמודה המקבילה של $C$, אז גם $A'$ ו־ $C'$ שקולות־שורה.

---

1 לֶמָּה (lemma) – טענת עזר.

**הוכחת הלמה**

לפי ההנחה בנוגע ל־ $A$ ו־ $C$, יש סדרה סופית של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $A$ ל־ $C$. אותה סדרה בדיוק, מובילה מ־ $A'$ ל־ $C'$.

**מ.ש.ל.**

תהי נתונה מערכת לינארית $A$ בת $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

נסמן ב־ $A'$ את מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, וב־ $\mathbf{b}$ את עמודת המקדמים החופשיים. אם כן, מתקיים:

$$A = \left[A'\middle|\mathbf{b}\right]$$

**כיוון אחד:** נניח ש־ $A'$ שקולת־שורה ל־ $I_n$, ונוכיח שלמערכת המתאימה למטריצה $A = \left[A'\middle|\mathbf{b}\right]$ יש פתרון יחיד.[2]

לאור ההנחה, יש סדרה של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $A'$ למטריצת היחידה $I_n$.

נבחר סדרה כזאת, ונבצע את הפעולות הכלולות בה על המטריצה $A = \left[A'\middle|\mathbf{b}\right]$. התוצאה תהיה מטריצה שצורתה

$$\left[I_n \mid \mathbf{c}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & c_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & c_n \end{array}\right]$$

שבה $c_1, \ldots, c_n$ סקלרים כלשהם. המערכת, שזו מטריצת המקדמים שלה, היא:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & c_1 \\ & x_2 & & & = & c_2 \\ & & \ddots & & & \\ & & & x_n & = & c_n \end{array}$$

למערכת הזאת יש פתרון יחיד. המערכת שקולה, כמובן, למערכת $A$. לכן גם למערכת $A$ יש פתרון יחיד.

**הכיוון האחר:** נניח שלמערכת המתאימה למטריצה $A = \left[A' \mid \mathbf{b}\right]$ יש פתרון יחיד, ונוכיח ש־ $A'$ שקולת־שורה ל־ $I_n$.

נדרג את המטריצה $A$ לצורת מדרגות קנונית $C$. נסמן ב־ $C'$ את מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת $C$. אז $C = \left[C'\middle|\mathbf{c}\right]$, כאשר $\mathbf{c}$ היא איזושהי עמודה של $n$ סקלרים. גם $C'$ היא, בבירור, מטריצת מדרגות קנונית. כמו כן, על פי הַלֶּמָּה שבתחילת ההוכחה, $C'$ שקולת־שורה ל־ $A'$, כי $C$ שקולת־שורה ל־ $A$, ו־ $A', C'$ מתקבלות מ־ $A, C$ (בהתאמה) על־ידי מחיקת העמודה האחרונה בכל אחת מהן.

2 שימו לב, איננו נזקקים להנחה שהמערכת $A$ עקבית.

המטריצה $C$ שקולת־שורה ל־ $A$, והמערכת $A$ עקבית. לכן גם המערכת $C$ עקבית. למערכת $A$ יש פתרון יחיד, ולכן גם למערכת $C$ יש פתרון יחיד. לפיכך, לפי משפט 1.12.2, במערכת $C$ אין משתנים חופשיים. אם כן, כל $n$ המשתנים של המערכת $C$ הם קשורים. פירוש הדבר הוא, שבכל אחת מ־ $n$ השורות של המטריצה $C'$ יש איבר פותח. $C'$ היא אפוא מטריצת מדרגות קנונית ריבועית, שבה לכל שורה יש איבר פותח. לפי משפט 1.14.1:

$$C' = I_n$$

לכן $A'$ שקולת־שורה ל־ $I_n$.

**מ.ש.ל.**

**הערה**

בסימוני הוכחת משפט 1.14.2, אם $A = \left[A' \mid \mathbf{b}\right]$, כאשר $A'$ היא מטריצת היחידה, אזי הפתרון היחיד, לאור המשפט, למערכת המשוואות המתאימה הוא ה־ $n$־יה שרכיביה הם רכיבי העמודה $\mathbf{b}$.

ודאו שעובדה זו נהירה לכם על־ידי הצבה ישירה במערכת המשוואות.

כעת נצא מאיזושהי מטריצה ריבועית $A$ מסדר $n$, ונסתכל באוסף כל המערכות הלינאריות ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלהן. ההבדל בין המערכות השונות הכלולות באוסף הנידון הוא בעמודת המקדמים החופשיים. אחת מן המערכות במשפחה היא הומוגנית, וכל היתר הן אי־הומוגניות.

---

**משפט 1.14.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. אם לאחת מן המערכות הלינאריות ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלהן יש פתרון יחיד, אז לכל מערכת ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, יש פתרון יחיד.

---

**הוכחה**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. אם לאחת כלשהי מבין המערכות ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלהן, יש פתרון יחיד, אז, לפי משפט 1.14.2, $A$ שקולת־שורות למטריצת היחידה $I_n$, ולפי אותו משפט זה מבטיח שלכל מערכת ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, יש פתרון יחיד.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 1.14.1**

לפניכם ארבע מערכות לינאריות של שלוש משוואות בשלושה נעלמים מעל הממשיים. בלי שתפתרו אותן, הוכיחו כי לכל אחת מהן יש פתרון **יחיד**.

א.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ב.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ג.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 80 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -100 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= \pi \end{aligned}$$

ד.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 1979 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0.01 \end{aligned}$$

**התשובה בעמוד 136**

**שאלה 1.14.2**

הראו שבמשפט 1.14.3, ההנחה ש־ $A$ ריבועית היא חיונית, כלומר שבלעדיה מסקנת המשפט איננה נכונה.

**התשובה בעמוד 137**

נניח שלמערכת הומוגנית $n \times n$, שמטריצת המקדמים המצומצמת שלה היא $A$, יש רק פתרון אחד - הפתרון הטריוויאלי. לפי משפט 1.14.3, נובע מכך שלכל מערכת אי־הומוגנית, ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, יש פתרון יחיד.

המערכת ההומוגנית היא בהכרח עקבית - יש לה פתרון טריוויאלי. אם הפתרון הטריוויאלי אינו הפתרון היחיד שלה, אז מספר פתרונותיה גדול מ־1 - כלומר יש לה פתרון לא טריוויאלי. מכך נקבל כמסקנה את המשפט הבא:

---

**משפט 1.14.4**

מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת לינארית **הומוגנית** של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים מקיימת טענה אחת מהשתיים:

א. או שהיא שקולת־שורה למטריצה שבה יש שורת אפסים, וזאת אם ורק אם **יש** למערכת פתרון לא־טריוויאלי.

ב. או שהיא שקולת־שורה למטריצה היחידה, וזאת אם ורק אם למערכת יש פתרון אחד בלבד - הפתרון הטריוויאלי.

---

**הוכחה**

תהי $A$ מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת לינארית הומוגנית של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים.

א. נניח ש־ $A$ שקולת־שורה למטריצה $B$ שיש בה שורת אפסים. נחליף את סדר השורות במטריצה $B$ כך ששורת האפסים תעבור לתחתית המטריצה. נקבל מטריצה $C$. נדרג את שאר השורות של

$C$ למטריצת מדרגות קנונית. במטריצה השלמה שנקבל יש בוודאי שורת אפסים והיא קנונית. לכן המטריצה המקורית $A$ שקולת־שורה למטריצת מדרגות קנונית שיש בה שורת אפסים ולכן יש למערכת משתנה חופשי, ובהכרח יש למערכת פתרון לא טריוויאלי.

ולהפך - אם למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, אזי אין לה פתרון יחיד. מכאן נובע שההצגה הקנונית של $A$ שונה מ־ $I_n$. לפי משפט 1.14.1 נובע מכאן, שבהצגה הקנונית יש שורה שאין בה איבר פותח, כלומר יש שורת אפסים. מכאן ש־ $A$ שקולת־שורה למטריצה שיש בה שורת אפסים.

ב. ברור שאם $A$ שקולת־שורה למטריצה היחידה, אזי למערכת יש פתרון אחד בלבד - הפתרון הטריוויאלי.

ולהיפך - אם למערכת יש פתרון יחיד (הטריוויאלי), אזי לפי חלק (א) שכבר הוכחנו, לא ייתכן ש־ $A$ שקולת־שורה למטריצה שיש בה שורת אפסים. לכן, בהצגה הקנונית של $A$ אין שורת אפסים, ולפי משפט 1.14.1 הצורה הקנונית של $A$ שווה בהכרח למטריצת היחידה. כלומר, $A$ שקולת־שורה למטריצה היחידה.

**מ.ש.ל.**

בשלב זה נשלים חוב מסעיף 1.11, ונוכיח את משפט יחידות הצורה המדורגת הקנונית של מטריצה. ההוכחה אינה פשוטה כלל ועיקר, והנכם רשאים לדלג עליה אם זמנכם דוחק. תחילה נחזור על נוסח המשפט:

---

**משפט 1.11.3 יחידות ההצגה הקנונית**

ההצגה הקנונית של כל מטריצה היא **יחידה**.

לשון אחר - כל מטריצה היא שקולת־שורות למטריצת מדרגות קנונית **יחידה**.

---

**הוכחה**

שימוש חוזר בלמה שבתחילת ההוכחה של משפט 1.14.2, מלמד שבהינתן זוג מטריצות שקולות־שורה, מחיקת מספר כלשהו של עמודות מקבילות (קטן ממספר העמודות הכולל), מותירה זוג מטריצות שקולות־שורה.

להוכחת יחידות ההצגה הקנונית עלינו להראות שאם $A$ מטריצה ואם $B$ ו־ $C$ הן מטריצות מדרגות קנוניות שהן שקולות־שורה ל־ $A$, אזי $B = C$.

תהיינה, אם כן, $B$ ו־ $C$ מטריצות מדרגות קנוניות שקולות־שורה ל־ $A$, ונניח בשלילה ש־ $B \neq C$.

עבור כל אחת מן המטריצות $B,C$, נתבונן בעמודה השמאלית ביותר שבה היא נבדלת מהאחרת, וכן נתבונן בעמודות המופיעות לשמאלה של עמודה זו וכוללות איבר פותח. נסמן ב־ $B',C'$ את המטריצות המתקבלות מ־ $B,C$ על־ידי **מחיקת** כל שאר העמודות.

למשל, אם:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אז:

$$B'=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad C'=\begin{bmatrix}1&0&5\\0&1&5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

אופן הגדרת המטריצות $B',C'$ מבטיח שהן מטריצות מדרגות קנוניות (מאותו הסדר) הנבדלות זו מזו בעמודה האחרונה ורק בה. אם נסמן ב־ $k+1$ את מספר העמודות של $B',C'$, אזי $k$ העמודות הראשונות של $B',C'$ הן אותה מטריצת מדרגות קנונית שנסמנה $R$.

בדוגמה שלנו:

$$R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

כל אחת מ־ $k$ העמודות של $R$ כוללת 1 פותח יחיד, ושאר רכיביה מתאפסים. בפרט, ישנם ב־ $R$ בדיוק $k$ 1־ים פותחים, ושאר רכיביה מתאפסים.
כל אחד מה־1־ים הפותחים מופיע מתחת לאלה שלשמאלו, ולכן כל אחד מה־1־ים הללו נמצא בשורה שונה של $R$. השורות שאינן כוללות מופע של 1 הן שורות אפסים, ולכן מופיעות מתחת לשורות שבהם יש 1 פותח. נסיק ש־ $k$ ה־1־ים הפותחים נמצאים ב־ $k$ השורות הראשונות. לפי משפט 1.14.1, המטריצה המורכבת מ־ $k$ שורותיה הראשונות של $R$ היא מטריצת היחידה $I_k$.

ואצלנו:

$$R=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\multicolumn{2}{c}{I_2}\\0&0\end{bmatrix}$$

נסמן ב־ $b,c$ את העמודות האחרונות של $B',C'$, בהתאמה, ב־ $b_1,c_1$ את העמודות המורכבות מ־ $k$ הרכיבים הראשונים של $b,c$, בהתאמה, וב־ $b_2,c_2$ את שאר הרכיבים. אז המטריצות $B',C'$ הן בעלות הצורה הבאה:

$$B'=\begin{bmatrix}I_k&b_1\\0&b_2\end{bmatrix}\qquad C'=\begin{bmatrix}I_k&c_1\\0&c_2\end{bmatrix}$$

(האפסים שבצד שמאל למטה מציינים שכל האיברים המופיעים בחלק זה הם אפסים).

אם ב־ $b_2$ יש איבר שאינו אפס, אזי איבר זה הוא איבר פותח בשורה שבה הוא נמצא, ולכן איבר זה הוא בהכרח 1, וכל האיברים שמעליו ומתחתיו מתאפסים (שכן $B'$ מדורגת קנונית). יתר על כן, 1 זה הוא בהכרח האיבר העליון של $b_2$ - אחרת נקבל שורת אפסים המופיעה מעל שורה שאיננה שורת אפסים.

אותו טיעון תקף עבור $c_2$. אם כך, האפשרויות העומדות בפנינו הן:

$$B'=\begin{bmatrix}I_k&\mathbf{0}\\&1\\0&0\\&\vdots\\&0\end{bmatrix}\qquad \text{או}\qquad B'=\begin{bmatrix}I_k&b_1\\0&\mathbf{0}\end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} I_k & \mathbf{0} \\ & 1 \\ 0 & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{או} \qquad C' = \begin{bmatrix} I_k & c_1 \\ 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

כעת נתבונן **במערכות המשוואות** שמייצגות המטריצות $B',C'$. לצורך המחשה, נוסיף את הקווים המאונכים המפרידים באופן ויזואלי בין מקדמי המשתנים והמקדמים הקבועים.

$$B' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ & 1 \\ 0 & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right] \qquad \text{או} \qquad B' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & b_1 \\ 0 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$C' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & \mathbf{0} \\ & 1 \\ 0 & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{array}\right] \qquad \text{או} \qquad C' = \left[\begin{array}{c|c} I_k & c_1 \\ 0 & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

עבור כל אחת מהמערכות המתאימות, אם מתקיימת האפשרות שבאגף שמאל, המערכת איננה עקבית לפי משפט 1.12.1. אם מתקיימת האפשרות שבאגף ימין, אזי לפי משפט 1.14.2 המערכת עקבית.[3] מכיוון שהמטריצות $B',C'$ שקולות־שורה, הן מייצגות מערכות משוואות שקולות, ולכן או שהמטריצות $B',C'$ הן שתיהן מן הצורה שבאגף שמאל, או ששתיהן מן הצורה שבאגף ימין.

אם שתי המטריצות הן מהצורה שבאגף שמאל, אזי הן זהות - בסתירה להנחתנו. לכן שתיהן מהצורה שבאגף ימין. במקרה זה, למערכת המשוואות המתאימה למטריצה $B' = \begin{bmatrix} I_k & b_1 \end{bmatrix}$ יש פתרון יחיד, ה־$k$־יה שרכיביה הן רכיבי העמודה $b_1$ (ראו הערה עוקבת למשפט 1.14.2). באותו אופן, למערכת המתאימה למטריצה $C' = \begin{bmatrix} I_k & c_1 \end{bmatrix}$ יש פתרון יחיד - ה־$k$־יה שרכיביה הן רכיבי העמודה $c_1$. מאחר שהמערכות שקולות, נסיק ש־$b_1 = c_1$, ולכן המטריצות $B',C'$ זהות. סתירה.

**מ.ש.ל.**

לסיום הפרק הנה עוד כמה שאלות לחזרה.

**שאלה 1.14.3**

א. האם קיימת מערכת ליניארית מעל הממשיים שיש לה שני פתרונות בדיוק?

ב. האם קיימת מערכת ליניארית מעל שדה כלשהו שיש לה שני פתרונות בדיוק?

**התשובה בעמוד 137**

3 אנו מפעילים את המשפט על $k$ השורות הראשונות - שורות האפסים אינן משפיעות על שאלת קיום הפתרון למערכת.

**שאלה 1.14.4**

תהי נתונה מערכת משוואות הומוגנית מעל הממשיים.

$$\begin{array}{rcrcl}(1-\lambda)x_1 & + & x_2 & = & 0\\ 2x_1 & & (3-\lambda)x_2 & = & 0\end{array}$$

עבור אילו ערכים של הפרמטר $\lambda$ קיים למערכת פתרון לא־טריוויאלי?

(באומרנו ש־ $\lambda$ הוא פרמטר, הכוונה היא ש־ $\lambda$ הוא איזשהו מספר ממשי **ספציפי**, שערכו המדויק אינו ידוע. **אין** הכוונה ש־ $\lambda$ הוא משתנה. במילים אחרות, בשאלה זו נתונות אינסוף מערכות משוואות שונות - לכל ערך ממשי שנציב במקום $\lambda$ נקבל מערכת שונה; עליכם לקבוע, עבור אילו מאינסוף מערכות אלה קיים פתרון לא־טריוויאלי. סוג דומה של תרגיל ראיתם כבר בשאלה 1.12.4.)

**התשובה בעמוד 137**

**שאלה 1.14.5**

פתרו בעזרת שיטת החילוץ את המערכת הבאה מעל הממשיים:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}5x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & + & 7x_4 & + & 4x_5 & = & 0\\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & = & 0\\ 7x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 & + & 5x_4 & + & 6x_5 & = & 0\\ 5x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & 0\end{array}$$

**התשובה בעמוד 138**

**שאלה 1.14.6**

פתרו בשיטת החילוץ את המערכת הבאה מעל השדה $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 0\\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 0\\ x_1 & + & & & x_3 & + & & & x_5 & = & 0\end{array}$$

**התשובה בעמוד 139**

**שאלה 1.14.7**

נניח שיצאנו ממטריצה נתונה $A$ (מעל שדה כלשהו) והגענו, על־ידי סדרת פעולות־שורה למטריצה $B$.
האם בהכרח קיימת סדרת פעולות מטיפוס (2) ו־(3) בלבד (כפל שורה בסקלר שונה מאפס והוספת כפולה של שורה בסקלר לשורה אחרת) המובילה מ־ $A$ ל־ $B$?

**התשובה בעמוד 139**

**שאלה 1.14.8**

100 פרופסורים למתמטיקה נלקחו בשבי על־ידי סטודנטים בקורס אלגברה לינארית. הסטודנטים העמידו את הפרופסורים בטור, ושמו על ראשו של כל פרופסור כובע שחור או לבן. כל פרופסור יכול לראות רק את צבעי הכובעים שלפניו. כעת הפרופסורים נדרשים לשחק את המשחק הבא: כל אחד בתורו (החל מהאחרון בטור - זה שרואה את כל האחרים) צריך לנחש את צבע הכובע שעל ראשו, כאשר כל פרופסור שומע מה אמרו הפרופסורים שעומדים מאחוריו. הסטודנטים מודיעים לפרופסורים שאם יותר מאחד מהם ינחש לא נכון, כולם יוצאו להורג. מה יעשו הפרופסורים? (מותר להם לתאם אסטרטגיה מראש.)

דוגמה לאסטרטגיה שלא תצלח: הפרופסור הראשון יאמר את צבע הכובע של השני. השני יאמר את צבע הכובע שלו (וכך "ינחש" נכון). הפרופסור השלישי יאמר את צבע הכובע של הרביעי, והרביעי יאמר את הצבע של עצמו (וכך "ינחש" נכון), וכן הלאה. אסטרטגיה זו מבטיחה שלפחות מחצית מהפרופסורים ינחשו נכון, אבל אינה מבטיחה שלפחות 99 ינחשו נכון.

**התשובה בעמוד 139**

# תשובות לשאלות בפרק 1

**תשובה 1.1.1** **השאלה בעמוד 14**

א. הקבוצה סגורה ביחס לפעולה - התוצאה היא תמיד מספר שלם.

ב. כנ"ל.

ג. הקבוצה סגורה ביחס לפעולה - התוצאה היא תמיד מספר טבעי (ואפילו מספר טבעי הגדול מ־8).

ד. הקבוצה אינה סגורה ביחס לפעולה. למשל, $1*1=1+1-8=-6$ אינו מספר שלם.

ה. הקבוצה אינה סגורה ביחס לפעולה. למשל, $2*3=2/3$ אינו מספר טבעי.

ו. הקבוצה סגורה ביחס לפעולה - התוצאה היא תמיד מספר שלם.

**תשובה 1.1.2** **השאלה בעמוד 15**

א. בחלקים א-ג הפעולה קיבוצית. בודקים ישירות על פי ההגדרה. נדגים כיצד מוכיחים זאת עבור סעיף ב:

לכל $a,b,c\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=a*(c+c-8)=a+(b+c-8)-8=a+b-8+c-8\\&=(a*b)+c-8=(a*b)*c\end{aligned}$$

בחלקים ד-ה הקבוצה אינה סגורה ביחס לפעולה, ולכן ממילא איננו רואים את הפעולה כקיבוצית.

בחלק ו הפעולה אינה קיבוצית, שכן למשל, $(2*2)*1=(2^2\cdot 20)*1=8*1=8^2\cdot 1=64$, ואילו $2*(2*1)=2*(2^2\cdot 1)=2*4=2^2\cdot 4=16$.

ב. נסמן $a'=a*b$. מאחר שהפעולה קיבוצית, מתקיים $a'*(c*d)=(a'*c)*d$, כלומר $(a*b)*(c*d)=((a*b)*c)*d$.

**תשובה 1.1.3** **השאלה בעמוד 16**

א. בחלקים א-ד מראים ישירות על פי ההגדרה כי הפעולה חילופית. נדגים זאת עבור חלק א:

לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ מתקיים:

$$a*b=a+b+8=b+a+8=b*a$$

בחלק ד-ה הפעולה אינה חילופית, שכן $\mathbb{N}$ אינה סגורה ביחס לפעולה.

בחלק ו הפעולה אינה חילופית, כי למשל מתקיים $1*2=1^2\cdot 2=2$ ואילו $2*1=2^2\cdot 1=4$.

ב. $(a*b)*(c*d)=((a*b)*c)*d=((b*a)*c)*d=(b*a)*(c*d)$. בשוויון הראשון ובשוויון השלישי הסתמכנו על קיבוציות הפעולה ועל סעיף ב בשאלה 1.1.2, ובשוויון השני הסתמכנו על החילופיות.

**תשובה 1.1.4** **השאלה בעמוד 17**

הקבוצה סגורה ביחס לפעולה - כל האיברים המופיעים בטבלה שייכים לקבוצה.

הפעולה אינה קיבוצית, כי למשל, $(b*b)*c=c*c=c$, ואילו $b*(b*c)=b*a=b$

הפעולה גם אינה חילופית: $b*c=a$, אבל $c*b=c$.

**תשובה 1.1.5** **השאלה בעמוד 20**

בסעיף א קיים איבר נייטרלי - המספר $-8$.

בסעיפים ב, ד האיבר הניטרלי הוא $8$.

בסעיף ג אין איבר ניטרלי. אכן, לו היה איבר $e$ כזה, בפרט היה מתקיים $e+9 = e+1+8 = e*1 = 1$, ולכן $e=-8$. אך המספר $-8$ אינו שייך לקבוצה $\mathbb{N}$.

בסעיף ה לא קיים איבר ניטרלי. אכן, לו היה איבר $e$ כזה, היה מתקיים $2*e = e*2 = 2$, ולכן $e/2 = 2$ אך גם $2/e = 2$. מהשוויון הראשון נובע כי $e=1$ ומהשני נובע כי $e=4$, סתירה.

גם בסעיף ו אין איבר ניטרלי. אכן, לו היה איבר $e$ כזה, היה מתקיים $4e = e*2 = 2$, ולכן $e = 1/2$, אך $1/2$ אינו איבר של $\mathbb{Z}$.

**תשובה 1.2.1** **השאלה בעמוד 26**

א. בקבוצת המספרים הטבעיים אין איבר ניטרלי ביחס לחיבור, וממילא אין מבנה זה מהווה שדה.

ב. לא. בקבוצה זו אמנם יש איבר ניטרלי ביחס ל"חיבור" - הקבוצה הריקה, אך מכיוון ש־$X$ אינה ריקה, לא קיימת קבוצה $Y \in F$ כך ש־$X \cup Y$ היא הקבוצה הריקה. מכאן שהאיבר $X$ השייך ל־$P(X)$ אינו הפיך ביחס לאיחוד.

**תשובה 1.2.2** **השאלה בעמוד 28**

א. לא - למשל משום ש־ $1 \cdot_F (-1) = |-1| = 1 \neq -1$.

ב. לא - למשל, כלל הפילוג אינו מתקיים על־ידי הפעולות שהוגדרו. לדוגמה,

$$1 \cdot_F (1 +_F (-1)) = |1 \cdot (1+(-1))| = |1 \cdot 0| = 0$$
$$1 \cdot_F 1 +_F 1 \cdot_F (-1) = |1 \cdot 1| + |1 \cdot (-1)| = 1 + 1 = 2$$

לאור הסעיף הקודם, ניתן היה להתפתות ולתת תשובה קצרה יותר - "לא, משום שאין ניטרלי ביחס לכפל"; אך שימו לב שבסעיף הקודם לא הראינו שאין איבר ניטרלי ביחס לכפל - כל שהראינו הוא ש־1 אינו ניטרלי ביחס לכפל. עם זאת, נציין שבכל זאת קל להראות שגם אין מספר אחר שהוא ניטרלי ביחס לכפל, ואתם מוזמנים לעשות זאת.

**תשובה 1.2.3** **השאלה בעמוד 29**

אם $a$ שונה מאפס, אז קיים לו איבר הופכי $a^{-1}$. נתון ש־$ab=0$. נכפול את שני אגפי השוויון ב־$a^{-1}$, ונקבל $0 = a^{-1}ab = 1 \cdot b = b$, ובזאת הושלמה ההוכחה הנדרשת (הסבירו מדוע).

**תשובה 1.2.4** **השאלה בעמוד 30**

סעיפים א–ב נובעים ישירות מההגדרה.

ג. תחילה נחשב:

$$(-a)b + ab = (-a+a)b = 0b = 0$$

לכן:

$$(-a)b = -(ab)$$

כעת, על סמך החילופיות ומה שכבר הוכחנו,

$$-(ab) = -(ba) = (-b)a = a(-b)$$

מצירוף תוצאות אלה נסיק $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

ובפרט: $(-1)b = -(1 \cdot b) = -b$

ד. לפי סעיף ג (עם $-b$ במקום $b$), $(-a)(-b) = a(-(-b))$

אבל לפי סעיף א, $-(-b) = b$

ובסך הכל: $(-a)(-b) = a(-(-b)) = ab$

**תשובה 1.2.5** **השאלה בעמוד 31**

התוצאה נובעת מקיבוציות וחילופיות פעולת החיבור. אכן:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= ((a+b)+c)+d = a+(b+c)+d \\ &= d+(a+(b+c)) = (d+a)+(b+c) \end{aligned}$$

**תשובה 1.2.6** **השאלה בעמוד 33**

מהטבלה אנו רואים כי $-1 = 1$.

**תשובה 1.2.7** **השאלה בעמוד 34**

| $+_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| $\cdot_7$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

**תשובה 1.2.8** **השאלה בעמוד 34**

א. $-1 = 6,\ -2 = 5,\ -3 = 4,\ -4 = 3,\ -5 = 2,\ -6 = 1$

$1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 4,\ 3^{-1} = 5,\ 4^{-1} = 2,\ 5^{-1} = 3,\ 6^{-1} = 6$

ב.

| $+_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

| $\cdot_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

ג. השוויון $2 \cdot 2 = 0$ מתקיים לפי הטבלה הימנית. לו היה בפנינו שדה, היינו מקבלים סתירה למשפט 1.2.6.

**תשובה 1.2.9** **השאלה בעמוד 36**

א. $a - 0 = a + (-0) = a + 0 = a$

$a / 1 = a \cdot 1^{-1} = a \cdot 1 = a$

ב. לפי שאלה 1.2.4, $-(a+b) = (-1)(a+b)$

אבל לפי כלל הפילוג והגדרת החיסור, $(-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = -a - b$

לכן, $-(a+b) = -a - b$

ג. נניח כי מתקיים $a - b = c - d$. נוסיף $b + d$ לשני האגפים ונקבל $a - b + b + d = c - d + b + d$, כלומר $a + d = c - d + b + d = c - d + d + b = c + b$, כדרוש. באופן דומה, אם מתקיים $a + d = c + b$ אזי נוסיף $-(b+d)$ לשני האגפים ונקבל $a - b = c - d$.

ד. ההוכחה אנלוגית לזו של סעיף א: אם מתקיים $a / b = c / d$ אזי $ab^{-1} = cd^{-1}$. נכפול את שני האגפים ב־ $db$ ונקבל $ad = bc$. ולהפך, אם מתקיים $ad = bc$ אזי נכפול את שני האגפים ב־ $d^{-1}b^{-1}$ ונקבל $a / b = c / d$.

**תשובה 1.2.10** **השאלה בעמוד 36**

א. על פי שאלה 1.2.9, השוויון שקול לשוויון המתקבל אם נכפול את שני האגפים ב $b \cdot d$, שהוא

$$(a / b) \cdot (c / d) \cdot b \cdot d = (ac) / (bd) \cdot b \cdot d$$

ואכן,

$$\begin{aligned}(a / b(c / db \cdot d &= (a / b) \cdot b \cdot (c / d) \cdot d = ab^{-1}b \cdot cd^{-1}d = ac \\ &= ac \cdot (bd)^{-1} \cdot (bd) = (ac / bd) \cdot (bd) = (ac / bd) \cdot b \cdot d\end{aligned}$$

ב. על פי חלק א:

$$\begin{aligned}(a / b) + (c / d) &= (a / b) \cdot (d / d) + (c / d) \cdot (b / b) = (ad / bd) + (bc / bd) \\ &= (ad) \cdot (bd)^{-1} + (bc) \cdot (bd)^{-1} = (ad + bc) \cdot (bd)^{-1} = (ad + bc) / bd\end{aligned}$$

**תשובה 1.2.11** **השאלה בעמוד 36**

בשדה זה $2 \cdot 3 = 1$, לכן $2 = 3^{-1}$. מכאן נקבל: $2 / 3 - 1 = 2 \cdot 3^{-1} - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

**תשובה 1.3.1** **השאלה בעמוד 39**

עלינו למצוא את מספר ה־ $n$־יות השונות מעל $A$:

מספר האפשרויות ל"בחירת" כל רכיב של $n$־יה כזו הוא בדיוק $k$. מאחר שישנם $n$ רכיבים, מספר האפשרויות ל"בחירת" $n$־יה הוא $k^n$.

**תשובה 1.3.2** **השאלה בעמוד 41**

א. יש להוכיח כי עבור $n$־יות כלשהן $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ מתקיים:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) + \mathbf{a}$$

לפי חלק ב של משפט 1.3.3 (קיבוציות),

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

ולפי חלק ג של אותו משפט (חילופיות),

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a}$$

לכן:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a}$$

שוב לפי חלק ג של אותו משפט (חילופיות),

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$$

ולכן:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) + \mathbf{a}$$

ב. יש להוכיח כי:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{c} + (\mathbf{b} + \mathbf{a})$$

והפעם נעשה זאת ביתר קיצור:

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{קיבוציות}}}{=} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{חילופיות}}}{=} (\mathbf{b} + \mathbf{a}) + \mathbf{c} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{חילופיות}}}{=} \mathbf{c} + (\mathbf{b} + \mathbf{a})$$

**תשובה 1.3.3** **השאלה בעמוד 42**

א. נוכיח ראשית כי לכל $n$-יה $\mathbf{a}$ מתקיים:

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

ואכן, תהי $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ $n$-יה כלשהי, אז

$$1 \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot (a_1,\dots,a_n) = (1 \cdot a_1,\dots,1 \cdot a_n) = (a_1,\dots,a_n) = \mathbf{a}$$

ב. נוכיח כי לכל $n$-יה $\mathbf{a}$ מתקיים:

$$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

ואכן,

$$0 \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot (a_1,\dots,a_n) = (0 \cdot a_1,\dots,0 \cdot a_n) = \underbrace{(0,\dots,0)}_{n \text{ רכיבים}} = \mathbf{0}$$

ג. נוכיח כי לכל $n$-יה $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$ מתקיים:

$$(-1)\mathbf{a} = (-a_1,\dots,-a_n)$$

ואכן,

$$(-1)\mathbf{a} = (-1)(a_1,\dots,a_n) = ((-1)a_1,\dots,(-1)a_n) = (-a_1,\dots,-a_n)$$

**תשובה 1.3.4** **השאלה בעמוד 42**

$$(s \cdot t)\mathbf{a} = (sta_1,\dots,sta_n) = s(ta_1,\dots,ta_n) = s(t(a_1,\dots,a_n)) = s(t\mathbf{a})$$

וכן,

$$\begin{aligned}(s + t)\mathbf{a} &= (s + t)(a_1,\dots,a_n) = ((s + t)a_1,\dots,(s + t)a_n) = (sa_1 + ta_1,\dots,sa_n + ta_n) \\ &= (sa_1,\dots,sa_n) + (ta_1,\dots,ta_n) = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= t(a_1 + b_1,\dots,a_n + b_n) = (t(a_1 + b_1),\dots,t(a_n + b_n)) \\ &= (ta_1 + tb_1,\dots,ta_n + tb_n) = (ta_1,\dots,ta_n) + (tb_1,\dots,tb_n) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}\end{aligned}$$

**תשובה 1.3.5** **השאלה בעמוד 43**

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = 2(2,0,-1,\frac{1}{2}) + 3(3,-7,\frac{1}{3},2) = (4,0,-2,1) + (9,-21,1,6) = (13,-21,1,7)$$

**תשובה 1.3.6** **השאלה בעמוד 43**

אנו תרים אחר מספרים $k,s,t$ המקיימים:

$$(k,k,k) + (s,s,0) + (t,0,0) = (k+s+t,k+s,k) = (1,2,3)$$

השוואת הרכיב השלישי מכתיבה $k = 3$. הרכיב השני מכתיב $3 + s = 2$, ולכן $s = -1$. הרכיב הראשון מכתיב עתה $3 + (-1) + t = 1$, ולכן $t = -1$. ודאו שאכן:

$$3(1,1,1) + (-1)(1,1,0) + (-1)(1,0,0) = (1,2,3)$$

**תשובה 1.3.7** **השאלה בעמוד 43**

אם $b_i$, $(1 \le i \le 12)$, היא הטמפרטורה הממוצעת (במעלות צלסיוס) בחודש ה־ $i$ ו־ $a_i$, $(1 \le i \le 12)$, היא הטמפרטורה המתאימה במעלות פרנהייט, אז מתקיים:

$$b_i = \frac{5}{9}(a_i - 32) \qquad (1 \le i \le n)$$

ולכן:

$$\mathbf{b} = (b_1,\ldots b_{12}) = \left(\frac{5}{9}(a_1 - 32),\ldots,\frac{5}{9}(a_{12} - 32)\right)$$

$$= \frac{5}{9}(a_1 - 32,\ldots,a_{12} - 32) = \frac{5}{9}\big((a_1,\ldots,a_{12}) + (-32,\ldots,-32)\big)$$

$$= \frac{5}{9}\big(\mathbf{a} - 32(1,\ldots,1)\big) = \frac{5}{9}\mathbf{a} - \frac{160}{9}\underbrace{(1,\ldots,1)}_{\text{12 רכיבים}}$$

**תשובה 1.4.1** **השאלה בעמוד 52**

$$(7/2 + 3/2 \cdot t, t) = (7/2, 0) + t(3/2, 1)$$

**תשובה 1.4.2** **השאלה בעמוד 52**

א. $(\frac{3}{2} - 2s + \frac{5}{2}t, s, t) = (\frac{3}{2},0,0) + s(-2,1,0) + t(\frac{5}{2},0,1)$

ב. $(-r + 2s - 3t, r, s, t) = r(-1,1,0,0) + s(2,0,1,0) + t(-3,0,0,1)$

**תשובה 1.5.1** **השאלה בעמוד 58**

א.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\
x_1 & & & & & - & \frac{1}{2}x_4 & = & 0 \\
 & & & & x_3 & & & = & 0 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & = & 0
\end{array}$$

המערכת הומוגנית כי כל המקדמים החופשיים שווים 0.

במערכת זו $m = 4$ (מספר המשוואות)

$n = 4$ (מספר המשתנים)

$a_{33} = 1, a_{41} = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0, b_1 = 0$

ב.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y &= 5 \\ -2x + z &= 0 \end{aligned}$$

המערכת היא אי־הומוגנית כי קיימים מקדמים חופשיים השונים מ־0 (למשל $b_2 = 5$).

$m = 3, n = 3$

$a_{33} = 1, a_{23} = 0, a_{32} = 0, b_1 = 1$

$a_{41}$ אינו קיים.

ג.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= \frac{1}{2} \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

המערכת היא אי־הומוגנית כי קיים מקדם חופשי השונה מ־0 $(b_1 = \frac{1}{2})$.

$m = 3, n = 4$

$a_{33} = 0, a_{23} = -1, a_{32} = 0, b_1 = \frac{1}{2}$

$a_{41}$ אינו קיים.

**תשובה 1.5.2** **השאלה בעמוד 58**

מספר הרכיבים ב־$n$־יה שהיא פתרון של המערכת, שווה למספר הנעלמים במערכת. לכן ה־$n$־יות העשויות לפתור את המערכת א הן: $(0,0,0,0)$ ו־$(1,-1,0,2)$.

קל לבדוק על־ידי הצבה ששתי הרביעיות האלה אכן פותרות את המערכת א.

במערכת ב שלושה נעלמים. לכן המועמד היחיד (מבין ה־$n$־יות הנתונות) להיות פתרון של מערכת זו הוא השלישייה $(0,0,0)$, אולם גם שלישייה זו אינה פותרת את המערכת, שכן אם נציב $(0,0,0)$ במשוואה הראשונה נקבל $0+0+0=1$.

במערכת ג ארבעה נעלמים. לכן המועמדים לפתור אותה הם $(0,0,0,0)$ ו־$(1,-1,0,2)$, אבל קל לבדוק ולהיווכח כי אלה אינם פותרים אותה.

נסכם:

שתי ה־$n$־יות $(0,0,0,0)$ ו־$(1,-1,0,2)$ פותרות את המערכת א.

אף $n$־ה מבין ה־$n$־יות הנתונות אינה פותרת את המערכות ב או ג.

**תשובה 1.5.3** **השאלה בעמוד 59**

לא קיימת מערכת כזאת. נוכיח בדרך השלילה. תהי נתונה מערכת משוואות שהשלישייה $(0,0,0)$ פותרת אותה. במערכת זו מספר הנעלמים הוא 3. נרשום את המערכת בצורה הכללית:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & = & b_m \end{array}$$

אם נציב $(0,0,0)$ במקום $(x_1, x_2, x_3)$, נקבל שאגפי שמאל של כל המשוואות מתאפסים. מאחר ש־ $(0,0,0)$ הוא פתרון, אז כאשר מציבים אותו חייבים אגפי ימין לשוות לאגפי שמאל, כלומר חייב להתקיים $b_i = 0$ לכל $1 \le i \le m$, כלומר המערכת חייבת להיות הומוגנית.

**תשובה 1.5.4** **השאלה בעמוד 59**

א. 
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

ב. המערכת דלעיל היא אי־הומוגנית.

ג. לא ייתכן שסטודנט כלשהו מצא מערכת **הומוגנית** שאין לה פתרון, כי לכל מערכת הומוגנית יש פתרון – ה־ $n$־יה שאיבריה כולם אפסים ואורכה כמספר המשתנים במערכת (ראו שאלה 1.5.4). לכן אם סטודנט כלשהו ענה על חלק ב תשובה שונה משלך, אז אחד משניכם בוודאי טועה.

**תשובה 1.5.5** **השאלה בעמוד 59**

(i) במערכת אשר $(v_1, \ldots, v_n)$ היא הפתרון שלה, יש בהכרח $n$ משתנים.

(ii) מספר המשוואות במערכת יכול להיות כלשהו; הנה, למשל, מערכת בת משוואה אחת שה־ $n$־יה $(v_1, \ldots, v_n)$ פותרת אותה:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \qquad (*)$$

אם נוסיף למשוואה זו את המשוואה:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \qquad (**)$$

נקבל מערכת בת שתי משוואות שה־ $n$־יה $(v_1, \ldots, v_n)$ פותרת אותה:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= v_1 + v_2 + \ldots + v_n \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n &= 0 \end{aligned}$$

לקבלת מערכת בת $m$ משוואות אשר ה־ $n$־יה $(v_1, \ldots, v_n)$ פותרת אותה, נוכל, למשל, להוסיף $(m-1)$ משוואות מהטיפוס (**) למשוואה (*) (ונוכל, כמובן, לנקוט גם תכסיסים אחרים).

**תשובה 1.5.6** **השאלה בעמוד 59**

למערכת בת משוואה אחת,

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \qquad (*)$$

כל שלָשה $(x_1, x_2, x_3)$ היא פתרון.

אם נרשום $m$ משוואות מן הצורה (*), נקבל מערכת בת $m$ משוואות שכל שלָשה פותרת אותה. בכך מיצינו למעשה את כל המערכות האלה. אכן, תהי נתונה מערכת משוואות ב־3 משתנים,

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & = & b_m \end{array}$$

כאשר $n = 3$. אם נציב $(0,0,0)$ במקום $(x_1, x_2, x_3)$, נקבל שאגפי שמאל של כל המשוואות מתאפסים.

נוכיח כי אם כל שלָשה פותרת את המערכת, אז כל מקדמי המערכת הם אפסים. ואמנם, אם כל שלשה פותרת את המערכת, אז בפרט השלשות $(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ פותרות אותה. היות שלכל $1 \le i \le m$, $(0,0,0)$ פותרת את המשוואה ה־$i$, נקבל כי:

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 = b_i$$

ומכאן שלכל $1 \le i \le m$,

$$b_i = 0$$

השלשה $(1,0,0)$ היא פתרון של המערכת. נציב אותה במשוואה ה־$i$:

$$a_{i1} \cdot 1 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 0 = 0$$ [1]

ומכאן $a_{i1} = 0$.

באופן דומה נציב את $(0,1,0)$ במשוואה ה־$i$:

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 1 + a_{i3} \cdot 0 = 0$$

ומכאן $a_{i2} = 0$.

ומהצבת $(0,0,1)$ במשוואה ה־$i$ נקבל:

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + a_{i3} \cdot 1 = 0$$

ומכאן $a_{i3} = 0$.

כלומר, כל המקדמים של המשוואה ה־$i$ הם אפסים, לכן נקבל כי $a_{ij} = 0$ לכל $1 \le i \le m$, $1 \le j \le 3$ (וכפי שכבר הוכחנו, גם $b_i = 0$ לכל $i$).

1 השתמשנו בכך ש־$b_i = 0$.

**תשובה 1.5.7** **השאלה בעמוד 59**

א. אם $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ היא פתרון המערכת, הרי מתקיים

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}c_1 & + & \ldots & + & a_{1n}c_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{m1}c_1 & + & \ldots & + & a_{mn}c_n & = & 0
\end{array} \qquad (*)
$$

נכפול את כל השוויונות בסקלר נתון $s$ ונקבל:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\cdot sc_1 & + & \ldots & + & a_{1n}\cdot sc_n & = & s\cdot 0 & = & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}\cdot sc_1 & + & \ldots & + & a_{mn}\cdot sc_n & = & s\cdot 0 & = & 0
\end{array}
$$

אולם פירושם של השוויונות האלה הוא שה־ $n$־יה

$$s\mathbf{c} = (sc_1,\ldots,sc_n)$$

פותרת את המערכת.

ב. יהיו $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ ו־ $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_n)$ שני פתרונות של המערכת, אז מתקיימים השוויונות (*) וכן השוויונות:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}d_1 & + & \ldots & + & a_{1n}d_n & = & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{m1}d_1 & + & \ldots & + & a_{mn}d_n & = & 0
\end{array} \qquad (**)
$$

מחיבור (*) ו־(**) נקבל:

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}(c_1+d_1) & + & \ldots & + & a_{1n}(c_n+d_n) & = & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
a_{m1}(c_1+d_1) & + & \ldots & + & a_{mn}(c_n+d_n) & = & 0
\end{array}
$$

כלומר, ה־ $n$־יה $\mathbf{c}+\mathbf{d} = (c_1+d_1,\ldots,c_n+d_n)$ פותרת את המערכת.

ג. אם $\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת, אז (על פי חלק א) גם $s\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת. באופן דומה, אם $\mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת, אז $t\mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת. ומכאן, על פי חלק ב, הסכום $s\mathbf{c}+t\mathbf{d}$ גם הוא פתרון של המערכת ההומוגנית הנתונה.

**תשובה 1.5.8** **השאלה בעמוד 59**

התכונות שמנינו בשאלה הקודמת הן נחלתן של מערכות הומוגניות **בלבד**. נראה זאת:
תהי נתונה מערכת משוואות אי־הומוגנית, ונניח ש־ $\mathbf{c}$ היא $n$־יה הפותרת אותה. נוכיח ש**שום כפולה** $s\mathbf{c}$, שבה $s \neq 1$,[2] אינה פותרת את אותה המערכת.

מאחר שהמערכת היא אי־הומוגנית, קיים בה לפחות מקדם חופשי אחד השונה מאפס. נניח, למשל, כי $b_1 \neq 0$,[3] ונתבונן במשוואה הראשונה:

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1)$$

אם $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ פותרת את המערכת, היא פותרת בפרט את המשוואה (1).
כלומר, מתקיים:

$$a_{11}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \qquad (2)$$

2 אם $s=1$, אז $s\mathbf{c}=\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{c}$ הוא פתרון.
3 אם $b_i \neq 0$ עבור $i \neq 1$, ואילו $b_1 = 0$, ההוכחה היא אנלוגית.

נניח שה־$n$־יה $s\mathbf{c}$ $(s \neq 1)$ פותרת אף היא את המערכת. אז בפרט מתקיים:

$$a_{11}sc_1 + \ldots + a_{1n}sc_n = b_1 \tag{3}$$

עתה נכפול את (2) ב־ $s$ ונחסיר את התוצאה מ־(3). נקבל:

$$0 = sb_1 - b_1 = (s-1)b_1$$

אולם $b_1 \neq 0$ ו־ $s \neq 1$ ולכן $(s-1)b_1 \neq 0$, והשוויון האחרון אינו נכון. סתירה זו מפריכה את ההנחה ש־ $s\mathbf{c}$ $(s \neq 1)$ היא פתרון של המערכת.

באופן דומה מוכיחים שאם $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הם פתרונות של מערכת אי־הומוגנית, אז הסכום $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ אינו פתרון של מערכת זו. נעשה זאת: תהיינה $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ ו־ $\mathbf{d} = (d_1,\ldots,d_n)$ שתי $n$־יות הפותרות את המערכת, ונניח כי במערכת $b_1 \neq 0$.[4] אז:

$$a_{11}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \tag{1}$$

וכן:

$$a_{11}d_1 + \ldots + a_{1n}d_n = b_1 \tag{2}$$

אם ה־ $n$־יה $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ פותרת את המערכת, אז בפרט:

$$a_{11}(c_1+d_1) + \ldots + a_{1n}(c_n+d_n) = b_1 \tag{3}$$

מאידך, אם נחבר את (1) ו־(2), נקבל:

$$a_{11}(c_1+d_1) + \ldots + a_{1n}(c_n+d_n) = 2b_1$$

כלומר $2b_1 = b_1$, בסתירה לכך ש־ $b_1 \neq 0$. לכן ה־ $n$־יה $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ אינה פותרת את המשוואה הראשונה של המערכת וממילא אינה פתרון של המערכת כולה.

### תשובה 1.6.1

**השאלה בעמוד 62**

א. המטריצה היא מסדר $4 \times 5$.

ב. מספר המשוואות במערכת הוא 5.

ג. מספר המשתנים של המערכת הוא 3.

המערכת אינה הומוגנית.

### תשובה 1.10.1

**השאלה בעמוד 81**

א. נתבונן באיבר פותח השייך לעמודה מסוימת. כל איבר הנמצא מעליו בעמודה שייך לשורה שבה יש איבר פותח הנמצא משמאל לאיבר הפותח בעמודה הנידונה, ועל כן כל איבר השוכן מעל האיבר הפותח הנידון (באותה העמודה) איננו פותח. מאידך, בכל השורות שמתחת לאיבר הפותח הנתון, האיברים הפותחים נמצאים ימינה ממנו, ולכן באותן שורות יהיו אפסים מתחתיו בעמודה. כמובן, אם יש שורות אפס בתחתית המטריצה, האיברים המתאימים לשורות אלה בעמודה מתחתיו הם אפסים. בכך נימקנו את שתי הקביעות המובלטות.

4 אם $b_i \neq 0$ עבור $i \neq 1$, ואילו $b_1 = 0$, ההוכחה היא אנלוגית.

ב. בהחלט ייתכן כי במטריצת מדרגות יופיעו איברים שונים מאפס באותה העמודה **מעל** איבר פותח. למשל, התבוננו באיבר הנמצא במקום השני בשורה הראשונה במטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ג. אם $i > i'$ אז $a_{ij}$ נמצא בשורה שמתחת לזו של $a_{i'j'}$, ושניהם איברים פותחים, לכן $a_{ij}$ נמצא מימין ל־ $a_{i'j'}$, כלומר $j > j'$.
ולהפך – אם $j > j'$ אז $a_{ij}$ נמצא מימין ל־ $a_{i'j'}$, ולכן הוא נמצא בשורה שמתחת לשורה של $a_{i'j'}$, כלומר $i > i'$.

**תשובה 1.10.2** **השאלה בעמוד 88**

א. מטריצת המקדמים של המערכת

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

היא:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

נדרג אותה:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

המטריצה שקיבלנו היא שקולת־שורה למטריצה המקורית, ומערכת המשוואות המתאימה לה היא:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

נציג אותה כך:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + x_2 \\ x_2 &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

המשתנים הקשורים הם $x_1, x_2$ ואין משתנים חופשיים.
בהצבה לאחור מקבלים $x_1 = \frac{3}{5},\ x_2 = -\frac{2}{5}$. כלומר, הפתרון הוא $\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

למעשה, אפשר היה לקבל מערכת פשוטה יותר, אילו היינו ממשיכים כך:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

הווי אומר - המערכת הנתונה שקולה למערכת:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{5} \\ x_2 &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

למערכת זו פתרון יחיד $\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$, ולכן הזוג הסדור הזה הוא פתרונה היחיד של המערכת הנתונה.

ב. מטריצת המקדמים של המערכת היא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

נבצע עליה פעולות אלמנטריות כדלקמן:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{8}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

המערכת הנתונה שקולה אם כן למערכת

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

או בצורה אחרת:

$$\begin{aligned} x_1 &= -3x_2 - x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

מכאן שאם $x_3 = t$ אז:

$$x_2 = -\frac{1}{2}t$$

$$x_1 = -3(-\frac{1}{2}t) - t = \frac{1}{2}t$$

לכן למערכת הנתונה יש אינסוף פתרונות, ופתרונה הכללי הוא $\left\{\left(\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right) \mid t \text{ ממשי}\right\}$.

אילו היינו ממשיכים בדירוג עוד שלב אחד, היינו מקבלים מערכת פשוטה יותר, כך:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

המערכת הנתונה שקולה אפוא למערכת:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{1}{2}x_3 &= 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

או בצורה אחרת:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

מכאן שאם ניתן ל־ $x_3$ ערך כלשהו (נאמר $x_3 = t$), אז נקבל:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}t \\ x_2 &= -\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

כמו קודם!

ג. נבצע פעולות אלמנטריות על מטריצת המקדמים:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -2 \\ 0 & 13 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{8}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 13 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 13R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{4}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

המטריצה שקיבלנו היא שקולת־שורה למטריצת המקדמים המקורית.

לשון אחר, המערכת המקורית שקולה למערכת:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= -\frac{1}{4} \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3x_2 - x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

בהצבה לאחור מקבלים:

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0 \\ x_1 &= 1 + 3 \cdot 0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

למערכת זו יש פתרון יחיד והוא השלָשה $(0,0,1)$.

ד. נבצע פעולות אלמנטריות על מטריצת המקדמים:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו היא מטריצת המקדמים של מערכת המשוואות:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \frac{5}{3}x_4 & = & \frac{4}{3} \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 0 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 1 \end{array}$$

למשוואה השלישית אין פתרון ולכן אין למערכת פתרון. לפיכך, גם למערכת המקורית אין פתרון.

**תשובה 1.10.3** **השאלה בעמוד 90**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

שימו לב כי בשורה השנייה במקום השני מופיע $-1$, בעוד שכאשר ראינו את המטריצה כמטריצה מעל $\mathbb{Z}_2$, הופיע באותו מקום 1 בשלב זה (הסיבה לכך, כמובן, היא שב־$\mathbb{Z}_2$ מתקיים השוויון $-1 = 1$). אם נמשיך בדירוג המטריצה כרגיל (מעל הממשיים), נגיע למטריצה $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$, מכאן שלמערכת פתרון יחיד: $x = y = 0, z = 1$, כלומר $(0,0,1)$.

**תשובה 1.10.4** **השאלה בעמוד 90**

נדרג את המערכת:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

קיבלנו מטריצת מדרגות. נבצע עוד פעולה אחת שתפשט את המערכת המתאימה עוד יותר:

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

מכאן שהפתרון הכללי למערכת הוא $(1,0,t,t)$. מאחר שהפרמטר יכול לקבל רק את הערכים 1, 0, למערכת יש בדיוק שני פתרונות: $(1,0,1,1)$, $(1,0,0,0)$.

**תשובה 1.11.1** **השאלה בעמוד 91**

א. המטריצה היא מטריצת מדרגות, אולם אין היא מטריצת מדרגות קנונית, שכן בעמודה 3, שבה נמצא האיבר הפותח של השורה השנייה, יש איבר נוסף שונה מאפס ($a_{13} = 1$).

ב. המטריצה היא מטריצת מדרגות, אולם אין היא מטריצת מדרגות קנונית, שכן האיבר הפותח של השורה הראשונה שונה מ־1.

ג. המטריצה אינה מטריצת מדרגות, שכן מתחת לשורת האפסים (השורה השנייה) ישנה שורה שאינה שורת אפסים (השורה השלישית).

ד. המטריצה היא מטריצת מדרגות קנונית.

ה. המטריצה היא מטריצת מדרגות, אך אינה מטריצת מדרגות קנונית, שכן האיבר הפותח של השורה הראשונה שונה מ־1.

ו. המטריצה היא מטריצת מדרגות קנונית.

**תשובה 1.11.2** **השאלה בעמוד 95**

א. $$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{8}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

המערכת המתאימה היא:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad + \frac{5}{2}x_3 &= 2 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

או:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2-\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= -\frac{1}{2}x_3 \end{aligned}$$

ניתן למשתנה החופשי $x_3$ ערך כלשהו $t$ ונרשום את אוסף כל הפתרונות בצורה:

$$P=\left\{\left(2-\frac{5}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right) \mid \text{ממשי } t\right\}$$

ב.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1\to R_1-2R_2 \\ R_3\to R_3+4R_2 \\ R_4\to R_4+3R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

המערכת המתקבלת היא:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$x_3$ הוא, אם כן, משתנה חופשי. נציב $x_3=t$ ונקבל את קבוצת הפתרונות:

$$P=\{(1-t,t) \mid \text{ממשי } t\}$$

ג.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1 \\ R_3\to R_3-3R_1 \\ R_4\to R_4-4R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -8 & 1 \\ 0 & -2 & -9 & -11 & 2 \\ 0 & -8 & -11 & -14 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\to -R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & -9 & -11 & 2 \\ 0 & -8 & -11 & -14 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + 8R_2]{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -12 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -12 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 50 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - 5R_3]{\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 55 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to -\frac{1}{55}R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_4]{\substack{R_1 \to R_1 + 13R_4 \\ R_2 \to R_2 - 10R_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

המערכת המתאימה היא:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{9}{11} \\ x_2 &= -\frac{1}{11} \\ x_3 &= -\frac{1}{11} \\ x_4 &= -\frac{1}{11} \end{aligned}$$

וממילא פתרונה היחיד הוא הרביעייה:

$$\left(\frac{9}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, -\frac{1}{11}\right)$$

ד.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 7 \\ -7 & 1 & -1 & 6 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 7R_1]{R_2 \to R_2 - 5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -17 & 2 \\ 0 & 22 & 6 & 34 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -11 & -3 & -17 & 2 \\ 0 & 22 & 6 & 34 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{11}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 22 & 6 & 34 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 22R_3]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{17}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

המערכת המתקבלת היא:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 &= \frac{17}{11} \\ x_2 + \frac{23}{11}x_3 + \frac{17}{11}x_4 &= -\frac{2}{11} \end{aligned}$$

לכן נוכל לבחור את $x_3$ ו־ $x_4$ ובעזרתם לקבוע את $x_1$ ו־ $x_2$.

נסמן $x_4 = t$ , $x_3 = s$ , ונרשום את הפתרון הכללי בצורה:

$$\left\{\left(\underbrace{\frac{17}{11} - \frac{2}{11}s + \frac{7}{11}t}_{x_1}, \underbrace{-\frac{2}{11} - \frac{3}{11}s - \frac{17}{11}t}_{x_2}, \underbrace{s}_{x_3}, \underbrace{t}_{x_4}\right)\right\}$$

**תשובה 1.11.3** **השאלה בעמוד 96**

המערכת הנתונה:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

סדרה אחת של פעולות:

$$A \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{5}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2-3R_3]{R_1\to R_1-5R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&4&-2&0\\0&1&0&\frac{7}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{bmatrix}$$

סדרה אחרת של פעולות:

$$A\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1&0\\1&-2&-1&2&-1&0\\0&1&3&-1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&-3&1&-1&1&0\\0&1&-2&3&-2&0\\0&1&3&-1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1+3R_2}\begin{bmatrix}1&0&-5&8&-5&0\\0&1&-2&3&-2&0\\0&0&5&-4&3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{5}R_3}\begin{bmatrix}1&0&-5&8&-5&0\\0&1&-2&3&-2&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2\to R_2+2R_3]{R_1\to R_1+5R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&4&-2&0\\0&1&0&\frac{7}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\end{bmatrix}$$

ואנו רואים כי למרות שביצענו על המערכת סדרות שונות של פעולות אלמנטריות, קיבלנו אותה מטריצת מדרגות קנונית בשני המקרים.

**תשובה 1.11.4** **השאלה בעמוד 96**

דירוג שתי המטריצות הראשונות (משמאל לימין) מוביל לאותה צורה קנונית:

$$\begin{bmatrix}0&1&2&0&-1&0\\0&0&0&1&3&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ואילו דירוג המטריצה השלישית מוביל לצורה הקנונית:

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&20\\0&0&1&0&0&-6\\0&0&0&1&0&\frac{5}{2}\\0&0&0&0&1&-\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

ולכן שתי המטריצות הראשונות שקולות זו לזו, אך אינן שקולות לשלישית.

**תשובה 1.12.1** **השאלה בעמוד 100**

א. כל פתרון של המערכת נקבע על־ידי קביעת ערכם של המשתנים החופשיים. כל אחד מאלה יכול לקבל בדיוק $|F|$ ערכים אפשריים.[5] מכאן שאם יש $k$ משתנים חופשיים, מספר האפשרויות ל"בחירת" פתרון למערכת הוא $|F|^k$.

ב. אם המערכת אינה עקבית, מספר הפתרונות הוא 0. אם היא עקבית ואין בה משתנים חופשיים, יש לה פתרון יחיד. אם היא עקבית ובעלת מספר חיובי של משתנים חופשיים $k$, אזי $1 \le k \le 5$. לאור חלק א, מספר הפתרונות למערכת הוא $2^k$. מספר זה יכול לקבל את אחד הערכים $2,4,8,16,32$ (בהתאם לערכו של $k$).

**תשובה 1.12.2** **השאלה בעמוד 101**

ראינו כבר שיש מערכות מעל $\mathbb{R}$ שאין להן פתרון, וכאלה שיש להן פתרון אחד. אם למערכת יותר מפתרון אחד, בהכרח יש בצורה המדורגת המתאימה משתנה חופשי $x_i$. ניתן, למשל, לכל שאר המשתנים החופשיים (אם יש כאלה) את הערך 0, ואז לכל ערך אפשרי של $x_i$ נקבל פתרון שונה למערכת. מכיוון שהמשתנה החופשי שבו אנו מתבוננים יכול לקבל אינסוף ערכים אפשריים (כל ערך אפשרי בשדה), למערכת יש אינסוף פתרונות שונים.

**תשובה 1.12.3** **השאלה בעמוד 101**

א. נדרג את מטריצת המקדמים של המערכת הנתונה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma_2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & \gamma_3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & \gamma_5 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & \gamma_6 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_6 \to R_6 + R_1]{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \gamma_3 - 2\gamma_1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & \gamma_4 - \gamma_1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & \gamma_6 + \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_6 \to R_6 - R_2]{\substack{R_3 \to R_3 - R_2 \\ R_4 \to R_4 + R_2 \\ R_5 \to R_5 - 2R_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \gamma_3 - 2\gamma_1 - \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \gamma_4 - \gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & \gamma_5 - 2\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \gamma_6 + \gamma_1 - \gamma_2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_6 \to R_6 - R_3]{R_5 \to R_5 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \gamma_3 - 2\gamma_1 - \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \gamma_4 - \gamma_1 + \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 - 2\gamma_3 + 4\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_6 - \gamma_3 + 3\gamma_1 \end{bmatrix}$$

כידוע, תנאי הכרחי לקיום פתרון הוא שאין במטריצת המדרגות שקיבלנו שורה מן הטיפוס $(0,0,0,0,0,\beta)$ שבה $\beta \ne 0$. מכאן שהתנאי ההכרחי לקיום פתרון הוא:

---

5 $|F|$ הוא מספר איברי $F$.

$$(*)\qquad \begin{aligned} 3\gamma_1 - \gamma_3 + \gamma_6 &= 0 \\ 4\gamma_1 - 2\gamma_3 + \gamma_5 &= 0 \end{aligned} \quad \text{כלומר} \quad \begin{aligned} \gamma_5 - 2\gamma_3 + 4\gamma_1 &= 0 \\ \gamma_6 - 3\gamma_1 - \gamma_3 &= 0 \end{aligned}$$

נוכיח עתה שהתנאי שקיבלנו הוא גם תנאי מספיק לקיום פתרון.

יהיו $\gamma_1,...,\gamma_6$ מספרים ממשיים המקיימים את התנאי (*). אז על־ידי תהליך הדירוג המתואר לעיל, נביא את מטריצת המקדמים של המערכת לצורה:

$$(**)\qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & \gamma_1+\gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & \gamma_3-2\gamma_1-\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \gamma_4-\gamma_1+\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו היא מטריצת מדרגות (לא קנונית) שאין בה שורה מהטיפוס $(0,...,0,\beta)$ $(\beta \neq 0)$, ולכן, לפי משפט 1.12.1, קיים פתרון למערכת המשוואות המתאימה, ולכן גם למערכת המקורית.

**תשובה 1.12.4** **השאלה בעמוד 101**

א. על־ידי דירוג המטריצה המתאימה מתקבלת מטריצת המדרגות:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

יש שני משתנים קשורים, ומשתנה חופשי אחד (השלישי). לפי משפט 1.12.2ב, יש למערכת אינסוף פתרונות מעל $\mathbb{R}$.

ב. על־ידי דירוג המטריצה המתאימה מתקבלת הצורה הקנונית:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אנו רואים כי המערכת עקבית, וכי יש משתנה חופשי יחיד (השלישי), מכאן שמספר הפתרונות הוא 2, על פי משפט 1.12.2ב.

**תשובה 1.14.1** **השאלה בעמוד 107**

לארבע המערכות הנתונות יש אותה מטריצת מקדמים מצומצמת (מסדר $3 \times 3$). נביא אותה לצורה מדורגת:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{7}R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to -R_3]{R_1\to R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{13}{7}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{7}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\to R_2+\frac{1}{7}R_3]{R_1\to R_1-\frac{13}{7}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

ממשפט 1.14.2, לכל המערכות פתרון יחיד.

**תשובה 1.14.2** **השאלה בעמוד 108**

נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. אם נוסיף לה מימין את העמודה $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$, שצורתה הקנונית היא $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$. מטריצה זו מתאימה למערכת משוואות בת שתי משוואות בנעלם אחד, שלה פתרון יחיד (וודאו!). לעומת זאת, אם נוסיף מימין ל־$A$ את העמודה $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, נקבל את המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, שצורתה הקנונית היא $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. מהשורה השנייה ברור, כי למערכת המתאימה אין פתרון כלל.

**תשובה 1.14.3** **השאלה בעמוד 111**

א. לא ייתכן שלמערכת יש שני פתרונות בדיוק, שכן אם למערכת יש בכלל פתרון ואם נביא את מטריצת המקדמים של המערכת לצורת מדרגות קנונית, נקבל אחת מהאפשרויות הבאות:

1. כל המשתנים במערכת המתקבלת הם משתנים קשורים, ואז יש למערכת פתרון **יחיד**.
2. במערכת המתקבלת יש משתנה **חופשי** אחד לפחות, ואז יש למערכת אינסוף פתרונות (מאחר שמשתנה יכול לקבל אינסוף ערכים שונים - כל ערך שונה עבור משתנה זה מוביל לפתרון שונה למערכת).

ב. ראו תשובה 1.10.4.

**תשובה 1.14.4** **השאלה בעמוד 112**

קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת הנתונה אם ורק אם מטריצת המקדמים המצומצמת שלה

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 1\\ 2 & 3-\lambda\end{bmatrix}\qquad (*)$$

היא שקולת־שורה למטריצה עם שורת אפסים.

נבחין בין שני מקרים:

1. $\lambda=1$, ואז המטריצה המצומצמת היא:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$

והיא שקולת־שורה למטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(בדקו!)

לכן, עבור $\lambda = 1$ יש למערכת פתרון טריוויאלי בלבד.[6]

2. $\lambda \neq 1$:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{1-\lambda} R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\lambda} \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 & 3-\lambda-\frac{2}{1-\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\lambda} \\ & \frac{\lambda^2-4\lambda+1}{1-\lambda} \end{bmatrix} = (*)$$

כעת, $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ כאשר $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$. נפריד לשני מקרים:

א. $\lambda \neq 2 \pm \sqrt{3}$

ונזכור כי $\lambda \neq 1$. אז נוכל להמשיך את תהליך הדירוג כך:

$$(*) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1-\lambda}{\lambda^2-4\lambda+1} R_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1-\lambda} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{1}{1-\lambda} R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ובמקרה זה אין פתרון לא טריוויאלי.

ב. $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$

אז $(*) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{-1 \mp \sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ולכן יש למערכת הנתונה פתרון לא־טריוויאלי.

**מסקנה:**

למערכת הנתונה קיים פתרון לא־טריוויאלי אם ורק אם $\lambda = 2 \pm \sqrt{3}$.

**תשובה 1.14.5** **השאלה בעמוד 112**

דירוג המטריצה המתאימה מוביל למטריצה המדורגת הקנונית:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מכאן נסיק שהפתרון הכללי של המערכת הוא $\left(0, \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t, s, 0, t\right)$.

6 על פי משפט 1.14.3.

**תשובה 1.14.6** **השאלה בעמוד 112**

דירוג המטריצה המתאימה מוביל למטריצה המדורגת הקנונית:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

מכאן נסיק שהפתרון הכללי של המערכת הוא $(-t,0,-t,t,0)$, ולכן למערכת יש בדיוק שני פתרונות: $(1,0,1,1,0)$ , $(0,0,0,0,0)$.

**תשובה 1.14.7** **השאלה בעמוד 112**

כן, את תוצאתה של סדרת פעולות מטיפוס (1)-(3) נוכל להשיג על־ידי סדרת פעולות מטיפוס (2) ו־(3) בלבד. אכן, בכל עת שבה עלינו לבצע את הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$, נוכל להחליף אותה בארבע הפעולות הבאות (ודאו!):

$$R_i \to -R_i$$
$$R_i \to R_i + R_j$$
$$R_j \to R_j - R_i$$
$$R_i \to R_i + R_j$$

**תשובה 1.14.8** **השאלה בעמוד 113**

נחשוב על הצבעים שחור ולבן כאיברים 0 ו־1 של השדה $\mathbb{Z}_2$. הפרופסור הראשון (האחרון בטור) יאמר את הסכום (בשדה $\mathbb{Z}_2$) של כל הכובעים שלפניו (כלומר, את הצבע המתאים לסכום בשדה $\mathbb{Z}_2$ של האיברים המתאימים ב־$\mathbb{Z}_2$). כעת הפרופסור שאחריו יכול לחשב את הסכום של כל אלה שלפניו, להחסיר ממה שאמר הראשון, וכך לדעת מה יש לו על הראש, ואז לומר את הצבע המתאים. באופן דומה, כל אחד מהפרופסורים יכול בתורו לחשב מה יש לו על הראש, על־ידי החסרת מה שאמרו קודמיו.

# פרק 2: המרחב $F^n$

# 2.1 המרחב $F^n$ – מבט אלגברי

בפרק זה נשוב ונעסוק ב־ $n$־יות מעל שדה.

אוסף כל ה־ $n$־יות מעל שדה נתון $F$ מסומן, כזכור, ב־ $F^n$.[1] הקבוצה $F^n$ אינה סתם אוסף של עצמים ( $n$־יות); יש בה מבנה אלגברי, המתבטא באפשרות לחבר כל שני איברים ב־ $F^n$ ולכפול איברים של $F^n$ בסקלרים (על שתי הפעולות האלה למדתם בפרק הקודם). אם $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ הן שתי $n$־יות מעל $F$, אז סכומן, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, מוגדר, וגם הוא $n$־יה מעל $F$. במילים אחרות: אם $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ אז גם $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in F^n$. כמו כן, אם $\mathbf{a} \in F^n$ ו־ $t$ הוא סקלר כלשהו מתוך השדה $F$, אז גם $t\mathbf{a} \in F^n$.

את עצם האפשרות לבצע את פעולות החיבור ואת הכפל בסקלר על איברי $F^n$, ואת העובדה שתוצאות הפעולות האלה הן עצמן איברים ב־ $F^n$, נביע בקצרה כך:

- הקבוצה $F^n$ **סגורה** ביחס לחיבור רכיב־רכיב של איברים ב־ $F^n$ וביחס לכפל רכיב־רכיב של איברי $F^n$ בסקלרים.

למערכת המורכבת מקבוצת ה־ $n$־יות $F^n$, עם פעולות החיבור והכפל בסקלר רכיב־רכיב, נקרא **המרחב הלינארי** $F^n$, או בקצרה – **המרחב** $F^n$.[2]

נמנה כמה תכונות של המרחב $F^n$, שנרבה להשתמש בהן בהמשך. תכונות אלה הוכחו בפרק 1, במסגרת הדיון בתכונות פעולות החיבור והכפל בסקלר של $n$־יות.

**א. תכונות החיבור ב־ $F^n$**

**א. סגירות**: לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$, $\quad \mathbf{a}+\mathbf{b} \in F^n$

**ב. חילופיות**: לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$, $\quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$

**ג. קיבוציות**: לכל $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in F^n$, $\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

**ד. קיום איבר ניטרלי**: קיימת $n$־יה יחידה, שסימונה $\mathbf{0}$, שהיא ניטרלית לגבי החיבור רכיב רכיב:[3] לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $\quad \mathbf{a}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{a} = \mathbf{a}$

**ה. קיום איברים נגדיים**: לכל $\mathbf{a} \in F^n$, קיימת $F^n$־יה יחידה, שסימונה $-\mathbf{a}$, שעבורה:[4] $\quad \mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a})+\mathbf{a} = \mathbf{0}$

**ב. תכונות הכפל בסקלר ב־ $F^n$**

א. לכל $\mathbf{a} \in F^n$ ולכל סקלר $t \in F$, $\quad t\mathbf{a} \in F^n$

ב. לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$ ולכל סקלר $t \in F$, $\quad t(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = t\mathbf{a}+t\mathbf{b}$

1 עבור $n=1$, $F^1$ הוא האוסף של כל ה"אֲחָדוֹת" הסדורות. נזהה יצורים אלה עם איברי השדה $F$ עצמם. לכן במקום $F^1$ נשתמש בסימון $F$.

2 בהמשך הקורס תינתן הגדרה כללית של המושג מרחב לינארי. לכשיעשה הדבר, תמצאו כי $F^n$ הוא אכן מרחב לינארי לפי ההגדרה הכללית.

3 $\mathbf{0} = (0,0,...,0)$.

4 אם $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$, אז $-\mathbf{a} = (-a_1,\dots,-a_n)$.

ג. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, ולכל זוג סקלרים $s,t \in F$, $(s+t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$

ד. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, ולכל זוג סקלרים $s,t \in F$, $(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$

ה. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

כאשר $F$ הוא שדה המספרים הממשיים $(F = \mathbb{R})$ ו־ $n = 2$ או $n = 3$, ניתן לתאר את המרחב $F^n$ במונחים גיאומטריים פשוטים. התיאורים הגיאומטריים של $\mathbb{R}^2$ ושל $\mathbb{R}^3$ יוצגו בסעיף הבא. ההסתכלות הדואלית - אלגברית מול גיאומטרית - על המרחבים הללו, תסייע להמחיש רבים מן המושגים האלגבריים שיוצגו בהמשך הקורס.

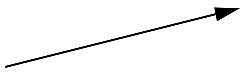
מן הראוי לציין מראש, כי בעוד שבדיון האלגברי אנו מקפידים על הדיוק (מנסחים את כל ההנחות ומוכיחים את כל המסקנות), בדיון הגיאומטרי לא ננהג כך. פיתוח מדויק של יסודות הגיאומטריה הוא נושא לקורס בפני עצמו. מאחר שמטרת הגיאומטריה כאן אינה אלא להמחיש את הדיון האלגברי המופשט, אנו נרשה לעצמנו להסתמך על הידע והאינטואיציה הגיאומטריים שרכשתם בעבר, ולא נתיימר להוכיח במדויק את כל הטענות הגיאומטריות.

# 2.2 המרחבים $\mathbb{R}^2$ ו־$\mathbb{R}^3$ – מבט גיאומטרי

איברי המרחב $\mathbb{R}^2$ הם הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים. **במישור קרטזי**,[1] כל נקודה מאופיינת באמצעות זוג שיעוריה, שהוא זוג מספרים ממשיים (כלומר איבר של $\mathbb{R}^2$), וכל זוג מספרים ממשיים מאפיין נקודה. איברי $\mathbb{R}^2$ ו־$\mathbb{R}^3$ ניתנים לחיבור ולכפל בסקלר, כפי שראינו בסעיף הקודם, אך כעת נפרש אותם כיצורים גיאומטריים הנקראים **וקטורים**, וניתן הגדרה בעלת אופי גיאומטרי לפעולות עליהם.

### א. וקטורים מישוריים

כשנדבר על **וקטור מישורי** נתכוון לְחֵץ במישור, כגון זה באיור שלפניכם.



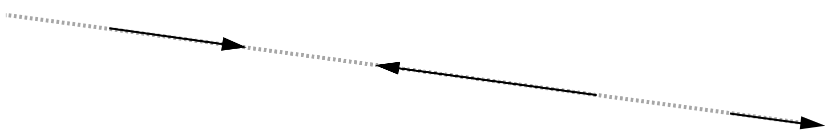
המאפיינים של וקטור הם האורך שלו והכיוון שלו ותו לא. חיצים שווי אורך, המצביעים באותו כיוון, ייחשבו כ**העתקים של אותו וקטור**.

לכל חץ יש ראש ויש גם עָקֵב.

כדי ששני חיצים ייחשבו כמצביעים באותו כיוון (דבר שמשמעותו ברורה באופן אינטואיטיבי, אך עתה נגדירו), צריכים להתקיים שני תנאים:

- התנאי הראשון הוא, שעליהם להיות מונחים על ישר אחד או על ישרים מקבילים.
- **לגבי חיצים שמונחים על ישר אחד**, התנאי הנוסף הוא, שאם נזיז אותם קדימה או אחורה לאורך הישר שעליו הם מונחים, עד שעקביהם יימצאו בנקודה אחת, שניהם יימצאו על אותה קרן של הישר היוצאת מנקודה זו.

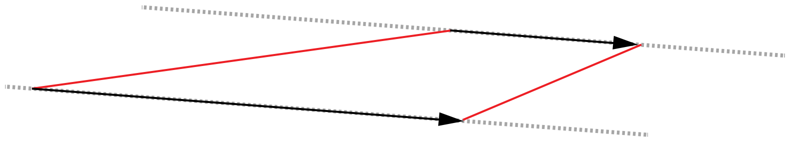
  שלושת החיצים באיור הבא מונחים על ישר אחד. שני הקיצוניים מצביעים על אותו כיוון, אך החץ האמצעי אינו מצביע על אותו כיוון.



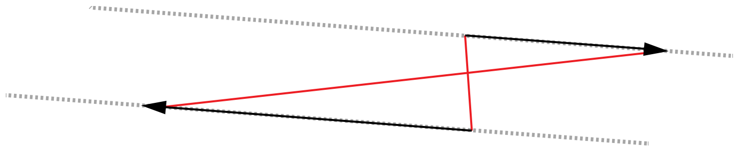
**לגבי חיצים שמונחים על ישרים מקבילים** התנאי הנוסף הוא, שאם נחבר את עקביהם זה לזה ואת ראשיהם זה לזה, נקבל מרובע.

1 מישור קרטזי הוא מישור שבו נקבעה מערכת צירים קרטזית – שני צירי מספרים ניצבים זה לזה, בעלי ראשית משותפת.

למשל, שני החיצים באיור שלפניכם, המונחים על ישרים מקבילים, הם באותו כיוון:



גם החיצים שבאיור הבא מונחים על ישרים מקבילים, אך הם אינם באותו כיוון, שכן הצורה הנוצרת מחיבור עקביהם וראשיהם זה לזה אינה מרובע:

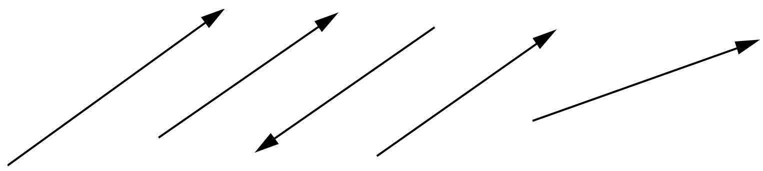


כאשר שני חיצים מונחים על אותו ישר או על ישרים מקבילים, ואינם מצביעים לאותו כיוון, נאמר ש**כיווניהם הפוכים**.

**כאמור, חיצים שווי אורך ושווי כיוון הם העתקים של אותו וקטור.**

**דוגמה**

רק שניים מחמשת החיצים באיור הבא הם העתקים של אותו וקטור (מצאו אותם!). אם כך, באיור מתוארים ארבעה וקטורים שונים. בדקו באילו מן המאפיינים נבדלים ארבעת הוקטורים הללו זה מזה!



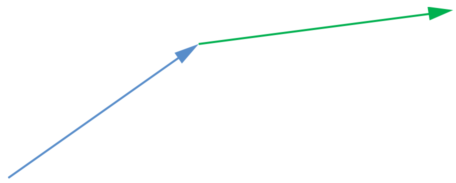
שימו לב, לכל וקטור נתון, כל נקודה במישור היא נקודת המוצא של חץ אחד ויחיד שמתאר אותו.

## ב. חיבור וקטורים

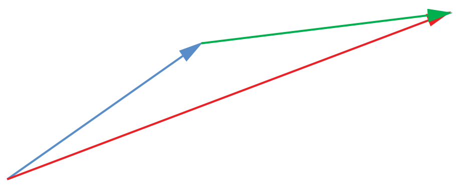
על קבוצת הוקטורים המישוריים נגדיר פעולה, שנקרא לה **חיבור גיאומטרי**, באופן הבא:

נבחר זוג וקטורים, למשל אלה שאותם מייצגים החיצים הכחול והירוק שבאיור הבא.

כדי להוסיף את הוקטור הירוק לכחול, נציב את עקבו של החץ הירוק בראשו של החץ הכחול:

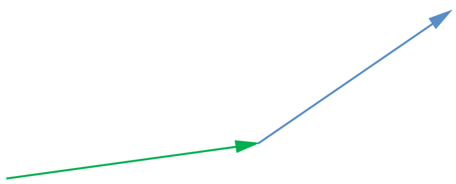


כעת נמתח חץ מן העקב של הכחול לראש של הירוק. זהו החץ האדום באיור הבא:

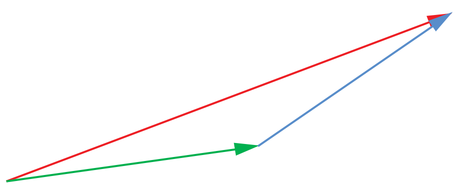


**סכום הוקטורים הוא הוקטור שאותו מייצג החץ האדום.**

כדי להוסיף באותה דרך את הוקטור הכחול לירוק, עלינו להציב את העקב של החץ הכחול בראשו של החץ הירוק,

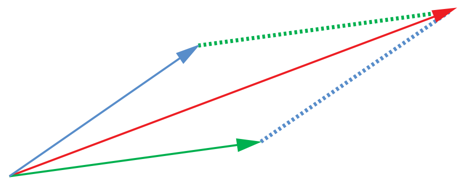


ולמתוח חץ מן העקב של הירוק לראש של הכחול. נקבל את הוקטור האדום שבאיור הבא:



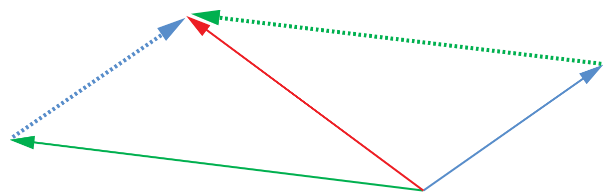
האם שני הוקטורים האדומים שקיבלנו בשני המקרים שווים זה לזה?

כדי להשיב על שאלה זו, נבחר נקודה במישור, ונצייר את ההעתקים של הוקטור הכחול והירוק היוצאים ממנה. האיור הבא ממחיש, שחיבור הירוק לכחול וחיבור הכחול לירוק מניבים אותה תוצאה: את שני הסכומים מתאר אותו חץ אדום – אלכסון המקבילית שצלעותיה הסמוכות הן הוקטורים הכחול והירוק.



הנה דוגמה נוספת, והפעם ייצגנו מראש את הוקטורים הכחול והירוק באמצעות חיצים שיוצאים מנקודה אחת:

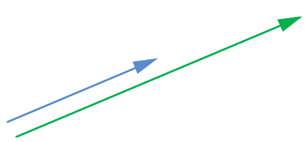
נוסיף לאיור את העתק הוקטור הירוק היוצא מהראש של החץ הכחול, ואת ההעתק של הוקטור הכחול היוצא מהראש של החץ הירוק. מתקבלת מקבילית:



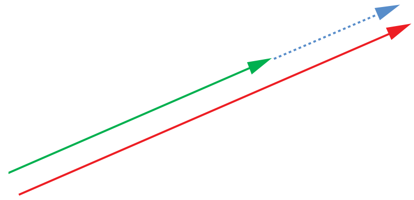
האיור ממחיש שהאלכסון (המסומן באדום) מייצג הן את הוקטור המתקבל על־ידי הוספת הוקטור הירוק לכחול, והן את הוקטור המתקבל על־ידי הוספת הוקטור הכחול לירוק.

בשתי הדוגמאות חיברנו וקטורים, שהחיצים המתארים אותם אינם באותו כיוון ואינם בכיוונים הפוכים. כפי שראינו, סכומם (שהתברר כלא תלוי בסדר המחוברים) הוא האלכסון של המקבילית הבנויה על זוג החיצים הזה. בשל כך נהוג לקרוא לחיבור הגיאומטרי של וקטורים **חיבור לפי כלל המקבילית**.

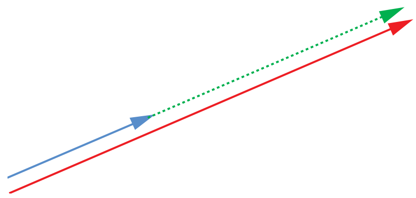
נדגים כעת חיבור של וקטורים שווי כיוון:



כדי להוסיף את הוקטור הכחול לירוק, נצייר את ההעתק שלו, כשעקבו בראש של החץ הירוק. הסכום הוא הוקטור שאותו מייצג החץ האדום.



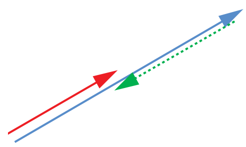
הוספת הוקטור הירוק לכחול מניבה אותה תוצאה:



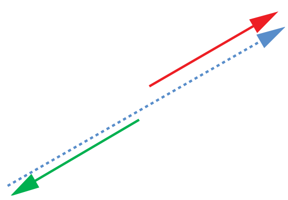
גם כאן, סדר המחוברים אינו משנה.

ומה קורה כאשר המחוברים מצביעים בכיוונים הפוכים?

הוספת הירוק לכחול (הסכום הוא הוקטור שאותו מייצג החץ האדום):

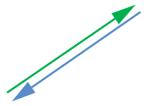


הוספת הכחול לירוק:



אם כן, שינוי סדר המחוברים אינו משנה את התוצאה: בשני המקרים, הסכום הוא וקטור שכיוונו הוא הכיוון של הארוך מבין שני הוקטורים המחוברים, ואורכו הוא הפרש האורכים של וקטורים אלה (הארוך פחות הקצר).

לבסוף נשאל : מה יקרה אם נחבר זה לזה שני וקטורים שווי־אורך, שכיווניהם הפוכים?



במקרה זה נקבל וקטור, שעקבו וראשו הם באותה נקודה. כלומר, וקטור באורך אפס. לוקטור המיוחד הזה נקרא **וקטור האפס**. לְוקטור האפס אין כיוון מסוים. כמו כן, הסכום הגיאומטרי של שני וקטורים, שאחד מהם הוא וקטור האפס, הוא הוקטור האחר.

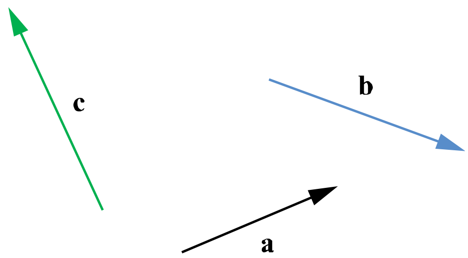
הסכום הגיאומטרי של זוג וקטורים מישוריים **a** ו־ **b** יסומן: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$[2]

כפי שראינו, לכל זוג וקטורים **a**,**b** מתקיים: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$

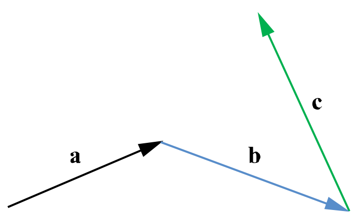
אם כן,

- **חיבור גיאומטרי הוא פעולה חילופית (קומוטטיבית).**

כעת, נסמן ב־ **a**, **b** ו־ **c** את הוקטורים שאותם מייצגים החיצים השחור, הכחול והירוק (בהתאמה), מהאיור שלפניכם.

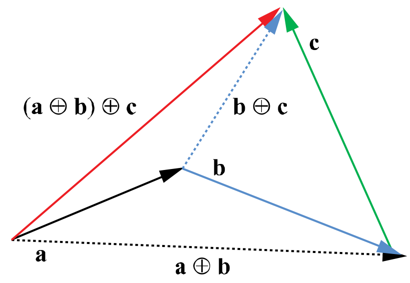



נייצג את **b** באמצעות חץ היוצא מהראש של **a** , ואת **c** באמצעות חץ היוצא מהראש של **b** .




האיור הבא וההסבר שבעקבותיו ממחישים שמתקיים: $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$

2 הערה: הסמל $\oplus$ משמש אותנו באופן זמני בלבד – בהמשך הקורס נסמן חיבור וקטורים באמצעות סמל חיבור רגיל – הצדקה לכך תינתן בהמשך הסעיף.




**הסבר:**

$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ (שחור ועוד כחול) הוא הוקטור שאותו מייצג החץ השחור המקווקו; כשמוסיפים לו את החץ הירוק, המייצג את הוקטור $\mathbf{c}$, מתקבל החץ האדום. הסכום $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c}$ הוא אפוא הוקטור שאותו מייצג החץ האדום.

את $\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}$ (כחול ועוד ירוק) מייצג באיור החץ הכחול המקווקו; כשמוסיפים אותו לחץ השחור, המייצג את הוקטור $\mathbf{a}$, מתקבל הוקטור האדום. אם כן, גם $\mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$ הוא הוקטור שמיוצג על־ידי החץ האדום.

דוגמה אינה הוכחה, אבל ברמת הדיוק של הדיון הנוכחי נסתפק בה כביסוס לקביעה:

- **חיבור גיאומטרי הוא פעולה קיבוצית (אסוציאטיבית).**

מכך שפעולת החיבור הגיאומטרי חילופית וקיבוצית נובע,[3] שכדי לחבר אלה לאלה את הוקטורים מתוך קבוצה סופית נתונה, אפשר לרשום את המחוברים בכל סדר שהוא, ולמקם את הסוגריים בכל דרך שהיא. למשל:

$$\big((\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c}\big) \oplus \mathbf{d} = (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus (\mathbf{c} \oplus \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \oplus \mathbf{c}) \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{d})$$

## ג. וקטורים מרחביים

כשם שחץ במישור מייצג וקטור מישורי, כך חץ במרחב מייצג **וקטור מרחבי**. חיצים במרחב, שהם שווי אורך וכיוון, נחשבים להעתקים של אותו וקטור מרחבי. חיבור גיאומטרי של וקטורים מרחביים אנלוגי לחיבור הגיאומטרי של וקטורים מישוריים: כדי להוסיף וקטור $\mathbf{b}$ לוקטור $\mathbf{a}$, מציירים את ההעתק של $\mathbf{b}$ היוצא מהראש של $\mathbf{a}$. הסכום הוא הוקטור שאותו מייצג החץ היוצא מהעקב של $\mathbf{a}$ ופוגע בראש של $\mathbf{b}$. כמו במישור, חיבור וקטורים מרחביים הוא פעולה חילופית וקיבוצית.

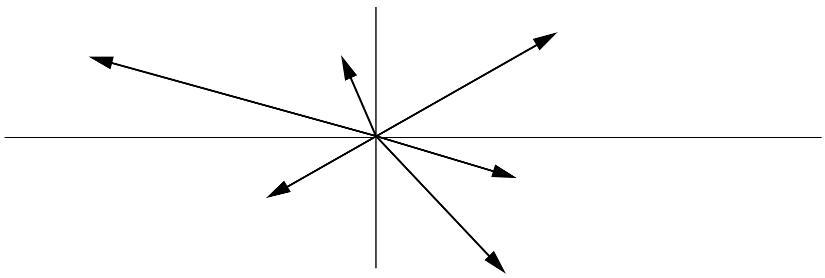
## ד. על הקשר בין המבט האלגברי והמבט הגיאומטרי

נקבע במישור מערכת צירים קרטזית.

ההתאמה, המתאימה לכל זוג מספרים ממשיים $(u_1, u_2)$ את הנקודה במישור שאֵלֶּה שיעוריה, היא התאמה של אחד לאחד בין איברי $\mathbb{R}^2$ לבין נקודות המישור. התאמה חד־חד ערכית כזאת מאפשרת לחשוב על איברים של $\mathbb{R}^2$ כעל נקודות במישור.

3 ראו בפרק 1, בסעיף 1.2 העוסק בתכונות של פעולות על קבוצה.

נסתכל כעת באלומת החיצים היוצאים מהראשית לעבר כל נקודות המישור. האיור שלפניכם ממחיש אחדים מהם.



כל חץ באלומה מתאר וקטור מישורי, ומאחר שלכל וקטור מישורי יש העתק יחיד שעקבו בראשית, הרי שהאלומה מכילה נציג אחד ויחיד של כל וקטור מישורי.

**מעתה ואילך נייצג וקטורים מישוריים באמצעות נציגיהם שיוצאים מהראשית.** כשנדבר על וקטור מישורי, נחשוב אפוא על חץ שיוצא מהראשית.

וקטורים שונים (חיצים שונים שיוצאים מהראשית) פוגעים בנקודות שונות: **לוקטור שפוגע בנקודה $\mathbf{u}$ נקרא הוקטור $\mathbf{u}$**.

בבירור, מתקיימות התכונות הבאות:

- הוקטור $\mathbf{u}$ מונח על הישר העובר דרך הראשית והנקודה $\mathbf{u}$.
- אם הוקטורים $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ מונחים על ישרים שונים (דרך הראשית), אז הם מצביעים לכיוונים שונים.
- אם הוקטורים $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ מונחים על ישר אחד דרך הראשית אז:
- אם הנקודות $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ הן על אותה קרן היוצאת מהראשית של הישר שעליו הם מונחים, אז הוקטורים $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ הם שווי כיוון.
- ואם $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ הן על קרניים נגדיות – הוקטורים $\mathbf{u}$ ו־ $\mathbf{v}$ מצביעים לכיוונים הפוכים.
- הוקטור $\mathbf{0}$ (וקטור האפס) יוצא מהראשית ופוגע בה. האורך של הוקטור המיוחד הזה הוא 0, והוא מונח על כל קרן של כל ישר שעובר דרך הראשית. על וקטור האפס אפשר אפוא לומר שהוא מצביע לכל הכיוונים.[4]

**שאלה 2.2.1**

א. אם הוקטור $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ מונח על ציר ה־ $x$ ומצביע בכיוון החיובי, מה אפשר לומר על המספרים $a_1$ ו־ $a_2$? מהו אורכו של הוקטור $\mathbf{a}$?

ב. נתון: $\mathbf{b} = (0, b_2)$, $b_2 < 0$. מהו הישר שעליו מונח הוקטור $\mathbf{b}$? מה הכיוון של $\mathbf{b}$? מהו אורכו?

ג. נתון כי הוקטור $\mathbf{u}$ מונח על ציר ה־ $x$ ואורכו 5. השלימו: $\mathbf{u} = (\_,\_)$ או $\mathbf{u} = (\_,\_)$.

ד. השלימו את המשפטים הבאים:

4 שימו לב שההתאמה שאנו מבצעים, בין נקודות לוקטורים, תלויה בבחירת הראשית. בחירה זו גלומה בתוך בחירת מערכת הצירים הקרטזית שאותה קבענו בתחילת הדיון.

הוקטור $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ מונח על ציר ה־ $x$ אם ורק אם ... .

הנקודה $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ מונחת על ציר ה־ $y$ אם ורק אם הוקטור $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ מונח ......, כלומר אם ורק אם ___ $= a_1$.

ה. האורך של הוקטור $\mathbf{a} = (a_1, 0)$ הוא ..., והאורך של הוקטור $\mathbf{a} = (0, a_2)$ הוא ... .

ו. נתון שהוקטור $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ אינו מונח על אחד מהצירים. הראו ש $c_1, c_2 \neq 0$. מהו האורך של הוקטור $\mathbf{c}$?

ז. במישור קרטזי, תארו את הוקטורים הבאים:

$$\mathbf{u} = (3,5);\ \mathbf{v} = (-3,5);\ \mathbf{w} = (3,-5);\ \mathbf{x} = (-3,-5)$$

**התשובה בעמוד 203**

ההתאמה בין איברי $\mathbb{R}^2$ לבין אוסף הוקטורים המישוריים, המתאימה לכל $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ את הוקטור $\mathbf{u}$, היא התאמה חד־חד־ערכית; היא מאפשרת לחשוב על איברי $\mathbb{R}^2$ כעל וקטורים במישור קרטזי. כעת נקנה משמעות גיאומטרית לפעולת החיבור, וכן נבחן את הקשר הגיאומטרי שבין $\mathbf{a}$ לבין $t\mathbf{a}$ עבור $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$.

נפתח בחיבור, ונתחיל בשתי טענות עזר.

---

**טענת עזר 1**

יהיו $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. אם הוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ מונחים שניהם על ציר ה־ $x$, או שניהם על ציר ה־ $y$, אז:

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

(הסבר: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ הוא הסכום הגיאומטרי לפי כלל המקבילית של הוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$; $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ הוא הסכום של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ כאיברים של המרחב $\mathbb{R}^2$.)

---

**הוכחה**

נוכיח תחילה את הטענה בהנחה שהוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ מונחים שניהם על ציר ה־ $x$.

משמעות ההנחה היא: $\mathbf{a} = (a, 0)$, $\mathbf{b} = (b, 0)$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$.

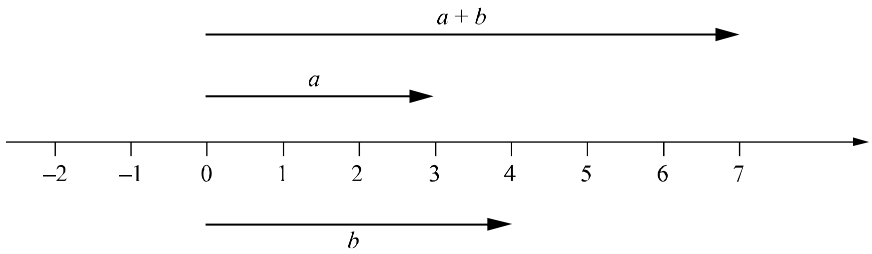
במרחב $\mathbb{R}^2$ מתקיים: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a + b, 0)$

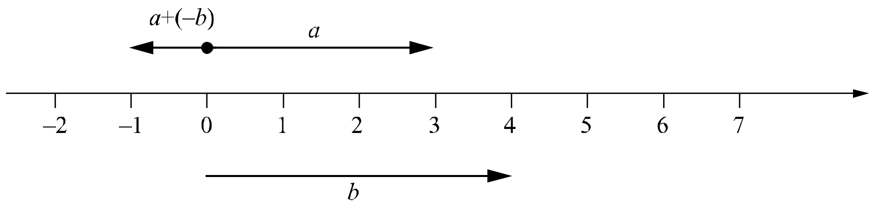
עלינו להראות אפוא שמתקיים: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a + b, 0)$

כלומר, שהסכום הגיאומטרי של הוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$, הוא הוקטור $(a + b, 0)$.

לשם כך נזכיר איך מוצאים בדרך גיאומטרית את הסכום, $a + b$, של זוג מספרים ממשיים $a, b$. על ציר מספרים נתון מציירים את החיצים המובילים מן הראשית לנקודות $a$ ו־ $b$; מזיזים את החץ המוביל ל־ $b$ לאורך הציר, עד שעָקֵבו מגיע ל־ $a$. במצב הזה, הראש של החץ המוזז $b$ הוא בנקודה $a + b$.

האיור הבא ממחיש את החישוב הגיאומטרי של הסכומים $3 + 4 = 7$, ו־ $3 + (-4) = -1$.




הוקטורים המישוריים $\mathbf{a} = (a,0)$ ו־ $\mathbf{b} = (b,0)$ מונחים על ישר אחד (ציר ה־ $x$). מן האופן שבו מחברים גיאומטרית וקטורים מישוריים שמונחים על ישר אחד, נובע שגם הוקטור $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ מונח על ציר ה־ $x$, ובהתחשב באמור לעיל, הוקטור הזה הוא $(a+b,0)$, כפי שרצינו להראות.

ההוכחה בנוגע לחיבור שני וקטורים שמונחים על ציר ה־ $y$ - דומה. **מ.ש.ל.**

---

**טענת עזר 2**

יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. אם הוקטור המישורי $\mathbf{a}$ מונח על ציר ה־ $x$, והוקטור המישורי $\mathbf{b}$ על ציר ה־ $y$, אז:

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

---

**הוכחה**

נניח שהוקטור המישורי $\mathbf{a}$ מונח על ציר ה־ $x$, והוקטור המישורי $\mathbf{b}$ על ציר ה־ $y$.

משמעות ההנחה היא: $\mathbf{a} = (a,0)$, $\mathbf{b} = (0,b)$

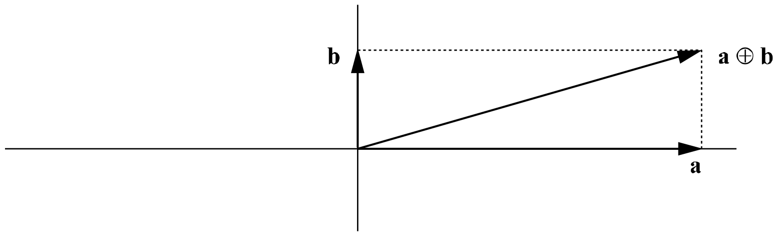
כאשר $a,b \in \mathbb{R}$.

במרחב $\mathbb{R}^2$ מתקיים: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a,b)$

עלינו להראות אפוא שמתקיים: $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a,b)$

כלומר, שהסכום הגיאומטרי של הוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ הוא הוקטור $(a,b)$.

הוקטורים המישוריים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ מונחים על ישרים שונים - ציר ה־ $x$ וציר ה־ $y$. לכן סכומם הוא האלכסון של המקבילית הבנויה עליהם. מאחר שהם ניצבים זה לזה, המקבילית היא מלבן (ראו באיור), והאלכסון שלה פוגע בנקודה $(a,b)$, כפי שרצינו להראות.




**מ.ש.ל.**

כעת נכליל:

---

**טענה 2.2.1**

**לכל** $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$

---

**הוכחה**

יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. נסמן $\quad \mathbf{a} = (a_1,a_2)\ ,\ \mathbf{b} = (b_1,b_2)$

סכומם במרחב $\mathbb{R}^2$ הוא: $\quad \mathbf{a}+\mathbf{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2)$

כעת נמצא את הוקטור $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ (הסכום הגיאומטרי).

נתחיל מכך ש־ $\quad \mathbf{a} = (a_1,0)+(0,a_2)$

הוקטור $(a_1,0)$ מונח על ציר ה־ $x$, והוקטור $(0,a_2)$ על ציר ה־ $y$; לכן, לפי טענת העזר 2,

$$\mathbf{a} = (a_1,0) \oplus (0,a_2)$$

לפי אותו שיקול, $\quad \mathbf{b} = (b_1,0) \oplus (0,b_2)$

לכן: $\quad \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \left[(a_1,0) \oplus (0,a_2)\right] \oplus \left[(b_1,0) \oplus (0,b_2)\right]$

ולאור החילופיות והקיבוציות של החיבור הגיאומטרי,

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \left[(a_1,0) \oplus (b_1,0)\right] \oplus \left[(0,a_2) \oplus (0,b_2)\right] \tag{1}$$

הוקטורים $(a_1,0)$ ו־ $(b_1,0)$ מונחים על ציר ה־ $x$, לכן לפי טענת העזר 1:

$$(a_1,0) \oplus (b_1,0) = (a_1,0)+(b_1,0) = (a_1+b_1,0)$$

ולפי אותו שיקול: $\quad (0,a_2) \oplus (0,b_2) = (0,a_2)+(0,b_2) = (0,a_2+b_2)$

לכן לפי (1): $\quad \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1+b_1,0) \oplus (0,a_2+b_2)$

הוקטור $(a_1+b_1,0)$ מונח על ציר ה־ $x$, והוקטור $(0,a_2+b_2)$ – על ציר ה־ $y$. לכן, מהשוויון האחרון נובע כי:

$$\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1+b_1,0)+(0,a_2+b_2) = \mathbf{a}+\mathbf{b}$$

**מ.ש.ל.**

- שימו לב שטענה 2.2.1 מקנה משמעות גיאומטרית לפעולת החיבור של המרחב $\mathbb{R}^2$, ובה בעת היא מספקת דרך אלגברית למציאת הסכום של וקטורים מישוריים.
- טענה 2.2.1 מייתרת את הצורך להבחין בין פעולת החיבור של המרחב $\mathbb{R}^2$, לבין פעולת החיבור הגיאומטרי של וקטורים מישוריים, ולכן **לא נשוב להשתמש בסימן** $\oplus$ ונסתפק ב־ $+$. לחיבור של המרחב $\mathbb{R}^2$ נקרא **חיבור וקטורי**, ובהקשרים גיאומטריים - חיבור **לפי כלל המקבילית.**

כעת נבחן את המשמעות הגיאומטרית של הכפל בסקלר.

---

**טענה 2.2.2**

יהי $\mathbf{a}$ וקטור ב־ $\mathbb{R}^2$, ויהי $t$ סקלר ממשי.

הקשר הגיאומטרי בין הוקטורים $\mathbf{a}$ ו־ $t\mathbf{a}$ הוא כדלהלן:

א. $t\mathbf{a}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$.

ב. $t\mathbf{a}$ ארוך פי $|t|$ מ־ $\mathbf{a}$.[5]

ג. $t\mathbf{a}$ הוא בכיוון של $\mathbf{a}$ אם $t > 0$, ובכיוון ההפוך ל־ $\mathbf{a}$ אם $t < 0$.

---

**הוכחה**

תחילה נציין, שאם $t = 0$ אז $t\mathbf{a} = \mathbf{0}$. וקטור האפס מונח על כל ישר העובר דרך הראשית, הוא מצביע לכל הכיוונים, ואורכו $0$. עבור $t = 0$ טענה 2.2.2 מתקיימת אפוא באופן טריוויאלי.

בהמשך ההוכחה נניח כי $t \neq 0$.

נבחין בין שתי אפשרויות:

**אפשרות אחת:** $\mathbf{a}$ מונח על ציר ה־ $x$ או על ציר ה־ $y$, כלומר $\mathbf{a} = (a,0)$ או $\mathbf{a} = (0,a)$.

א. $t\mathbf{a} = (ta,0)$ או $t\mathbf{a} = (0,ta)$. בשני המקרים $t\mathbf{a}$ מונח על הציר שעליו מונח $\mathbf{a}$.

ב. האורך של $\mathbf{a}$ הוא $|a|$, והאורך של $t\mathbf{a}$ הוא $|ta| = |t|\,|a|$. לכן $t\mathbf{a}$ ארוך פי $|t|$ מ־ $\mathbf{a}$.

ג. אם $t > 0$, הסימן של $ta$ הוא הסימן של $a$, ואם $t < 0$, הסימן של $ta$ הפוך לסימן של $a$. לכן אם $t > 0$, $t\mathbf{a}$ הוא בכיוון של $\mathbf{a}$, ואם $t < 0$, $t\mathbf{a}$ הוא בכיוון ההפוך.

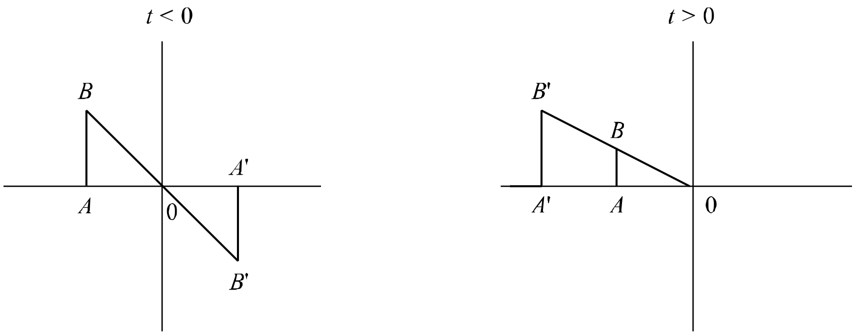
**האפשרות האחרת:** $\mathbf{a}$ אינו מונח על אחד הצירים, כלומר: $\mathbf{a} = (a_1,a_2),\ a_1,a_2 \neq 0$

$\mathbf{a} = (a_1,0) + (0,a_2)$, לכן: $t\mathbf{a} = (ta_1,0) + (0,ta_2)$

נתבונן במשולש ישר הזווית שקדקודיו בנקודות $O = (0,0), A = (a_1,0), B = (0,a_2)$. אורכי הניצבים שלו הם $|a_1|$ ו־$|a_2|$. באופן דומה, אורכי הניצבים של המשולש ישר הזווית שקדקודיו בנקודות $O = (0,0), A' = (ta_1,0), B' = (0,ta_2)$ הם $|ta_1|$ ו־$|ta_2|$. מאחר שכל אחד מהם ארוך פי $|t|$ מן הניצב המתאים במשולש הקודם, הרי שהמשולשים $OAB, OA'B'$ דומים. האיורים הבאים מתארים את המשולשים (שימו לב להבדל בתיאור במקרה שבו $t > 0$ ובמקרה שבו $t < 0$).

---

5 אם $|t| < 1$, פירוש הדבר ש־ $t\mathbf{a}$ **קצר מ־** $\mathbf{a}$. למשל, אם $t = \frac{1}{2}$, אזי $t\mathbf{a}$ קצר פי שניים מ־ $\mathbf{a}$.




מכיוון שהמשולשים דומים, הזוויות המתאימות $\sphericalangle AOB, \sphericalangle A'OB'$ הן שוות, ומכאן ש־ $t\mathbf{a}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$.

**מ.ש.ל.**

בקיצור מסבר אוזן נאמר כך:

- $t\mathbf{a}$ מתקבל מ־ $\mathbf{a}$ על־ידי מתיחה או כיווץ של $\mathbf{a}$ פי $|t|$ לאורך הישר שעליו הוא מונח, תוך שמירה על הכיוון אם $t>0$, והיפוך הכיוון אם $t<0$.
- בקשר **לאורך** של $t\mathbf{a}$ ראוי לציין:

  אם $|t|>0$ אז $t\mathbf{a}$ ארוך מ־ $\mathbf{a}$.[6]

  אם $|t|<0$ אז, כפי שכבר ציינו, $t\mathbf{a}$ קצר מ־ $\mathbf{a}$.[7]

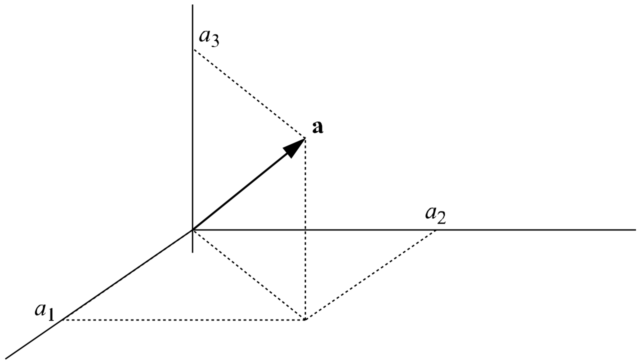
  אם $|t|=1$, הוקטורים $\mathbf{a}$ ו־ $t\mathbf{a}$ הם שווי אורך: $|t|=1$ אם ורק אם $t=1$ או $t=-1$. $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ ו־ $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$. השוויון האחרון משקף את העובדה שהוקטור הנגדי לוקטור נתון $\mathbf{a}$ הוא הוקטור המונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$, שאורכו הוא האורך של $\mathbf{a}$ וכיוונו הפוך.

למרחב הלינארי $\mathbb{R}^3$ יש ייצוג גיאומטרי אנלוגי:

נקבע במרחב מערכת צירים קרטזית (שלושה צירי מספרים ניצבים זה לזה ובעלי ראשית משותפת). במרחב הקרטזי שקבענו, כל נקודה $\mathbf{a}$ מאופיינת באמצעות שְלֺשֶת שיעוריה, שהיא השְלֺשָה $(a_1,a_2,a_3)$ של מספרים ממשיים (כלומר איבר של $\mathbb{R}^3$). אלומת החיצים המובילים מהראשית לכל נקודות המרחב מכילה נציג אחד של כל וקטור מרחבי. בכפוף להסכמה שוקטורים מיוצגים תמיד באמצעות נציגיהם היוצאים מהראשית, אפשר לזהות כל נקודה $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$ עם הוקטור המרחבי שפוגע בה. לוקטור הזה נקרא **הוקטור** $\mathbf{a}$.

6 למשל, לכל $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, כל אחד משני הוקטורים $2\mathbf{a}$ ו־ $-2\mathbf{a}$ כפול באורכו מן הוקטור $\mathbf{a}$. ההבדל בין שני אלה הוא בכיוון: $2\mathbf{a}$ הוא בכיוון של $\mathbf{a}$, ואילו $-2\mathbf{a}$ הוא בכיוון ההפוך.

7 למשל, לכל $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, האורך של כל אחד משני הוקטורים $\frac{1}{3}\mathbf{a}$ ו־ $-\frac{1}{3}\mathbf{a}$ הוא שליש האורך של $\mathbf{a}$. ההבדל ביניהם הוא בכיוון: $\frac{1}{3}\mathbf{a}$ הוא בכיוון של $\mathbf{a}$, ואילו $-\frac{1}{3}\mathbf{a}$ הוא בכיוון ההפוך.




בדרך דומה לזו שבה פעלנו במישור, אפשר להראות שפעולת החיבור במרחב $\mathbb{R}^3$ (החיבור רכיב־רכיב) מתאימה לכל זוג איברים של $\mathbb{R}^3$ את הסכום הגיאומטרי שלהם כוקטורים מרחביים. כמו כן, לכל $t > 0$, $t\mathbf{a}$ הוא הוקטור המתקבל על־ידי מתיחה/כיווץ פי $|t|$ של הוקטור $\mathbf{a}$ לאורך הישר שעליו הוא מונח, ולכל $t < 0$, $t\mathbf{a}$ הוא הוקטור המתקבל על־ידי מתיחה/כיווץ פי $|t|$ של הוקטור הנגדי, $-\mathbf{a}$.[8] מאחר שהנימוקים אנלוגיים לנימוקים שניתנו לגבי וקטורים מישוריים, לא נפרט אותם.

על זוגות ושלשות של מספרים ממשיים נחשוב, מעתה ואילך, בעת ובעונה אחת הן כעל יצורים אלגבריים (איברים של המרחבים $\mathbb{R}^2$ ו־$\mathbb{R}^3$) והן כעל יצורים גיאומטריים (נקודות או וקטורים גיאומטריים). בדרך כלל נקרא להם **נקודות,** או **וקטורים,** ולעיתים - כדי להבחין בין $\mathbb{R}^2$ ל־$\mathbb{R}^3$ - וקטורים **דו־ממדיים** או וקטורים **תלת־ממדיים** מעל $\mathbb{R}$.

**שאלה 2.2.2**

בפרק 1 למדתם את הגדרת ההפרש בין $n$־יות. בפרט, עבור וקטורים ב־$\mathbb{R}^2$, ההפרש $(x_1, y_1) - (x_2, y_2)$ הוגדר להיות הוקטור $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$. מהי המשמעות הגיאומטרית של הפרש זה? כלומר, איזה וקטור במישור מייצג ההפרש?

**התשובה בעמוד 203**

8 אם $t = 0$, $t\mathbf{a}$ הוא וקטור האפס.

# 2.3 הצגות פרמטריות במרחבים $\mathbb{R}^2$ ו־ $\mathbb{R}^3$

ישר ומישור הם יצירים גיאומטריים. אוסף הפתרונות של משוואה לינארית (או מערכת משוואות לינאריות) בשניים או בשלושה משתנים מעל $\mathbb{R}^3$ הם יצירים אלגבריים (תת־קבוצות של המרחבים $\mathbb{R}^2$ ו־ $\mathbb{R}^3$, בהתאמה). בסעיף זה נייצג ישרים (במישור ובמרחב) ומישורים (במרחב) בדרך אלגברית, ונמחיש את אוספי הפתרונות של משוואות לינאריות (בשני משתנים או בשלושה) בדרך גיאומטרית.

## א. הצגות פרמטריות של ישרים במישור ובמרחב

יהי $\ell$ ישר שעובר דרך הראשית במישור או במרחב קרטזי, ותהי $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ נקודה על $\ell$, שאותה נראה גם כוקטור. מבחינה גיאומטרית אפשר לאפיין את $\ell$ כישר (היחיד) העובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{a}$ (זהו הישר שעליו מונח הוקטור $\mathbf{a}$).

כעת נאפיין את $\ell$ בדרך אלגברית.

לכל $t \in \mathbb{R}$, הוקטור $t\mathbf{a}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$. כמו כן, לכל נקודה $\mathbf{b}$ על $t\mathbf{a}$ יש $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$: ה־ $t$ המתאים ל־ $\mathbf{b}$ הוא חיובי אם $\mathbf{b}$ בכיוון של $\mathbf{a}$, ושלילי אם $\mathbf{b}$ בכיוון ההפוך ל $\mathbf{a}$.[1]

הערך המוחלט של $t$ הוא המספר הממשי המבטא את היחס שבין האורך של $\mathbf{b}$ לאורך של $\mathbf{a}$.

אם כן,

$\mathbf{b}$ נמצאת על הישר $\ell$ אם ורק אם קיים $t$, $t \in \mathbb{R}$, כך שמתקיים: $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$

הווי אומר:

---

**טענה 2.3.1 הצגה פרמטרית של ישר שעובר דרך הראשית**

אם $\ell$ ישר העובר דרך הראשית במישור או במרחב קרטזי, ו־ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ היא נקודה עליו, אז:

$$\ell = \{t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ההצגה של $\ell$ בדרך זו מכונה **הצגה פרמטרית של** $\ell$,[2] ואומרים ש־ $\ell$ הוא **הישר שנקבע על־ידי** $\mathbf{a}$.

---

**הערות**

א. את האוסף $\{t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$ נהוג לסמן בקצרה $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

ב. לכל $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ במישור או במרחב, האוסף $\mathbb{R}\mathbf{c} = \{t\mathbf{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$ הוא ישר, שהרי $\mathbb{R}\mathbf{c}$ הוא הישר העובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{c}$.

ג. לישר $\ell$ העובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{a}$, יש הצגות פרמטריות שונות, כי לכל נקודה $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ שנמצאת על $\ell$ מתקיים $\ell = \{t\mathbf{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

---

1 ה־ $t$ המתאים לוקטור האפס הוא $t = 0$ $(0\mathbf{a} = \mathbf{0})$.

2 הפרמטר הוא $t$. כאשר $t$ "עובר" על כל המספרים הממשיים, הנקודה $t\mathbf{a}$ "עוברת" דרך כל נקודות הישר. את המושג פרמטר פגשנו כבר בסעיף 1.4 אחרי הגדרה 1.4.2, ראו שם.

**שאלה 2.3.1**

יהי $\ell$ הישר במישור שנקבע על־ידי $(1,5)$,[3] ותהי **a** נקודה על $\ell$, ששיעור ה־ $x$ שלה הוא $-7$. מהו שיעור ה־ $y$ של **a**?

**התשובה בעמוד 204**

**שאלה 2.3.2**

יהי $\ell$ ישר שעובר דרך הראשית במישור קרטזי, ותהיינה $(a,3a)$ ו־ $(7,b)$ נקודות על $\ell$. נתון כי $a \neq 0$. מצאו את $b$.

**התשובה בעמוד 204**

**שאלה 2.3.3**

בכל אחד מסעיפי השאלה נתונות שתי נקודות **a** ו־ **b** ב־ $\mathbb{R}^3$.

בכל סעיף תנו הצגה פרמטרית של הישר שנקבע על־ידי **a**, וקבעו אם גם **b** נמצאת עליו.

א. $\mathbf{b} = (2,4,6) \quad \mathbf{a} = (2,1,3)$

ב. $\mathbf{b} = (1,2,3) \quad \mathbf{a} = (1,2,3)$

ג. $b = \left(2a_1, \frac{2}{3}a_2, 2a_3\right) \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$

**התשובה בעמוד 204**

**שאלה 2.3.4**

יהיו $\alpha > 0$ ו־ $\beta > 0$ מספרים ממשיים. נתון שהנקודה $\mathbf{b} = (\alpha,\beta,\alpha)$ נמצאת על הישר ב־ $\mathbb{R}^3$ שנקבע על־ידי הוקטור $\mathbf{a} = (\alpha^2, \beta^2, \beta)$. חשבו את $\alpha$ ואת $\beta$.

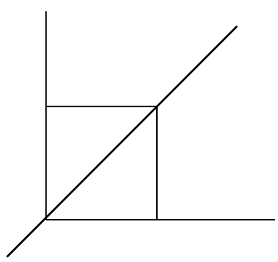
**התשובה בעמוד 205**

**שאלה 2.3.5**

א. רשמו הצגות פרמטריות של ציר ה־ $x$, של ציר ה־ $y$ ושל ציר ה־ $z$ במרחב $\mathbb{R}^3$.

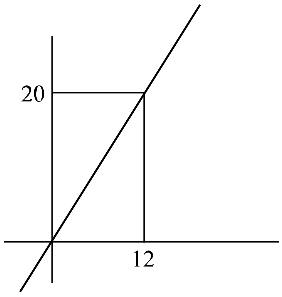
ב. נתון ריבוע ששתיים מצלעותיו מונחות על שני הצירים במישור.

רשמו הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הראשית שעליו מונח אלכסון הריבוע.



3 זהו הישר שעובר דרך הראשית והנקודה $(1,5)$.

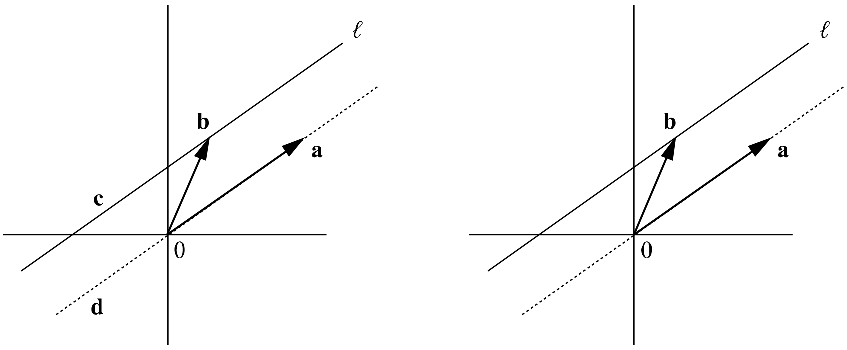
ג. רשמו הצגה פרמטרית של הישר המתואר באיור, וקבעו אם הנקודה $(144,260)$ נמצאת עליו.




**תשובה בעמוד 205**

נעבור לישרים שאינם עוברים דרך הראשית, ונתאר גם אותם בדרך אלגברית.

יהי $\ell$ ישר כלשהו (במישור או במרחב).
נבחר נקודה $\mathbf{b}$ על $\ell$, וּוֶקטור כלשהו $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ שמקביל לישר $\ell$. (ראו בחלק הימני של האיור; בחלק השמאלי שלו ניעזר מייד.)




תהי $\mathbf{c}$ נקודה כלשהי על $\ell$. נתבונן בוקטור היוצא מראשו של $\mathbf{b}$ ומסתיים בנקודה $\mathbf{c}$. לפי שאלה 2.2.2, וקטור זה שווה ל־ $\mathbf{c}-\mathbf{b}$. מכיוון שהוקטור מקביל לישר שנקבע על־ידי $\mathbf{a}$, קיים סקלר $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\mathbf{c}-\mathbf{b}=t\mathbf{a}$, ולכן

$$\mathbf{c}=t\mathbf{a}+\mathbf{b}$$

ראינו, אם כן, שכל נקודה $\mathbf{c}$ על הישר $\ell$ היא מהצורה $\mathbf{c}=t\mathbf{a}+\mathbf{b}$.
בכיוון ההפוך – יהי עתה $t \in \mathbb{R}$ מספר ממשי כלשהו, ונתבונן בנקודה $\mathbf{c}=t\mathbf{a}+\mathbf{b}$. הנקודה $\mathbf{d}=t\mathbf{a}$ היא על הישר שנקבע על־ידי $\mathbf{a}$, המקביל ל־ $\ell$. לכן, לפי כלל המקבילית, $\mathbf{c}$ היא על $\ell$.[4]
אם כן, $\mathbf{c}$ נמצאת על הישר $\ell$ אם ורק אם קיים $t$ ממשי שעבורו מתקיים: $\mathbf{c}=t\mathbf{a}+\mathbf{b}$

4 הסבירו לעצמכם כיצד נובעת מסקנה זו מכלל המקבילית.

**טענה 2.3.2 הצגה פרמטרית של ישר כללי**

א. יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ב־ $\mathbb{R}^2$ או ב־ $\mathbb{R}^3$, כאשר $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ו־ $\mathbf{b}$ אינו מונח על הישר העובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{a}$.
אזי האוסף $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$, שאותו נהוג לסמן בקיצור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, הוא ישר.
זהו הישר שמקביל לוקטור $\mathbf{a}$ ועובר דרך הנקודה $\mathbf{b}$.

ב. לכל ישר $\ell$ (במישור או במרחב), יש וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, שעבורם $\ell = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
(לשון אחר, לכל ישר $\ell$ יש **הצגה פרמטרית** מהצורה $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$.)

**הוכחה**

א. חלק זה של הטענה הוא תוצאת הדיון שקדם לטענה.

ב. אם $\ell$ ישר שעובר דרך הראשית, נבחר נקודה $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ על $\ell$, ונבחר $\mathbf{b} = \mathbf{0}$:

$$\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbb{R}\mathbf{a} = \ell$$

אם $\ell$ ישר שאינו עובר דרך הראשית, נבחר וקטור $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ שמקביל ל־ $\ell$, ונקודה $\mathbf{b}$ על $\ell$. אז $\mathbf{b}$ אינה על הישר שעובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{a}$, וכפי שראינו, $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$ היא הצגה פרמטרית של $\ell$.

**מ.ש.ל.**

דרך שתי נקודות שונות נתונות עובר ישר אחד ויחיד. נמצא לו הצגה פרמטרית.

**טענה 2.3.3 הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך שתי נקודות**

תהיינה $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$ נקודות שונות כלשהן, במישור או במרחב. הישר העובר דרכן הוא:

$$\{t(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

זהו הישר $\ell = \mathbb{R}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d}$.

**הוכחה**

יהי $\ell$ הישר שעובר דרך הנקודות $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$. הוקטור $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ היוצא מראשו של $\mathbf{d}$ אל הראש של $\mathbf{c}$ מקביל ל־ $\ell$, ו־ $\ell$ עובר דרך $\mathbf{d}$. לכן הטענה נובעת ישירות מטענה 2.3.2.

**מ.ש.ל.**

בתיאור "הישר העובר דרך הנקודות $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$", ה"מעמד" של $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הוא סימטרי; לא כן בהצגה הפרמטרית שלו $\{t(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$. על הפגם האסתטי הזה קל להתגבר, כך:

לכל $t \in \mathbb{R}$,
$$t(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} = t\mathbf{c} - t\mathbf{d} + \mathbf{d} = t\mathbf{c} + (1-t)\mathbf{d}$$

לכן:
$$\{t(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t\mathbf{c} + (1-t)\mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t\mathbf{c} + s\mathbf{d} \mid t,s \in \mathbb{R}, t+s=1\}$$

ההצגה
$$\{t\mathbf{c} + s\mathbf{d} \mid t,s \in \mathbb{R},\ t+s=1\}$$

היא הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודות $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$, שבה המעמד של $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הוא סימטרי לגמרי.

**שאלה 2.3.6**

בדקו אם הנקודה $(5,2)$ נמצאת על הישר העובר דרך הנקודות $(1,1)$ ו־ $(-1,4)$.

**התשובה בעמוד 206**

**שאלה 2.3.7**

נתונות ארבע נקודות ב־ $\mathbb{R}^3$:

$$c_1 = (0,0,0)$$

$$c_2 = (1,1,1)$$

$$c_3 = (2,1,0)$$

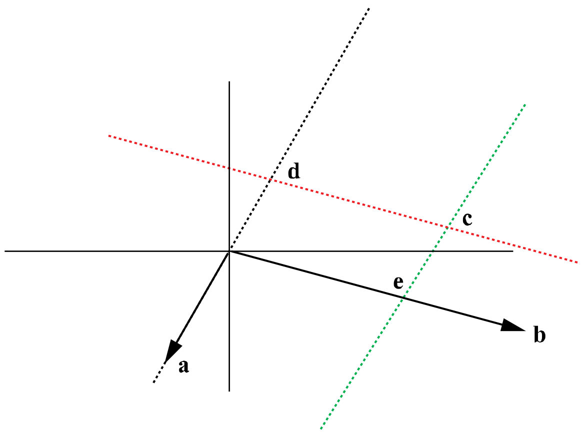
$$c_4 = (0,1,2)$$

בדקו אם הישר העובר דרך $c_1$ ו־ $c_2$ והישר העובר דרך $c_3$ ו־ $c_4$ חותכים זה את זה.[5] אם כן - מצאו את שיעוריה של נקודת החיתוך.

**התשובה בעמוד 207**

## ב. הצגה פרמטרית של המישור באמצעות שני וקטורים במישור

יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ שני וקטורים שמונחים על ישרים שונים. בבירור $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ וגם $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (כי וקטור האפס מונח על כל ישר העובר דרך הראשית). תהי $\mathbf{c}$ נקודה במישור, שאינה על הישרים האלה. דרך $\mathbf{c}$ נעביר מקבילים לוקטורים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ (ראו באיור).




בדיון שלהלן נסתמך על הסימונים שבאיור.

$\mathbf{d}$ היא נקודה על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$, לכן יש $s \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\quad \mathbf{d} = s\mathbf{a}$

$\mathbf{e}$ היא על הישר שעליו מונח $\mathbf{b}$, לכן יש $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\quad \mathbf{e} = t\mathbf{b}$

לפי כלל המקבילית, $\quad \mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{e}$

לכן: $\quad \mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

5 שימו לב: ישרים נחתכים בנקודה אם ורק אם אותה נקודה נמצאת על שניהם.

בכיוון ההפוך - ברור שכל נקודה מהצורה $\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ שייכת ל־ $\mathbb{R}^2$. הוכחנו, אם כן, שתחת ההנחות שלעיל על $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, מתקיים:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$$

תוצאה זו מובילה אותנו להגדרה הבאה ולטענה שאחריה:

---

**הגדרה 2.3.4 צירוף לינארי**

סכום מהטיפוס

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

מכונה **צירוף לינארי של הוקטורים** $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$. הסקלרים $s$ ו־ $t$ נקראים **מקדמי הצירוף**.

---

**טענה 2.3.5**

יהיו $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ וקטורים שמונחים על ישרים שונים.

אזי אוסף כל הצירופים הלינאריים של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$,

$$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

שאותו אפשר לסמן בקיצור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$, הוא הצגה פרמטרית של המישור.

---

**הוכחה**

בדיון שקדם להגדרה 2.3.4 הראינו, שכל וקטור $\mathbf{c}$ שאינו מונח על הישרים שעליהם מונחים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$, ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$. נותר להוכיח שגם וקטורים שמונחים על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$, או על הישר שעליו מונח $\mathbf{b}$, ניתנים להצגה כצירופים לינאריים של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$:

אם $\mathbf{c}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$, אז יש סקלר $s$, כך ש־

$$\mathbf{c} = s\mathbf{a} = s\mathbf{a} + 0\mathbf{b}$$

כלומר, $\mathbf{a}$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$, שבו המקדם של $\mathbf{b}$ הוא $0$.

באופן דומה, אם $\mathbf{c}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{b}$, אז יש סקלר $t$ כך ש־

$$\mathbf{c} = t\mathbf{b} = 0\mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

כלומר, $\mathbf{c}$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$, שבו המקדם של $\mathbf{a}$ הוא $0$.

הראינו, אם כן, ש־ $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$. ההכלה ההפוכה מובנת מאליה, ולכן הוכחנו את השוויון

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$$

כדרוש.

**מ.ש.ל.**

## ג. הצגה פרמטרית של מישורים במרחב

יהיו $\ell$ ו־ $k$ ישרים שונים שעוברים דרך הראשית של מרחב קרטזי. שני הישרים הללו קובעים מישור יחיד.

נבחר וקטור $\mathbf{a}$ שמונח על $\ell$, ווקטור $\mathbf{b}$ שמונח על $k$. אלה הם שני וקטורים שונים במישור שנקבע על־ידי $\ell$ ו־ $k$, ולכן, כמו בסעיף הקודם, אפשר להראות שהמישור הזה הוא האוסף

$$\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$$

- כמובן, לכל $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ שאינם מונחים על ישר אחד, האוסף $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$ הוא מישור שעובר דרך הראשית. המישור הזה נקרא **המישור הנפרש על־ידי** $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$. על הוקטורים $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ אומרים שהם **פורשים את המישור** $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$.

יתר על כן, כל מישור שעובר דרך הראשית ניתן להצגה פרמטרית כ־ $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$. כדי לקבל הצגה כזאת למישור נתון, נבחר שני וקטורים במישור הזה, שאינם מונחים על ישר אחד. המישור הנתון הוא המישור הנפרש על־ידי הוקטורים שבחרנו.

אפשר להראות שלכל $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, האוסף

$$\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

הוא מישור מקביל למישור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$. למרות שבהוכחה אין קושי עקרוני, נוותר על הפרטים.

הנקודה $\mathbf{c}$ נמצאת במישור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$, כי:

$$\mathbf{c} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

מן האמור לעיל נובע:

כל מישור במרחב, בין אם הוא עובר דרך הראשית, בין אם לאו, ניתן להצגה פרמטרית כ־ $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$. כדי לקבל הצגה כזאת למישור נתון $L$, נציג תחילה את המישור המקביל לו, העובר דרך הראשית, כ־ $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$, ואחר כך נבחר נקודה $\mathbf{c}$ במישור $L$. בבירור,

$$L = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

ומכאן:

---

**טענה 2.3.6**

א. יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ב־ $\mathbb{R}^3$, וקטורים שאינם מונחים על ישר אחד, ותהי $\mathbf{c}$ נקודה ב־ $\mathbb{R}^3$. אזי $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ הוא מישור מקביל למישור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$, כלומר זהו המישור שמקביל למישור שנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ ועובר דרך $\mathbf{c}$.

ב. לכל מישור $L$ במרחב, יש וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, כאשר $\mathbf{a},\mathbf{b}$ אינם מונחים על ישר אחד, שעבורם:

$$L = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$$

(לשון אחר, לכל מישור $L$ יש **הצגה פרמטרית** מהצורה $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b} + \mathbf{c}$.)

---

כידוע, שלוש נקודות במרחב שאינן קוויות (כלומר, שאינן מונחות על ישר אחד), קובעות מישור; נמצא לו הצגה פרמטרית.

---

**טענה 2.3.7 הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידי שלוש נקודות לא קוויות**

תהיינה $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ נקודות לא קוויות. המישור $L$, הנקבע על־ידי שלוש הנקודות האלה, הוא:

$$L = \mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbb{R}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

---

**הוכחה**

אסטרטגיית ההוכחה תהיה כזאת:

נוכיח תחילה שהוקטורים $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ אינם מונחים על ישר אחד.

מכך נסיק שהאוסף $\mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbb{R}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}$ הוא מישור.

נראה שהנקודות $\mathbf{a,b,c}$ נמצאות במישור הזה. ואז, מאחר ש־$\mathbf{a,b,c}$ קובעות מישור יחיד, והוא $L$, נסיק ש־
$$L = \mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbb{R}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}$$
כעת נשלים את הפרטים.

א. נוכיח שהוקטורים $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ ו־$\mathbf{b}-\mathbf{c}$ אינם מונחים על ישר אחד.
נניח בשלילה שהם מונחים על ישר אחד.
על פי טענה 2.3.1, הישר שעליו מונח הוקטור $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ הוא $\mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c})$
לפי הנחת השלילה, הוקטור $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ מונח עליו, ולכן יש $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\mathbf{b}-\mathbf{c} = t(\mathbf{a}-\mathbf{c})$
כלומר: $\mathbf{b} = t(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}$
$\{t(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \mid t \in \mathbb{R}\}$ הוא הישר העובר דרך $\mathbf{a}$ ו־$\mathbf{c}$ (טענה 2.3.3). השוויון הקודם מלמד אפוא שהנקודה $\mathbf{b}$ נמצאת עליו, ומכאן שהנקודות $\mathbf{a,b,c}$ הן קוויות, בסתירה לנתון.
לכן הוקטורים $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ ו־$\mathbf{b}-\mathbf{c}$ אינם מונחים על ישר אחד.

ב. נותר להראות שהנקודות $\mathbf{a,b,c}$ נמצאות במישור
$$\mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + \mathbb{R}(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = \{s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$
אכן,
$\mathbf{a}$ היא הנקודה באוסף, המתאימה ל־ $s=1,\ t=0$: $1(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + 0(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = \mathbf{a}$
$(\mathbf{a}-\mathbf{c})$ היא הנקודה באוסף, המתאימה ל־ $s=0,\ t=1$: $0(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + 1(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = \mathbf{b}$
$\mathbf{a}$ היא הנקודה באוסף, המתאימה ל־ $s=0,\ t=0$: $0(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + 0(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = \mathbf{c}$

**מ.ש.ל.**

בתיאור "המישור שנקבע על־ידי הנקודות (הלא־קוויות) $\mathbf{a,b,c}$", המעמד של שלוש הנקודות הוא סימטרי. לא כן בהצגה הפרמטרית שלו $\{s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$. על הפגם האסתטי הזה קל להתגבר; הנה הצגה פרמטרית של המישור הזה, שבה המעמד של שלוש הנקודות הוא סימטרי:
$$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + r\mathbf{c} \mid s,t,r \in \mathbb{R},\ r+s+t=1\}$$

**שאלה 2.3.8**

הוכיחו:
$$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + r\mathbf{c} \mid s,t,r \in \mathbb{R},\ r+s+t=1\} = \{s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$$

**התשובה בעמוד 207**

**שאלה 2.3.9**

מצאו הצגה פרמטרית של המישור ב־$\mathbb{R}^3$ שנקבע על־ידי הנקודות: $(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$.
האם הראשית נמצאת בו?

**התשובה בעמוד 207**

## ד. מערכות לינאריות מעל $\mathbb{R}$ – מבט גיאומטרי

### מערכות בשני משתנים

נבחן את האופי הגיאומטרי של אוסף הפתרונות של משוואה לינארית בשני משתנים מעל $\mathbb{R}$.
המשוואה הכללית היא: $\{t\mathbf{a} + s\mathbf{b} + r\mathbf{c} \mid t,s,r \in \mathbb{R},\ t+s+r=1\}$

נניח שלפחות אחד מבין $a_1, a_2$ שונה מ־ 0.

אם $a_1 \neq 0$, המשוואה שקולה למשוואה מהטיפוס $x + by = c$

ומאחר ש־ $x + by = c \Leftrightarrow x = c - by$

הפתרון הכללי הוא: $\{(c - bt\ ,\ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

מאחר שלכל $t \in \mathbb{R}$, $(c - bt, t) = (c - bt, 0 + t) = (c, 0) + t(-b, 1)$

הפתרון הכללי ניתן להצגה כ־ $\mathbb{R}(-b, 1) + (c, 0)$

קבוצת הפתרונות היא, אם כן, ישר.

באופן דומה, אם $a_2 \neq 0$, המשוואה שקולה למשוואה מהטיפוס $ax + y = c$

ומאחר ש־ $ax + y = c \Leftrightarrow y = c - ax$

הפתרון הכללי הוא: $\{(t, c - at) \mid t \in \mathbb{R}\}$

ומאחר שלכל $t \in \mathbb{R}$, $(t, c - at) = (0 + t, c - at) = (0, c) + t(1, -a)$

הפתרון הכללי ניתן להצגה כ־ $\mathbb{R}(1, -a) + (0, c)$

אם כן,

כאשר לפחות אחד ממקדמי המשתנים של משוואה לינארית בשני משתנים שונה מ־ 0, הפתרון הכללי שלה הוא אוסף מהטיפוס $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$

עם $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. לפי טענה 2.3.2, כל אוסף כזה הוא ישר במישור.

מכאן קל להסיק:

---

**טענה 2.3.8**

תהי $a_1 x + a_2 y = a_3$ משוואה לינארית בשני משתנים מעל $\mathbb{R}$.

אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית, אז אוסף הפתרונות שלה הוא ישר במישור. ישר זה נקרא **הישר המתאים למשוואה**.

---

**הוכחה**

אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית, אז בהכרח לפחות אחד מבין $a_1, a_2$ שונה מ־ 0, כי אם $a_1 = a_2 = 0$ אז: או שהמשוואה בלתי עקבית (אם $a_3 \neq 0$), או שהיא טריוויאלית (אם $a_3 = 0$).

בדיון שלפני הטענה הוכחנו, שכאשר לפחות אחד מבין $a_1, a_2$ שונה מ־ 0, קבוצת הפתרונות של המשוואה היא ישר.

**מ.ש.ל.**

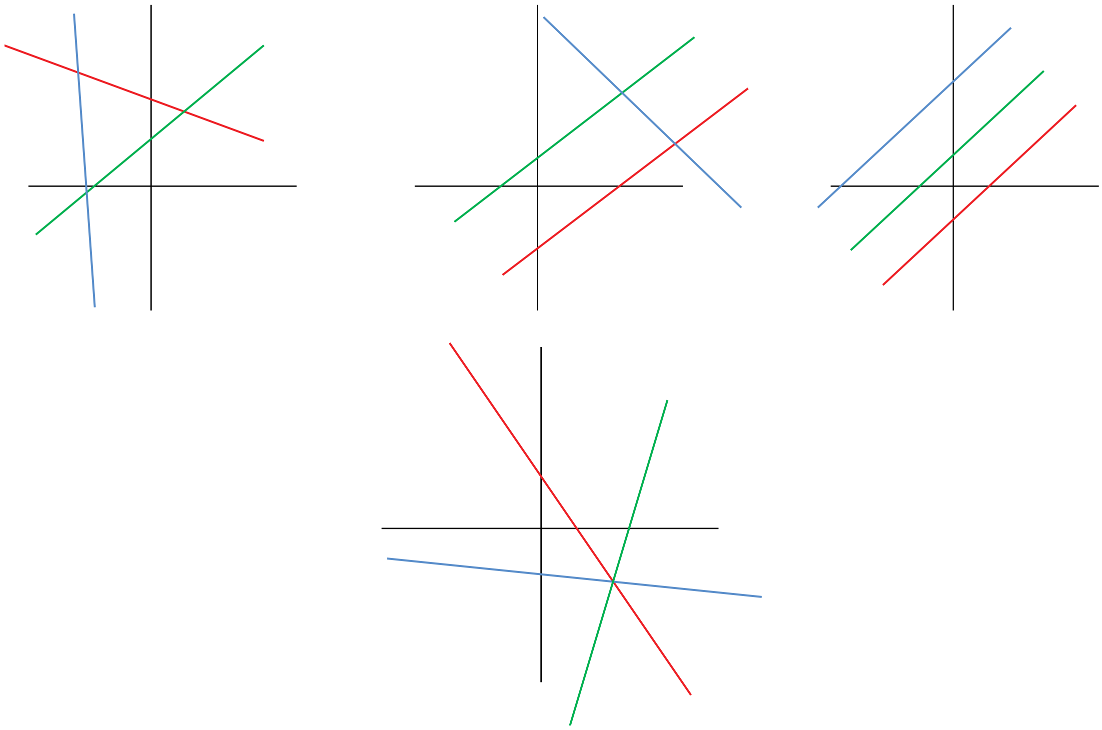
קבוצת הפתרונות של **מערכת** לינארית בשני משתנים, שבה אין משוואות בלתי עקביות, היא החיתוך של קבוצות הפתרונות של המשוואות הלא־טריוויאליות הכלולות בה.[6] זהו אוסף הנקודות המשותפות לישרי המשוואות הלא־טריוויאליות. מספר הישרים שבחיתוכם מדובר הוא כמספר המשוואות מסוג זה, שאינן שקולות.[7]

ומהו אוסף הנקודות המשותפות של קבוצה בת $m \geq 1$ ישרים?

6 משוואה טריוויאלית אינה משפיעה על קבוצת הפתרונות של המערכת, שכן כל נקודה במישור היא פתרון שלה.

7 הישרים המתאימים למשוואות שקולות מתלכדים.

אם $m = 1$, האוסף הוא הישר האחד שבקבוצה;
אם $m \geq 2$, אז או שכל הישרים נחתכים בנקודה אחת, וזו הנקודה המשותפת היחידה, או שאין נקודות משותפות לכולם. האיור הבא ממחיש את המצבים ההדדיים האפשריים של שלושה ישרים (רק באחד מהם יש נקודה משותפת לכולם).



והמסקנה:

**טענה 2.3.9**
אוסף הפתרונות של מערכת לינארית בשני משתנים הוא אחד מאלה:

א. **אוסף ריק** (אין נקודות משותפות לכל הישרים המתאימים למשוואות במערכת).
ב. **נקודה** בודדת (הישרים המתאימים למשוואות הלא־טריוויאליות נחתכים בנקודה אחת; אם המערכת הומוגנית, הנקודה הזאת היא הראשית).
ג. **ישר** (הישרים המתאימים למשוואות הלא־טריוויאליות מתלכדים).
ד. **המישור** כולו (המערכת טריוויאלית).

דֵירוג מטריצת המקדמים של מערכת בשני משתנים, מוביל למערכת שקולה, שבה קל לבחור את המתאימה מבין האפשרויות שנמנו בטענה 2.3.9. נסביר:

במטריצת המדרגות המתקבלת מהדירוג של מטריצת המקדמים, שהיא מטריצה בת 3 עמודות,[8] כל שורות האפס הן בתחתית. אם יש בה שורה שהאיבר הפותח שלה הוא בעמודת המקדמים החופשיים,

8 שתי עמודות לשני המשתנים, והעמודה השלישית – למקדמים החופשיים.

המערכת בלתי עקבית, ואוסף הפתרונות הוא ריק. אחרת - המערכת עקבית, ובשורות שאינן שורות אפס (אם יש כאלה) האיבר הפותח הוא מקדם של משתנה. במערכת יש רק שני משתנים, ואיברים פותחים של שורות שונות הם בעמודות שונות, לכן מספר השורות שאינן שורות אפס אינו עולה על 2. פירוש הדבר הוא, שמספר המשוואות הלא טריוויאליות במערכת המדורגת אינו עולה על 2. לפיכך:

אם במערכת המדורגת אין משוואות לא־טריוויאליות - אוסף הפתרונות הוא **המישור** כולו.
אם במערכת המדורגת יש משוואה לא־טריוויאלית אחת - אוסף הפתרונות הוא **הישר** המתאים למשוואה הזאת.

אם במערכת המדורגת יש שתי משוואות לא־טריוויאליות - הישרים המתאימים לשתי המשוואות נחתכים (כי המערכת עקבית), ומאחר שלשני ישרים הנחתכים יש נקודה משותפת אחת, אוסף הפתרונות מכיל **נקודה** בודדת.

שימו לב למשמעות הגיאומטרית של תהליך הדירוג: הוא מאפשר לעבור מקבוצה בת מספר כלשהו של ישרים, לקבוצה בת שני ישרים או פחות, בלי לשנות את הנקודות המשותפות לכל הישרים המקוריים.

### מערכות בשלושה משתנים

המשוואה הלינארית הכללית בשלושה משתנים היא: $a_1x + a_2y + a_3z = a_4$
נבחן את המבנה הגיאומטרי של קבוצת הפתרונות שלה.

---

**טענה 2.3.10**

תהי $a_1x + a_2y + a_3z = a_4$ משוואה לינארית בשלושה משתנים מעל $\mathbb{R}$. אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית אז אוסף הפתרונות שלה הוא מישור במרחב. מישור זה נקרא **המישור המתאים למשוואה**.

---

**הוכחה**

ראשית, אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית, אז לפחות אחד מבין $a_1, a_2, a_3$ שונה מ־ $0$. (הסבירו לעצמכם מדוע.)

בנוסף נזכיר, שלכל זוג וקטורים $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, שאינם מונחים על ישר אחד, ולכל $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ האוסף $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbf{w}$ הוא מישור במרחב.

נסתפק בהוכחת הטענה בהנחה ש־ $a_3 \neq 0$.

במקרה זה, המשוואה שקולה למשוואה מהטיפוס $ax + by + z = d$

ומאחר ש־ $ax + by + z = d \Leftrightarrow z = d - ax - by$

הפתרון הכללי של המשוואה, שבו שני פרמטרים הוא: $\{(s,t,d-as-bt) \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

לכל $s,t \in \mathbb{R}$, $(s,t,d-as-bt) = s(1,0,-a) + t(0,1,-b) + (0,0,d)$

לכן הפתרון הכללי ניתן להצגה כ־ $\mathbb{R}(1,0,-a) + \mathbb{R}(0,1,-b) + (0,0,d)$

נסמן $\mathbf{u} = (1,0,-a),\ \mathbf{v} = \mathbb{R}(0,1,-b),\ \mathbf{w} = (0,0,d)$

והפתרון הכללי יקבל את הצורה: $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbf{w}$

הוקטור $\mathbf{v}$ אינו על הישר שעליו מונח הוקטור $\mathbf{u}$, שכן אין סקלר $r$ כך ש־ $(1,0,-a) = r(0,1,-b)$, ולכן האוסף $\mathbb{R}\mathbf{u} + \mathbb{R}\mathbf{v} + \mathbf{w}$ הוא מישור במרחב.

**מ.ש.ל.**

קבוצת הפתרונות של **מערכת** לינארית בשלושה משתנים, שכל משוואה בה היא עקבית, היא אפוא אוסף הנקודות המשותפות למישורים המתאימים למשוואות הלא־טריוויאליות הכלולות בה.[9] מספר המישורים שבחיתוכם מדובר הוא כמספר המשוואות מסוג זה, שאינן שקולות.

ומהו אוסף הנקודות המשותפות לקבוצה בת $m \geq 1$ מישורים?

אם $m = 1$, האוסף הוא המישור האחד שבקבוצה;
אם $m \geq 2$, אז או שכל המישורים נחתכים בישר אחד (למשל, מישורים שונים שעוברים דרך ציר ה־$x$), או שהם נחתכים במישור אחד (כאשר כל המישורים המתאימים למשוואות זהים), או שחיתוכם ריק (למשל, מישורים מקבילים, או מישורים שכל שניים מהם נחתכים בישר, וישרי החיתוך אינם נחתכים), או שחיתוך כל המישורים הוא נקודה בודדת (למשל, כאשר המישורים הם מישור $x$-$y$, מישור $x$-$z$ ומישור $y$-$z$).

בהתאם לכך נטען:

**טענה 2.3.11**
אוסף הפתרונות של מערכת לינארית בשלושה משתנים הוא אחד מאלה:
**אוסף ריק**, או **נקודה** בודדת, או **ישר**, או **מישור** במרחב, או **המרחב** כולו.

דירוג מטריצת המקדמים של מערכת בשלושה משתנים, מוביל למערכת שקולה, שבה קל לבחור את המתאימה מבין האפשרויות שנמנו בטענה. נסביר:

במטריצת המדרגות השקולה, שהיא מטריצה בת $4$ עמודות,[10] כל שורות האפס הן בתחתית. אם יש בה שורה שהאיבר הפותח שלה הוא בעמודת המקדמים החופשיים, המערכת בלתי עקבית, ואוסף הפתרונות ריק. אחרת – המערכת עקבית, ובשורות שאינן שורות אפס (אם יש כאלה) האיבר הפותח הוא מקדם של משתנה. במערכת יש רק שלושה משתנים, ואיברים פותחים של שורות שונות הם בעמודות שונות, לכן מספר השורות שאינן שורות אפס אינו עולה על $3$. לפיכך:

אם במטריצת המדרגות השקולה, מספר השורות שאינן שורות אפס הוא $0$ – המערכת טריוויאלית, ואוסף הפתרונות הוא **המרחב** כולו.

אם במטריצת המדרגות השקולה, מספר השורות שאינן שורות אפס הוא $1$ – אוסף הפתרונות הוא **המישור** המתאים למשוואה המתאימה.

9 משוואה טריוויאלית אינה משפיעה על קבוצת הפתרונות של המערכת, שכן כל נקודה במרחב היא פתרון שלה.
10 שלוש עמודות לשלושת המשתנים, והעמודה הרביעית – למקדמים החופשיים.

אם במטריצת המדרגות השקולה, מספר השורות שאינן שורות אפס הוא 2 - המישורים המתאימים לשתי המשוואות המתאימות נחתכים (כי המערכת עקבית), ומאחר שלשני מישורים שנחתכים יש ישר משותף, אוסף הפתרונות הוא **ישר**.

אם במטריצת המדרגות השקולה, מספר השורות שאינן שורות אפס הוא 3 - נמחק ממנה את שורות האפס (אם יש), ונבחן את המטריצה המצומצמת של המערכת המדורגת המורכבת משלוש המשוואות הראשונות.

צורתה היא
$$\begin{bmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

עם $a,b,c \neq 0$. כל מטריצה כזאת שקולה למטריצת היחידה. לכן המערכת המדורגת שקולה למערכת מהטיפוס

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & d \\ & y & & = & e \\ & & z & = & f \end{array}$$

ולה פתרון יחיד (המישורים המתאימים לשלוש המשוואות נחתכים בנקודה אחת).

**שאלה 2.3.10**

בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה מערכת לינארית בשלושה משתנים מעל הממשיים. פתרו את המערכת, ותארו את קבוצת הפתרונות באופן גיאומטרי.

א.
$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \end{array}$$

ב.
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

ג.
$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \end{array}$$

ד.
$$\begin{array}{rcrcrcl} 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \end{array}$$

**התשובה בעמוד 208**

בשלב זה בוודאי הבחנתם בדמיון שבין המצב בשני משתנים ובשלושה. בשני המקרים, קבוצת הפתרונות היא בעלת אופי שאותו נכנה (באופן בלתי פורמלי בשלב זה) לינארי (="ישר") - היא כוללת נקודות, ישרים, מישורים, או מרחבים שלמים, אך אף פעם לא קבוצות כגון עיגול, אליפסה או פרבולה. תוכלו אף לתהות - מה קורה עבור מערכות משוואות בארבעה משתנים או יותר? כיצד "נראית" קבוצת הפתרונות של מערכת לינארית במרחב הארבעה־ממדי? האם גם היא בעלת אופי "לינארי"?

שאלה מעניינת אחרת היא מה בדבר מערכות לינאריות מעל שדות אחרים (למשל, שדות סופיים) – האם גם למערכות כאלה קבוצות הפתרון הן בעלות אופי גיאומטרי?

את התשובות לשאלות הכלליות האלה נקבל בהמשך הקורס. צעדים ראשונים לקראת ביסוס התיאור של מרחבים לינאריים כלליים ייעשו בסעיף הבא, העוסק במרחב $F^n$.

# 2.4 המרחב $F^n$

עד כה התמקדנו במרחב $F^n$ עבור $n = 2$ ועבור $n = 3$, כאשר $F$ הוא שדה המספרים הממשיים. למרות שאין בידינו תיאור גיאומטרי למרחב $F^n$ באופן כללי, נשתמש גם ב־ $F^n$, באנלוגיה למקרים שכבר בחנו, בשמות הלקוחים מן הגיאומטריה:

- את איברי $F^n$ נכנה **נקודות** או **וקטורים**. את $\mathbf{0} = (0,0,\dots,0) \in F^n$ נכנה הראשית.
- לאוסף כל הכפולות בסקלר של וקטור נתון $\mathbf{a} \in F^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, נקרא **ישר** ב־ $F^n$, או בקיצור, **ישר**, ועל וקטור $\mathbf{b}$ נאמר שהוא **מונח על** (או **נמצא על**) ישר זה אם ורק אם קיים סקלר $t$ המקיים $\mathbf{b} = t\mathbf{a}$.[1] אם נקודה $\mathbf{b}$ אינה נמצאת על הישר $\{t\mathbf{a} | t \in F\}$, נאמר ש־ $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ אינן מונחות על ישר אחד העובר דרך הראשית.
- באופן דומה, אם $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ הם שני וקטורים ב־ $F^n$ שאינם על ישר אחד העובר דרך הראשית, אז לאוסף כל הצירופים הליניאריים $\{t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 | t_1, t_2 \in F\}$ נקרא **המישור הנפרש על־ידי** $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$. שלוש הנקודות - הראשית, $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ - נמצאות על המישור הזה, שכן שלוש נקודות אלה הן צירופים ליניאריים של $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{a}_1 = 1 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_2 = 0 \cdot \mathbf{a}_2 + 1 \cdot \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}_2 + 1 \cdot \mathbf{a}_1$$

נאמר גם שהמישור הזה **עובר** דרך הנקודות הללו.

**שאלה 2.4.1**

האם הנקודה $(-3,-4,1,-4)$ (ב־ $\mathbb{R}^4$) נמצאת על המישור הנפרש על־ידי $(1,2,3,4)$ ו־ $(2,3,1,4)$?

**התשובה בעמוד 208**

**שאלה 2.4.2**

יהיו $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ שני וקטורים ב־ $F^n$ שאינם נמצאים על ישר אחד העובר דרך הראשית.

הראו שהישר העובר דרך $\mathbf{a}$ והראשית, $\{t\mathbf{a} \mid t \in F\}$, מוכל במישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$.

**התשובה בעמוד 208**

**שאלה 2.4.3**

יהיו $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ שני הוקטורים ב־ $\mathbb{R}^5$ הנתונים על־ידי:

$$\mathbf{a} = (1,0,0,0,0)$$

$$\mathbf{b} = (0,1,0,0,0)$$

א. הוכיחו כי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$ אינם על ישר אחד העובר דרך הראשית.

1 שימו לב: הראשית והנקודה $\mathbf{a}$ נמצאות, אם כן, על הישר $\{t\mathbf{a} \mid t \in F\}$.

ב. נסחו תנאי הכרחי ומספיק לכך שהנקודה $(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)\in\mathbb{R}^5$ תימצא על המישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$.

ג. האם $\mathbf{0}$ נמצאת על המישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$?

**התשובה בעמוד 209**

**שאלה 2.4.4**

יהיו $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(4,3,2,2,0,0)$ וקטורים ב־ $\mathbb{R}^6$.

א. הראו כי $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ אינם על ישר אחד העובר דרך הראשית ב־ $\mathbb{R}^6$.

ב. האם הישר $\{t(5,4,3,3,1,1)\mid t\in\mathbb{R}\}$ מוכל במישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$?

**התשובה בעמוד 209**

בכל הדוגמאות שראינו עד כה בפרק זה, עסקנו במרחבים לינאריים מעל הממשיים. השאלה הבאה מדגימה את הדברים מעל השדה $\mathbb{Z}_2$:

**שאלה 2.4.5**

יהיו $\mathbf{a}_1=(1,1,1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,1,1,1,0,0)$ וקטורים ב־ $\mathbb{Z}_2^6$.

א. הראו כי $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ אינם על ישר אחד העובר דרך הראשית ב־ $\mathbb{Z}_2^6$.

ב. האם הישר $\{t(1,0,0,0,1,1)\mid t\in\mathbb{Z}_2\}$ מוכל במישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$?

**התשובה בעמוד 210**

# 2.5 צירופים לינאריים

בסעיפים הקודמים קראנו לסכומים מהטיפוס $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2$, כאשר $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2 \in F^n$ וקטורים ו־ $s_1,s_2$ סקלרים כלשהם, **צירופים לינאריים של** $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ (הגדרה 2.3.4). כעת נרחיב את ההגדרה – סכומים מהטיפוס $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3$, כאשר $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3 \in F^n$ ו־ $s_1,s_2,s_3$ סקלרים כלשהם, ייקראו **צירופים לינאריים של שלושת הוקטורים** $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$, ובאופן כללי:

---

**הגדרה 2.5.1 צירוף לינארי כללי**

יהיו $F$ שדה, $k$ מספר טבעי, ו־ $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־ $F^n$. סכום מהטיפוס

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k \qquad (*)$$

שבו $s_1,\dots,s_k$ הם סקלרים כלשהם, נקרא **צירוף לינארי** של הוקטורים $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$. הסקלרים $s_1,\dots,s_k$ נקראים **מקדמי הצירוף**.

---

בהמשך נקצר לעיתים, ובמקום **צירוף לינארי** נאמר פשוט **צירוף**.

**הערה לגבי סימון**

כבר פגשתם את סימן הסכימה $\Sigma$.[1] סימן זה משמש לציון סכום של כמה איברים. הביטוי $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, למשל, מציין את סכום הביטויים מהצורה $\frac{1}{i}$, כאשר $i$ מקבל את כל הערכים האפשריים בין 1 ל־ $n$. כלומר, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$. ניתן להשתמש בשיטת סימון זו גם עבור איברים של שדה כללי, ולא רק עבור מספרים טבעיים. אם $a_1,\dots,a_n$ היא סדרה של איברים בשדה מסוים, אזי הביטוי $\sum_{i=1}^{n}a_i$ מבטא את הסכום (בשדה הנתון!) $a_1+\dots+a_n$. שימו לב, הסמל בעזרתו אנו "רצים" על פני האיברים השונים (המכונה בשם **אינדקס**) אינו חייב להיקרא $i$, ואין הכרח שיתחיל ב־ 1 או להסתיים ב־ $n$. הביטוי $\sum_{j=2}^{9}a_j$, למשל, מבטא את הסכום $a_2+a_3+\dots+a_9$, והוא שווה לערכו של הביטוי $\sum_{i=2}^{9}a_i$. ניתן גם לכתוב סכומים מסובכים יותר, כגון סכומים "כפולים", שבהם המחוברים עצמם הם ביטויי סכום; דוגמאות לכך תראו בהמשך.

השימוש בסימן הסכימה נוח במיוחד לתיאור צירופים לינאריים. בהגדרה 2.5.1, נוכל לכתוב את הצירוף הלינארי $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_k\mathbf{a}_k$ בקצרה כך: $\sum_{j=1}^{k}s_j\mathbf{a}_j$. השימוש בביטויים מסוג זה מבלבל

---

1 ראו בכרך ההכנה.

בהתחלה, אך הופך לנוח ביותר לאחר שמתרגלים לסימון. בהמשך הפרק נשתדל לכתוב צירופים לינאריים באופן מפורש, אך לעיתים נשרבב את הסימון המקוצר כדי להרגילכם אליו.

**הערות בנוגע להגדרה 2.5.1**

א. כל צירוף לינארי של $k$ וקטורים ב־ $F^n$ הוא כמובן וקטור ב־ $F^n$.

ב. חלק ממקדמי הצירוף $s_1,\dots,s_k$ (ואף כולם), יכולים להיות $0$.

ג. כאשר $k=1$, הסכום (*) הוא כפולה של $\mathbf{a}_1$ בסקלר. מכאן שכל הצירופים הלינאריים של וקטור נתון $\mathbf{a}_1 \in F^n$ הם כל הכפולות בסקלר של אותו וקטור.

על פי האמור בסעיף הקודם, משמעות הקביעה האחרונה היא: אוסף כל הצירופים הלינאריים של וקטור $\mathbf{a} \neq 0$ ב־ $F^n$ הוא הישר העובר דרך הראשית והנקודה $\mathbf{a}$. אוסף כל הצירופים הלינאריים של שני וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b} \in F^n$, שאינם על ישר אחד העובר דרך הראשית, הוא המישור העובר דרך $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$. למישור זה קראנו בשם המישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$.

**שאלה 2.5.1**

עבור $\mathbf{a}_3=(1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(3,2,-1,0)$, $\mathbf{a}_1=\left(0,-1,\frac{1}{2},2\right)$ ב־ $\mathbb{R}^4$, מצאו את הצירופים הלינאריים האלה:

א. $\sum_{i=1}^{3}\mathbf{a}_i$

ב. $2\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$

ג. $0\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+0\cdot\mathbf{a}_3$

ד. $\mathbf{a}_1-2\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$

**התשובה בעמוד 211**

את המושג צירוף לינארי הכרתם כבר בפרק 1. בשאלה 1.5.7 ראינו כי אם נתונה מערכת הומוגנית ב־ $n$ משתנים ונתונות שתי $n$־יות $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הפותרות את המערכת, אז כל צירוף לינארי של $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ אף הוא פתרון של אותה מערכת. טענה זו ניתנת להכללה:

---

**משפט 2.5.2**

אם $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ $(k\geq 1)$ הם פתרונות של מערכת הומוגנית, אז כל צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_k$ אף הוא פתרון של אותה מערכת.

---

**הוכחה**

נוכיח את המשפט באינדוקציה על $k$.

א. עבור $k=2$, המשפט נכון, כפי שזה עתה ציינו.

ב. נניח שהמשפט נכון עבור $k=m$. כלומר, נניח שאם

$\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_m$

הם $\lambda_1\mathrm{c} + \lambda_2\mathrm{d}$ פתרונות **כלשהם** של מערכת הומוגנית נתונה, אז כל צירוף

$$s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_m\mathbf{a}_m$$

גם הוא פתרון של אותה המערכת.

יהיו נתונים עתה $m+1$ פתרונות כלשהם $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{m+1}$ של המערכת ההומוגנית הנתונה. נוכיח שכל צירוף ליניארי שלהם,

$$\sum_{j=1}^{m+1} s_j\mathbf{a}_j = s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_m\mathbf{a}_m + s_{m+1}\mathbf{a}_{m+1} \qquad (*)$$

גם הוא פתרון של המערכת.

נסמן:

$$\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{m} s_j\mathbf{a}_j = s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_m\mathbf{a}_m$$

אזי $\mathbf{b}$ הוא פתרון המערכת (על פי הנחת האינדוקציה). את הצירוף (*) נוכל לרשום עתה כך: $\mathbf{b} + s_{m+1}\mathbf{a}_{m+1}$, וסכום זה הוא פתרון של אותה המערכת על פי חלק א של ההוכחה.

**מ.ש.ל.**

**הערה**

ניתן להוכיח את המשפט גם בלי אינדוקציה - על־ידי הצבה ישירה. נסו בעצמכם!

יהיו נתונים $k$ וקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ ב־ $F^n$, ויהי $\mathbf{b}$ וקטור ב־ $F^n$. ייתכן שקיימים $s_1,s_2,\ldots,s_k$ המקיימים

$$\mathbf{b} = s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \sum_{j=1}^{k} s_j\mathbf{a}_j$$

וייתכן שלא. לשון אחר - ייתכן ש־ $\mathbf{b}$ הוא צירוף ליניארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וייתכן שלא. כיצד נכריע בדבר? לפני שנענה על שאלה זו בצורתה הכללית - נבחן דוגמה.

**דוגמה**

יהיו

$$\mathbf{a}_1 = (2,0,0,2)$$

$$\mathbf{a}_2 = (1,1,0,1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (0,2,1,1)$$

שלושה וקטורים ב־ $\mathbb{R}^4$ ויהי $\mathbf{b}$ הוקטור $\mathbf{b} = (1,2,3,4)$. נבדוק אם $\mathbf{b}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים $a_1,a_2,a_3$.

$\mathbf{b}$ הוא צירוף ליניארי של הוקטורים הללו אם ורק אם קיימים סקלרים $s_1,s_2,s_3$ המקיימים:

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b} \qquad (1)$$

כלומר, אם ורק אם:

$$s_1(2,0,0,2)+s_2(1,1,0,1)+s_3(0,2,1,1)=(1,2,3,4) \tag{2}$$

את רכיבי הוקטורים שבשני אגפי השוויון (2) יקל עלינו להשוות אם נרשום את (2) בצורה שונה במקצת; אם נרשום את הוקטורים $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ ו־ $\mathbf{b}$ כעמודות, השוויון (2) ייראה כך:[2]

$$s_1\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}+s_3\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

כלומר

$$\begin{bmatrix}2s_1\\0\\0\\2s_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}s_2\\s_2\\0\\s_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2s_3\\s_3\\s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

או:

$$\begin{bmatrix}2s_1+s_2+0s_3\\0s_1+s_2+2s_3\\0s_1+0s_2+s_3\\2s_1+s_2+s_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \tag{3}$$

שלָשה של סקלרים $(s_1,s_2,s_3)$ שעבורה מתקיים השוויון (3) מהווה כמובן פתרון של המערכת הלינארית שלהלן:

$$\begin{array}{rcrcrcl}2x_1&+&x_2&&&=&1\\&&x_2&+&2x_3&=&2\\&&&&x_3&=&3\\2x_1&+&x_2&+&x_3&=&4\end{array} \tag{4}$$

ולהפך – שלָשה של סקלרים $(s_1,s_2,s_3)$ הפותרת את (4) ממלאת כמובן את השוויון (3). לפיכך, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ו־ $\mathbf{a}_3$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת המשוואות (4); כמו כן, שלָשה

2 החיבור והכפל בסקלר המוגדרים ב־ $F^n$ נראים בכתיב עמודות כך:

$$\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\\vdots\\a_n+b_n\end{bmatrix}$$

$$s\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}sa_1\\\vdots\\sa_n\end{bmatrix}$$

$(s_1,s_2,s_3)$ מהווה שלָשת מקדמים בהצגה של **b** כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ו־ $\mathbf{a}_3$ אם ורק אם היא פתרון של המערכת (4).

למערכת (4) קיים פתרון יחיד (ודאו!):

$$(s_1,s_2,s_3) = (2\frac{1}{2},-4,3)$$

וממילא **b** ניתן להצגה כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ ו־ $\mathbf{a}_3$ בדרך יחידה:

$$2\frac{1}{2}\mathrm{a}_1 - 4\mathrm{a}_2 + 3\mathrm{a}_3 = \mathrm{b}$$

כלומר:

$$2\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\2\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}0\\2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

שימו לב שמטריצת המקדמים של המערכת הלינארית (4) דלעיל היא המטריצה

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix}2&1&0&1\\0&1&2&2\\0&0&1&3\\2&1&1&4\end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{b}\end{array} \qquad (5)$$

שעמודותיה הן הוקטורים. ◄

**b** הוא, אם כן, צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ אם ורק אם יש פתרון למערכת המאופיינת על־ידי המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים $\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1$ ו־ **b**. תוצאה זו אינה מקרית, כפי שתראו במשפט הבא. אולם ראשית - אנא תרגלו:

**שאלה 2.5.2**

יהיו $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}$

וקטורים ב־ $\mathbb{R}^3$.

מצאו שלוש הצגות שונות של **b** כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$.

**התשובה בעמוד 211**

**שאלה 2.5.3**

יהי $F$ שדה כלשהו. האם הוקטור $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ ב־ $F^3$ הוא צירוף לינארי של $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ו־ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$?

**התשובה בעמוד 212**

**משפט 2.5.3**

יהיו $F$ שדה, ו־ $n$ מספר טבעי, ויהיו

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \ \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

$k$ וקטורים ב־ $F^n$, ו־ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ וקטור כלשהו ב־ $F^n$. נתבונן במטריצה

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{bmatrix} \end{array} \tag{*}$$
$$\begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k & \mathbf{b} \end{array}$$

שעמודותיה הן הוקטורים $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$.

אז:

$$s_1\mathbf{a}_1 + \dots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

כלומר, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ עם המקדמים $s_1, \dots, s_k$ אם ורק אם $(s_1, \dots, s_k)$ הוא פתרון של המערכת הלינארית המאופיינת על־ידי המטריצה (*).[3]

**הוכחה**

את השוויון

$$s_1\mathbf{a}_1 + \dots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b} \tag{1}$$

נוכל לרשום (בכתיב עמודות) כך:

$$s_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \dots + s_k \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

ולאחר ביצוע הפעולות שבאגף שמאל נקבל:[4]

$$\begin{bmatrix} a_{11}s_1 & + & a_{12}s_2 & + & \dots & + & a_{1k}s_k \\ a_{21}s_1 & + & a_{22}s_2 & + & \dots & + & a_{2k}s_k \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}s_1 & + & a_{22}s_2 & + & \dots & + & a_{nk}s_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

3 ובפרט, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ אם ורק אם למערכת (*) יש פתרון.

4 שימו לב שזהו שוויון בין שני **וקטורים** ב־ $F^n$.

השוויון (3) פירושו שוויון הרכיבים המתאימים של הוקטורים הרשומים בשני האגפים, כלומר הוא שקול למערכת השוויונות

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}s_1 & + & \cdots & + & a_{1k}s_k & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}s_1 & + & \cdots & + & a_{nk}s_k & = & b_n \end{array}$$

וממילא $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ עם המקדמים $(s_1,\ldots,s_k)$ אם ורק אם ה־$k$־יה $(s_1,\ldots,s_k)$ היא פתרון של המערכת המאופיינת על־ידי המטריצה (*).

**מ.ש.ל.**

**שאלה 2.5.4**

בדקו אם $\mathbf{b} = (1,-1,0,2,2) \in \mathbb{R}^5$ הוא צירוף לינארי של:

$$\mathbf{a}_1 = (1,1,0,0,0)$$

$$\mathbf{a}_2 = (0,0,1,0,0)$$

$$\mathbf{a}_3 = (1,-2,0,3,1)$$

$$\mathbf{a}_4 = (0,0,0,0,1)$$

**התשובה בעמוד 212**

**שאלה 2.5.5**

יהיו

$$\mathbf{a}_1 = (2,3,-1,1)$$

$$\mathbf{a}_2 = (0,2,1,2)$$

$$\mathbf{a}_3 = (6,13,-1,7)$$

שלושה וקטורים ב־$\mathbb{R}^4$, ונניח כי:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

האם יש ל־$\mathbf{b}$ הצגה אחרת כצירוף לינארי של שלושת הוקטורים הנתונים?

**התשובה בעמוד 212**

# 2.6 תלות לינארית

נתבונן בוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ במרחב $F^n$. בהינתן וקטור נוסף $\mathbf{b}$, אנו יודעים איך לבדוק אם $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. נשים לב שאם $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, אין צורך בבדיקה, שהרי תמיד נוכל לרשום

$$0 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \ldots + 0 \cdot \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

ונגלה שהוקטור $\mathbf{0}$ הוא אכן צירוף לינארי של הוקטורים הנתונים (כאשר כל מקדמי צירוף זה שווים ל־ $(0,0,0)$). צירוף כזה מכונה **צירוף טריוויאלי** של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. אם כן, לגבי וקטור ה־ $\mathbf{0}$ אין טעם בשאלה האם ניתן להציגו כצירוף לינארי של וקטורים נתונים. לעומת זאת, אפשר לשאול האם ניתן למצוא צירוף **לא־טריוויאלי** כזה (כלומר, צירוף שלפחות אחד ממקדמיו שונה מאפס).

**שאלה 2.6.1**

א. הראו שההצגה היחידה של $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1 = (1,0)$ ו־ $\mathbf{a}_2 = (0,1)$ היא ההצגה הטריויאלית, $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2$.

ב. הראו כי ל־ $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ יש הצגה לא־טריוויאלית כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1 = (1,2)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1)$ ו־ $\mathbf{a}_3 = (1,1)$.

**התשובה בעמוד 213**

---

**הגדרה 2.6.1 קבוצה בלתי תלויה לינארית; קבוצה תלויה לינארית**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים ב־ $F^n$. נאמר שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ **בלתי תלויה לינארית** אם מן השוויון $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (כאשר $s_1,\ldots,s_k$ סקלרים) נובע בהכרח כי:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0$$

כלומר, הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם **אין** ל־ $\mathbf{0}$ הצגה כצירוף לינארי **לא־טריוויאלי** של איברי הקבוצה. אם הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ איננה מקיימת תנאי זה, נאמר שהיא **תלויה לינארית**.

---

**הערות**

א. שימו לב שהגדרה 2.6.1 איננה תלויה בסדר רישום איברי הקבוצה, וזאת משום שבשוויון $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ ניתן להחליף את סדר המחוברים כרצוננו.

ב. שימו לב לדרישה כי הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ שונים זה מזה. חשיבות דרישה זו נעוצה בכך שניתן לרשום קבוצה נתונה בדרכים שונות, על־ידי חזרה על איברים. למשל, אם $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ שני וקטורים מסוימים, את הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ ניתן לרשום גם כ־ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2\}$ או כ־ $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1\}$ (וכן הלאה). לצורך הגדרה 2.6.1, יש לרשום את איברי הקבוצה באופן שבו כל וקטור מופיע פעם אחת.

**שאלה 2.6.2**

תנו הגדרה מפורשת (שאינה מתבססת על הגדרת האי־תלות) של קבוצת וקטורים **תלויה** לינארית.

**התשובה בעמוד 214**

אנו מקווים שפתרתם את השאלה דלעיל, אך בשל חשיבותה ולצורך נוחות הציטוט ניתן את ההגדרה במפורש:

---

**הגדרה 2.6.2 קבוצה תלויה לינארית**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים ב־ $F^n$. נאמר שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ **תלויה לינארית** אם קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_k$ שלא כולם אפס כך ש־

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

---

**שאלה 2.6.3**

הראו כי אם אחד הוקטורים בקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ הוא הוקטור $\mathbf{0}$, אז הקבוצה תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 214**

מצאנו, אם כן, כי כל קבוצה המכילה את הוקטור $\mathbf{0}$ היא תלויה לינארית. בפרט, הקבוצה $\{\mathbf{0}\}$ המכילה רק את וקטור האפס, היא תלויה לינארית.

**שאלה 2.6.4**

הוכיחו כי אם $\mathbf{a} \neq 0$, אזי הקבוצה $\{\mathbf{a}\}$ בלתי תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 214**

הווי אומר, קבוצה $\{\mathbf{a}\}$ שיש בה איבר אחד היא תלויה לינארית אם ורק אם $\mathbf{a} = 0$. בכך אפיינו את הקבוצות שהן בנות איבר אחד ותלויות לינאריות.

נעבור לקבוצות בנות שני איברים:

תהי $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\}$ קבוצה תלויה לינארית בת שני איברים. אז קיימים סקלרים $s_1$ ו־ $s_2$, שלא שניהם 0, המקיימים:

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

נניח כי $s_1 \neq 0$. נכפול את השוויון (1) משמאל ב־ $\frac{1}{s_1}$ ונקבל:

$$\mathbf{a}_1 + \frac{s_2}{s_1}\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

כלומר:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{s_2}{s_1}\mathbf{a}_2$$

וקיבלנו כי $\mathbf{a}_1$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_2$. אם $s_1 = 0$, אז בהכרח $s_2 \neq 0$, ואז נוכל לכפול את (1) משמאל ב־ $\frac{1}{s_2}$ ונקבל באותה דרך:

$$\mathbf{a}_2 = -\frac{s_1}{s_2}\mathbf{a}_1$$

בכל מקרה, מצאנו כי מכך שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ תלויה לינארית, נובע שלפחות אחד משני איברי הקבוצה הוא צירוף לינארי של האחר.

גם ההפך נכון. אם אחד הוקטורים בקבוצה $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ הוא צירוף לינארי של האחר, אז הקבוצה היא תלויה לינארית, שכן אם

$$\mathbf{a}_1 = s\mathbf{a}_2$$

אז

$$\mathbf{a}_1 - s\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$$

הוא צירוף לא־טריוויאלי שמתאפס.[1]

---

**מסקנה**

קבוצה בת שני וקטורים היא תלויה לינארית אם ורק אם לפחות אחד מן האיברים בקבוצה הוא צירוף לינארי של האחר.

---

מסקנה זו מאפיינת את הקבוצות בנות שני איברים שהן תלויות לינארית.

**שאלה 2.6.5**

מצאו קבוצה בת שני איברים $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, שהיא תלויה לינארית ובכל זאת $\mathbf{a}_1$ אינו צירוף לינארי של $\mathbf{a}_2$.

(מובן לאור המסקנה הקודמת, כי במקרה זה $\mathbf{a}_2$ הוא בהכרח צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1$.)

**התשובה בעמוד 214**

נעבור לקבוצות בנות שלושה איברים:

תהי $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ קבוצה תלויה לינארית ב־ $F^n$ בת שלושה איברים שונים. קיימים, אם כך, סקלרים $s_1, s_2, s_3$, שלא כולם אפס, המקיימים:

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

נניח כי $s_1 \neq 0$. נכפול ב־ $\frac{1}{s_1}$. נעביר אגפים ונקבל:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{s_2}{s_1}\mathbf{a}_2 - \frac{s_3}{s_1}\mathbf{a}_3$$

כלומר, $\mathbf{a}_1$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_2$ ו־ $\mathbf{a}_3$. אם $s_1 = 0$, אז אחד מבין $s_2$ ו־ $s_3$ שונה מאפס ונוכל לכפול את (1) ב־ $\frac{1}{s_2}$ או ב־ $\frac{1}{s_3}$. בכל מקרה, נקבל כי לפחות אחד מבין שלושת הוקטורים הנתונים הוא צירוף לינארי של השניים האחרים. כמקודם, גם ההפך נכון:

---

1 שימו לב שלא כל מקדמי הצירוף הם אפס, שהרי המקדם של $\mathbf{a}_1$ הוא 1.

**טענה**

אם אחד מבין שלושת הוקטורים $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ הוא צירוף לינארי של האחרים, אז הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ תלויה לינארית.

**הוכחה**

נניח כי אחד הוקטורים (נאמר $\mathbf{a}_1$) הוא צירוף לינארי של שני האחרים. כלומר, קיימים סקלרים $s_2,s_3$ המקיימים:

$$\mathbf{a}_1 = s_2\mathbf{a}_2 + s_3\mathbf{a}_3$$

נעביר אגפים ונכתוב את השוויון הזה בצורה:

$$1\cdot\mathbf{a}_1 - s_2\mathbf{a}_2 - s_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

צירוף זה אינו טריוויאלי (המקדם הראשון שווה ל־1)[2] ומכאן שהקבוצה הנתונה תלויה לינארית.

**מ.ש.ל.**

נוכל, אם כן, לאפיין את הקבוצות התלויות לינארית בנות שלושה איברים כך:

**מסקנה**

קבוצה בת שלושה איברים היא תלויה לינארית אם ורק אם לפחות אחד מאיבריה הוא צירוף לינארי של האחרים.

ההכללה הטבעית משתי המסקנות האחרונות היא:

**משפט 2.6.3**

עבור $k\geq 2$, קבוצת בת $k$ וקטורים $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ ב־$F^n$ היא תלויה לינארית אם ורק אם לפחות אחד מבין הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ הוא צירוף לינארי של האחרים.

**הוכחה**

א. נניח שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ $(k\geq 2)$ תלויה לינארית. אז יש לוקטור האפס הצגה כצירוף לא־טריוויאלי:

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

נניח כי $s_i\neq 0$ ונחלק את השוויון ב־$s_i$:

2 ייתכן כי $s_2 = s_3 = 0$, אבל בוודאי $1\neq 0$ - זוהי אקסיומה בהגדרת השדה.

$$\frac{s_1}{s_i}\mathbf{a}_1 + \ldots + \frac{s_{i-1}}{s_i}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i + \frac{s_{i+1}}{s_i}\mathbf{a}_{i+1} + \ldots + \frac{s_k}{s_i}\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

ולכן:[3]

$$\mathbf{a}_i = -\frac{s_1}{s_i}\mathbf{a}_1 - \ldots - \frac{s_{i-1}}{s_i}\mathbf{a}_{i-1} - \frac{s_{i+1}}{s_i}\mathbf{a}_{i+1} - \ldots - \frac{s_k}{s_i}\mathbf{a}_k$$

כלומר, $\mathbf{a}_i$ הוא צירוף לינארי של יתר הוקטורים.

ב. נניח עתה שאחד הוקטורים (נאמר $\mathbf{a}_i$) הוא צירוף לינארי של יתר הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_{i-1},\ldots,\mathbf{a}_k$. כלומר:[4]

$$\mathbf{a}_i = s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} + s_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \ldots + s_k\mathbf{a}_k$$

או:

$$s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_{i-1}\mathbf{a}_{i-1} - \mathbf{a}_i + s_{i+1}\mathbf{a}_{i+1} + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

הצירוף האחרון אינו טריוויאלי, שכן המקדם של $\mathbf{a}_i$ הוא $-1$, ולכן שונה מאפס, ומכאן שהקבוצה תלויה לינארית.[5] **מ.ש.ל.**

**שאלה 2.6.6**

יהי $F$ שדה כלשהו. יהיו נתונים ב־ $F^2$: $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$, ויהי $\mathbf{b} = \{b_1,b_1\}$ וקטור ב־ $F^2$ השונה מ־ $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$. הוכיחו כי הקבוצה $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{b}\}$ תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 215**

בתשובה לשאלה האחרונה השתמשנו באפיון התלות הלינארית הנתון במשפט 2.6.3. בהוכחת הטענה הבאה נעדיף את האפיון הנתון בהגדרה 2.6.1.

---

**טענה 2.6.4**

א. קבוצת וקטורים שיש לה תת־קבוצה תלויה לינארית היא תלויה לינארית.

ב. אם קבוצת וקטורים היא בלתי־תלויה לינארית, אז כל קבוצה חלקית שלה היא בלתי תלויה לינארית.

---

**שאלה 2.6.7**

הוכיחו את טענה 2.6.4.

**התשובה בעמוד 215**

---

3 או בקיצור: $\mathbf{a}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\left(-\frac{s_j}{s_i}\right)a_j$

4 או בקיצור: $\mathrm{a}_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} s_j\,\mathrm{a}_j$

5 באשר ליתר ה־ $s$־ים, אפשר שהם אפסים ואפשר שלא, על כל פנים - בוודאי $-1 \neq 0$.

עד כה הגדרנו את מושג התלות הלינארית עבור קבוצת וקטורים (הגדרה 2.6.1). כעת נביא הגדרה אנלוגית עבור **סדרות** של וקטורים. הצורך בשתי הגדרות מקבילות אלה יתבהר בסעיף הבא.

סדרה של וקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ היא $k$-יה שאיבריה הם עצמם וקטורים. כדי להימנע מבלבול, איננו רושמים סוגריים מסביב לאיברי הסדרה - אנו רושמים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ (ולא $(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$). למשל,

$$(1,2),(2,3),(3,-2)$$

היא סדרה של וקטורים ב-$\mathbb{R}^2$, שבה $\mathbf{a}_1 = (1,2),\ \mathbf{a}_2 = (2,3),\ \mathbf{a}_3 = (3,-2)$.

---

**הגדרה 2.6.1′ סדרה בלתי תלויה לינארית; סדרה תלויה לינארית**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים ב-$F^n$. נאמר שהסדרה היא **בלתי תלויה לינארית** אם מן השוויון $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (כאשר $s_1,\ldots,s_k$ סקלרים) נובע בהכרח כי:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0$$

נאמר שהסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ **תלויה לינארית** אם היא איננה בלתי תלויה לינארית. כלומר, אם קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_k$ שלא כולם אפס כך ש-

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

---

שימו לב שבהגדרה 2.6.1′ אין דורשים שהוקטורים המופיעים בסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ יהיו שונים זה מזה. (השוו עם הגדרה 2.6.1 וראו ההערות העוקבות לה.) אולם:

**שאלה 2.6.8**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים בלתי תלויה לינארית. הוכיחו שהוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בהכרח שונים זה מזה.

**התשובה בעמוד 215**

**שאלה 2.6.9**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים זה מזה. הוכיחו שהסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בלתי תלויה לינארית אם ורק אם הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ בלתי תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 215**

לאור צמד השאלות האחרונות, אם נדע לבדוק אם סדרות וקטורים הן בלתי תלויות לינארית, נדע לבדוק גם אם קבוצות וקטורים הן בלתי תלויות לינארית.

מעתה גם נאמר בקיצור "הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בלתי תלויים לינארית", כאשר כוונתנו לכך שסדרת הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בלתי תלויה לינארית. באופן דומה, נאמר שהוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ תלויים לינארית כדי לציין שסדרת הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ תלויה לינארית.

**כיצד נבדוק אם וקטורים נתונים ב־ $F^n$ תלויים לינארית?**

את שיטת הבדיקה מספק לנו משפט 2.5.3. נניח כי נתונים $k$ וקטורים ב־ $F^n$ (שאת רכיביהם נרשום בעמודות):

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; \ \ldots; \ \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

לפי משפט 2.5.3, מתקיים השוויון

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

אם ורק אם $(s_1,\ldots,s_k)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות ההומוגנית המאופיינת על־ידי המטריצה:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & 0 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

לפיכך, $\mathbf{0}$ הוא צירוף לינארי לא־טריוויאלי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ אם ורק אם קיים פתרון לא־טריוויאלי למערכת הלינארית ההומוגנית המאופיינת על־ידי המטריצה (*).

לסיכום:

כדי לבדוק אם סדרת וקטורים נתונה ב־ $F^n$ היא תלויה לינארית, מציבים אותם בעמודות של מטריצה ובודקים אם למערכת ההומוגנית, שמטריצה זו היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, יש פתרון לא־טריוויאלי או לא. אם יש לה פתרון לא־טריוויאלי - הסדרה תלויה לינארית, ואם לא - היא בלתי תלויה לינארית.

ננסח זאת כטענה ממוספרת:

---

**טענה 2.6.5**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־ $F^n$, ותהי $A$ המטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בלתי־תלויים לינארית אם ורק אם למערכת ההומוגנית ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה יש פתרון טריוויאלי בלבד.

---

**שאלה 2.6.10**

השתמשו בשיטה דלעיל כדי לקבוע אם סדרות הוקטורים שלהלן (מעל $\mathbb{R}$) הן תלויות לינארית. במקרה שמצאתם שקבוצה היא תלויה לינארית, רִשמו צירוף לינארי לא־טריוויאלי של איבריה ששווה ל־ $\mathbf{0}$.

א. $\mathbf{a}_1 = (1,2,3), \ \ \mathbf{a}_2 = (1,1,1), \ \ \mathbf{a}_3 = (-1,2,0)$

ב. $\mathbf{b}_1 = (1,2,3,4), \ \ \mathbf{b}_2 = (0,-1,2,5), \ \ \mathbf{b}_3 = \left(1,2\frac{1}{2},2,1\frac{1}{2}\right)$

**התשובה בעמוד 215**

כמה וקטורים בלתי תלויים לינארית נוכל "לצבור" במרחב $F^n$ ?

**משפט 2.6.6**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־ $F^n$ . אם $k > n$ , אז $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ תלויים לינארית.

**הוכחה**

נרשום את הוקטורים

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}; \ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}; \ldots; \ \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

ונניח כי $k > n$ .

על פי משפט 2.5.3 וטענה 2.6.5, הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ תלויים לינארית אם ורק אם קיים פתרון לא־טריוויאלי למערכת ההומוגנית המאופיינת על־ידי המטריצה ש־ $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ הן עמודותיה.

במטריצה זו יש $n$ שורות ו־ $k$ עמודות. כלומר, המערכת ההומוגנית המתאימה היא של $n$ משוואות ב־ $k$ משתנים. אך אם $k > n$ , אז מספר המשתנים במערכת זו גדול ממספר המשוואות, ולכן יש למערכת פתרון לא־טריוויאלי (על פי משפט 1.13.1).[6]

**מ.ש.ל.**

**מסקנה 2.6.7**

אם $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים בלתי תלויים לינארית ב־ $F^n$ , אז $k \le n$ .

**הוכחה**

אילו היה $k > n$ , היו הוקטורים תלויים לינארית לפי משפט 2.6.6.

**מ.ש.ל.**

הראינו, אם כן, שב־ $F^n$ אי־אפשר "לצבור" יותר מ־ $n$ וקטורים בלתי תלויים לינארית. נראה כי **ניתן** לצבור $n$ וקטורים בלתי תלויים ב־ $F^n$ :

נסמן ב־ $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ את $n$ הוקטורים ב־ $F^n$ הנתונים על־ידי:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\lambda_2 \\ \mathbf{e}_i &= (0,0,0,\ldots,1,\ldots,0) \\ &\frac{1}{\lambda_2} \\ \mathbf{e}_n &= (0,0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

6 ראו גם חלק ב של שאלה 2.6.1.

**הערה**

הסימון $\mathbf{e}_1$ (וכמוהו $\mathbf{e}_i$ עבור $i > 1$) משמש בהקשרים שונים לציון וקטורים בעלי אורכים שונים. למשל ב־ $F^4$ מסמנים $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0)$, ואילו ב־ $F^6$ מסמנים $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,0,0,0)$. מתוך ההקשר עליכם להבין בכל מקרה מהו אורך הנדון.

סדרת הוקטורים $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ מכונה **הבסיס הסטנדרטי של** $F^n$. היא תעלה לדיון שוב בסעיף הבא (שם נסביר את משמעות המושג **בסיס**).

**שאלה 2.6.11**

א. רשמו את איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ ותארו אותם באופן גרפי.

ב. רשמו את איברי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ ותארו אותם באופן גרפי.

**התשובה בעמוד 216**

**שאלה 2.6.12**

הוכיחו שהקבוצה $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ב־ $F^n$ היא בלתי תלויה לינארית. באופן שקול, סדרת הוקטורים $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ בלתי תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 217**

**שאלה 2.6.13**

תהי $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ סדרת וקטורים בלתי תלויה לינארית. הראו כי כל סדרת וקטורים המתקבלת מ־ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ על־ידי שינוי סדר הוקטורים גם היא בלתי תלויה לינארית.

**התשובה בעמוד 217**

## 2.7 בסיסים ל־ $F^n$

בסוף הסעיף הקודם תואר **הבסיס הסטנדרטי** $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ של $F^n$, והוכחנו כי וקטורים אלה בלתי תלויים לינארית. לבסיס הסטנדרטי יש תכונה חשובה נוספת - כל איבר של $a_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_i}a_1 - \ldots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}a_{i-1} + \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}a_{i+1} + \ldots + \frac{\lambda_k}{\lambda_i}a_k$ הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס, שכן אם

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

אז:

$$\mathbf{b} = b_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + b_n\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_n\mathbf{e}_n$$

נאמר שאיברי הבסיס הסטנדרטי **פורשים את $F^n$**, או שהבסיס הסטנדרטי **פורש את $F^n$**.

---

**הגדרה 2.7.1**

על קבוצת/סדרת וקטורים ב־ $F^n$ נאמר שהיא **פורשת את $F^n$** אם כל וקטור ב־ $F^n$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי הקבוצה/סדרה.

---

מצאנו, אם כן, כי ניתן לפרוש את $F^n$ באמצעות קבוצה המכילה $n$ וקטורים (איברי הבסיס הסטנדרטי). האם אפשר לפרוש את $F^n$ גם באמצעות פחות מ־ $n$ וקטורים? התשובה שלילית, כפי שמורה משפט 2.7.3 בהמשך. לצורך הוכחת המשפט, נוכיח תחילה את הלֶמָה הבאה:

---

**למה 2.7.2**

תהי $A$ מטריצה בעלת $n$ שורות, ונניח שלכל וקטור עמודה $\mathbf{b}$ מאורך $n$, המטריצה $A|\mathbf{b}$ מתארת מערכת משוואות עקבית (מערכת בעלת פתרון). תהי $A'$ מטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי צעד דירוג. אז לכל וקטור עמודה $\mathbf{b}'$ מאורך $n$, גם המטריצה $A'|\mathbf{b}'$ מתארת מערכת משוואות עקבית.

---

**הוכחה**

יהי $\mathbf{b}'$ וקטור עמודה כלשהו מאורך $n$. המטריצה $A'$ התקבלה מ־ $A$ על־ידי ביצוע צעד דירוג כלשהו, ולכן $A'$ שקולת־שורה ל־ $A$. מכיוון שיחס שקילות־השורה הוא יחס סימטרי (ראו לאחר הגדרה 1.8.1), $A$ שקולת־שורה ל־ $A'$, כלומר קיים צעד דירוג המוביל מ־ $A'$ ל־ $A$. אם נפעיל צעד זה

על המטריצה $A'|\mathbf{b}'$, נקבל מטריצה מהצורה $A|\mathbf{b}$, כאשר $\mathbf{b}$ הוא איזשהו וקטור עמודה מאורך $n$.
לפי הנחתנו, המערכת $A|\mathbf{b}$ עקבית, ולכן גם המערכת $A'|\mathbf{b}'$ (שהתקבלה מ־ $A|\mathbf{b}$ על־ידי צעד דירוג) היא עקבית.

**מ.ש.ל.**

כעת למשפט המובטח:

---

**משפט 2.7.3**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים ב־ $F^n$. אם $k < n$, אז הסדרה **אינה פורשת** את $F^n$.

---

**הוכחה**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים הפורשת את $F^n$. לפי הנחה זו, כל וקטור ב־ $F^n$ הוא צירוף לינארי של איברי הסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. נסמן ב־ $A$ את המטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_k$. לפי משפט 2.5.3, לכל וקטור עמודה $\mathbf{b}$ (מאורך $n$), המטריצה $A|\mathbf{b}$ מתארת מערכת משוואות עקבית. תהי $A'$ מטריצת המדרגות הקנונית המתאימה ל־ $A$. מכיוון ש־ $A'$ התקבלה מ $A$ על־ידי מספר סופי של צעדי דירוג, הרי שלפי למה 2.7.2, המטריצה $A'|\mathbf{b}$ גם היא מתארת מערכת משוואות עקבית לכל $\mathbf{b}$. בפרט, האמור נכון עבור $\mathbf{b} = \mathbf{e}_n$. לפי הדיון הקודם למשפט 1.12.2, מספר השורות שאינן אפס במטריצה $A'|\mathbf{e}_n$ קטן או שווה למספר המשתנים של המערכת, שהוא $k$. מכיוון שהשורה האחרונה של המטריצה אינה שורת אפסים (האיבר הימני ביותר בה הוא $1$), נובע שכל $n$ שורות המטריצה המדורגת $A'|\mathbf{e}_n$ אינן מתאפסות, ולכן $n \le k$. באופן שקול, אם $k < n$, הסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ אינה פורשת את $F^n$.

**מ.ש.ל.**

ממשפט 2.7.3 נובעת מיידית המסקנה הבאה:

---

**מסקנה 2.7.4**

אם הסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ פורשת את $F^n$, אז $k \ge n$.

---

וממסקנות 2.6.7 ו־2.7.4 יחדיו נובע:

---

**מסקנה 2.7.5**

כל **סדרה** בלתי תלויה לינארית הפורשת את $F^n$ מכילה **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

---

לפי הגדרה 2.7.1 ושאלות 2.6.8, 2.6.9, נסיק גם:

**מסקנה 2.7.5′**

כל **קבוצה** בלתי תלויה לינארית הפורשת את $F^n$ מכילה **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

ומכאן להגדרה המרכזית של הסעיף הנוכחי:

**הגדרה 2.7.6 בסיס; בסיס סדור**

קבוצת וקטורים ב- $F^n$ נקראת **בסיס** ל- $F^n$ אם:

א. היא בלתי תלויה לינארית.
ב. היא פורשת את $F^n$.

**סדרת** וקטורים ב- $F^n$ נקראת **בסיס סדור** ל- $F^n$ אם ורק אם **הקבוצה** המורכבת מאיברי הסדרה מהווה בסיס.

**הערה**

יש משמעות לסדר שבו מופיעים איברי בסיס סדור. אם קבוצה הכוללת שלושה וקטורים שונים $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ מהווה בסיס, אזי הסדרה $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ מהווה **בסיס סדור** ל- $F^3$, וגם הסדרות $\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_3$ ו- $\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1$ הן **בסיסים סדורים** (שונים!).

ייתכן שתתהו מדוע אנו זקוקים כלל להגדרה של בסיס סדור, ולא די לנו בהגדרה של בסיס כקבוצה - הסיבה לכך תתבהר בהמשך הסעיף.

לאור הגדרה 2.7.6, נוכל לנסח את מסקנה 2.7.5 כך:

**משפט 2.7.7**

בכל בסיס של $F^n$ יש **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

האם כבר פגשנו בסיס ל- $F^n$ ? בוודאי! כבר הוכחנו כי קבוצת איברי "הבסיס הסטנדרטי" (שבו $n$ איברים) היא קבוצה בלתי תלויה הפורשת את $F^n$. בשלב זה נעיר שנהוג לראות את הבסיס הסטנדרטי כבסיס סדור - הסדרה $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$. הסדרה $\mathbf{e}_n,\mathbf{e}_{n-1},\ldots,\mathbf{e}_1$, למשל, גם היא בסיס סדור ל- $F^n$, אך זהו **אינו** הבסיס הסטנדרטי.

**שאלה 2.7.1**

בכל אחד מחלקי השאלה, נתונה קבוצת וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$.
לכל מקרה, קבעו אם הקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

א. $(1,2,3),\quad (4,5,6),\quad (7,8,9),\quad (10,11,12)$
ב. $(2,0,0),\quad (0,1,0),\quad (0,0,3)$

ג. $(1,0,1),\quad (4,2,0),\quad (8,4,0)$

ד. $\mathbf{e}_1,\quad 3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_3-2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$

**התשובה בעמוד 221**

---

**משפט 2.7.8**

קבוצה של $n$ וקטורים ב־ $F^n$ פורשת את $F^n$ **אם ורק אם** היא בלתי תלויה לינארית.

---

**הערה**

שימו לב שטענת המשפט מתייחסת רק לקבוצות ב־ $F^n$ המכילות **בדיוק *n* וקטורים**. קבוצות בנות $k \neq n$ וקטורים עשויות לפרוש את $F^n$ בלי שתהיינה בלתי תלויות לינארית, ועשויות להיות בלתי תלויות לינארית בלי שתפרושנה את $F^n$.

**הוכחת משפט 2.7.8**

א. נניח כי הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ פורשת את $F^n$ ונוכיח כי היא בלתי תלויה לינארית.
נניח בשלילה כי $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ תלויה לינארית.
אם $n=1$, אז $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$ לפי שאלה 2.6.4, וברור שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1\}=\{\mathbf{0}\}$ אינה פורשת את $F^n$, בסתירה להנחה.
אם $n \geq 2$, אז לפי משפט 2.6.3, אחד מבין הוקטורים בקבוצה הוא צירוף לינארי של האחרים. לשם נוחות הסימון נניח כי זהו $\mathbf{a}_1$, כלומר:

$$\mathbf{a}_1=\sum_{i=2}^{n} s_i\mathbf{a}_i \tag{1}$$

יהי $\mathbf{b}\in F^n$ וקטור כלשהו. הוא בוודאי צירוף לינארי של ה־ $\mathbf{a}_i$־ים $(i=1,\ldots,n)$, שכן $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ פורשת את $F^n$. לפיכך, קיימים סקלרים $t_i$ $(i=1,\ldots,n)$ המקיימים:

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{a}_i = t_1\mathbf{a}_1+\sum_{i=2}^{n} t_i\mathbf{a}_i \tag{2}$$

אבל לפי השוויון (1):

$$t_1\mathbf{a}_1=\sum_{i=2}^{n} t_1 s_i\mathbf{a}_i \tag{3}$$

ומהצבת התוצאה (3) ב־(2) נקבל:

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n} t_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=2}^{n} t_1 s_i\mathbf{a}_i+\sum_{i=2}^{n} t_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=2}^{n}(t_1 s_i+t_i)\mathbf{a}_i$$

בכך הצגנו את $\mathbf{b}$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$.
הוכחנו אפוא כי כל וקטור ב־ $F^n$ הוא צירוף לינארי של $\{\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n\}$. קיבלנו, אם כן, קבוצה בת $n-1$ איברים ב־ $F^n$, הפורשת את $F^n$ – בסתירה למשפט 2.7.2.

לכן, אם $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ פורשת את $F^n$, אז היא בלתי תלויה לינארית.

ב. נניח כעת כי $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ היא בלתי תלויה לינארית ונוכיח שהיא פורשת את $F^n$.

ברור כי כל אחד מה־ $\mathbf{a}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$.[1]

יהי $\mathbf{b}\in F^n$ וקטור כלשהו השונה מ־ $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$. נשאר להראות כי גם הוא צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$. ואמנם, הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n,\mathbf{b}\}$ היא קבוצה בת $n+1$ וקטורים ולכן היא תלויה לינארית, על פי משפט 2.6.6. לכן קיימים $s_1,s_2,\ldots,s_n$, ו־ $t$, שלא כולם אפסים, המקיימים:

$$s_1\mathbf{a}_1+\ldots+s_n\mathbf{a}_n+t\mathbf{b}=\mathbf{0} \qquad (*)$$

לא ייתכן כי $t=0$, כי אז היה $(*)$ מהווה הצגה של $\mathbf{0}$ כצירוף לינארי לא־טריוויאלי של איברי הקבוצה הבלתי תלויה לינארית $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$. לכן $t\neq 0$. נחלק בו, נעביר אגפים ונקבל:

$$\mathbf{b}=\frac{-s_1}{t}\mathbf{a}_1+\ldots+\frac{-s_n}{t}\mathbf{a}_n$$

כלומר, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה.

בכך הוכחנו שכל וקטור ב־ $F^n$ הוא צירוף לינארי של איברי הקבוצה, ולכן הקבוצה פורשת את $F^n$.

**מ.ש.ל.**

---

**משפט 2.7.9**

אם $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ הוא בסיס סדור ל־ $F^n$, אז ההצגה של כל וקטור $\mathbf{b}\in F^n$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ היא יחידה. כלומר, אם

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}s_i\mathbf{a}_i$$

וגם

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}t_i\mathbf{a}_i$$

אז לכל $i$, $1\le i\le n$ מתקיים:

$$t_i=s_i$$

---

**הוכחה**

נניח כי נתונות שתי הצגות של $\mathbf{b}\in F^n$ כצירוף לינארי של איברי הבסיס:

$$\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}s_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}t_i\mathbf{a}_i$$

אז:

$$\mathbf{0}=\mathbf{b}-\mathbf{b}=\sum_{i=1}^{n}s_i\mathbf{a}_i-\sum_{i=1}^{n}t_i\mathbf{a}_i=\sum_{i=1}^{n}(s_i-t_i)\mathbf{a}_i$$

כלומר:

$$\mathbf{0}=\sum_{i=1}^{n}(s_i-t_i)\mathbf{a}_i$$

---

1 $\mathbf{a}_i=0\cdot\mathbf{a}_1+\ldots+1\cdot\mathbf{a}_i+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_n$

**0** מוצג כאן כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$, ומאחר שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ בלתי תלויה לינארית, בהכרח כל אחד ממקדמי הצירוף הוא $0$, כלומר:

לכל $i$, $1 \le i \le n$

$$s_i - t_i = 0$$

וממילא לכל $i$, $1 \le i \le n$:

$$t_i = s_i$$

**מ.ש.ל.**

**דוגמה**

נבדוק האם הקבוצה הכוללת את הוקטורים:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\2\\4\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix}1\\4\\3\\-1\\0\end{bmatrix}$$

היא בסיס ל- $\mathbb{R}^5$.

קבוצה זו מונה חמישה איברים. לפי משפט 2.7.8, כדי לבדוק אם היא בסיס, די שנבדוק אם איבריה בלתי תלויים לינארית. לפי משפט 2.5.3, איבריה הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם למערכת הלינארית ההומוגנית המאופיינת על־ידי המטריצה

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&1&1&1&0\\2&1&1&2&4&0\\3&2&1&1&3&0\\4&4&1&1&-1&0\\1&1&1&1&0&0\end{array}\right]$$

יש פתרון טריוויאלי בלבד.

לפי משפט 1.14.2, למערכת הומוגנית של חמש משוואות בחמישה נעלמים יש רק הפתרון הטריוויאלי אם ורק אם המטריצה המצומצמת שלה שקולת שורות למטריצת היחידה. בדקו, שעל־ידי דירוג המטריצה המצומצמת המתאימה למערכת דלעיל, מגיעים למטריצת היחידה, ולכן **אין** פתרון לא־טריוויאלי למערכת הנידונה.

מסקנה: חמשת הוקטורים הנתונים הם בלתי תלויים לינארית ולכן הקבוצה הכוללת אותם היא בסיס ל- $\mathbb{R}^5$. ◄

**הערה**

משפט 2.7.9 מבהיר את הצורך להגדיר את הבסיס הסדור כסדרה ולא כקבוצה. אם אנו רואים בסיס כקבוצה בלבד, אזי לא מתקיימת היחידות במשפט. נדגים זאת:

אם $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ מהווה בסיס ל־ $F^3$, אזי את הוקטור $\mathbf{b} = 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$ נוכל להציג גם כצירוף $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 + 2\mathbf{b}_1$. בהצגה הראשונה סדרת המקדמים היא $(2,1,1)$, ואילו בשנייה סדרת המקדמים היא $(1,1,2)$. אולם, מאחר שהבסיס **הסדור** $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ שונה מהבסיס **הסדור** $\mathbf{b}_3,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_1$, אין הדבר סותר את משפט 2.7.9.

נסכם את העניין כך:

כאשר מעוניינים לדעת אם סדרת וקטורים מסוימת מהווה בסיס, אין חשיבות לסדר שבו נתונים הוקטורים; לסדר יש חשיבות רק עבור הצגתם של וקטורים כצירופים לינאריים של איברי הסדרה.

מעתה והלאה, גם כאשר נעסוק בבסיס סדור, לרוב נאמר בקצרה פשוט **בסיס**.

**שאלה 2.7.2**

א. בדקו אם הסדרה שלהלן מהווה בסיס ל־ $(i = 1,\ldots,n)$:

$$\mathbf{a}_1 = (1,1,1,0)$$

$$\mathbf{a}_2 = (1,1,0,1)$$

$$\mathbf{a}_3 = (1,0,1,1)$$

$$\mathbf{a}_4 = (0,1,1,1)$$

ב. חזרו על השאלה, כאשר הפעם אתם רואים את הוקטורים כאיברים של $\mathbb{Z}_2^4$.

**התשובה בעמוד 219**

במשפט 2.5.3 ראינו כי השוויון ב־ $F^n$,

$$s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

מתקיים אם ורק אם $(s_1,\ldots,s_k)$ הוא פתרון של המערכת הלינארית המאופיינת על־ידי המטריצה:

$$\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} & \begin{array}{c} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{array} & \left.\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array}\right] \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_k & \mathbf{b} \end{array}$$

במשפט זה השתמשנו כדי להמיר בעיות הקשורות בוקטורים לבעיות פתרון של מערכות לינאריות. עתה, משרכשנו מעט מידע על תכונות של קבוצות וקטורים (כגון אי־תלות ופרישה), נוכל לנצל את המשפט גם בכיוון ההפוך – להסיק על תכונות של מערכות לינאריות מתוך תכונות של קבוצות וקטורים.

תהי, אם כן

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

מערכת לינארית הומוגנית של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים. נניח שלמערכת קיים רק פתרון אחד - הפתרון הטריוויאלי. נתבונן במטריצת המקדמים של המערכת:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 \end{bmatrix}$$

מאחר שלמערכת קיים רק הפתרון הטריוויאלי, הרי שהוקטורים

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

הם בלתי תלויים לינארית.

לפיכך, לפי משפט 2.7.8, הם פורשים את $F^n$, וממילא הם בסיס ל־ $F^n$. לכן, כל וקטור ב־ $F^n$ הוא צירוף לינארי של ה־ $\mathbf{a}_i$־ים $(i = 1,\dots,n)$, והצגתו כצירוף לינארי כזה היא יחידה, לפי משפט 2.7.9.

יהי $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ וקטור כלשהו ב־ $F^n$.

היותו ניתן להצגה כצירוף לינארי של ה־ $\mathbf{a}_i$־ים $(i = 1,\dots,n)$ בצורה יחידה, מתבטאת בכך שלמערכת המאופיינת על־ידי המטריצה

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

יש פתרון יחיד. המסקנה מהדיון האחרון היא זו:

---

**משפט 2.7.10**

אם למערכת ההומוגנית

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

יש רק פתרון אחד (הפתרון הטריוויאלי), אז לכל מערכת מהטיפוס

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_n \end{array}$$

יש פתרון אחד ויחיד.

---

**הערה**

משפט 2.7.10 נובע בקלות ממשפט 1.14.3, כמקרה פרטי. למרות זאת בחרנו לתת לו מעמד של משפט נפרד בגלל חשיבותו.

**שאלה 2.7.3**

תהי

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

מערכת לינארית הומוגנית של $n$ משוואות ב־ $n$ משתנים, אשר יש לה פתרון לא־טריוויאלי. הוכיחו שקיימת מערכת אי־הומוגנית

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

שאין לה פתרון.

**התשובה בעמוד 220**

לסיום הפרק נביא כמה שאלות חזרה.

**שאלה 2.7.4**

הוכיחו שאם במערכת הלינארית ההומוגנית

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

מתקיים

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & = & 3a_{1n} \\ a_{21} & = & 3a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & = & 3a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & = & 3a_{nn} \end{array}$$

אז למערכת יש פתרון לא־טריוויאלי.

**התשובה בעמוד 221**

**שאלה 2.7.5**

בלי לפתור את המערכת שלהלן (מעל הממשיים), הוכיחו שיש לה פתרון לא־טריוויאלי:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & & & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 10x_4 & = & 0 \\ & & 4x_2 & + & & & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

**התשובה בעמוד 221**

**שאלה 2.7.6**

יהיו $\alpha_{ij}$, $1 \le j \le n$, $1 \le i \le k$, איברים של שדה כלשהו. הוכיחו כי

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}\right)$$

על־ידי רישום מפורש של המחוברים בכל אגף.

**התשובה בעמוד 221**

**שאלה 2.7.7**

הראו כי:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\gamma_j\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_{ij}\alpha_i\right)$$

**רמז:** הראו כי לכל $i$

$$\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_j = \sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_{ij}\gamma_j$$

והיעזרו בשאלה 2.7.6.

**התשובה בעמוד 222**

**שאלה 2.7.8**

יהיו $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ ו־ $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ שני בסיסים סדורים של $F^n$ (כאשר $F$ שדה כלשהו).
נניח כי לכל $1 \le i \le n$,

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n}s_{ij}\mathbf{a}_j$$

היא ההצגה של $\mathbf{b}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ כצירוף לינארי של איברי הבסיס $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$.
יהי $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ וקטור שהצגתו כצירוף לינארי של איברי הבסיס $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\ldots,\mathbf{b}_n$ היא:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n}t_i\mathbf{b}_i$$

הציגו את $\mathbf{c}$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_j$ $(j = 1,\ldots,n)$.

**התשובה בעמוד 223**

**שאלה 2.7.9**

אם $F$ שדה אינסופי (למשל, שדה המספרים הממשיים), אזי המרחב $F^n$ הוא מרחב אינסופי גם הוא (כלומר, יש בו אינסוף נקודות). אך אם $F$ סופי, גם $F^n$ סופי.

א. כמה נקודות יש במרחב $\mathbb{Z}_2^n$ ?

ב. כמה נקודות יש על כל ישר העובר דרך הראשית ב- $\mathbb{Z}_2^n$ ?

ג. כמה ישרים העוברים דרך הראשית יש במרחב $\mathbb{Z}_2^n$ ?

ד. כמה נקודות יש בכל מישור העובר דרך הראשית ב- $\mathbb{Z}_2^n$ ?

**התשובה בעמוד 223**

נסיים את הפרק במשפט השימושי הבא:

**משפט 2.7.11**

קבוצה בת $n$ וקטורים שונים ב- $F^n$ היא בסיס ל- $F^n$ אם ורק אם מתקיים **אחד** התנאים הבאים:

א. הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

ב. הקבוצה פורשת את $F^n$ .

**שאלה 2.7.10**

הוכיחו את משפט 2.7.11 - תוכלו להסיק את נכונותו בנקל ממשפט 2.7.8.

**התשובה בעמוד 224**

# תשובות לשאלות בפרק 2

**תשובה 2.2.1** **השאלה בעמוד 152**

א. מכיוון שהוקטור **a** מונח על ציר ה־ $x$, בהכרח $a_2 = 0$, ומאחר שהוא מצביע בכיוון החיובי, המספר $a_1$ הוא חיובי. אורכו של הוקטור הוא $|a_1| = a_1$.

ב. הישר הוא, כמובן, ציר ה־ $y$. הוקטור פונה בכיוון השלילי של הציר, ואורכו $|b_2| = -b_2$.

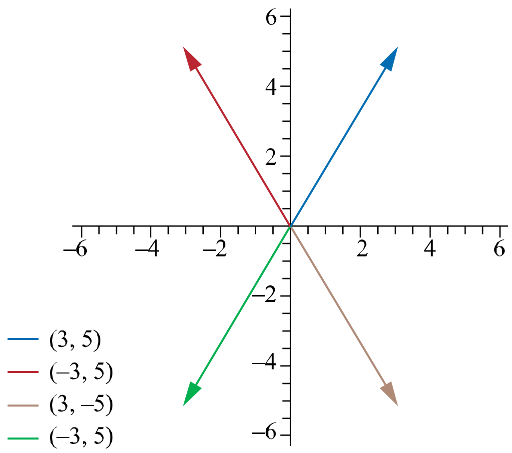
ג. $\mathbf{u} = (5,0)$ או $\mathbf{u} = (-5,0)$.

ד. הוקטור $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ מונח על ציר ה־ $x$ אם ורק אם $a_2 = 0$.
הנקודה $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ היא על ציר ה־ $y$ אם ורק אם הוקטור $\mathbf{a} = (a_1,a_2)$ מונח על הציר, כלומר אם ורק אם $a_1 = 0$.

ה. האורך של הוקטור $\mathbf{a} = (a_1,0)$ הוא $|a_1|$, והאורך של הוקטור $\mathbf{a} = (0,a_2)$ הוא $|a_2|$.

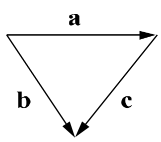
ו. נכונות הטענה נובעת מהאמור בחלק ה של השאלה.
לפי משפט פיתגורס, אורך הוקטור הוא $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$.

ז.




**תשובה 2.2.2** **השאלה בעמוד 158**

נסמן $\mathbf{a} = (x_1,x_2),\ \mathbf{b} = (y_1,y_2)$.




נתבונן בוקטור **c** שבאיור, היוצא מראשו של **a** ומסתיים בראשו של **b**. אם נחבר לוקטור **a** את הוקטור **c**, נקבל, לפי הגדרת החיבור הגיאומטרי ("עקב בצד אגודל"), את הוקטור **b**. לכן, מאחר שהחיבור הגיאומטרי והחיבור האלגברי מתלכדים, נסיק ש־ $\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$. מכך נובע, לפי הגדרת החיסור, ש־ $\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. כלומר, ההפרש **b - a** הוא הוקטור היוצא מראשו של **a** ומסתיים בראשו של **b**.
נעיר שאותו הטיעון תקף גם עבור וקטורים במרחב.

**תשובה 2.3.1** **השאלה בעמוד 160**

הצגה פרמטרית של הישר הנידון היא $\ell = \{t(1,5) | t \in \mathbb{R}\}$. אם $\mathbf{a} = (a_2, a_2)$ נמצאת על הישר, פירוש הדבר שקיים סקלר $t \in \mathbb{R}$ כך ש $t(1,5) = \mathbf{a} = (a_2, a_2)$, ולכן $t = a_1, 5t = a_2$. לפי הנתון $a_1 = -7$ ולכן $t = -7$, ומכאן $a_2 = 5t = -35$.

**תשובה 2.3.2** **השאלה בעמוד 160**

הצגה פרמטרית אחת של הישר הנידון היא $\ell = \{t(a,3a) | t \in \mathbb{R}\}$. מאחר שהנקודה $(7,b)$ מונחת על הישר, קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש־ $(7,b) = t(a,3a)$, ולכן $ta = 7,\ 3ta = b$. מכאן נקבל ש־ $b = 21$.

**תשובה 2.3.3** **השאלה בעמוד 160**

א. ההצגה הפרמטרית של הישר הנקבע על־ידי $\alpha_{ij}$ היא:

$$\{t(2,1,3) | t \in \mathbb{R}\}$$

דהיינו, $\ell$ הוא קבוצת הנקודות $\{(2t,t,3t) | t \in \mathbb{R}\}$.
אם נבחר $t = 2$, נקבל כי הנקודה $(4,2,6)$, שאינה אלא $\mathbf{b}$, נמצאת על הישר.

ב. הישר הנקבע על־ידי $\mathbf{a}$ הוא:

$$\{(t,2t,3t) | t \in \mathbb{R}\}$$

כאן $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ (מתאים ל־ $t = 1$), ומובן ש־ $\mathbf{b}$ נמצאת על הישר.

ג. הישר הנקבע על־ידי $\mathbf{a}$ הוא:

$$\{(t\alpha_1, t\alpha_2, t\alpha_3) | t \in \mathbb{R}\}$$

הנקודה $\mathbf{b} = \left(2\alpha_1, \frac{2}{3}\alpha_2, 2\alpha_3\right)$ נמצאת על ישר זה אם ורק אם קיים מספר ממשי $t$ המקיים:

$$\begin{aligned} t\alpha_1 &= 2\alpha_1 \\ t\alpha_2 &= \frac{2}{3}\alpha_2 \\ t\alpha_3 &= 2\alpha_3 \end{aligned} \qquad (*)$$

הצעד הראשון שעולה במחשבתנו הוא לחלק את המשוואות ב־ $\alpha_1$, $\alpha_2$ ו־ $\alpha_3$, ולהסיק שאין פתרון למערכת, שכן המשוואה הראשונה קובעת אחרי פעולת החילוק ש־ $t = 2$, ואילו השנייה קובעת כי $t = \frac{2}{3}$. אולם אל לנו להיחפז, שכן ייתכן שחלק מן ה־ $\alpha_i$־ים שווים לאפס! נתבונן, אם כן, בכמה מקרים:

1. אם $\alpha_2 = 0$, אז לפחות אחד מבין $\alpha_1$ ו־ $\alpha_3$ שונה מאפס.
אם $\alpha_1 \neq 0$ אז מהמשוואה $t\alpha_1 = 2\alpha_1$ נובע כי $t = 2$, ואם $\alpha_3 \neq 0$ אז נובע מן המשוואה $t\alpha_3 = 2\alpha_3$ כי $t = 2$. בכל מקרה, כאשר $\alpha_2 = 0$, $t = 2$ הוא הפתרון של המערכת (*)[1] ולכן במקרה זה $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$ נמצאת על הישר הנקבע על־ידי $\mathbf{a}$.
2. אם $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$, בהכרח $\alpha_2 \neq 0$[2], ומהמשוואה השנייה

---

1 בדקו!
2 שכן $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

$$t\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_2$$

מקבלים $t = \frac{2}{3}$. שתי המשוואות האחרות מתקיימות לכל $t$, ולכן $t = \frac{2}{3}$ הוא הפתרון של (*) במקרה זה. לכן גם כאן $\mathbf{b}$ נמצאת על הישר הנדון, שכן $\mathbf{b} = \frac{2}{3}\mathbf{a}$.

נותר לנו המקרה האחרון:

3. $\alpha_2 \neq 0$, ולפחות אחד מבין $\alpha_1, \alpha_2$ שונה מ־ 0. נניח, למשל, כי $\alpha_1 \neq 0$. אז מן המשוואה $t\alpha_1 = 2\alpha_1$ נקבל $t = 2$, ומן המשוואה השנייה, $t\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_2$, נקבל $t = \frac{2}{3}$. סתירה זו מראה שבמקרה זה אין פתרון למערכת (*), ולכן $\mathbf{b}$ אינה נמצאת על הישר הנקבע על־ידי $\mathbf{a}$.

**תשובה 2.3.4** **השאלה בעמוד 160**

מאחר שהנקודה $(\alpha, \beta, \alpha)$ נמצאת על הישר הנקבע על־ידי $(\alpha^2, \beta^2, \beta)$, הרי שקיים $t$ המקיים:

$$\begin{aligned} \alpha &= t\alpha^2 \\ \beta &= t\beta^2 \\ \alpha &= t\beta \end{aligned}$$

מן המשוואה הראשונה נקבל כי $t = \frac{1}{\alpha}$.[3] נציב פתרון זה בשתי המשוואות האחרות ונקבל:

$$\beta = \frac{1}{\alpha}\beta^2$$

$$\alpha = \frac{1}{\alpha}\beta$$

מהמשוואה הראשונה נובע כי $\beta = \alpha$, ואז נקבל מהשנייה כי $\alpha = \frac{1}{\alpha}\alpha = 1$, ולכן:

$$\alpha = \beta = 1$$

למעשה קיבלנו במקרה זה כי:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} = (1,1,1)$$

**תשובה 2.3.5** **השאלה בעמוד 160**

א. מאחר שהוקטור $(1,0,0)$ נמצא על ציר־ $x$, נקבל כי ההצגה הפרמטרית של ציר זה היא:

$$\{t(1,0,0) | t \in \mathbb{R}\}$$

או:

$$\{(t,0,0) | t \in \mathbb{R}\}$$

באופן דומה נקבל כי ההצגה הפרמטרית של ציר־ $y$ היא:

$$\{(0,t,0) | t \in \mathbb{R}\}$$

וההצגה הפרמטרית של ציר־ $z$ היא:

$$\{(0,0,t) | t \in \mathbb{R}\}$$

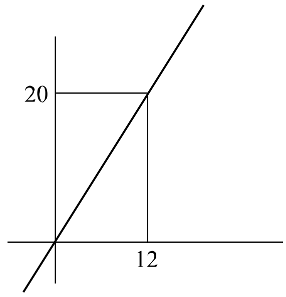
3 זכרו כי $\alpha > 0$.

ב. נסמן ב־ $\alpha$ את אורך הצלע של הריבוע הנתון. הנקודה $\mathbf{a} = (\alpha,\alpha)$ היא קדקוד הריבוע הנמצא על האלכסון הנדון. לכן הצגתו הפרמטרית של הישר שעליו נמצא האלכסון היא $t\mathbf{a}$, או ביתר פירוט:

$$\{t(\alpha,\alpha)|t \in \mathbb{R}\}$$

גם הנקודה $(1,1)$ נמצאת על ישר זה,[4] לכן גם $\{t(1,1)|t \in \mathbb{R}\} = \{t,t()|t \in \mathbb{R}\}$ היא הצגה פרמטרית של אותו ישר.

ג.




מן האיור ברור שהנקודה $(12,20)$ נמצאת על הישר $\ell$. לכן הצגה הפרמטרית של ישר זה היא:

$$\{t(12,20)|t \in \mathbb{R}\}$$

הנקודה $(144,260)$ תימצא על ישר זה אם ורק אם קיים $t$ המקיים:

$$t \cdot 12 = 144$$

$$t \cdot 20 = 260$$

מאחר שאין $t$ המקיים את שתי המשוואות דלעיל, נסיק כי הנקודה הנתונה אינה נמצאת על הישר $\ell$.

**תשובה 2.3.6** **השאלה בעמוד 163**

מאחר ש־ $(1,1) - (-1,4) = (2,-3)$, הצגה פרמטרית אפשרית של הישר היא $\{t(2,-3) + (-1,4)|t \in \mathbb{R}\}$.

כדי לבדוק האם $\mathbf{c} = (5,2)$ נמצאת על ישר זה, עלינו לבדוק אם קיים סקלר $t$ המקיים:

$$t(2,-3) + (-1,4) = (5,2)$$

כלומר, עלינו לבדוק אם קיים $t$ המקיים

$$2t - 1 = 5$$
$$-3t + 4 = 2$$

למערכת זו אין פתרון, שכן מן המשוואה הראשונה נקבל $t = 3$ ואילו המשוואה השנייה קובעת שעל $t$ להיות $\frac{2}{3}$. לכן $\mathbf{c} = (5,2)$ אינה נמצאת על הישר הזה.

4 הסבירו לעצמכם מדוע.

**תשובה 2.3.7** **השאלה בעמוד 163**

הישר העובר דרך הראשית $\mathbf{c}_1 = (0,0,0)$ ודרך $\mathbf{c}_2 = (1,1,1)$ הוא:

(1) $$\{s(1,1,1) | s \in \mathbb{R}\}$$

והישר העובר דרך $\mathbf{c}_3 = (2,1,0)$ ודרך $\mathbf{c}_4 = (0,1,2)$ הוא:

(2) $$\{t(2,0,-2) + (0,1,2) | t \in \mathbb{R}\}$$

אם הישרים נחתכים, אז נקודת החיתוך שלהם, $\mathbf{c}$, נמצאת על שני הישרים ולכן קיימים סקלרים $s$ ו־ $t$ המקיימים:[5]

(3) $$\mathbf{c} = s(1,1,1)$$

וכן:[6]

(4) $$\mathbf{c} = t(2,0,-2) + (0,1,2)$$

מכאן יוצא כי

$$s(1,1,1) = t(2,0,-2) + (0,1,2)$$

או:

$$s = 2t$$

$$s = 1$$

$$s = -2t + 2$$

למערכת זו יש פתרון: $s = 1,\ t = \frac{1}{2}$ (בדקו!). לכן שני הישרים נחתכים, ונקודת החיתוך שלהם היא:[7]

$$\mathbf{c} = (1,1,1)$$

**תשובה 2.3.8** **השאלה בעמוד 166**

עלינו להוכיח כי הקבוצות

(1) $$\{s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} | s,t \in \mathbb{R}\}$$

(2) $$\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + r\mathbf{c} | s,t,r \in \mathbb{R},\ r+s+t=1\}$$

מתלכדות.

ובכן,

$$s(\mathbf{a}-\mathbf{c}) + t(\mathbf{b}-\mathbf{c}) + \mathbf{c}$$

$$= s\mathbf{a} - s\mathbf{c} + t\mathbf{b} - t\mathbf{c} + \mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} + (1-s-t)\mathbf{c}$$

מכאן קל להוכיח שהקבוצה (2) מתלכדת עם הקבוצה (1).

**תשובה 2.3.9** **השאלה בעמוד 166**

הנה הצגה פרמטרית של המישור העובר דרך $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ ו־ $(1,0,0)$:

$$\{s(1,0,-1) + t(0,1,-1) + (0,0,1) | s,t \in \mathbb{R}\}$$

5 כיוון ש־ $\mathbf{c}$ נמצאת על הישר (1).
6 כיוון ש־ $\mathbf{c}$ נמצאת על הישר (2).
7 הצבנו ב־(3) $\lambda = 0$.

הנקודה $(0,0,0)$ נמצאת על מישור זה אם ורק אם קיימים סקלרים $s,t$ המקיימים:

$$s(1,0,-1)+t(0,1,-1)+(0,0,1)=(0,0,0)$$

או:

$$s=0$$

$$t=0$$

$$-s-t+1=0$$

למערכת זו אין פתרון (בדקו!). לכן הנקודה $(0,0,0)$ אינה נמצאת על המישור הנדון.

**תשובה 2.3.10** **השאלה בעמוד 171**

א. בדוגמה 1 של סעיף 1.9 פתרנו מערכת זו, וראינו כי יש לה פתרון יחיד - הוקטור $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$. כלומר, קבוצת הפתרונות כוללת נקודה יחידה במרחב.

ב. את מערכת המשוואות הזאת פתרתם בשאלה 1.10.2. הפתרון הכללי למערכת הוא: $\left(\frac{1}{2}t,-\frac{1}{2}t,t\right)=(0,0,0)+t\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$. זהו ישר במרחב, העובר דרך הראשית.

ג. הפתרון הכללי למערכת זו הוא $(1-2s-t,s,t)=(1,0,0)+s(-2,1,0)+t(-1,0,1)$. זוהי הצגה פרמטרית של מישור במרחב, על פי טענה 2.3.6.

ד. מערכת זו מורכבת ממשוואות אפס בלבד, לכן כל וקטור במרחב פותר אותה. כלומר, קבוצת הפתרונות היא המרחב כולו.

**תשובה 2.4.1** **השאלה בעמוד 173**

הצגה פרמטרית אפשרית של המישור הנפרש על־ידי $(1,2,3,4)$ ו־$(2,3,1,4)$ היא:

$$\{t_1(1,2,3,4)+t_2(2,3,1,4) \mid t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$$

עלינו לבדוק, אם כן, אם קיימים $t_1,t_2$ המקיימים:

$$t_1(1,2,3,4)+t_2(2,3,1,4)=(-3,-4,1,-4)$$

כלומר:

$$t_1+2t_2=-3$$

$$2t_1+3t_2=-4$$

$$3t_1+t_2=1$$

$$4t_1+4t_2=-4$$

למערכת זו יש פתרון: $t_1=1,\ t_2=-2$ (בדקו!), ולכן הנקודה $(-3,-4,1,-4)$ נמצאת על המישור הנדון.

**תשובה 2.4.2** **השאלה בעמוד 173**

יהי $t$ סקלר בשדה הנתון. את הוקטור $t\mathbf{a}$ נוכל להציג גם כך:

$$t_1\mathbf{a}+t_2\mathbf{b}$$

כאשר $t_1=t,\ t_2=0$.

לכן הקבוצה $\mathbb{R}\mathbf{a}$ היא קבוצה חלקית לקבוצה $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{b}$. כלומר, הישר הנקבע על־ידי $\mathbf{a}$ מוכל במישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$.

**תשובה 2.4.3** **השאלה בעמוד 173**

א. אילו היו שני הוקטורים הנתונים על ישר אחד העובר דרך הראשית, היה קיים $t$ המקיים:

$$(1,0,0,0,0)=t(0,1,0,0,0)$$

אולם הרכיב הראשון של הוקטור באגף ימין הוא 0 לכל $t$, ולעולם לא ישווה ל־ 1.

ב. המישור הנפרש על־ידי שני הוקטורים הנדונים הוא:

$$\{t_1(1,0,0,0,0)+t_2(0,1,0,0,0)|t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$$

או:

$$\{(t_1,t_2,0,0,0)|t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$$

מכאן שאם הוקטור $(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ נמצא על המישור, אז בהכרח:

$$c_3=c_4=c_5=0 \qquad (*)$$

ולהפך, אם מתקיים (*), כלומר הוקטור נתון הוא

$$(c_1,c_2,0,0,0)$$

אז הוא נמצא על המישור הנדון (פשוט נבחר $t_1=c_1$ ו־ $t_2=c_2$).

ובכן, תנאי הכרחי ומספיק לכך שהוקטור $(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ יימצא על המישור הנדון הוא התנאי (*) דלעיל.

ג. בוודאי. שכן,

$$(0,0,0,0,0)=0(1,0,0,0,0)+0(0,1,0,0,0)$$

או בקיצור:

$$\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{a}+0\cdot\mathbf{b}$$

ולכן:

$$\mathbf{0}\in\{t_1\mathbf{a}+t_2\mathbf{b}|t_1,t_2\in\mathbb{R}\}$$

**תשובה 2.4.4** **השאלה בעמוד 174**

א. אילו הוקטורים $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ היו נמצאים על ישר אחד העובר דרך הראשית, היה קיים $t$ שעבורו:

$$(1,1,1,1,1,1)=t(4,3,2,2,0,0)$$

מהשוואת הרכיבים האחרונים של שני האגפים היינו מקבלים:

$$1=t\cdot 0$$

סתירה!

ב. ניקח נקודה כלשהי $t(5,4,3,3,1,1)$ על הישר הנתון. נבדוק אם קיימים $t_1,t_2$ המקיימים:

$$t_1(1,1,1,1,1,1)+t_2(4,3,2,2,0,0)=t(5,4,3,3,1,1)$$

כלומר, נבדוק אם קיים פתרון למערכת הלינארית[8]

$$\begin{array}{rcrcr} t_1 & + & 4t_2 & = & 5t \\ t_1 & + & 3t_2 & = & 4t \\ t_1 & + & 2t_2 & = & 3t \\ t_1 & + & 2t_2 & = & 3t \\ t_1 & + & & = & t \\ t_1 & + & & = & t \end{array}$$

בשיטת החילוץ נקבל:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5t \\ 1 & 3 & 4t \\ 1 & 2 & 3t \\ 1 & 2 & 3t \\ 1 & 0 & t \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5t \\ 0 & -1 & -t \\ 0 & -2 & -2t \\ 0 & -2 & -2t \\ 0 & -4 & -4t \\ 0 & -4 & -4t \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5t \\ 0 & -1 & -t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ומכאן שהמערכת שקולה למערכת

$$\begin{array}{rcrcr} t_1 & + & 4t_2 & = & 5t \\ & & -t_2 & = & -t \end{array}$$

שלה פתרון יחיד:

[9] $t_1 = t_2 = t$

ובכן, כל נקודה הנמצאת על הישר הנתון שייכת גם למישור הנפרש על־ידי $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. כלומר, כל הישר הזה מוכל במישור הנדון.

**תשובה 2.4.5** **השאלה בעמוד 174**

א. אילו הוקטורים $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ היו נמצאים על ישר אחד העובר דרך הראשית, היה קיים $t \in \mathbb{Z}_2$ שעבורו:

$$(1,1,1,1,1,1) = t(1,1,1,1,0,0)$$

מהשוואת הרכיבים האחרונים של שני האגפים היינו מקבלים:

$$1 = t \cdot 0$$

סתירה!

ב. ניקח נקודה כלשהי $t(1,0,0,0,1,1)$ על הישר הנתון. נבדוק אם קיימים $t_1, t_2$ המקיימים:

$$t_1(1,1,1,1,1,1) + t_2(1,1,1,1,0,0) = t(1,0,0,0,1,1)$$

כלומר, נבדוק אם קיים פתרון למערכת הלינארית[10]

---

8 שימו לב כי במערכת זו $t_1, t_2$ הם הנעלמים ו־ $t$ הוא מספר נתון.

9 ייתכן שהייתם זריזים יותר וניחשתם את הפתרון ללא חישוב.

10 גם במערכת זו $t_1$, $t_2$ הם הנעלמים ו־ $t$ הוא סקלר נתון בשדה.

$$
\begin{array}{ccccc}
t_1 & + & t_2 & = & t \\
t_1 & + & t_2 & = & 0 \\
t_1 & + & t_2 & = & 0 \\
t_1 & + & t_2 & = & 0 \\
t_1 & + & & = & t \\
t_1 & + & & = & t
\end{array}
$$

למערכת זו יש פתרון רק כאשר $t = 0$ (ודאו!). בפרט, עבור $t = 1$ הוקטור $1 \cdot (1,0,0,0,1,1)$ אינו שייך למישור הנתון. לכן הישר הנתון אינו מוכל במישור הנפרש הנתון.

**תשובה 2.5.1** **השאלה בעמוד 176**

א. $\sum_{i=1}^{3} \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (0,-1,\frac{1}{2},2) + (3,2,-1,0) + (1,1,1,1) = (4,2,\frac{1}{2},3)$

ב. $2\mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = 2(0,-1,\frac{1}{2},2) + (1,1,1,1) = (1,-1,2,5)$

ג. $0 \cdot \mathbf{a}_1 + 0 \cdot \mathbf{a}_2 + 0 \cdot \mathbf{a}_3 = \mathbf{0} = (0,0,0,0)$

ד. $\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = (0,-1,\frac{1}{2},2) - 2(3,2,-1,0) - (1,1,1,1) = (-7,-6,\frac{3}{2},1)$

**תשובה 2.5.2** **השאלה בעמוד 179**

על פי השיטה שפיתחנו בדוגמה דלעיל, נתבונן במערכת המשוואות שמטריצה המקדמים שלה היא

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3
\end{bmatrix} \\
\begin{array}{ccccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{b}
\end{array}
\end{array}
$$

ועמודותיה הן הוקטורים שהצבענו עליהם.

כלומר:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
s_1 & + & & & & & s_4 & = & 3 \\
& & s_2 & + & & & s_4 & = & 3 \\
& & & & s_3 & + & s_4 & = & 3
\end{array}
$$

המשתנה $s_4$ הינו משתנה חופשי, ויתר המשתנים הם קשורים.

נבחר $s_4 = 0$ ואז $s_1 = s_2 = s_3 = 3$. כלומר, ניתן להציג את הוקטור הנתון כך:

$$\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3 + 0 \cdot \mathbf{a}_4$$

נבחר עתה $s_4 = 1$, ואז $s_1 = s_2 = s_3 = 2$, ולכן ניתן להציג את $\mathbf{b}$ באופן אחר, כך:

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3 + 1 \cdot \mathbf{a}_4$$

לבסוף, נבחר את $s_4 = -1$, ואז $s_1 = s_2 = s_3 = 4$, ולכן:

$$\mathbf{b} = 4\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4$$

**תשובה 2.5.3** **השאלה בעמוד 179**

קיימים סקלרים $s_1$ ו־ $s_2$ בשדה שעבורם

$$s_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+s_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

אם ורק אם יש פתרון למערכת המשוואות:

$$\begin{array}{rcrcl} s_1 & & & = & 0\\ & & s_2 & = & 0\\ 0\cdot s_1 & + & 0\cdot s_2 & = & 1\end{array}$$

למערכת זו אין פתרון בלא תלות בשדה שמעליו אנו עובדים (התבוננו במשוואה האחרונה!), ולכן הוקטור $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ אינו צירוף לינארי של שני הוקטורים הנתונים.

**תשובה 2.5.4** **השאלה בעמוד 181**

על פי משפט 2.5.3, עלינו לבדוק אם קיים פתרון למערכת המשוואות שמטריצת המקדמים שלה היא:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\1&0&-2&0&-1\\0&1&0&0&0\\0&0&3&0&2\\0&0&1&1&2\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ \mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\mathbf{a}_3&\mathbf{a}_4&\mathbf{b}\end{array}\end{array} \qquad (*)$$

נבדוק זאת. על־ידי תהליך הדירוג נגיע מהמטריצה (*) למטריצת המדרגות הקנונית:[11]

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{3}\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&\frac{2}{3}\\0&0&0&1&\frac{4}{3}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

ולכן, למערכת שמטריצת המקדמים שלה היא (*) יש פתרון יחיד והוא:

$$(s_1,s_2,s_3,s_4)=\left(\frac{1}{3},\ 0,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

11 בדקו!

מכאן נסיק:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{3}\mathbf{a}_1 + 0\cdot\mathbf{a}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_3 + \frac{4}{3}\mathbf{a}_4$$

הווי אומר, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים הנתונים, והצגתו כצירוף לינארי כזה היא יחידה.

**תשובה 2.5.5** **השאלה בעמוד 181**

על פי הנתון:

$$\mathbf{b} = (2,3,-1,1) - 2(0,2,1,2) + (6,13,-1,7) = (8,12,-4,4)$$

נתבונן במערכת משוואות שמטריצת המקדמים שלה היא:

$$\begin{array}{cccc} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 13 & 12 \\ -1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ \mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{a}_3\ \ \mathbf{b} \end{array}$$

צורת המדרגות הקנונית של מטריצה זו היא:[12]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

לכן המערכת הנתונה שקולה למערכת:

$$\begin{array}{ccccc} s_1 & & + & 3s_3 & = 4 \\ & s_2 & + & 2s_3 & = 0 \end{array}$$

אחד הפתרונות שלה הוא:

$$(s_1,s_2,s_3) = (1,-2,1)$$

כלומר

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

בהתאם לנתון.

אולם המשתנה $s_3$ הוא חופשי, ולכן יש ל־ $\mathbf{b}$ גם הצגות אחרות. אם נבחר, למשל, $s_3 = -1$, נקבל $s_2 = 2$, $s_1 = 7$, ומכאן את ההצגה:

$$\mathbf{b} = 7\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$$

**תשובה 2.6.1** **השאלה בעמוד 182**

א. כפי שראינו בסעיף הקודם, $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 = 0$ אם ורק אם $s_1,s_2$ הם פתרונות המערכת שמטריצת המקדמים שלה היא:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow \\ \mathbf{a}_1\ \ \mathbf{a}_2\ \ \mathbf{0} \end{array}$$

12 בדקו!

למערכת זו יש פתרון יחיד $(s_1,s_2)=(0,0)$. לכן, ההצגה היחידה של $\mathbf{0}$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_1$ ו־ $\mathbf{a}_2$ היא:

$$0\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2=\mathbf{0}$$

ב. נתבונן במערכת המשוואות שמטריצת המשתנים שלה היא:

$$\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\left[\begin{array}{cccc}1&2&1&0\\2&1&1&0\end{array}\right]} \\ \uparrow&\uparrow&\uparrow&\uparrow \\ \mathbf{a}_1&\mathbf{a}_2&\mathbf{a}_3&\mathbf{0}\end{array}$$

זוהי מערכת לינארית הומוגנית שבה מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, ולכן יש לה פתרון לא־טריוויאלי לפי משפט 1.13.1.[13]

**תשובה 2.6.2** **השאלה בעמוד 182**

קבוצת וקטורים $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ ב־ $F^n$ (כאשר $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים זה מזה) נקראת **תלויה לינארית** אם קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_k$ בשדה הנתון, **שלא כולם אפס**, המקיימים:

$$s_1\mathbf{a}_1+\ldots+s_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$$

לשון אחר – אם ורק אם קיים צירוף לינארי **לא־טריוויאלי** של הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ השווה ל־ $\mathbf{0}$.

**תשובה 2.6.3** **השאלה בעמוד 183**

נניח, למשל, כי $\mathbf{a}_1=\mathbf{0}$ (אם וקטור אחר הוא $\mathbf{0}$, ההוכחה דומה), ונתבונן בצירוף הבא:

$$\mathbf{0}=1\cdot\mathbf{a}_1+0\cdot\mathbf{a}_2+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_k$$

צירוף זה אינו טריוויאלי (המקדם $s_1=1\neq 0$) ולכן הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ היא תלויה לינארית.

**תשובה 2.6.4** **השאלה בעמוד 183**

יהי $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$, ונניח כי $s\mathbf{a}=0$ ו־ $s\neq 0$. נכפול את השוויון משמאל ב־ $\frac{1}{s}$ ונקבל $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, בסתירה לנתון. לכן, אין צירוף לינארי לא־טריוויאלי של $\mathbf{a}$ השווה ל־ $\mathbf{0}$, ולכן כאשר $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ הקבוצה $\{\mathbf{a}\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

**תשובה 2.6.5** **השאלה בעמוד 184**

נתבונן בקבוצה $\{\mathbf{a},\mathbf{0}\}$ בת שני וקטורים ב־ $F^n$, כאשר $\mathbf{a}$ הוא וקטור כלשהו שונה מ־ $\mathbf{0}$. הקבוצה תלויה לינארית, שכן היא מכילה את הוקטור $\mathbf{0}$.

יחד עם זאת, הוקטור הראשון, $\mathbf{a}$, אינו צירוף לינארי של הוקטור השני $\mathbf{0}$ (כיוון שאם $\mathbf{a}=s\mathbf{0}$, אז $\mathbf{a}=\mathbf{0}$, בניגוד להנחתנו). נציין, עם זאת, שמתקיים:

$$\mathbf{0}=0\cdot\mathbf{a}$$

כלומר, הוקטור השני, $\mathbf{0}$, הוא צירוף לינארי של הוקטור הראשון.

---

13 למשל, $(1,1,-3)$ הוא פתרון לא־טריוויאלי של מערכת זו, ובהתאם $1\cdot(1,2)+1\cdot(2,1)-3(1,1)=(0,0)$ היא הצגה של $(0,0)$ כצירוף לינארי לא־טריוויאלי של הוקטורים הנתונים.

**תשובה 2.6.6** **השאלה בעמוד 186**

השאלה בעמוד 186

ברור כי:

$$b_1(1,0)+b_2(0,1)=(b_1,b_2)$$

כלומר:

$$b_1\mathbf{e}_1+b_1\mathbf{e}_1=\mathbf{b}$$

הווי אומר, $\mathbf{b}$ הוא צירוף לינארי של $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$, ולכן, לפי משפט 2.6.3, הקבוצה $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{b}\}$ תלויה לינארית.

**תשובה 2.6.7** **השאלה בעמוד 186**

א. תהי נתונה קבוצת וקטורים $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ שיש לה תת־קבוצה תלויה לינארית. נניח שתת־קבוצה זו מורכבת מהוקטורים:[14]

$$\mathbf{a}_{i_1},\mathbf{a}_{i_2},\ldots,\mathbf{a}_{i_m}$$

אזי קיים צירוף לא־טריוויאלי:

$$s_{i_1}\mathbf{a}_{i_1}+s_{i_2}\mathbf{a}_{i_2}+\ldots+s_{i_m}\mathbf{a}_{i_m}=\mathbf{0}$$

נוסיף לשני האגפים את יתר וקטורי הקבוצה עם מקדמים השווים ל־ 0. אז נקבל את הצירוף $s_1\mathbf{a}_1+\ldots+s_k\mathbf{a}_k=\mathbf{0}$ שלא כל מקדמיו הם אפסים, ומכאן הטענה.

ב. נניח בשלילה שתת־קבוצה מסוימת של הקבוצה הנתונה תלויה לינארית. אז (על פי חלק א של השאלה) גם הקבוצה הנתונה תלויה לינארית, בסתירה לנתון.

**תשובה 2.6.8** **השאלה בעמוד 187**

נניח בשלילה ששני וקטורים $\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j$ בסדרה שווים זה לזה. נקבע $s_i=1$, $s_j=-1$ ו־ $s_k=0$ לכל $k\neq i,j$. אזי:

$$s_1\mathbf{a}_1+\ldots+s_k\mathbf{a}_k=1\cdot\mathbf{a}_i+(-1)\cdot\mathbf{a}_j=1\cdot\mathbf{a}_i+(-1)\cdot\mathbf{a}_i=0$$

בכך קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי של איברי הסדרה שמתאפס. סתירה.

**תשובה 2.6.9** **השאלה בעמוד 187**

הטענה נובעת מיידית מהגדרות 2.6.1 ו־2.6.1'.

**תשובה 2.6.10** **השאלה בעמוד 188**

א. נתבונן במערכת המשוואות המאופיינת על־ידי המטריצה:

$$\begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccc}1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]\\ \begin{array}{cccc}\uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow\\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{0}\end{array}\end{array}$$

14 $1\le i_1<i_2<\ldots<i_m\le k$

על־ידי תהליך הדירוג נגיע למטריצת המדרגות

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

שממנה קל לראות כי למערכת אין פתרון לא־טריוויאלי, ולכן קבוצת הוקטורים הנתונה היא בלתי תלויה לינארית.

ב. נתבונן במערכת המשוואות המאופיינת על־ידי המטריצה:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2.5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1.5 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{0} \end{array} \end{array}$$

על־ידי תהליך הדירוג נגיע למטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כלומר, המערכת הנתונה שקולה למערכת:

$$\begin{array}{rcrcrcl} s_1 & & & + & s_3 & = & 0 \\ & - & s_2 & + & 0.5s_3 & = & 0 \end{array}$$

המשתנה $s_3$ הוא משתנה חופשי. אם נבחר, למשל, $s_3 = 2$, נקבל $s_2 = 1$, $s_1 = -2$, ולכן קיים צירוף לא־טריוויאלי השווה ל־ $\mathbf{0}$:

$$(-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

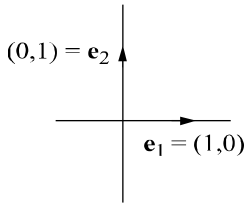
ולכן הקבוצה תלויה לינארית.

**תשובה 2.6.11** **השאלה בעמוד 190**

א. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$ הוא:

$$\begin{array}{c} \{(1,0),(0,1)\} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 \end{array} \end{array}$$

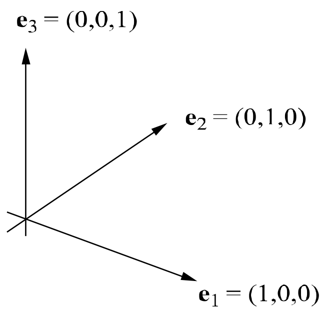
ותיאורו הגרפי נתון להלן:




ב. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$ הוא

$$\begin{array}{ccccccc} \{(1,0,0) & , & (0,1,0) & , & (0,0,1)\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \{\ \mathbf{e}_1 & , & \mathbf{e}_2 & , & \mathbf{e}_3\ \} \end{array}$$

ותיאורו הגרפי:




**תשובה 2.6.12** **השאלה בעמוד 190**

יהי $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ הבסיס הסטנדרטי של $F^n$. נניח כי:

$$s_1\mathbf{e}_1 + \dots + s_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

נרשום את השוויון בקואורדינטות:

$$s_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + s_n\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s_1\\s_2\\\\\vdots\\s_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

מכאן שכל המקדמים של הצירוף שווים בהכרח ל־ 0. לכן איברי הבסיס הסטנדרטי מהווים קבוצה בלתי תלויה לינארית.

**תשובה 2.6.13** **השאלה בעמוד 190**

הטענה מיידית מהגדרת האי־תלות, שכן אין חשיבות לסדר המחוברים בצירוף הלינארי המופיע בהגדרה.

**תשובה 2.7.1** **השאלה בעמוד 193**

א. בכל בסיס של $\mathbb{R}^3$ יש בדיוק שלושה וקטורים שונים (משפט 2.7.7), ולכן ארבעת הוקטורים הנתונים כאן בוודאי אינם מרכיבים בסיס ל־ $\mathbb{R}^3$.

ב. כדי לבדוק אם שלושת הוקטורים הם תלויים או בלתי תלויים לינארית, עלינו לבדוק אם קיים או לא קיים פתרון לא־טריוויאלי למערכת ההומוגנית המאופיינת על־ידי המטריצה שוקטורים אלה הם שלוש עמודותיה הראשונות:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ברור שהצורה הקנונית של המטריצה המצומצמת המתאימה

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

היא מטריצת היחידה, ולכן אין למערכת פתרון לא־טריוויאלי והוקטורים הם בלתי תלויים לינארית.[15]

כדי לבדוק אם הוקטורים פורשים את $\mathbb{R}^3$, עלינו לבדוק אם לכל וקטור $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ קיים פתרון למערכת:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 3 & b_3 \end{bmatrix}$$

אולם, זוהי מערכת של שלוש משוואות בשלושה נעלמים, וכבר מצאנו קודם כי המטריצה המצומצמת שלה שקולת־שורה למטריצת היחידה, ולכן על פי משפט 1.14.4 קיים פתרון למערכת זו (ואפילו יחיד!). לכן הוקטורים פורשים את $\mathbb{R}^3$.

בכך הוכחנו כי הוקטורים הנתונים מהווים בסיס ל־ $\mathbb{R}^3$.

ג. הוקטורים השני והשלישי בקבוצה זו הם פרופורציוניים:

$$(8,4,0) = 2(4,2,0)$$

ולכן:

$$(8,4,0) = 0 \cdot (1,0,1) + 2(4,2,0)$$

בכך הראינו כי אחד משלושת הוקטורים הוא צירוף לינארי של האחרים, ולכן הקבוצה הכוללת את שלושת הוקטורים היא תלויה לינארית, וממילא אינה בסיס.

ד.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1,0,0) \\ 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 &= (2,3,0) \\ \mathbf{e}_3 - 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= (-2,1,1) \end{aligned}$$

(בדקו!)

15 על איזה משפט בפרק 1 הסתמכנו?

שוב, עלינו לבדוק קיום או אי־קיום של פתרון לא־טריוויאלי למערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

מדירוג המטריצה המצומצמת מתקבלת מטריצת יחידה ולכן:

1. אין למערכת פתרון לא־טריוויאלי והוקטורים הם, אם כן, בלתי תלויים לינארית.
2. לכל מערכת לינארית המאופיינת על־ידי מטריצה מהטיפוס

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & b_1 \\ 0 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 \end{bmatrix}$$

יש פתרון.[16]

לכן, כל וקטור $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ הוא צירוף לינארי של הוקטורים הנתונים, כלומר וקטורים אלה פורשים את $\mathbb{R}^3$. לפיכך, קבוצה זו מהווה בסיס ל־ $\mathbb{R}^3$.

**תשובה 2.7.2** **השאלה בעמוד 197**

א. מספיק לבדוק אם הקבוצה המתאימה תלויה או בלתי תלויה לינארית (אם היא בלתי תלויה - לפנינו בסיס לפי משפט 2.7.8; אם היא תלויה - ברור שהקבוצה אינה בסיס ל־ $\mathbb{R}^4$). כדי לבדוק זאת עלינו לברר אם קיים או לא קיים פתרון לא־טריוויאלי למערכת ההומוגנית:

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{0} \end{matrix} \end{array}$$

לשם כך, לפי משפט 1.14.2, יש לבדוק מה קורה בדירוג המטריצה המצומצמת, על־ידי ביצוע סדרת הפעולות האלמנטריות שלהלן על המטריצה המצומצמת:

1. $R_1 \to R_1 - R_4$
2. $R_2 \to R_2 - R_3$
3. $R_2 \to R_2 + R_4$
4. $R_3 \to R_3 - R_1$
5. $R_4 \to R_4 - \frac{1}{2}R_2$
6. $R_4 \to R_4 - R_3$

16 משפט 1.14.3.

מקבלים

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

וכבר בשלב זה ברור כי המטריצה המצומצמת היא שקולת־שורה למטריצת היחידה, ולכן אין למערכת פתרון לא־טריוויאלי.

**מסקנה:** סדרת ארבעת הוקטורים הנתונים מהווה בסיס ל־ $\mathbb{R}^4$.

ב. כל שאמרנו בסעיף הקודם עומד ונותר בעינו, אך יש לזכור שמדרגים את המטריצה

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \ \uparrow \\ \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4 \ \mathbf{0} \end{array}$$

כמטריצה מעל $\mathbb{Z}_2$. גם כאן, מגיעים למטריצת היחידה (ודאו!), ולכן הסדרה הנתונה מהווה בסיס ל־ $\mathbb{Z}_2^4$.

**תשובה 2.7.3** **השאלה בעמוד 199**

אנו יודעים כי למערכת המשוואות ההומוגנית

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

יש פתרון לא־טריוויאלי. דבר זה ייתכן אם ורק אם $n$ הוקטורים ב־ $F^n$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

הם תלויים לינארית. במקרה זה אין $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ פורשים את $F^n$, כלומר יש וקטור $\mathbf{b} \in F^n$ שאינו צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. במילים אחרות – עבור אותו $\mathbf{b} \in F^n$, לכל בחירה של $s_1, s_2, \dots, s_n$:

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \dots + s_n\mathbf{a}_n \neq \mathbf{b}$$

אם $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, אז משמעות הקביעה האחרונה היא כי למערכת

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

אין פתרון.

**תשובה 2.7.4** **השאלה בעמוד 199**

נסמן:

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{bmatrix},\dots,\mathbf{a}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{bmatrix},\dots,\mathbf{a}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{nn}\end{bmatrix}$$

נתון כי $a_{i1}=3a_{in}$ לכל $1\le i\le n$. במילים אחרות, $\mathbf{a}_1=3\mathbf{a}_n$ ולכן

$$\mathbf{a}_1=0\cdot\mathbf{a}_2+0\cdot\mathbf{a}_3+\ldots+0\cdot\mathbf{a}_{n-1}+3\mathbf{a}_n$$

ומכאן שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n\}$ היא תלויה לינארית, ולכן למערכת ההומוגנית הנתונה יש פתרון לא־טריוויאלי. אפשר בקלות להדגים פתרון כזה, שהרי:

$$\mathbf{a}_1-0\cdot\mathbf{a}_2-\ldots-0\cdot\mathbf{a}_{n-1}-3\mathbf{a}_n=0$$

ולכן $(s_1,\dots,s_n)=(1,0,\dots,0,-3)$ הוא פתרון לא־טריוויאלי למערכת הנתונה.

**תשובה 2.7.5** **השאלה בעמוד 200**

מטריצת המקדמים של המערכת היא:

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1&0\\0&1&0&-1&0\\1&3&2&10&0\\0&4&0&2&0\end{bmatrix}$$

עמודות המערכת תלויות לינארית, שכן העמודה השלישית פרופורציונית לעמודה הראשונה. אבל תלות לינארית של העמודות במטריצה זו משמעה אינו אלא קיום פתרון לא־טריוויאלי למערכת ההומוגנית הנתונה.

**תשובה 2.7.6** **השאלה בעמוד 200**

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{1j}+\alpha_{2j}+\ldots+\alpha_{kj})$$

$$\begin{aligned}&=(\alpha_{11}+\alpha_{21}+\ldots+\alpha_{k1})\\&\quad+(\alpha_{12}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{k2})\\&\quad+\vdots\\&\quad+(\alpha_{1n}+\alpha_{2n}+\ldots+\alpha_{kn})\end{aligned}$$

נסכם את המחוברים לפי העמודות:

$$\begin{aligned}&=(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{1n})\\&\quad+(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n})\\&\quad\ldots+(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\ldots+\alpha_{kn})\end{aligned}$$

עתה נרשום את אגף ימין:

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{k}(\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\ldots+\alpha_{in}) \tag{2}$$

$$=(\alpha_{11}+\alpha_{12}+\ldots+\alpha_{1n})$$

$$+(\alpha_{21}+\alpha_{22}+\ldots+\alpha_{2n})$$

$$\ldots+(\alpha_{k1}+\alpha_{k2}+\ldots+\alpha_{kn})$$

ומכאן נובע השוויון בין שני האגפים.

**הערה**

נתבונן במטריצה בת $k$ שורות ו־ $n$ עמודות:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kn}\end{bmatrix} \tag{3}$$

מן החישובים שעשינו לעיל מתקבל פירוש פשוט של השוויון

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{ij}\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\right) \tag{4}$$

שאותו הוכחנו.

אם עלינו למצוא את הסכום של כל איברי המטריצה (3), נוכל לסכם אותם שורה שורה ואחר כך לחבר את התוצאות. כך נקבל את אגף ימין של (4).

לחלופין, נוכל לסכם תחילה את איברי המטריצה (3) עמודה עמודה ולחבר את התוצאות. כך נקבל את אגף שמאל של (4). אין להתפלא אפוא ששני האגפים שווים, שהרי שניהם שווים לסכום כל איברי המטריצה (3)!

**תשובה 2.7.7** **השאלה בעמוד 200**

לכל $1\le i\le n$,

$$\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_j=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_{ij}\gamma_j \tag{*}$$

שכן:

$$\alpha_i\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\gamma_j=\alpha_i(\beta_{i1}\gamma_1+\beta_{i2}\gamma_2+\ldots+\beta_{in}\gamma_n)$$

$$=\alpha_i\beta_{i1}\gamma_1+\alpha_i\beta_{i2}\gamma_2+\ldots+\alpha_i\beta_{in}\gamma_n$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_{ij}\gamma_j$$

באופן דומה, לכל $1 \le i \le n$,

$$\gamma_j \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \gamma_j$$

נרשום עתה:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left( \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \gamma_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \gamma_j \right) \underset{\uparrow}{=}$$

על פי שאלה 2.7.6

$$= \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \left( \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_{ij} \right)$$

**תשובה 2.7.8** **השאלה בעמוד 200**

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{b}_i$$

נציב בשוויון זה:

$$\mathbf{b}_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \mathbf{a}_j$$

נקבל:[17]

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} t_i \left( \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \mathbf{a}_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j \left( \sum_{i=1}^{n} t_i s_{ij} \right)$$

ונקבל את הצירוף המבוקש:

$$\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{n} r_j \mathbf{a}_j$$

כאשר $r_j = \sum_{i=1}^{n} t_i s_{ij}$.

**תשובה 2.7.9** **השאלה בעמוד 200**

א. כדי לתאר נקודה במרחב זה, יש לבחור ערך עבור כל אחת מן הקואורדינטות שלה. לכל קואורדינטה שתי אפשריות, ולכן מספר הנקודות הוא $2^n$.

ב. כל וקטור על ישר כזה הוא מהצורה $\{t\mathbf{b} | t \in \mathbb{Z}_2\}$ כאשר $\mathbf{b}$ וקטור שונה מאפס. הפרמטר $t$ יכול לקבל שני ערכים, ולכן על הישר בדיוק שתי נקודות: $\mathbf{0}$ ו־$\mathbf{b}$.

ג. שימו לב שאם $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ הן שתי נקודות שונות במרחב (שאינן הראשית), אז הישר $\{t\mathbf{b} | t \in \mathbb{Z}_2\}$ בהכרח שונה מן הישר $\{t\mathbf{c} | t \in \mathbb{Z}_2\}$. לכן, יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין הישרים במרחב העוברים דרך הראשית לבין הנקודות שאינן הראשית. מכאן שמספר הישרים הללו הוא $2^n - 1$, כמספר הנקודות השונות מ־$\mathbf{0}$ ב־$\mathbb{Z}_2^n$.

17 על פי שאלה 2.7.7.

ד. כל מישור כזה הוא מהצורה $\{s\mathbf{b}+t\mathbf{c} | s,t \in \mathbb{Z}_2\}$ כאשר $\mathbf{b},\mathbf{c}$ וקטורים שונים שאינם הראשית.
לכן הנקודות המונחות על מישור זה הן הוקטורים:

$$0 = 0\mathbf{b} + 0\mathbf{c},\ \ \mathbf{b} = 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c},\ \ \mathbf{c} = 0\mathbf{b} + \mathbf{1c},\ \ \mathbf{b} + \mathbf{c} = 1\mathbf{b} + 1\mathbf{c}$$

ה. שימו לב, מדובר בארבעה וקטורים שונים, ולכן על המישור בדיוק $2^2 = 4$ נקודות.

**תשובה 2.7.10** **השאלה בעמוד 201**

כיוון אחד של המשפט נובע מההגדרה: אם הקבוצה היא בסיס, אזי לפי הגדרה 2.7.6 מתקיימים שני התנאים המופיעים במשפט.

בכיוון ההפוך, אם קבוצה של $n$ וקטורים שונים ב־ $F^n$ מקיימת את אחד התנאים (א או ב) המופיעים במשפט, אז היא מקיימת גם את התנאי האחר - לפי משפט 2.7.8 - ולכן היא בסיס לפי הגדרה 2.7.6.

# פרק 3: מטריצות

# 3.1 סימון מטריצות ורכיביהן

מושג המטריצה הוגדר בפרק 1, שם השתמשנו במטריצות להקלת עבודת הכתיבה הכרוכה בפתרון מערכות לינאריות. אבל שימושיותן של מטריצות אינה מתמצה בכך. המטריצות הן אובייקטים מתמטיים בעלי חשיבות בפני עצמם, ואף בעלי משמעות גיאומטרית, כפי שתיווכחו בהמשך הקורס.

כדי להשתמש במטריצות למטרות מעמיקות יותר מאשר רישום מקוצר של מערכות משוואות, נגדיר פעולות חשבון על מטריצות. בסעיפים הבאים יוגדרו חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר באופן טבעי, כאנלוגיים לחיבור $n$־יות ולכפל $n$־יות בסקלר. לאחר מכן יוגדר כפל מטריצות. תיבחנה התכונות של הפעולות השונות ונביא שימושים לפעולות אלה. בכל המשכו של הקורס נוסיף להפיק תועלת מיסודות תורת המטריצות שיוצגו בפרק זה.

בסעיף זה נתחיל מביסוס פורמלי של המושג עצמו, ונציג כמה מוסכמות סימון נוחות. כזכור, מטריצה מסדר $m \times n$ (קרי: $m$ על $n$) מעל שדה מסוים היא אוסף של $mn$ סקלרים בשדה זה הערוכים בטבלה בת $m$ שורות ו־ $n$ עמודות. לסקלרים המופיעים במטריצה נקרא **איברי המטריצה** או **רכיבי המטריצה**.

כל ההגדרות והטענות שנבסס בפרק זה תקפות בלא תלות בשדה שמעליו נעבוד, ולכן נרשה לעצמנו לומר, למשל, "מטריצה מסדר $m \times n$" במקום "מטריצה מסדר $m \times n$ מעל שדה כלשהו/מסוים"; בכל עת שבה נעסוק בטענות על אודות מטריצות וסקלרים - תמיד נניח במובלע כי כל רכיבי המטריצות והסקלרים כולם נלקחים מאותו השדה. אם לא נציין אחרת, בכל הדוגמאות הקונקרטיות שנביא, השדה שמעליו נעבוד יהיה שדה המספרים הממשיים.

**דוגמה**

המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ -7 & 12 & 3 \end{bmatrix}$$

היא מטריצה מסדר $3 \times 3$.

ישנן כמה דרכים לציון רכיביה של מטריצה. ניתן לעשות זאת באופן מפורש, כפי שעשינו בדוגמה דלעיל. באופן כללי:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

היא מטריצה מסדר $m \times n$. ◄

כאשר נרצה להדגיש בסימון עצמו את סדר המטריצה, $m \times n$, נרשום $A_{m \times n}$ במקום $A$ בלבד.

לתיאור מטריצה באמצעות אות בודדת משתמשים בדרך כלל באותיות לטיניות גדולות, כגון $A$. את רכיבי המטריצה מקובל לסמן באותיות הלטיניות הקטנות המתאימות, למשל $a_{ij}$, או באותיות היווניות הקטנות המתאימות, למשל $\alpha_{ij}$.

במטריצה הרשומה לעיל, האיבר הנמצא בשורה הראשונה בעמודה השנייה הוא $a_{12}$, ואילו האיבר הנמצא בשורה השנייה בעמודה הראשונה הוא $a_{21}$. באופן כללי, איבר המטריצה הנמצא בשורה ה־ $i$ ובעמודה ה־ $j$ הוא $a_{ij}$. לאיבר זה נקרא בהמשך האיבר ה־ $(i,j)$ או הרכיב ה־ $(i,j)$ של המטריצה. כמובן, יש במטריצה איבר כזה רק עבור $i$ ו־ $j$ המקיימים $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

**הערה**

הסימון $a_{ij}$ הוא קיצור של הסימון המדויק יותר $a_{i,j}$, אך האחרון נחוץ רק כשעוסקים במטריצות גדולות מאוד. למשל, אם $A$ מסדר $30 \times 20$, אזי הסימון $a_{112}$ אינו חד משמעי - הוא עשוי להצביע על האיבר $a_{11,2}$, או על האיבר $a_{1,12}$. במקרים כאלה יש להיזהר ולציין במדויק את האיבר שאליו מכוונים. עם זאת, עבור מטריצות קטנות, שבהן נעסוק לרוב, אין חשש מבלבול מסוג זה, ונוח יותר להשתמש בסימון $a_{ij}$.

בדרך רישום קצרה ומקובלת עבור מטריצות מסמנים את המטריצה הרשומה למעלה גם כך:

$$A = \left[a_{i,j}\right]_{m \times n}$$

כאשר אין חשש לחוסר בהירות, מוותרים על אִזכור הסדר ורושמים רק $\left[a_{i,j}\right]$.

אם $A$ מטריצה, אז את הרכיב ה־ $(i,j)$ של המטריצה נציין גם ב־ $[A]_{i,j}$ (או ב־ $[A]_{ij}$, אם אין חשש לבלבול). כלומר, אם $A = \left[a_{i,j}\right]_{m\times n}$, אז $[A]_{i,j} = a_{ij}$ לכל זוג אינדקסים $i,j$. סימון זה מאפשר לחסוך במתן שמות מראש (כגון $a_{i,j}$) לאיברי המטריצה.

**שאלה 3.1.1**

בכל אחד מן הסעיפים הבאים, הציגו את המטריצה באופן מפורש ומצאו מהו האיבר $[A]_{2,3}$.

א. $A = \left[a_{i,j}\right]_{m\times n}$ כאשר נתון:

$m = 3,\ n = 2$ ו־ $a_{1,1} = 2,\ \ a_{2,1} = 3,\ \ a_{3,1} = -3,\ \ a_{1,2} = 0,\ \ a_{2,2} = 5,\ \ a_{3,2} = 7$.

ב. $A = \left[2^{i+j}\right]_{3\times 3}$.

ג. $A = \left[a_{i,j}\right]_{m\times n}$ כאשר נתון:

$m = 2,\ n = 3$ ו־ $a_{1,1} = 2,\ \ a_{1,2} = 3,\ \ a_{1,3} = -3,\ \ a_{2,1} = 0,\ \ a_{2,2} = 5,\ \ a_{2,3} = 7$.

ד. $A = \left[2^{i+j}\right]_{m\times n}$.

**התשובה בעמוד 299**

לאחר שביססנו את הסימונים עבור מטריצה בודדת, נגדיר שוויון בין מטריצות.

**הגדרה 3.1.1 שוויון מטריצות**

שתי מטריצות $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ (מעל אותו שדה), הן **שוות זו לזו** אם מתקיים:

א. שתי המטריצות הן מאותו סדר, כלומר:

$$m=p,\ n=q$$

ב. האיברים המתאימים בשתי המטריצות שווים זה לזה. כלומר, לכל $i$ ו־$j$ המקיימים $1\le i\le m$, $1\le j\le n$:

$$a_{ij}=b_{ij}$$

אם המטריצות $A$ ו־$B$ שוות זו לזו נרשום $A=B$; אחרת נרשום $A\neq B$.

**דוגמאות**

א. $$\begin{bmatrix}0&1\\2&-1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&1&0\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

כי המטריצות אינן מאותו סדר.

ב. $$\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix}$$

כאן המטריצות הן מאותו סדר, ואפילו כל איבר של אחת מהן שווה לאיזשהו איבר של האחרת, ובכל זאת המטריצות שונות, כי האיבר ה־$(1,2)$, למשל, במטריצה משמאל הוא 4 ובמטריצה שמימין הוא 2.

ג. נבדוק באילו תנאים מתקיים השוויון:

$$\begin{bmatrix}0&1\\2&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y&z\\u&0\end{bmatrix}$$

ראשית נבחין כי שתי המטריצות הן מאותו סדר. מהשוואת האיברים המתאימים נקבל כי השוויון מתקיים אם ורק אם:

$$y=0$$
$$z=1$$
$$u=2$$
$$x=0$$

**שאלה 3.1.2**

מצאו את כל המספרים הממשיים $x,y,z,u$ שעבורם מתקיים השוויון

$$\begin{bmatrix}0&x\\u&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z&y\\y&x^2\end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 299**

# 3.2 על שורות ועמודות

בפרקים הקודמים, כאשר עסקנו בוקטורים, ראינו אותם כשורות בהקשרים מסוימים, ובהקשרים אחרים - כעמודות. בסעיף זה נבסס הגדרות מדויקות יותר.
ראשית נדון במטריצות בנות שורה/עמודה בודדת.

---

**הגדרה 3.2.1 מטריצת שורה/עמודה**

א. מטריצה מסדר $1 \times n$ נקראת **וקטור שורה** (מסדר $n$) או **מטריצת שורה** (מסדר $n$).

ב. מטריצה מסדר $m \times 1$ (כלומר, מטריצה שיש בה עמודה אחת בלבד) נקראת **וקטור עמודה** (מסדר $m$) או **מטריצת עמודה** (מסדר $m$).

---

**הערה**

מעתה נאמץ את המוסכמה הבאה: אם נתון וקטור מאורך $n$, ולא מצוין במפורש כי זהו וקטור שורה, אזי נראה את הוקטור הזה כוקטור **עמודה** - כלומר, כמטריצה מסדר $n \times 1$.

בהינתן מטריצה, לעיתים נרצה להתייחס לעמודה או לשורה מסוימת בתוכה:

---

**הגדרה 3.2.2**

- את השורה ה־ $i$ של מטריצה $A$ נסמן ב־ $[A]_i^r$.[1]
- את העמודה ה־ $j$ של מטריצה $A$ נסמן ב־ $[A]_j^c$.[2]

---

כלומר, אם $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$ ומתקיים $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$, אזי:

$$[A]_i^r = [a_{i1}, \ldots, a_{in}]$$

$$[A]_j^c = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

בעזרת סימון זה נוכל לראות מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ כמורכבת מ־ $m$ וקטורי שורה, שכל אחד מהם מסדר $n$,

$$A = \begin{bmatrix} [A]_1^r \\ [A]_2^r \\ \vdots \\ [A]_m^r \end{bmatrix}$$

1 האות r נבחרה לציון המילה Row - שורה.

2 האות c נבחרה לציון המילה Column - עמודה.

או כמורכבת מ־ $n$ וקטורי עמודה, שכל אחד מהם הוא מסדר $m$:

$$A = \left[[A]_1^c, [A]_2^r, \ldots, [A]_n^r\right]$$

שימו לב, מהגדרה 3.2.1 נובע כי עבור $n \neq 1$, וקטור שורה מסדר $n$ לעולם אינו שווה לוקטור עמודה מסדר $n$, אפילו אם רכיביהם שווים בהתאמה:

$$\left[a_1, \ldots, a_n\right] \neq \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

עם זאת, כאשר נתון וקטור (עמודה) מסוים, לעיתים כדאי לראות אותו דווקא כוקטור שורה (כלומר, להתבונן בוקטור השורה בעל אותם הרכיבים, באותו הסדר), ולהפך. לכן נרצה דרך סימון נוחה למעבר מוקטור השורה

$$\left[a_1, \ldots, a_n\right]$$

לוקטור העמודה:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

יתר על כן, בהינתן מטריצה מסוימת, לעיתים נרצה להעמיד את המטריצה כולה על צידה, ולעבור למטריצה שבה תפקידי **כל** העמודות והשורות התחלפו. לצרכים אלה נגדיר:

---

**הגדרה 3.2.3 המטריצה המשוחלפת**

תהי $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$. **המטריצה המשוחלפת** של $A$ היא המטריצה מסדר $n \times m$ אשר האיבר ה־ $(i, j)$ שלה הוא האיבר ה־ $(j, i)$ של המטריצה $A$.

את המטריצה המשוחלפת של $A$ מסמנים ב־ $A^t$.[3]

---

שימו לב, אם $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, אז לכל $1 \leq i \leq m$ ו־ $1 \leq j \leq n$ מתקיים:

$$\left[A^t\right]_{ji} = a_{ij}$$

בכתיב מפורש, אם:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3 $t$ היא ראש התיבה transposed, שהיא הכינוי הלועזי לתואר "משוחלף".

אז:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

שימו לב, השורות של $A^t$ הן העמודות של $A$, והעמודות של $A^t$ הן השורות של $A$, בסדר המתאים.

**דוגמה**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

באמצעות שחלוף נוכל לעבור בנקל בין וקטורי שורה לוקטורי עמודה, שהרי:

$$\left[a_1,\ldots,a_n\right]^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^t = \left[a_1,\ldots,a_n\right]$$

(ודאו!) ◄

**שאלה 3.2.1**

הוכיחו את השוויונות הבאים:

א. $[A^t]_i^r = \left([A]_i^c\right)^t$

ב. $[A^t]_j^c = \left([A]_j^r\right)^t$

**התשובה בעמוד 299**

שימו לב, אם נשחלף מטריצה פעמיים, נחזור למטריצה המקורית. כלומר:

**טענה 3.2.4**

לכל מטריצה $A$, $\left(A^t\right)^t = A$.

**הוכחה**

(1) אם $A$ היא מטריצה מסדר $m \times n$, אז $A^t$ היא מטריצה מסדר $n \times m$, ולכן $(A^t)^t$ היא מטריצה מסדר $m \times n$, כלומר $A$ ו־ $(A^t)^t$ הן מטריצות מאותו סדר.

(2) האיבר ה־$(i,j)$ של $(A^t)^t$ הינו האיבר ה־$(j,i)$ של $A^t$, שהוא האיבר ה־$(i,j)$ של $A$. כלומר, האיבר ה־$(i,j)$ של $(A^t)^t$ הינו האיבר ה־$(i,j)$ של $A$.

מ־(1) ו־(2) נקבל $(A^t)^t = A$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.2.2**

הדגימו את נכונות טענה 3.2.4 עבור המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, על־ידי כתיב מפורש של $A^t, (A^t)^t$.

**התשובה בעמוד 300**

עד כה עסקנו בעמודות ושורות. עבור מטריצות שבהן מספר השורות שווה למספר העמודות, נוכל לבחון גם אלכסונים. נגדיר:

---

**הגדרה 3.2.5 מטריצה ריבועית; אלכסון ראשי; אלכסון משני**

א. מטריצה שבה מספר השורות שווה למספר העמודות (נניח, מסדר $n \times n$), מכונה **מטריצה ריבועית (מסדר $n$)**.

ב. ה־$n$־יה $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ של איברי המטריצה הריבועית $\left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ מכונה בשם **האלכסון הראשי** (ראו איור).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ג. ה־$n$־יה $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1})$ של איברי המטריצה הריבועית $\left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ מכונה בשם **האלכסון המשני** (ראו איור).

$$\begin{bmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n,1} & & & \end{bmatrix}$$

---

למטריצה המתלכדת עם המטריצה המשוחלפת שלה יש חשיבות מיוחדת.

---

**הגדרה 3.2.6 מטריצה סימטרית**

מטריצה $A$ נקראת **סימטרית** אם $A^t = A$.

---

**שאלה 3.2.3**

א. הוכיחו שאם $A$ היא מטריצה סימטרית, אז $A$ היא בהכרח מטריצה ריבועית.

ב. הראו שלא כל מטריצה ריבועית היא סימטרית.

**התשובה בעמוד 300**

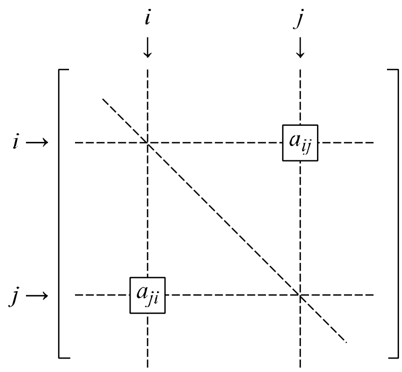
נבהיר את מקור השם "סימטרית". נתבונן במטריצה $A=\left[a_{ij}\right]$ . על־פי הגדרת $A^t$ ,

$$\left[A^t\right]_{ij}=a_{ji} \tag{1}$$

ולכן פירוש השוויון $A^t = A$ הוא:

$$a_{ji}=\left[A^t\right]_{ij}=\left[A\right]_{ij}=a_{ij} \tag{2}$$

האיברים $a_{ij}$ ו־ $a_{ji}$ במטריצה $A$ נמצאים במקומות סימטריים ביחס לאלכסון הראשי:



הסימטריה של $A$ פירושה אפוא שוויון האיברים הנמצאים במקומות סימטריים ביחס לאלכסון הראשי. כלומר, $A$ סימטרית אם ורק אם $a_{ij}=a_{ji}$ לכל $i,j$.

**שאלה 3.2.4**

תהי $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ מטריצה ריבועית שכל איבריה, פרט לאיברי האלכסון הראשי, הם אפסים. הוכיחו כי $A$ סימטרית.

**התשובה בעמוד 300**

## 3.3 חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר

בסעיף הקודם עסקנו במטריצות בודדות ובאופן שבו מאורגנים רכיביהן. כעת נגדיר פעולות על מטריצות שלמות. אך תחילה:

---

**סימון 3.3.1**

יהיו $m,n$ מספרים טבעיים, ויהי $F$ שדה. נסמן ב־ $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ את אוסף כל המטריצות מסדר $m\times n$ מעל $F$,[1] וב־ $\mathbf{M}_n(F)$ את אוסף המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל $F$. (כלומר, $\mathbf{M}_n(F)=\mathbf{M}_{n\times n}(F)$.)

---

על הקבוצה $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, כאשר $F$ שדה כלשהו, נגדיר פעולת חיבור, כך:

---

**הגדרה 3.3.2 חיבור מטריצות**

תהיינה $A,B\in\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, ונסמן $A=\left[a_{ij}\right],\ B=\left[b_{ij}\right]$. הסכום $A+B$ הוא המטריצה ב־ $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ המוגדרת על־ידי:

$$A+B\overset{\text{def}}{=}\left[(a_{ij}+b_{ij})\right]_{m\times n}$$

לפי הגדרה זו, חיבור מטריצות מתבצע רכיב־רכיב - כלומר האיבר ה־ $(i,j)$ במטריצה $A+B$ הוא סכום איברי $(i,j)$ של המטריצות $A$ ו־ $B$, כלומר $a_i+b_i$.

---

**דוגמאות**

א.
$$\begin{bmatrix}2&-3&0\\1&-1&0\\0&-4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&5&0\\-1&1&3\\5&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&3\\5&1&12\end{bmatrix}$$

ב. הסכום
$$\begin{bmatrix}1&2\\4&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&0&3\\2&2&5\end{bmatrix}$$

אינו מוגדר, שכן המטריצות המופיעות בו אינן מאותו סדר. ◀

שימו לב, אם נציג מטריצות לפי שורותיהן,

$$A=\begin{bmatrix}[A]_1^r\\ [A]_2^r\\ \vdots\\ [A]_m^r\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}[B]_1^r\\ [B]_2^r\\ \vdots\\ [B]_m^r\end{bmatrix}$$

1 סימון אלטרנטיבי, קומפקטי יותר, הוא $\mathbf{M}_{m\times n}^F$.

אזי:

$$A+B=\begin{bmatrix} [A]_1^r & + & [B]_1^r \\ [A]_2^r & + & [B]_2^r \\ & \vdots & \\ [A]_m^r & + & [B]_m^r \end{bmatrix}$$

ובדומה לכך:

$$A+B=\left[[A]_1^c+[B]_1^c,\ldots,[A]_n^c+[B]_n^c\right]$$

**שאלה 3.3.1**

חשבו:

א. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ב. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 300**

**שאלה 3.3.2**

נתבונן בשוויון:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y & z \\ 2x & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u & 2u \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

מצאו את כל ערכי $x$, $y$, $z$, $u$ שעבורם הוא מתקיים.

**התשובה בעמוד 301**

**שאלה 3.3.3**

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ \delta & \gamma & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta & 1 \\ 2\gamma & 2\delta & 1 \end{bmatrix}$$

עבור אילו ערכים של הסקלרים הממשיים $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ מתקיים השוויון דלעיל?

**התשובה בעמוד 301**

---

**טענה 3.3.3 תכונות החיבור**

פעולת החיבור על הקבוצה $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ מקיימת:

א. **סגירות**: לכל $A,B\in\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, $A+B\in\mathbf{M}_{m\times n}(F)$

ב. **חילופיות**: לכל $A,B\in\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, $A+B=B+A$ **קיבוציות**:
לכל $A,B,C\in\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, $(A+B)+C=A+(B+C)$

ג. **קיום איבר ניטרלי**: תהי $O_{m\times n}$ המטריצה ב־$\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ שכל איבריה אפסים. למטריצה זו נקרא **מטריצת האפס** מסדר $m \times n$ מעל $F$.[2] המטריצה $O_{m\times n}$ ניטרלית ביחס לחיבור.[3]

ד. **קיום איברים נגדיים**: לכל מטריצה $A$ ב־$\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ קיימת מטריצה, שתסומן $-A$, המקיימת:

$$A + (-A) = (-A) + A = 0$$

**הוכחה**

נסמן:

$$C = \left[c_{ij}\right] \quad , \quad B = \left[b_{ij}\right] \quad , \quad A = \left[a_{ij}\right]$$

א. לפי הגדרת החיבור ברור שאם $A$ ו־$B$ שתיהן מסדר $m \times n$, אזי מוגדרים הסכומים $A+B$ ו־$B+A$, והם מטריצות מסדר $m\times n$.

ב. האיבר ה־$(i,j)$ של $A+B$ הוא:

$$a_{ij} + b_{ij}$$

והאיבר ה־$(i,j)$ של $B+A$ הוא:

$$b_{ij} + a_{ij}$$

אך מאחר שחיבור סקלרים הוא חילופי, מתקיים

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

לכל $1 \le i \le m$ ו־$1 \le j \le n$. כלומר $A + B = B + A$.

ג. לפי הגדרת החיבור ברור שאם $A$, $B$ ו־$C$ שלושתן מסדר $m\times n$, אז גם $(A+B)$, $(B+C)$ וכן $(A+B)+C$ ו־$A+(B+C)$ הן מטריצות מאותו סדר.
האיבר ה־$(i,j)$ של $(A+B)+C$ הוא:

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$$

והאיבר ה־$(i,j)$ של $A+(B+C)$ הוא:

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

עתה, לפי קיבוציות חיבור הסקלרים:

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$$

2 כאשר אין חשש לאי־בהירות, תסומן המטריצה $O_{m\times n}$ סתם $O$.
3 וכפי שלמדתם בפרק 1, מטריצה זו היא בהכרח האיבר הניטרלי היחיד ביחס לחיבור בקבוצה $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ - משפט 1.1.6.

וזאת - לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$. כלומר,

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

ד. לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$ מתקיים:

$$a_{ij} + 0 = 0 + a_{ij} = a_{ij}$$

ולכן:

$$A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$$

כלומר $O_{m\times n}$ היא ניטרלית ביחס לחיבור מטריצות (מסדר $m \times n$).

ה. נסמן ב־ $-A$ את המטריצה אשר האיבר ה־ $(i,j)$ שלה הוא $-a_{ij}$.
אז לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$a_{ij} + (-a_{ij}) = (-a_{ij}) + a_{ij} = 0$$

ולכן:

$$A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$$

**מ.ש.ל.**

**הערה**

תכונות החילופיות והקיבוציות שבמשפט זה ניתנות להכללה באופן דומה לדרך שבה מוכללות התכונות הדומות של חיבור איברים בשדה: הסכום של מספר סופי כלשהו של מטריצות מסדר $m \times n$ אינו תלוי בסדר המחוברים או במיקומם של הסוגריים. לא נביא כאן הוכחה פורמלית לעובדה זו, אך בכל זאת נרשה לעצמנו להסתמך עליה.

---

**הגדרה 3.3.4 כפל של מטריצה בסקלר**

תהי $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $F$, ויהי $t \in F$ סקלר. **המכפלה** $tA$ היא המטריצה:

$$tA = [ta_{ij}]$$

כלומר, במטריצה $tA$ האיבר ה־ $(i,j)$ הוא מכפלת האיבר ה־ $(i,j)$ של $A$ בסקלר $t$.

---

**דוגמה**

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ -1/2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

◀

**הערות**

א. אם $A$ הוא וקטור, אז המכפלה $tA$ אינה אלא המכפלה של ה־ $n$־יה המתאימה בסקלר $t$, כפי שהוגדרה בפרק 1, ואם $A$ הוא סקלר, דהיינו אם $A$ היא המטריצה מסדר $1\times 1$ שאת איברה היחיד נסמן ב $a$, אז המכפלה $tA$ אינה אלא הסקלר $ta$.

ב. שימו לב, הגדרנו כפל של סקלר רק **משמאל** במטריצה, ולא הגדרנו כפל מימין.

בסעיף 1.1 עסקנו בתכונות של פעולות על קבוצה מסוימת - פעולות המקבלות כקלט זוג איברים בקבוצה זו. פעולת הכפל בסקלר על מטריצות (ובפרט על וקטורים) אינה כזאת - הקלט שלה הוא מטריצה, שהיא איבר של $\mathbf{M}_{m\times n}(F)$, וסקלר, שהוא איבר של $F$. למרות הבדל זה, גם פעולה זו מקיימת שלל תכונות רצויות, המזכירות את התכונות הרצויות שבחנו עבור פעולות על קבוצה, כפי שמראה המשפט הבא:

**משפט 3.3.5 תכונות הכפל של מטריצה בסקלר**

פעולת הכפל בסקלר מקיימת:

א. לכל מטריצה $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ ולכל סקלר $t \in F$, מתקיים: $tA \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$

ב. לכל מטריצה $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ ולכל זוג סקלרים $s,t \in F$ מתקיים:

(i) $(s+t)A = sA + tA$

(ii) $(st)A = s(tA)$

ג. לכל זוג מטריצות $A,B \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$, ולכל $t \in F$ מתקיים: $t(A+B) = tA + tB$

ד. לכל מטריצה $A \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ מתקיים:

(i) $1 \cdot A = A$

(ii) $0 \cdot A = O$

(iii) $(-1)\cdot A = -A$

**הוכחה**

בכל חלקי ההוכחה שלהלן נסתמך על תכונות החיבור והכפל בשדה הסקלרים $F$.

נסמן $A = [a]_{ij}, B = [b]_{ij}$.

א. ברור מההגדרה.

ב. (i) לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$[(s+t)A]_{ij} = (s+t)a_{ij} = sa_{ij} + ta_{ij} = [sA]_{ij} + [tA]_{ij} = [sA+tA]_{ij}$$

לכן:

$$(s+t)A = sA + tA$$

(ii) לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$[(st)A]_{ij} = (st)[A]_{ij} = (st)a_{ij} = s(ta_{ij}) = s[tA]_{ij} = [s(tA)]_{ij}$$

לכן:

$$(st)A = s(tA)$$

ג. לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$[t(A+B)]_{ij} = t(a_{ij} + b_{ij}) = ta_{ij} + tb_{ij} = [tA]_{ij} + [tB]_{ij} = [tA+tB]_{ij}$$

לכן:

$$t(A+B) = tA + tB$$

ד. הטענה נובעת מכך שלכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

(i) $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$

(ii) $0 \cdot a_{ij} = 0$

(iii) $(-1)a_{ij} = -a_{ij}$

**מ.ש.ל.**

**הערה**

תכונות החיבור והכפל בסקלר של מטריצות דומות לתכונות החיבור והכפל בסקלר במרחב $F^n$. אין הדבר מפתיע, שהרי נוכל לראות כל וקטור ב־ $F^n$ כמטריצה בעלת עמודה בודדת, כלומר כוקטור.

**שאלה 3.3.4**

תהיינה $A$ ו־ $B$ שתי מטריצות כלשהן מאותו סדר ו־ $t$ סקלר כלשהו, שונה מאפס.
הוכיחו כי אם $tA = tB$, אז $A = B$.

**התשובה בעמוד 301**

---

**הגדרה 3.3.6 הפרש מטריצות**

תהיינה $A$ ו־ $B$ שתי מטריצות מאותו סדר. **ההפרש**, $A-B$, מוגדר על־ידי:

$$A - B \overset{\text{def}}{=} A + (-B)$$

---

**שאלה 3.3.5**

תהיינה $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}, \quad A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

הוכיחו כי:

א. $A - B = \left[a_{ij} - b_{ij}\right]_{m\times n}$

ב. המטריצה $A-B$ היא הפתרון היחיד של המשוואה $B + X = A$.

**התשובה בעמוד 302**

---

**משפט 3.3.7**

א. לכל מטריצה $A$ ולכל סקלר $s$, מתקיים: $(sA)^t = sA^t$

ב. לכל שתי מטריצות $A,B$ מאותו סדר: $(A+B)^t = A^t + B^t$

**שאלה 3.3.6**

הוכיחו את משפט 3.3.7.

**התשובה בעמוד 302**

**שאלה 3.3.7**

הוכיחו כי סכום של מטריצות סימטריות הוא מטריצה סימטרית.

**התשובה בעמוד 303**

# 3.4 כפל מטריצות

אילו נתבקשתם לנחש כיצד יוגדר כפל מטריצות, קרוב לוודאי שהייתם מנחשים הגדרה "טבעית", שלפיה המכפלה של שתי מטריצות $A$ ו־ $B$ מאותו סדר, מוגדרת בתור המטריצה המתקבלת מכפל האיברים המתאימים של שתי המטריצות $A$ ו־ $B$ (בדומה לחיבור).

הצעה זו אמנם טבעית ונוחה, ומתקבלת על הדעת, אולם הניסיון הראה שהשכר שבצד כפל כזה הוא מועט יחסית. פעולת הכפל שתוגדר כאן היא אחרת, בוודאי פחות טבעית בשלב זה ויותר מסובכת. תחילה נביא את הגדרת הכפל, לאחר מכן נבחן את תכונותיו, ובהמשך הפרק נביא דוגמה שמטרתה להראות את שימושיות ההגדרה. המוטיבציה המלאה להגדרת כלל הכפל תתברר בהמשך הקורס.

נִפְתח בהגדרת מכפלה של וקטור שורה בוקטור עמודה מאותו סדר.

---

**הגדרה 3.4.1**

יהיו

$$B_{n\times 1}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad A_{1\times n}=\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \end{bmatrix}$$

וקטור שורה ווקטור עמודה מאותו סדר, מעל שדה מסוים.

המכפלה

$$A_{1\times n}\cdot B_{n\times 1}$$ [1]

היא הסקלר

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

כלומר:

$$A_{1\times n}B_{n\times 1}=\begin{bmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

למכפלה מסוג זה קוראים **מכפלה סקלרית**.

---

נוכל לתאר את המכפלה הסקלרית בתמציתיות, בלא לסמן מראש את איברי הוקטורים, כך:

$$AB=\sum_{i=1}^{n}[A]_{1i}[B]_{i1}$$

שהרי $[B]_{i1}=b_i$ ⋅ $[A]_{1i}=a_i$ לכל $i$ (ודאו!).

---

1 לרוב נשמיט את סימן הכפל, ונרשום בקצרה $A_{1\times n}B_{n\times 1}$ במקום $A_{1\times n}\cdot B_{n\times 1}$.

שימו לב, המכפלה של וקטור עמודה בוקטור שורה מוגדרת רק כאשר שניהם מאותו סדר, ותוצאת מכפלה זו היא **סקלר**.[2] לחישוב סקלר זה יש לכפול את האיברים המתאימים של שני הוקטורים ולסכם.

נדגים:

$$[3,-1,2]\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}=3\cdot1+(-1)\cdot3+2\cdot3=6$$

**שאלה 3.4.1**

חשבו:

$$[5,6,0]\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 303**

ההגדרה של כפל וקטור שורה בוקטור עמודה מאותו סדר היא מקרה פרטי של ההגדרה הכללית של כפל מטריצות (שאותה נביא מיד). המכפלה, $AB$, תוגדר רק כאשר מספר ה**עמודות** של הגורם **השמאלי**, $A$, שווה למספר ה**שורות** של הגורם ה**ימני**, $B$. לפיכך, אם $A$ היא מטריצה מסדר $m\times n$, ואם $B$ היא מטריצה מסדר $p\times q$, אז המכפלה $AB$ תוגדר רק אם $n=p$. כך, למשל, אפשר יהיה לכפול $A_{2\times3}B_{3\times7}$ או $A_{1\times5}B_{5\times3}$, ולעומתן מכפלות כגון $A_{3\times4}B_{2\times5}$ או $A_{1\times2}B_{1\times2}$ לא תוגדרנה.

שימו לב, במקרה הפרטי שבהגדרה 3.4.1, של כפל וקטור שורה $A_{1\times n}$ בוקטור עמודה $B_{n\times1}$, אורך וקטור השורה $A_{1\times n}$ אכן שווה לאורך וקטור העמודה $B_{n\times1}$.

---

**הגדרה 3.4.2 מכפלת מטריצות**

תהיינה $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ו־ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times q}$, שתי מטריצות מהסדרים הנקובים. ה**מכפלה**, $A_{m\times n}\cdot B_{n\times q}$,[3] היא מטריצה מסדר $m\times q$, אשר האיבר ה־$(i,j)$ שלה, כאשר $1\le j\le q$, $1\le i\le m$, הוא מכפלת וקטור השורה ה־$i$ של $A$ בוקטור העמודה ה־$j$ של $B$.

אם נסמן $C=AB$, אז לכל $1\le i\le m$ ו־ $1\le j\le q$,

$$[C]_{ij}=[A]_i^r\,[B]_j^c=\left[a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in}\right]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

---

2 שימו לב, בשלב זה הגדרנו רק את המכפלות שבהן הגורם הראשון (השמאלי) הוא וקטור שורה והגורם השני (הימני) הוא וקטור עמודה.

3 לרוב נשמיט את סימן הכפל (וכן את סדרי המטריצות), ונרשום בקצרה $AB$ במקום $A\cdot B$.

האיור שלהלן מדגים את דרך קבלת האיבר ה־ $(i, j)$ במכפלה:

$$\text{שורה } i \rightarrow \begin{bmatrix} \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{עמודה } j}}{\begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{עמודה } j}}{\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \sum a_{ik} b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}} \leftarrow \text{שורה } i$$

נדגיש שוב את הקשר שבין הסדרים של $A$, $B$ ו־ $C$ : $AB = C$ : הכפל מוגדר רק כאשר מספר העמודות של $A$ שווה למספר השורות של $B$, ולמכפלה $C$ אותו מספר שורות כמו ל־$A$ ואותו מספר עמודות כמו ל־ $B$.

**דוגמה**

תהי:

$$A_{4\times5} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ותהי:

$$B_{5\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

המכפלה $A_{4\times5} \cdot B_{5\times2}$ מוגדרת, כי מספר העמודות של $A$ שווה למספר השורות של $B$ (5). המכפלה היא מטריצה $C = [c_{ij}]$ מסדר $4 \times 2$. נחשב איברים אחדים במטריצה המכפלה.

נתחיל בחישוב $c_{11}$:

איבר זה הוא מכפלת וקטור השורה הראשון של $A$ בוקטור העמודה הראשון של $B$, ולכן:

$$c_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 8$$

נחשב כעת את $c_{32}$:

לשם כך עלינו לכפול את וקטור השורה השלישי של $A$ בוקטור העמודה השני של $B$ :

$$c_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1/2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (\frac{1}{2}) = 10\frac{1}{2}$$

◀

**שאלה 3.4.2**

השלימו את חישוב המכפלה של שתי המטריצות בדוגמה דלעיל.

**התשובה בעמוד 303**

**שאלה 3.4.3**

חשבו את המכפלות הבאות (או קבעו כי המכפלה אינה מוגדרת):

א. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} =$

ב. $\begin{bmatrix} 1/2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} =$

ג. $\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} =$

ד. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} =$

ה. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} =$

ו. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} =$

ז. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} =$

ח. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$

ט. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$

י. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} =$

יא. $O_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$ [4]

יב. $A_{m\times n} \cdot O_{n\times p}$

**התשובה בעמוד 304**

4 תזכורת: $O_{m\times n}$ היא מטריצת האפס מסדר $m \times n$.

שימו לב למקרה המיוחד בחלק ו של שאלה 3.4.3 – תוצאת מכפלת עמודה (משמאל) בשורה (מימין) מאותו סדר, נותנת מטריצה ריבועית (מאותו הסדר של העמודה והשורה). זאת לעומת מכפלה שורה (משמאל) בעמודה (מימין) מאותו סדר, שתוצאתה סקלר בודד.

**שאלה 3.4.4**

א. תהיינה $A_{m\times n}, B_{p\times q}$ שתי מטריצות מהסדרים הנקובים. רשמו באילו תנאים על $m,n,p,q$ מוגדרות גם המכפלה $AB$ **וגם** המכפלה $BA$.

ב. בכל חלק של השאלה הקודמת נתבקשתם לחשב מכפלה של שתי מטריצות. בכל מקרה נקרא למטריצה השמאלית $A$ ולמטריצה הימנית $B$. קבעו באילו מבין החלקים א-י מוגדרת המכפלה $BA$, וכאשר היא מוגדרת – חשבו אותה ובדקו האם היא שווה ל־ $AB$.

ג. נניח ש־ $A$ ו־ $B$ הן שתי מטריצות שעבורן מוגדרות גם המכפלה $AB$ וגם המכפלה $BA$. נסחו מסקנה ביחס לקשר שבין אורך השורות לאורך העמודות של $AB$.

ד. האם כאשר גם $AB$ וגם $BA$ מוגדרות, בהכרח שתי המכפלות הן מטריצות מאותו סדר? אם כן – נמקו. אם לא – קבעו באילו תנאים על הסדרים של $A$ ו־ $B$ המכפלות $AB$ ו־ $BA$ הן מאותו סדר.

ה. מה תוכלו לומר על הסדר של מטריצה $A$ שעבורה מוגדרת המכפלה $A\cdot A$?

**התשובה בעמוד 307**

---

**למה 3.4.3**

תהיינה $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ , $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ונסמן

$$AB=C=\left[c_{ij}\right]_{m\times p}$$

אזי:

א. השורה ה־ $i$ של $AB$ היא מכפלת השורה ה־ $i$ של $A$ ב־ $B$:

כלומר

$$\left[C\right]_i^r=\left[A\right]_i^r\cdot B$$

ובמפורש:

$$[c_{i1},\dots c_{ip}]=[a_{i1},\dots a_{in}]B$$

ב. העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא מכפלת $A$ בעמודה ה־ $j$ של $B$:

כלומר

$$\left[C\right]_j^c=A\cdot\left[B\right]_j^c$$

ובמפורש:

$$\begin{bmatrix}c_{1j}\\ \vdots\\ c_{mj}\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{bmatrix}$$

**הוכחה**

א. עלינו להוכיח כי:

$$[c_{i1},\dots c_{ip}] = [a_{i1},\dots a_{in}]B \qquad (*)$$

באגף שמאל של (*) רשומה מטריצה מסדר $1 \times p$ (וקטור שורה). הרכיב ה־ $j$ של וקטור זה עבור $1 \le j \le p$ נתון על־ידי:[5]

$$c_{ij} = [A]_i^r\,[B]_j^c$$

באגף ימין של (*) רשומה המכפלה של מטריצה מסדר $1 \times n$ במטריצה $B$, שהיא מסדר $n \times p$. מכאן שהמכפלה מוגדרת והיא מטריצה מסדר $1 \times p$ (וקטור שורה). על־פי הגדרת הכפל, הרכיב ה־ $j$ של וקטור זה הוא $[A]_i^r\,[B]_j^c$, ומכאן שוקטורי השורה הרשומים בשני האגפים של (*) אכן שווים ביניהם.

ב. עלינו להוכיח כי:

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \qquad (**)$$

באגף שמאל של (**) רשום וקטור עמודה מסדר $m$, ובאגף ימין של (**) רשומה המכפלה של מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ במטריצה מסדר $n \times 1$. המכפלה, אם כן, היא מטריצה מסדר $m \times 1$, דהיינו וקטור עמודה מסדר $m$. נראה שרכיביהם של שני וקטורי העמודה שווים ביניהם.

הרכיב ה־ $i$ של וקטור העמודה הרשום באגף שמאל הוא:

$$c_{ij} = [A]_i^r\,[B]_j^c$$

הרכיב ה־ $i$ של וקטור העמודה הרשום באגף ימין הוא:

$$[A]_i^r\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = [A]_i^r\,[B]_j^c$$

**מ.ש.ל.**

את תוכן למה 3.4.3 ניתן להמחיש כך:

$$AB = \begin{bmatrix} A[B]_1^c & \cdots & A[B]_p^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A]_1^r\,B \\ \vdots \\ [A]_m^r\,B \end{bmatrix}$$

5 על פי הגדרת הכפל.

כמסקנה מיידית נקבל:

**מסקנה 3.4.4**

א. אם השורה ה־ $i$ של $A$ היא שורת אפסים, אז גם השורה ה־ $i$ של $AB$ היא שורת אפסים.

ב. אם העמודה ה־ $j$ של $B$ היא עמודת אפסים, אז גם העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא עמודת אפסים.

**הוכחה**

א. נניח שהשורה ה־ $i$ של המטריצה $A_{m\times n}$ היא שורת אפסים.
תהי $B$ מטריצה כלשהי מסדר $n \times p$. נסמן $C = AB$.
על־פי למה 3.4.3 מתקיים:

$$[C]_i^r = [A]_i^r B = O_{1\times n} \cdot B_{n\times p}$$

אולם על־פי סעיף יא של שאלה 3.4.3 מתקיים:

$$O_{1\times n} \cdot B_{n\times p} = O_{1\times p} = [0\ldots0]$$

ולכן השורה ה־ $i$ של $C$ היא שורת אפסים, כטענתנו.

ב. נניח שהעמודה ה־ $j$ של המטריצה $B_{n\times p}$ היא עמודת אפסים. אם $A$ היא מטריצה כלשהי מסדר $m \times n$, אז העמודה ה־ $j$ של המטריצה $C = AB$ היא:[6]

$$[C]_j^c = A_{m\times n}[B]_j^c = A_{m\times n}O_{n\times 1} = O_{m\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

כלומר, העמודה ה־ $j$ היא עמודת אפסים, כטענתנו.[7]

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.4.5**

עבור $m$ ו־ $n$ נתונים, נסמן ב־ $E_{m\times n}^{(k,\ell)}$ את המטריצה מסדר $m \times n$ שכל איבריה פרט לאיבר ה־ $(k,\ell)$ הם אפסים והאיבר ה־ $(k,\ell)$ הוא 1.
כלומר:

$$E_{m\times n}^{(k,\ell)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{עמודה } \ell & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow k \text{ שורה} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

6 על פי למה 3.4.3.
7 על פי חלק יב של שאלה 3.4.3.

א. עבור מטריצה $B_{n\times p} = \left[b_{ij}\right]$, חשבו את:

$$E_{m\times n}^{(k,\ell)} \cdot B_{n\times p}$$

ב. עבור מטריצה $A_{q\times m} = \left[a_{ij}\right]$, חשבו את:

$$A_{q\times m} \cdot E_{m\times n}^{(k,\ell)}$$

ג. חשבו את:

$$E_{m\times n}^{(k,\ell)} \cdot E_{n\times m}^{(\ell,k)}$$

**התשובה בעמוד 308**

---

**טענה 3.4.5**

לכל שתי מטריצות $A, B$ שעבורן מוגדרת המכפלה $AB$ מתקיים:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

(כלומר $B^t A^t$ מוגדרת ושווה ל- $(AB)^t$).[8]

---

**הוכחה**

תהיינה $A$ מטריצה מסדר $m\times n$, ו- $B$ מטריצה מסדר $n\times p$. המטריצה $AB$ מוגדרת ומסדר $m\times p$, ולכן $(AB)^t$ מסדר $p\times m$. המטריצה $A^t$ היא מסדר $n\times m$ והמטריצה $B^t$ היא מסדר $p\times n$. לכן המכפלה $B^t A^t$ מוגדרת והיא מסדר $p\times m$. נותר להוכיח את השוויון $(AB)^t = B^t A^t$:

$$\left[(AB)^t\right]_{ij} = [AB]_{ji} = [A]_j^r [B]_i^c = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} [B^t]_{ik} [A^t]_{kj} = [B^t]_i^r [A^t]_j^c = [B^t A^t]_{ij}$$

הוכחנו כי האיברים המתאימים של $(AB)^t$ ו- $B^t A^t$ שווים זה לזה. לכן המטריצות שוות זו לזו.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.4.6**

א. הדגימו שתי מטריצות סימטריות שמכפלתן מוגדרת אך אינה סימטרית.

ב. הראו כי אם $A$ ו- $B$ הן מטריצות סימטריות, אז $AB$ היא סימטרית אם ורק אם $AB = BA$.

**התשובה בעמוד 310**

8 שימו לב להיפוך בסדר הגורמים: סדר המכפלה $AB$ אחרי השחלוף הופך להיות $B^t A^t$. (בבקשה להתאים גודל אות.)

# 3.5 תכונות כפל מטריצות

בסעיף זה נבסס כמה תכונות יסודיות של כפל מטריצות.

**משפט 3.5.1 קיבוציות הכפל**

תהיינה $C_{p\times q}$, $B_{n\times p}$, $A_{m\times n}$ מטריצות מהסדרים הנקובים. אז המכפלות $(AB)C$ ו־ $A(BC)$ מוגדרות שתיהן ומתקיים:

$$(AB)C = A(BC)$$

**הערה**

ההוכחה להלן כרוכה במניפולציה בסכומים כפולים, ובשל כך היא מספקת הזדמנות לתרגול מיומנות השימוש בסימן הסכימה. הוכחה נוספת, אלגנטית יותר, תינתן בהמשך.

**הוכחה**

לפי הסדרים הנתונים, בדקו בעצמכם כי המכפלות $(AB)C$ ו־ $A(BC)$ מוגדרות וכי הן מטריצות מסדר $m \times q$.

נראה כי:

$$(AB)C = A(BC)$$

יהיו $i$ ו־ $j$ מספרים כלשהם המקיימים $1 \le j \le q$, $1 \le i \le m$.

עלינו להוכיח כי:

$$\left[(AB)C\right]_{ij} = \left[A(BC)\right]_{ij}$$

אכן:

$$\left[(AB)C\right]_{ij} = \left[AB\right]_i^r \cdot \left[C\right]_j^c = \sum_{k=1}^{p} \left[AB\right]_{ik} \left[C\right]_{kj} \tag{1}$$

לכל $1 \le k \le p$ מתקיים:

$$\left[AB\right]_{ik} = \left[A\right]_i^r \left[B\right]_k^c = \sum_{\ell=1}^{n} \left[A\right]_{i\ell} \left[B\right]_{\ell k}$$

נציב את התוצאה האחרונה בסכום (1) ונקבל:

$$\left[(AB)C\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{\ell=1}^{n} \left[A\right]_{i\ell} \left[B\right]_{\ell k} \right) \left[C\right]_{kj} \tag{2}$$

אבל לכל $1 \le k \le p$:

$$\sum_{l=1}^{n} \left( \left[A\right]_{il} \left[B\right]_{lk} \right) \left[C\right]_{kj} \overset{1}{=} \sum_{l=1}^{n} \left[A\right]_{il} \left[B\right]_{lk} \left[C\right]_{kj}$$

1 לכפול סכום בקבוע משמעו לכפול כל מחובר באותו קבוע ("חוק הפילוג" בשדה).

נציב את התוצאה האחרונה בסכום (2) ונקבל:

$$\left[(AB)C\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj}\right) \qquad (3)$$

הסכום באגף ימין של (3) הוא סכום של $p$ מחוברים שכל אחד מהם הוא עצמו סכום של $n$ מחוברים. כדי להקל את הבנת ההוכחה, נרשום את הסכום ביתר פירוט.

[2] $$[A]_{i1}[B]_{11}[C]_{1j} + [A]_{i2}[B]_{21}[C]_{1j} + \ldots + [A]_{in}[B]_{n1}[C]_{1j} +$$

[3] $$+[A]_{i1}[B]_{12}[C]_{2j} + [A]_{i2}[B]_{22}[C]_{2j} + \ldots + [A]_{in}[B]_{n2}[C]_{2j} +$$

$$\vdots$$

[4] $$+[A]_{i1}[B]_{1p}[C]_{pj} + [A]_{i2}[B]_{2p}[C]_{pj} + \ldots + [A]_{in}[B]_{np}[C]_{pj}$$

אם במקום לסכם את כל המחוברים האלה לפי סדר הופעתם, שורה אחר שורה, נסכם ראשית את כל המחוברים הראשונים בכל שורה, אחריהם את השניים בכל שורה, וכך הלאה, נקבל:

[5] $$= \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}[A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj}\right)$$

$$= \left[A_{i1}\right]\cdot\sum_{k=1}^{p}[B]_{\ell k}[C]_{kj} + \left[A_{i2}\right]\cdot\sum_{k=1}^{p}[B]_{2k}[C]_{kj} + \ldots + \left[A_{in}\right]\cdot\sum_{k=1}^{p}[B]_{nk}[C]_{kj}$$

$$= [A]_{i1}\left([B]_1^r[C]_j^c\right) + [A]_{i2}\left([B]_2^r[C]_j^c\right) + \ldots + [A]_{in}\left([B]_n^r[C]_j^c\right)$$

$$= [A]_{i1}[BC]_{1j} + [A]_{i2}[BC]_{2j} + \ldots + [A]_{in}[BC]_{nj} = \left[A(BC)\right]_{ij}$$

נחבר את הקצוות של השוויון הארוך (3) ונקבל:

$$[(AB)C]_{ij} = [A(BC)]_{ij}$$

מאחר ש־ $i$ ו־ $j$ הם מספרים כלשהם המקיימים $1 \le j \le q$ , $1 \le i \le m$, הרי שבכך הוכחנו כי כל איבר במטריצה $(AB)C$ שווה לאיבר המתאים לו במטריצה $A(BC)$ ולכן המטריצות שוות.

**מ.ש.ל.**

2 המחובר המתאים ל־ $k = 1$.

3 המחובר המתאים ל־ $k = 2$.

4 המחובר המתאים ל־ $k = p$.

5 השוויון בין הביטוי בשורה זו לאגף ימין ב־(3) התקבל כתוצאה מהחלפת סדר הסכומים.

**הערות**

להבא נקצר בהוכחות מסוג זה ונרשום כך:

$$[(AB)C]_{ij} \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{p}[AB]_{ik}[C]_{kj}$$

הגדרת הכפל

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i\ell}[B]_{\ell k}\right)[C]_{kj}$$

הגדרת הכפל

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj}\right)$$

כלל הפילוג

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p}[A]_{i\ell}[B]_{\ell k}[C]_{kj}\right)$$

החלפת סדר הסכימה

$$\underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i\ell}\left(\sum_{k=1}^{p}[B]_{\ell k}[C]_{kj}\right) \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=1}^{n}[A]_{i\ell}[BC]_{\ell j}$$

חוק הפילוג            הגדרת הכפל

$$\underset{\uparrow}{=} [A(BC)]_{ij}$$

הגדרת הכפל

ב. לאור משפט 3.5.1, אם $C_{p\times q}$ ,$B_{n\times p}$ ,$A_{m\times n}$ הן מטריצות מהסדרים הנקובים, נוכל לדבר על המכפלה $ABC$ בלי לציין את מיקומם של הסוגריים.

ג. כמו כן, אם $A_1,\ldots,A_n$ הן $n$ מטריצות אשר אורך השורות בכל אחת מהן שווה לאורך העמודות של הבאה אחריה, נוכל לדבר על המכפלה

$$A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$$

בלי לציין את מיקומם של הסוגריים; באינדוקציה על $n$ ניתן להוכיח כי מיקומם של הסוגריים אינו משפיע על התוצאה.

ד. בסעיף 1.1 הגדרנו את המושג "פעולה קיבוצית" על קבוצה נתונה. כאן אין בפנינו פעולה על קבוצה ספציפית, שהרי כפל מטריצות אינו מוגדר על אוסף כל המטריצות מסדר מסוים, אלא רק עבור מטריצות מסדרים התואמים זה את זה, כפי שהגדרנו. ניתן לבסס הגדרות כלליות יותר שתאפשרנה לדון גם בתכונות (כגון קיבוציות) של פעולות שאינן מוגדרות על כל איברי קבוצה מסוימת, אך לא נעשה זאת כאן. בכל זאת, נרשה לעצמנו לומר כי פעולת הכפל היא קיבוצית, כאשר כוונתנו בכך היא שפעולה זו מקיימת בדיוק את השוויון הנטען בניסוח משפט 3.5.1 (עבור

מטריצות מסדרים מתאימים). בהמשך, נבסס תכונות נוספות, אנלוגיות לאלה שבחנו בפרק 1 (כגון פילוג הכפל מעל החיבור, קיום איבר יחידה, וכו') וגם עבור תכונות אלה נרשה לעצמנו להשתמש בשמות שאותם ביססנו שם. בכל מקרה, עבור כל אחת מהתכונות שנוכיח, נכתוב באופן מדויק למה כוונתנו.

**נעבור לשאלת החילופיות של כפל המטריצות:**

ראינו כבר בסעיף הקודם כי מכך ש־ $AB$ מוגדרת לא מתחייב שגם $BA$ מוגדרת. יתרה מזאת: אפילו כאשר $AB$ ו־ $BA$ שתיהן מוגדרות, הן אינן בהכרח מאותו סדר וממילא אינן בהכרח שוות זו לזו. מצאנו גם שעבור $A_{m\times n}$ ו־ $B_{p\times q}$, תנאי הכרחי ומספיק לכך ששתי המכפלות, $AB$ ו־ $BA$, תהיינה מאותו סדר הוא:

$$m = n = p = q$$

הווי אומר, השוויון $AB = BA$ עשוי להתקיים רק אם $A$ ו־ $B$ שתיהן מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

מסתבר שגם כאשר שתי המטריצות ריבועיות ומאותו סדר, השוויון לא בהכרח מתקיים.

**דוגמה**

כפי שראינו בשאלות 3.4.3, 3.4.4, עבור

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

מתקיים

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן $AB \neq BA$. ◀

למטריצות ריבועיות נקדיש סעיף נפרד בהמשך הפרק, ושם נחזור ונדון בשאלת חילופיות הכפל.

בין המטריצות מסדר $m \times n$ מצאנו מטריצה "ניטרלית" ביחס לחיבור: כזכור, לכל מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ מתקיים

$$A_{m\times n} + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$$

**האם קיימת מטריצה "ניטרלית" גם ביחס לכפל?**

השאלה היא האם קיימת מטריצה $X$ כך שלכל מטריצה $A$ מסדר $m \times n$ מתקיים:

$$XA_{m\times n} = A_{m\times n}X = A_{m\times n}$$

התשובה היא שאם $m \neq n$ אז לא קיימת מטריצה $X$ כזאת. התשובה לשאלה הבאה מכילה הוכחה לטענה זו.

**שאלה 3.5.1**

תהי $A_{m\times n}$ מטריצה מהסדר הנקוב. הוכיחו כי אם $m \neq n$ ואם $AX = A$, אז לא ייתכן כי $XA = A$.

**התשובה בעמוד 310**

אי לכך, מאחר שאיננו רוצים בינתיים למקד את הדיון במטריצות ריבועיות בלבד, נשנה את השאלה ונשאל כך: האם קיימות מטריצות $X$ ו־$Y$ המקיימות:

לכל $A$ מסדר $m \times n$, $AX = A$; לכל $A$ מסדר $m \times n$, $YX = A$?

לשאלה זו תשובה חיובית.

---

**הגדרה 3.5.2 מטריצת היחידה**

**מטריצת היחידה מסדר** $n$, שסימנה $I_n$, היא המטריצה הריבועית מסדר $n$ אשר כל איברי האלכסון הראשי שלה שווים ל־1 (איבר היחידה של השדה שמעליו אנו פועלים), וכל יתר איבריה הם אפסים. כלומר, $I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n}$ כאשר $\delta_{ij}$ מוגדר על־ידי:[6]

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

כאשר אין חשש לאי־בהירות בעניין סדר המטריצה רושמים פשוט $I$ במקום $I_n$, ומסמנים:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{bmatrix}^{7}$$

---

**דוגמאות**

למשל, עבור $n = 2$:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ועבור $n = 3$:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

▸

---

6 הסימון $\delta_{ij}$ הוא סימון מתמטי מקובל עבור הפונקציה המקבלת את הערך 1 כאשר $i = j$ ואת הערך 0 כאשר $i \neq j$. פונקציה זו מכונה "הדלתא של קרונקר" על שם המתמטיקאי הגרמני L. Kronecker (1891–1823).

7 זוהי שיטת סימון מקובלת שבה האפסים ה"גדולים" מעל ומתחת לאלכסון הראשי מציינים שכל האיברים המופיעים במקומות אלה הם אפסים.

**משפט 3.5.3**

לכל מטריצה $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ (מסדר $m \times n$) מתקיים:

א. $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$

ב. $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$

**הוכחה**

א. $I_m$ היא מטריצה מסדר $m \times m$ וממילא מוגדרת המכפלה $I_m A_{m \times n}$ והיא מסדר $m \times n$. נראה שלכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$ האיבר ה־ $(i, j)$ של $I_m A$ שווה לאיבר ה־ $(i, j)$ של $A$.

$$\left[I_m A\right]_{ij} = \left[I_m\right]_i^r \left[A\right]_j^c = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} a_{kj}$$

$$= \delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \ldots + \delta_{ii} a_{ij} + \ldots + \delta_{im} a_{mj}$$

$$= 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \ldots + 1 \cdot a_{ij} + \ldots + 0 \cdot a_{mj} = a_{ij} = \left[A\right]_{ij}$$

ב. את העובדה ש־ $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$ תוכיחו בשאלה הבאה.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.5.2**

הוכיחו כי $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$.

**התשובה בעמוד 311**

כמסקנה מיידית נקבל:

**מסקנה 3.5.4**

אם $A$ היא מטריצה ריבועית מסדר $n$, אזי:

$$AI_n = I_n A = A$$

בין חיבור מטריצות וכפל מטריצות מתקיים הקשר הבא:

**משפט 3.5.5 פילוג הכפל מעל החיבור**

**א. כלל הפילוג השמאלי:**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות מסדר $m \times n$ ו־ $C$ מטריצה מסדר $n \times p$. אזי:

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

**ב. כלל הפילוג הימני:**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות מסדר $m \times n$ ו־ $C$ מטריצה מסדר $p \times n$. אזי:

$$C \cdot (A + B) = CA + CB$$

**הוכחה**

א. נסמן $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ , $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ ו־ $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times p}$.
לכל $1\le j\le p$ ,$1\le i\le m$, נוכיח כי האיבר ה־ $(i,j)$ של $(A+B)C$ שווה לאיבר ה־ $(i,j)$ של $AC+BC$. השורה ה־ $i$ של $A+B$ היא:

$$\left[a_{i1}+b_{i1},a_{i2}+b_{i2},\dots,a_{in}+b_{in}\right]$$

העמודה ה־ $j$ של $C$ היא:

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{bmatrix}$$

ולכן האיבר ה־ $(i,j)$ במטריצה $(A+B)C$ הוא:

$$\left[(A+B)C\right]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}=[A]_i^r[C]_j^c+[B]_i^r[C]_j^c$$

$$=\left[AC\right]_{ij}+\left[BC\right]_{ij}=\left[AC+BC\right]_{ij}$$

את חלק ב של המשפט תוכיחו בשאלה הבאה.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.5.3**

הוכיחו את חלק ב של משפט 3.5.5.

**התשובה בעמוד 311**

**טענה 3.5.6**

תהיינה $A=\left[a_{ij}\right]$ , $B=\left[b_{ij}\right]$ מטריצות שעבורן מוגדרת המכפלה $AB$ , ויהי $t$ סקלר כלשהו. אז:

א. $t(AB)=(tA)B$

ב. $t(AB)=A(tB)$

**הוכחה**

נסמן $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ו־ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ , ויהיו $1\le i\le m$ ו־ $1\le j\le p$.

$$\left[t(AB)\right]_{ij}=t\left[AB\right]_{ij}=t\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}t\left(a_{ik}b_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(ta_{ik}\right)b_{kj}=\sum_{k=1}^{n}[tA]_{ik}[B]_{kj}$$

$$=\left[(tA)B\right]_{ij}$$

ראינו כי לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le p$:

$$[t(AB)]_{ij} = [(tA)B]_{ij}$$

כלומר:

$$t(AB) = (tA)B$$

בזאת הוכחנו את חלק א. חישוב דומה מוכיח את חלק ב.

**מ.ש.ל.**

נתבונן כעת במכפלה של מטריצת יחידה $I$ (מסדר כלשהו) בסקלר כלשהו $t$:

$$tI = t\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & & & 0 \\ & t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & t \end{bmatrix} \qquad (*)$$

מטריצה מהטיפוס הרשום באגף ימין של (*) נקראת **מטריצה סקלרית**, שכן ניתן לראות כפל מטריצה בסקלר ככפל המטריצה במטריצה סקלרית מתאימה. שהרי אם $A_{m\times n}$ מטריצה ו־ $t$ סקלר, אזי:

$$tA \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.5.3 על פי משפט}}}{=} t(I_m A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3.5.2 על פי שאלה}}}{=} (tI_m)A$$

כלומר, כפל $A$ בסקלר $t$, שקול לכפל $A$ במטריצה הסקלרית $tI$.

# 3.6 מטריצות ריבועיות

נתבונן ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ - אוסף כל המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל שדה נתון $F$. פעולת הכפל מוגדרת עבור כל זוג מטריצות בקבוצה זו. בסעיף זה נתמקד בתכונות פעולת הכפל על $\mathbf{M}_n(F)$. תחילה נסכם את התכונות שאותן הצגנו כבר:

---

**טענה 3.6.1**

א. הקבוצה $\mathbf{M}_n(F)$ סגורה ביחס לפעולת כפל מטריצות.

ב. פעולת הכפל על $\mathbf{M}_n(F)$ היא פעולה קיבוצית.

ג. מטריצת היחידה $I$ היא איבר ניטרלי ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ ביחס לפעולת הכפל.

---

**הוכחה**

א. לכל שתי מטריצות ריבועיות מסדר $n \times n$, $A$ ו־ $B$, מוגדרת המכפלה $AB$, ומהגדרת הכפל נובע שגם המכפלה היא מטריצה מסדר $n \times n$.

ב. על פי משפט 3.5.1.

ג. זהו תוכנה של מסקנה 3.5.4.

**מ.ש.ל.**

**הערה**

המטריצה $I$ היא אמנם המטריצה היחידה המקיימת

$$AI = IA = A$$

**לכל** $A$ ב־ $\mathbf{M}_n(F)$, אבל אין להסיק מכך כי עבור מטריצה **מסוימת** $A$, לא ייתכן שקיימת מטריצה $I'$, שונה מ־ $I$, המקיימת:

$$AI' = I'A = A$$

למשל, אם $A = O_{n\times n}$, אז לכל מטריצה ריבועית $I'$ מתקיים:

$$AI' = I'A = A \ \ (= O)$$

דוגמה אחרת: אם $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ואם $I' = A$ אז

$$AI' = I'A = A$$

(בדקו!).

נדון עתה בשאלת החילופיות של כפל מטריצות ריבועיות מסדר $n$. מצאנו כבר כי תנאי הכרחי ומספיק לכך ששתי המכפלות, $AB$ ו־ $BA$, תהיינה מוגדרות, ומאותו סדר, הוא ש־ $A$ ו־ $B$ תהיינה מטריצות ריבועיות מאותו סדר. אבל מכך ששתי המכפלות מוגדרות, ואפילו מכך שהן מאותו סדר, אין להסיק עדיין כי הן שוות זו לזו. ואמנם, הדגמנו כבר בסעיף הקודם זוג מטריצות ריבועיות $A$ ו־ $B$ מסדר $n$ שעבורן $AB \neq BA$, ומכאן שאפילו בקבוצה מצומצמת זו הכפל אינו חילופי. הנה דוגמה נוספת:

**שאלה 3.6.1**

נתונות המטריצות:

$$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$$

חשבו את $AB$ ואת $BA$ והראו כי $AB \neq BA$.

**התשובה בעמוד 311**

---

**הגדרה 3.6.2 מטריצות מתחלפות**

נאמר ששתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, $A$ ו־$B$, **מתחלפות זו עם זו** (או בקיצור, **מתחלפות**) אם:

$$AB = BA$$

במקרה זה נאמר גם כי $A$ מתחלפת עם $B$ (או $B$ מתחלפת עם $A$).

---

כבר מצאנו כי מטריצת היחידה מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית מאותו סדר, שהרי לכל $A$ (ריבועית מסדר $n$) מתקיים: $AI_n = I_nA = A$.

יתר על כן:

---

**מסקנה 3.6.3**

כל מטריצה **סקלרית** מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית $A$ מאותו הסדר.

כלומר, לכל מטריצה ריבועית $A$ מסדר $n$ ולכל סקלר $t$, מתקיים $(tI)A = A(tI)$.

---

**הוכחה**

הרכיב ה־$ij$ בשני האגפים הוא $t[A]_{i,j}$.

**מ.ש.ל.**

שימו לב, מטריצת היחידה היא מטריצה סקלרית, שכן $I = 1 \cdot I$, ולכן המסקנה האחרונה כוללת גם את המידע בדבר ההתחלפות של $I$ עם כל מטריצה ריבועית. כמו כן, מטריצת האפס מסדר $n$ היא מטריצה סקלרית, שכן $O = 0 \cdot I$, ולכן גם היא מתחלפת בכפל עם כל מטריצה ריבועית מאותו הסדר.

האם קיימות עוד מטריצות ריבועיות, פרט למטריצות הסקלריות, המתחלפות בכפל עם כל מטריצה ריבועית מסדר $n$? התשובה היא לא, כפי שמורה המשפט הבא.

---

**משפט 3.6.4**

תהי $C = \left[c_{ij}\right]$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.

אם $C$ מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית מסדר $n$, אז $C$ היא מטריצה סקלרית.

**הוכחה**

לכל $1 \le i,\ j \le n$, נסמן ב־$E^{(i,j)}$ את המטריצה הריבועית מסדר $n$, שכל איבריה פרט לאיבר ה־$(i,j)$ הם אפסים והאיבר ה־$(i,j)$ שלה הוא 1.[1]

$$E^{(i,j)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{עמודה } j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \quad \text{שורה} \\ \\ \\ \end{array}$$

יהי $1 \le i \le n$ ונתבונן במטריצה $E^{(i,i)}$. על־פי ההנחה, $C$ מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית מסדר $n$, ולכן בפרט:

$$E^{(i,i)}C = CE^{(i,i)} \tag{1}$$

לפי התשובה לחלק א של שאלה 3.4.5:

$$E^{(i,i)}C = \begin{bmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & & \end{bmatrix} \leftarrow i \quad \text{שורה} \tag{2}$$

לפי התשובה של חלק ב של אותה השאלה:

$$CE^{(i,i)} = \begin{bmatrix} & & c_{1i} & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & c_{ni} & & \end{bmatrix} \tag{3}$$

מהשוויון (1) נובע כי אגפי ימין של (2) ו־(3) שווים זה לזה, כלומר

$$\begin{bmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & c_{1i} & & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & c_{ni} & & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן בהכרח לכל $j$ המקיים $j \ne i$, מתקיים $c_{ij} = c_{ji} = 0$. מכאן נובע כי האיברים היחידים של $C$ העשויים להיות שונים מ־$0$, הם איברי האלכסון הראשי, וממילא:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn} \end{bmatrix}$$

1 במטריצות מטיפוס זה עסקתם בשאלה 3.4.5.

כדי להוכיח כי $C$ היא מטריצה סקלרית, נותר להוכיח כי:

$$c_{11} = c_{22} = \ldots = c_{nn}$$

יהי $1 \le i \le n$ ונוכיח כי $c_{ii} = c_{11}$. לשם כך ננצל את השוויון

$$E^{(i,1)}C = CE^{(i,1)}$$

שממנו נובע, בפרט, כי האיברים ה־ $(i,1)$ במטריצות שבשני האגפים שווים. אולם, האיבר ה־ $(i,1)$ שבאגף שמאל הוא:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_{11}$$

ואילו האיבר ה־ $(i,1)$ במטריצה באגף ימין הוא:

$$\begin{bmatrix} 0 & \ldots & c_{ii} & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_{ii}$$

ומכאן:

$$c_{11} = c_{ii}$$

הוכחנו אפוא שהמטריצה $C$ היא:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ & c_{11} & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & c_{11} \end{bmatrix}$$

ולכן $C$ היא מטריצה סקלרית.

**מ.ש.ל.**

לפי המשפט האחרון, אם $A$ היא מטריצה שאינה סקלרית, תמיד נוכל למצוא מטריצה $B$ שעבורה:

$$AB \neq BA$$

אולם קיימות גם מטריצות המתחלפות עם $A$ (למשל $A$ עצמה, $O$, $I$, וכל מטריצה סקלרית). בהינתן שתי מטריצות $A$ ו־ $C$, לא ידוע קריטריון כללי קל שעל פיו נוכל להכריע אם הן מתחלפות בלי לכפול ולבדוק, אך יש מקרים מיוחדים שבהם אפשר להסיק התחלפות בכפל מתוך תכונות אחרות. למשל, אם $A$ ו־ $B$ הן מטריצות סימטריות מסדר $n$ ואם $AB$ היא סימטרית, אז $A$ ו־ $B$ מתחלפות בכפל.[2] מקרה נוסף של מטריצות המתחלפות בכפל הן החזקות של מטריצה קבועה $A$.

2 ראו חלק ב של שאלה 3.4.6.

**הגדרה 3.6.5 חזקה של מטריצה ריבועית**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ויהי $n \geq 0$ מספר שלם.

**החזקה ה־ $n$ ־ית של** $A$, שסימנה $A^n$, מוגדרת באופן אינדוקטיבי כך:

עבור $n = 0$:

$$A^0 \overset{\text{def}}{=} I$$

עבור $n > 0$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

שימו לב, עבור $n = 1$ לפי הגדרה זו:

$$A^1 = A^0 \cdot A = IA = A$$

עבור $n = 2$:

$$A^2 = A^1 \cdot A = A \cdot A$$

עבור $n = 3$:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \left(A \cdot A\right) \cdot A$$

ובזכות קיבוציות כפל המטריצות נוכל לרשום:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

באופן כללי, עבור $n$ טבעי כלשהו:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{פעמים } n}$$

מקיבוציות הכפל נובע כי לכל $r$ ו־ $s$ שלמים אי־שליליים מתקיים:

$$A^s \cdot A^r = A^r \cdot A^s$$

**מסקנה 3.6.6**

אם $B$ ו־ $C$ הן חזקות של מטריצה ריבועית $A$, אז $B$ ו־ $C$ מתחלפות בכפל.

עד כה ביססנו תכונות יסודיות רבות של כפל המטריצות, אך עדיין לא נתנו מוטיבציה להגדרת הכפל (המשונה לכאורה). נביא כעת דוגמה לבעיה טיפוסית שאותה טבעי לתאר באמצעות כפל מטריצות:

במדינה מסוימת יש שלוש חברות סלולר המנהלות ביניהן תחרות עיקשת. בעקבות שלל הצעות, מבצעים, ופרסומות, בכל חודש עוזב נתח מלקוחותיה של כל חברה ועובר לחברות המתחרות: 20% מלקוחות חברה א' עוזבים לטובת חברה ב', ו־ 10% לחברה ג'. 30% מלקוחות חברה ב' עוזבים לטובת חברה א', ו־ 20% לטובת חברה ג'. 10% מלקוחות חברה ג' עוזבים לטובת חברה א', ואף אחד מלקוחותיה אינו עוזב לטובת חברה ב'. נניח שבידינו נתוני מספר הלקוחות של כל אחת מן החברות בנקודת זמן מסוימת, וברצוננו לחשב כמה לקוחות יהיו לכל אחת מן החברות לאחר שנתיים. כיצד נעשה זאת?

תחילה נבטא את הנתונים בסימונים מתמטיים. את מספר הלקוחות לאחר $n$ חודשים בחברות א', ב', ג' נסמן ב־ $a_1^n, a_2^n, a_3^n$ בהתאמה (שימו לב, בסימון זה $n$ **אינו מציין חזקה**, אלא את מספר

החודשים שעברו). בכל חודש, 30% מלקוחות חברה א' עוזבים אותה (לטובת חברות ב' ו־ג' יחדיו), אך ל־70% הלקוחות שנותרו מתווספים 30% מלקוחות חברה ב' ו־10% מלקוחות חברה ג'. לכן מתקיים:

$$a_1^{n+1} = 0.7a_1^n + 0.3a_2^n + 0.1a_3^n$$

את חברה ב' עוזבים 50% מהלקוחות, אך לאלה שנותרו מתווספים 20% מלקוחות חברה א' (ולא מצטרף אף לקוח מחברה ג'). כלומר:

$$a_2^{n+1} = 0.5a_2^n + 0.2a_1^n$$

או באופן שקול:

$$a_2^{n+1} = 0.2a_1^n + 0.5a_2^n + 0.0a_3^n$$

באופן דומה נקבל:

$$a_3^{n+1} = 0.1a_1^n + 0.2a_2^n + 0.9a_3^n$$

אם נתאר את מספרי הלקוחות בחברות לאחר $n$ חודשים באמצעות וקטור (עמודה), כך:

$$v_n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix}$$

נוכל לכתוב:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} a_1^{n+1} \\ a_2^{n+1} \\ a_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7a_1^n + 0.3a_2^n + 0.1a_3^n \\ 0.2a_1^n + 0.5a_2^n + 0.0a_3^n \\ 0.1a_1^n + 0.2a_2^n + 0.9a_3^n \end{pmatrix}$$

על־ידי הצבות חוזרות ונשנות בשוויון זה, נוכל לחשב את מספרי הלקוחות בחברות השונות בכל נקודת זמן (כתלות בערכים ההתחלתיים). כפי שתוכלו לתאר לעצמכם, מדובר בחישובים ארוכים ומייגעים. אך את הביטוי שהתקבל באגף ימין של השוויון דלעיל נוכל לתאר באופן תמציתי באמצעות כפל מטריצה בוקטור. נסמן:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

אזי, לפי הגדרת הכפל של מטריצה בוקטור:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.7a_1^n + 0.3a_2^n + 0.1a_3^n \\ 0.2a_1^n + 0.5a_2^n + 0.0a_3^n \\ 0.1a_1^n + 0.2a_2^n + 0.9a_3^n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \end{pmatrix} = Av_n$$

עבור הוקטור $v_{n+2}$ (המתאר את מספרי הלקוחות לאחר $n+2$ חודשים) נקבל:

$$v_{n+2} = Av_{n+1} = A(Av_n) = (A \cdot A)v_n = A^2v_n$$

(שימו לב לשימוש בקיבוציות כפל המטריצות.) באינדוקציה נסיק בנקל שלכל $k$ טבעי מתקיים:

$$v_{n+k} = A^k v_n$$

בפרט, אם נציב $n = 0$ (הוקטור $v_0$ מתאר את מספרי הלקוחות בנקודת הזמן ההתחלתית), נקבל:

$$v_k = A^k v_0$$

מכאן שמספר הלקוחות של החברות השונות לאחר שנתיים (כלומר עבור $k = 24$) ניתנים באמצעות השוויון הבא:

$$\begin{pmatrix} a_1^{24} \\ a_2^{24} \\ a_3^{24} \end{pmatrix} = v_{24} = A^{24} v_0 = A^{24} \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ a_3^0 \end{pmatrix}$$

הבעיה כולה מיתרגמת, אם כן, לבעיית חישוב המטריצה $A^{24}$.

כעת נניח כי ברצוננו לחשב אינפורמציה נוספת. נניח, למשל, כי ברצוננו לדעת כמה נשים וכמה גברים נמנים על לקוחותיה של כל חברה. נניח כי אין הבדל בין אחוז הגברים ואחוז הנשים העוברים בין החברות השונות (כפי שתואר לעיל), אך בנקודת הזמן ההתחלתית היו מספר שונה של גברים ונשים בכל אחת מן החברות. את מספר הנשים בחברות השונות בכל נקודת זמן נתאר באמצעות הוקטור $u_n = \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_2^1 \\ b_3^1 \end{pmatrix}$, ואת מספר הגברים באמצעות הוקטור $w_n = \begin{pmatrix} c_n^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \end{pmatrix}$ (כאשר מתקיים כמובן $w_n + u_n = v_n$). מאחר שאין הבדל באחוזי הגברים והנשים העוברים בין החברות, הניתוח שעשינו עבור הוקטור $v_n$ תקף גם עבור הוקטורים $u_n$ ו־ $w_n$, ולכן:

$$u_n = A^n u_0$$
$$w_n = A^n w_0$$

את זוג השוויונות הללו נוכל לתאר באופן עוד יותר תמציתי. את מספר הלקוחות בכל חברה לאחר $n$ חודשים נתאר באמצעות המטריצה $B_n$, שעמודתה הראשונה מכילה את מספר הנשים בחברות השונות (לפי הסדר א',ב',ג'), ועמודתה השנייה את מספר הגברים. אזי:

$$B_n = (u_n \;\; w_n) = (A^n u_0 \;\; A^n w_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{על פי חלק ב של למה 3.4.3}}}{=} A^n (u_0 \;\; w_0) = A^n B_0$$

ובפרט:

$$B_{24} = A_{24} B_0$$

אם כן, גם עבור הבעיה ה"מורחבת" מצאנו תיאור מלא באמצעות כפל מטריצות. לתיאור זה שני יתרונות. ראשית, עצם יכולתנו לבטא את הבעיה באופן קומפקטי הוא דבר רצוי ביותר. שנית, מתברר כי חישוב חזקה של מטריצה היא בעיה שניתנת לפתרון באמצעות כמה קיצורי הדרך, המייעלים משמעותית את זמן החישוב (בהשוואה לכפל ישיר של המטריצה בעצמה 24 פעמים, או בהשוואה

לחישוב ישיר ללא מטריצות). קיצור דרך מסוים תכירו בהמשך סעיף זה, אך נציין כי קיימות שיטות יעילות בהרבה, שעליהן תוכלו ללמוד בקורס אלגברה לינארית 2.

כעת ניתן דוגמה לבעיה דומה, השייכת למתמטיקה ה"טהורה", שגם אותה נוח לתאר באמצעות חזקות של מטריצות.

**דוגמה**

**סדרת מספרי פיבונצ'י**[3] היא סדרת המספרים המוגדרת באופן אינדוקטיבי באמצעות הכלל הבא:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

ולכל $n > 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

כך:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

לחישוב האיבר ה־100 של הסדרה עלינו להכיר את שני קודמיו, שהרי:

$$a_{100} = a_{99} + a_{98}$$

להכרת כל אחד משני הקודמים האלה עלינו להכיר את שני קודמיו, ובקיצור - לחישוב איבר כלשהו של הסדרה עלינו לחשב ראשית את כל קודמיו.

אבל, כפי שנראה מיד, תוך שימוש בחזקות של מטריצות ניתן לתאר את האיבר ה־$n$־י של סדרת פיבונצ'י בלי להזדקק לכל קודמיו.

כדי לעשות זאת, נרשום ראשית את שני השוויונות:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_{n-1} = a_{n-1} + 0$$

שני שוויונות אלה שקולים לשוויון המטריצות:[4]

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

נסמן:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3 על "אבי" הסדרה הזאת ועל "מקורה הביולוגי" תוכלו לקרוא ביחידה האחרונה של הקורס "אשנב למתמטיקה".
4 בדקו (על־ידי ביצוע הכפל).

על פי (*) עבור $n = 3$, נקבל:

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ועל פי (*) עבור $n = 4$,

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \end{bmatrix} = A\left(A\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}\right) = A^2\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = A^2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

קל כעת לקבל באינדוקציה:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

והרי לפנינו תיאור של $a_n$ ו־ $a_{n-1}$ שלא באמצעות האיברים הקודמים להם בסדרה. ◀

**שאלה 3.6.2**

חשבו את האיבר $a_{34}$ בסדרת פיבונצ'י.

(רמז: לחישוב המטריצה $A^{32}$ אין צורך לבצע 32 פעולות כפל של מטריצות - יש דרך מהירה יותר.)

**התשובה בעמוד 311**

ייתכן שלמרות שיטת הייעול שראיתם בתשובה 3.6.2 (העלאות חוזרות ונשנות בריבוע), עדיין אין לבכם שלם עם הקביעה כי חישוב איברי סדרת פיבונצ'י באמצעות חזקות של המטריצה $A$ הוא חסכוני יותר מחישובם הישיר. אבל יתרון אחד יש בוודאי בשיטה זו: אם נחשב את החזקות $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$, נוכל באמצעותן לחשב בבת אחת את האיברים של כל הסדרות שבהן עבור $n \geq 2$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

ולאו דווקא את אלה שעבורן $a_1 = 1$ ו־ $a_1 = 2$. שיטת החישוב תהיה:

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A^{n-2}\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

מכאן שאם נדע לחשב את חזקות המטריצה $A$, נוכל לחשב בנקל את איבריהן של כל הסדרות הללו. כאמור, נושא זה - חישוב חזקות של מטריצות - יזכה לטיפול יסודי במסגרת הקורס אלגברה לינארית 2. אך כבר בשלב זה נוכל להצביע על קבוצה נרחבת של מטריצות שעבורה חישוב החזקות הוא קל במיוחד - קבוצת המטריצות האלכסוניות (ההגדרה - להלן). מטריצות אלה נמצאות "באמצע הדרך" שבין המטריצות הסקלריות, שתכונותיהן ביחס לפעולות הן כתכונות הסקלרים, לבין המטריצות הכלליות. המטריצות האלכסוניות מתנהגות בחישובים בפשטות כמעט כמו מספרים. מאידך גיסא, יש "מספיק" מהן כדי למלא תפקיד חשוב בתורה הכללית של המטריצות.

**הגדרה 3.6.7 מטריצה אלכסונית**

מטריצה ריבועית $A = \left[a_{ij}\right]$ נקראת **אלכסונית** אם כל איבריה שמחוץ לאלכסון הראשי הם אפסים. כלומר $A = \left[a_{ij}\right]$ היא אלכסונית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $a_{ij} = 0$.

למשל,

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה אלכסונית מסדר 3.

באופן כללי, מטריצה אלכסונית נראית כך:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

שימו לב, כל מטריצה סקלרית היא מטריצה אלכסונית, אך לא כל מטריצה אלכסונית היא מטריצה סקלרית.

**שאלה 3.6.3**

הוכיחו:

א. סכום של מטריצות אלכסוניות (מאותו הסדר) הוא מטריצה אלכסונית.

ב. מכפלה של מטריצות אלכסוניות היא מטריצה אלכסונית.

ג. מטריצות אלכסוניות מתחלפות זו עם זו.

**התשובה בעמוד 312**

**שאלה 3.6.4**

א. תהי

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$ [5]

מטריצה אלכסונית.

הוכיחו כי לכל $k$ טבעי, החזקה $A^k$ היא המטריצה האלכסונית:

$$A^k = \begin{bmatrix} a_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^k \end{bmatrix}$$

ב. חשבו:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^3$$

**התשובה בעמוד 312**

5 מאחר שבמטריצה האלכסונית יש איברים שונים מאפס רק על האלכסון הראשי, הרשינו לעצמנו להשתמש באינדקס בודד ולרשום $a_i$ במקום $a_{ii}$ $(i = 1,\ldots,n)$.

כזכור, כפל מטריצה במטריצה סקלרית אינו אלא כפל כל איברי המטריצה בסקלר של המטריצה הסקלרית.

ומה בדבר כפל מטריצה במטריצה אלכסונית?

---

**טענה 3.6.8**

תהי $A=\left[a_{ij}\right]$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, ותהי $B$ המטריצה האלכסונית:

$$B=\begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$$

אזי:

א.

$$A\cdot B=\begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \dots & a_{1n}b_n \\ & & \vdots & \\ a_{n1}b_1 & a_{n2}b_2 & \dots & a_{nn}b_n \end{bmatrix}=\left[\left[A\right]_1^c b_1 \ \cdots\left[A\right]_n^c b_n\right]$$

כלומר, העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא העמודה ה־ $j$ של $A$ מוכפלת ב־ $b_j$.

ב.

$$B\cdot A=\begin{bmatrix} b_1a_{11} & b_1a_{12} & \dots & b_1n_{1n} \\ & & \vdots & \\ b_na_{n1} & b_na_{n2} & \dots & b_na_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\left[A\right]_1^r \\ b_2\left[A\right]_2^r \\ \vdots \\ b_n\left[A\right]_n^r \end{bmatrix}$$

כלומר, השורה ה־ $i$ של $BA$ היא השורה ה־ $i$ של $A$ מוכפלת ב־ $b_i$.

---

**הוכחה**

א. על פי למה 3.4.3, העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא מכפלת המטריצה $A$ בעמודה ה־ $j$ של $B$:

$$\left[AB\right]_j^c=A\left[B\right]_j^c=A\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \text{ מקום} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{1j}b_j \\ \vdots \\ a_{nj}b_j \end{bmatrix}=\left[A\right]_j^c b_j$$

ולכן:

$$AB = \left[ [A]_1^c b_1 \ \ [A]_2^c b_2 \ldots [A]_n^c b_n \right]$$

ב. על פי למה 3.4.3, השורה ה־ $i$ של $BA$ היא מכפלת השורה ה־ $i$ של $B$ ב־ $A$:

$$[BA]_i^r = [B]_i^r A = \left[ 0 \cdots b_i \cdots 0 \right] A = \left[ b_i a_{i1} \cdots b_i a_{in} \right] = b_i [A]_i^r$$

ולכן:

$$BA = \begin{bmatrix} b_1 [A]_1^r \\ \vdots \\ b_n [A]_n^r \end{bmatrix}$$

**מ.ש.ל.**

## 3.7 כתיב וקטורי של מערכות משוואות לינאריות

בפרק 1 חקרנו מערכת משוואות לינאריות בעזרת רישום מטריציוני. בסעיף זה נחזור לעסוק במערכות משוואות לינאריות, אך מנקודת המבט של כפל מטריצות.

תהי $A=\left[a_{ij}\right]$ מטריצה מסדר $m\times n$ (מעל שדה כלשהו) ויהי $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$ וקטור עמודה מסדר $m$ (מעל אותו שדה). נתבונן במשוואה

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

שבה ה**נעלם** הוא וקטור עמודה $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$.

וקטור עמודה $\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ הוא **פתרון** למשוואה זו אם מתקיים השוויון:

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \qquad (*)$$

המשוואה (*) מכונה **משוואה וקטורית** או **משוואה מטריציונית**.

שימו לב כי $A\mathbf{c}$ הוא וקטור העמודה:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_k\\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}c_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_k\end{bmatrix}$$

לפיכך, השוויון (*) יתקיים אם ורק אם יתקיימו $m$ השוויונות הבאים:

$$\begin{matrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_k & = & b_1\\ \vdots & & \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_k & = & b_m\end{matrix}$$

או, ביתר פירוט, אם ורק אם:

$$\begin{matrix} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_1 & + & \cdots & + & a_{1n}c_n & = & b_1\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + & \cdots & + & a_{mn}c_n & = & b_m\end{matrix}$$

**מסקנה**

וקטור העמודה $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ הוא פתרון למשוואה הוקטורית

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b} \qquad (*)$$

אם ורק אם ה־$n$־יה $(c_1,\dots,c_n)$ היא פתרון של המערכת הלינארית:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (**)$$

מן האמור לעיל נובע כי כל **מערכת** של משוואות לינאריות מתאימה למשוואה וקטורית **בודדת**. "מתאימה" במובן זה שה־$n$־יה $(c_1,\dots,c_n)$ פותרת את המערכת (**) אם ורק אם וקטור העמודה $\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}$ פותר את המשוואה (*). לכן נאמר לעיתים "מערכת המשוואות $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$" כאשר כוונתנו למערכת משוואות מהצורה (**).

בהינתן מערכת משוואות לינאריות (**), המטריצה $A$ של המשוואה הוקטורית השקולה לה, (*), אינה אלא **מטריצת המקדמים המצומצמת** של מערכת המשוואות. מטריצה זו היא, כזכור, מסדר $m\times n$, והיא נבדלת מן המטריצה המאפיינת את המערכת הלינארית (זו שהוגדרה בפרק 1) בכך שחסרה בה עמודת המקדמים החופשיים.

באמצעות הכתיב הוקטורי של מערכת משוואות לינאריות ניתן להוכיח בקלות רבה, וללא קשיי סימון, תכונות שונות של הפתרונות. כדי להדגים זאת, נסמן ב־$A$ את המטריצה המצומצמת של המערכת (**)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

ונתמקד במקרה שבו $\mathbf{b}=\mathbf{0}$.

**דוגמה**

אם $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, המשוואה הוקטורית השקולה היא:

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

נוכיח כי אם וקטורי העמודה $\mathbf{c}$ ו־$\mathbf{d}$ הם פתרונותיה של המשוואה הוקטורית, אז גם סכומם הוא פתרון (עובדה שכבר ידועה לכם ממשפט 2.5.2, אך נביא לה הוכחה שונה).

הוקטור $\mathbf{c}$ הוא פתרון, משמע $A\mathbf{c}=\mathbf{0}$; הוקטור $\mathbf{d}$ הוא פתרון, משמע $A\mathbf{d}=\mathbf{0}$.

כדי להראות כי $\mathbf{c}+\mathbf{d}$ הוא פתרון, עלינו להראות כי:

$$A(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{0}$$

אך מתכונות הפילוג (משפט 3.5.5), נקבל

$$A(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = A\mathbf{c} + A\mathbf{d} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

כדרוש. ◀

נוכיח עוד עובדה מוכרת - אם וקטור העמודה $\mathbf{c}$ הוא פתרון של המשוואה הוקטורית

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

אז לכל סקלר $t$, $t\mathbf{c}$ גם הוא פתרון של אותה משוואה.

$\mathbf{c}$ הוא פתרון, משמע $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

עלינו להוכיח כי $t\mathbf{c}$ גם הוא פתרון, כלומר כי:

$$A(t\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

ואמנם:

$$A(t\mathbf{c}) = t(A\mathbf{c}) = t\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

שילוב תוצאות אלה מוכיח מחדש את משפט 2.5.2 - אוסף הפתרונות למערכת משוואות לינארית הומוגנית סגור לצירופים לינאריים. אכן, אם $\mathbf{c}$ ו־$\mathbf{d}$ מקיימים $A\mathbf{c} = A\mathbf{d} = \mathbf{0}$, ואם $t,s$ סקלרים, אזי:

$$A(t\mathbf{c}+s\mathbf{d}) = A(t\mathbf{c}) + A(s\mathbf{d}) = tA\mathbf{c} + sA\mathbf{d} = t\mathbf{0} + s\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

כעת נדון בכתיב וקטורי של מערכות משוואות אי־הומוגניות.

**שאלה 3.7.1**

הוכיחו:

א. אם $\mathbf{c}$ ו־$\mathbf{d}$ הם שני פתרונות של המערכת הלינארית הנתונה בכתיב וקטורי על־ידי

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

אז $\mathbf{c} - \mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת הלינארית ההומוגנית הנתונה בכתיב וקטורי על־ידי:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

ב. אם למערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ יש רק הפתרון הטריוויאלי, אז לכל וקטור $\mathbf{b}$ (מאורך מתאים), יש למערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ **לכל היותר** פתרון אחד.

ג. אם $V$ קבוצת כל הפתרונות של מערכת הומוגנית מסוימת $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ו־$\mathbf{c}_0$ פתרון מסוים של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, אזי אוסף כל הפתרונות למערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ הוא $\{\mathbf{c}_0 + \mathbf{d} \mid \mathbf{d} \in V\}$.

**התשובה בעמוד 313**

**שאלה 3.7.2**

תהי נתונה המערכת הלינארית:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

נניח כי $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, כלומר המערכת היא אי־הומוגנית. יהי $\mathbf{c}$ פתרון של המערכת ויהי $t$ סקלר. מצאו עבור אילו ערכים של $t$, $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ועבור אילו ערכים של $t$, $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת האי־הומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

**התשובה בעמוד 314**

**שאלה 3.7.3**

הוכיחו כי אם $\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

אז $\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{b}$$

כאשר $B$ היא מטריצה כלשהי, שעבורה $BA$ מוגדרת.

(שימו לב, אם $BA$ מוגדרת, אז בהכרח הסדרים הם כאלה המבטיחים שגם $B\mathbf{b}$ מוגדרת.)

**התשובה בעמוד 314**

**שאלה 3.7.4**

הוכיחו כי הפתרון היחיד של המערכת $I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ הוא $\mathbf{b}$.

($I$ היא מטריצת היחידה מהסדר המתאים.)

**התשובה בעמוד 315**

**הערה**

לאורך סעיף זה סימנו וקטורים באותיות מודגשות, כולל את וקטור הנעלמים $\mathbf{x}$. ההדגשה נועדה למנוע בלבול עם נעלם בודד, כגון $x$. עם זאת, כאשר אין חשש לבלבול, נרשה לעצמנו בהמשך להשתמש באותיות לא־מודגשות. כך למשל, את מערכת המשוואות (בכתיב וקטורי) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, נסמן על־ידי $Ax = b$.

## 3.8 מטריצות הפיכות

כפי שלמדתם בסעיף 1.1, קיומו של איבר ניטרלי ביחס לפעולה כלשהי מעלה את השאלה של קיום איברים הופכיים. בקבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל שדה מסוים, קיים איבר ניטרלי ביחס לכפל - המטריצה $I$. אולם, לא לכל איבר בקבוצה זו יש איבר הופכי: למשל, עבור מטריצת האפס לא נוכל למצוא מטריצה $B$ כך ש־

$$O \cdot B = B \cdot O = I$$

שכן, לכל $B$:

$$O \cdot B = B \cdot O = O \neq I$$

דוגמה נוספת, פחות טריוויאלית:

---

**טענה 3.8.1**

תהי $A$ מטריצה ריבועית כלשהי מסדר $n$, שיש בה שורת אפסים.

לכל מטריצה $B$ (ריבועית מסדר $n$) מתקיים:

$$AB \neq I$$

---

**הוכחה**

מכך שיש ב־$A$ שורת אפסים נובע שגם ב־$AB$ יש שורת אפסים (לפי מסקנה 3.4.4). אולם ב־$I$ אין שורת אפסים, וממילא לכל $B$:

$$AB \neq I$$

**מ.ש.ל.**

נביא דוגמה נוספת למטריצה שאין לה מטריצה הופכית.

**דוגמה 1**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

נוכיח כי לא קיימת $B$ שעבורה $AB = I$. אמנם, אם

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

היא מטריצה כלשהי מסדר $2 \times 2$, אז:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ \alpha+\gamma & \beta+\delta \end{bmatrix}$$

ולכן

$$AB = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

פירושו

$$\alpha + \gamma = 1$$

$$\alpha + \gamma = 0$$

$$\beta + \delta = 1$$

$$\beta + \delta = 0$$

וברור שלמערכת זו אין פתרון. ◀

מצאנו, אם כן, כי לא לכל מטריצה (ריבועית מסדר $n$) יש מטריצה הופכית. אך יש מטריצות שיש להן מטריצה הופכית.

**דוגמה 2**

אם

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

אז המטריצה

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

מקיימת:

$$AB = BA = I$$

(בדקו!). ◀

---

**הגדרה 3.8.2 מטריצה הפיכה**

יהי $F$ שדה. מטריצה ריבועית $A$ ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ נקראת **הפיכה** (או - **רגולרית**) אם קיימת מטריצה $B$ ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ כך ש־

$$AB = BA = I$$

---

**הערות**

א. אם קיימת מטריצה $B$ ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ המקיימת את השוויון שבהגדרה 3.8.2, אזי היא המטריצה היחידה ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ המקיימת שוויון זה. אכן, אם $C \in \mathbf{M}_n(F)$ מקיימת גם היא את השוויון, כלומר אם $AC = CA = I$, אזי:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

הווי אומר, $B = C$. למטריצה $B$ (היחידה) המקיימת את השוויון בהגדרה 3.8.2 נקרא המטריצה **ההופכית** ל־$A$ (בה' הידיעה), ונסמן אותה ב־ $A^{-1}$.

ב. בהמשך הקורס (מסקנה 4.5.4 בפרק 4) נראה כי אם מטריצה ריבועית $B$ מקיימת את אחד השוויונות הנדרשים בהגדרה 3.8.2, אזי היא בהכרח מקיימת גם את השני. כלומר, אם $B$ מקיימת $AB = I$ או $BA = I$ (ולהפך), ולכן $B$ היא המטריצה ההופכית ל־$A$.

מטריצה ריבועית **שאינה הפיכה** נקראת **אי־הפיכה** (או - **סינגולרית**). את אוסף כל המטריצות **ההפיכות** ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ נסמן ב־ $\mathbf{GL}_n(F)$.

שימו לב, ששאלת ההפיכות של מטריצה נוגעת אך ורק למטריצות ריבועיות - על מטריצה שאינה ריבועית לא נאמר שהיא הפיכה וגם לא שהיא סינגולרית. בהמשך הסעיף, בכל הטענות והשאלות שנביא, תמיד נניח במובלע כי המטריצות הנידונות הן מטריצות ריבועיות (מאותו סדר, ומעל אותו שדה).

**שאלה 3.8.1**

הוכיחו כי אם $A$ מטריצה הפיכה, אזי:

א. אם $A'$ מטריצה המקיימת $A'A = I$ אז בהכרח $A' = A^{-1}$.

ב. אם $A'$ מטריצה המקיימת $AA' = I$ אז בהכרח $A' = A^{-1}$.

**התשובה בעמוד 315**

כעת נוכיח כמה תכונות של מטריצות הפיכות. נפתח ב"כלל הצמצום".

**טענה 3.8.3**

תהי $A$ מטריצה **הפיכה**.

א. אם $AB = AC$ אז:

$$B = C$$

ב. אם $BA = CA$ אז:

$$B = C$$

**הוכחה**

א. לפי הנתון:

$$AB = AC \qquad (1)$$

$A$ מטריצה הפיכה ולכן יש לה מטריצה הופכית, $A^{-1}$. נכפול את שני אגפי השוויון (1) משמאל ב־ $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \qquad (2)$$

אבל

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$$

וכן

$$A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = IC = C$$

ולכן מ־(2) נקבל:

$$B = C$$

ב. ההוכחה אנלוגית להוכחת חלק א ונשמיטה.

**מ.ש.ל.**

שימו לב שכלל הצמצום אינו בהכרח תקף אם $A$ אינה הפיכה.

**דוגמה**[1]

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$A \quad\cdot\quad B \quad=\quad A \quad\cdot\quad I$$

אבל:

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$B \quad\neq\quad I$$

◀

**שאלה 3.8.2**

א. תהי $A$ מטריצה הפיכה ותהי $B$ מטריצה שעבורה $AB = O$ (או $BA = O$).
הוכיחו כי $B = O$.

ב. תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות הפיכות. הוכיחו כי $AB \neq O$.

ג. תהי $A = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$. מצאו $B \neq O$ כך ש־ $AB = O$.

ד. הוכיחו כי אם $A \neq O$ ו־ $B \neq O$ אבל $AB = O$, אז $A$ ו־ $B$ שתיהן סינגולריות.

**התשובה בעמוד 316**

במשפט הבא מסוכמות כמה תכונות נוספות של מטריצות הפיכות.

---

**משפט 3.8.4**

א. אם $A$ מטריצה הפיכה, אז גם $A^{-1}$ הפיכה ומתקיים:[2]

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ב. המטריצה $A$ הפיכה אם ורק אם המטריצה המשוחלפת $A^t$ הפיכה, ובמקרה זה מתקיים:[3]

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

ג. אם $A$ ו־ $B$ מטריצות הפיכות (מאותו סדר!) אז גם $AB$ הפיכה ומתקיים:[4]

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

---

1 במכוון נמנענו מן הדוגמה הטריוויאלית: השוויון $O\cdot B = O\cdot C$ מתקיים תמיד, גם אם $B \neq C$! המסקנה הטריוויאלית – מטריצת האפס אינה הפיכה.

2 $(A^{-1})^{-1}$ הוא הסימון של המטריצה ההופכית של $(A^{-1})$, ולפי טענת המשפט זוהי $A$.

3 שימו לב: $(A^t)^{-1}$ הוא הסימון למטריצה ההופכית של המטריצה $A^t$. $(A^{-1})^t$ הוא סימון למטריצה המשוחלפת של $A^{-1}$, שהיא מצֵדה ההופכית של $A$.

4 $(AB)^{-1}$ הוא הסימון של המטריצה ההופכית למטריצה $AB$. $A^{-1}B^{-1}$ היא מכפלת המטריצה ההופכית של $B$ במטריצה ההופכית של $A$. שימו לב לחילופי המקומות של $A$ ו־ $B$ בשני אגפי השוויון.

**הוכחה**

א. כדי להראות ש־ $A^{-1}$ היא הפיכה וש־ $A$ היא המטריצה ההופכית ל־ $A^{-1}$, עלינו להראות כי:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

אבל שוויונות אלה מתקיימים בהכרח מאחר ש־ $A$ הפיכה.

ב.

$$A \cdot A^{-1} = I \tag{1}$$

ולכן:

$$(A \cdot A^{-1})^t = I^t \tag{2}$$

אבל

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1})^t A^t \tag{3}$$

וכן:

$$I^t = I \tag{4}$$

מהצבת (3) ו־(4) ב־(2) נקבל:

$$(A^{-1})^t A^t = I \tag{5}$$

באותו אופן נסיק מן השוויון

$$A^{-1}A = I$$

כי:

$$A^t (A^{-1})^t = I \tag{6}$$

מ־(5) ו־(6) אנו למדים כי $(A^{-1})^t$ היא המטריצה ההופכית של $A^t$, כלומר:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

ג. נחשב את המכפלה:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(IA^{-1}) = AA^{-1} = I$$

כך גם -

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

ומכאן ש־ $AB$ הפיכה וההופכית שלה היא $B^{-1}A^{-1}$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.8.3**

תהיינה $A_1, A_2, \ldots, A_k$ מטריצות הפיכות מסדר $n$.
הוכיחו באינדוקציה על $k$ כי המכפלה $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ הפיכה וכי מתקיים:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$$ [5]

**התשובה בעמוד 317**

5 שימו לב להיפוך סדר הגורמים בשני האגפים!

**שאלה 3.8.4**

תהי $A$ מטריצה הפיכה. הוכיחו כי $A^n$ הפיכה וכי מתקיים:

$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$

**התשובה בעמוד 318**

בסעיף זה ניתנו מספר תכונות של מטריצות הפיכות. המשפטים בסעיף זה היו מהטיפוס: "אם $A$ הפיכה אז ...". כדי שנוכל לנצל משפטים אלה, בהינתן מטריצה $A$, חשוב שנדע אם היא הפיכה. כמו כן, רצוי שנמצא דרך לחישוב $A^{-1}$ (כאשר זו קיימת).

יש מקרים שבהם ההכרעה קלה. אחד מהם כבר הודגם: אם ב־$A$ יש שורת אפסים (או עמודת אפסים) אז $A$ אינה הפיכה. נדגים מקרה קל נוסף.

**שאלה 3.8.5**

תהי $A$ מטריצה אלכסונית:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

הוכיחו:

א. אם אחד מאיברי האלכסון הראשי הוא אפס אז $A$ אינה הפיכה.

ב. אם כל איברי האלכסון הראשי שונים מאפס אז $A$ הפיכה ומתקיים:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_n \end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 318**

בשאלה 3.8.5 ראינו, אם כן, אוסף נאה של מטריצות הפיכות – אלה המטריצות האלכסוניות, שאיברי האלכסון הראשי שלהן שונים מאפס. אבל בכך לא מיצינו את המטריצות ההפיכות. יש מטריצות הפיכות שאינן אלכסוניות.[6] דוגמה פשוטה תמצאו בשאלה הבאה.

**שאלה 3.8.6**

הראו כי המטריצה הממשית $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ הפיכה, ומצאו את המטריצה ההופכית לה.

**התשובה בעמוד 318**

6 מצאנו, למשל, כי $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ הפיכה, למרות שאינה אלכסונית – ראו דוגמה 2 בתחילת סעיף זה.

השיטה שבה השתמשנו בתשובה 3.8.6 למציאת המטריצה ההופכית - פתרון מערכת משוואות מתאימה - ניתנת להכללה גם עבור מטריצות מסדרים גבוהים. עם זאת, כדי להשתמש בה עבור מטריצות מסדרים כאלה, יש לרשום מערכות משוואות בעלות משתנים רבים. בסעיף הבא נתאר שיטה אלגנטית יותר לחישוב המטריצה ההופכית.

בסעיף הבא נעסוק במשפחה נוספת של מטריצות הפיכות - המטריצות האלמנטריות. לאחר מכן נשתמש במטריצות האלמנטריות לצורך אפיון **כל המטריצות ההפיכות**, ובתוך כך אף נציג שיטה לחישוב $A^{-1}$ , כאשר זו קיימת. אפיונים נוספים של המטריצות ההפיכות יינתנו בסעיף שלאחר מכן.

# 3.9 מטריצות אלמנטריות

נפתח בהגדרה.

**הגדרה 3.9.1 מטריצה אלמנטרית**

מטריצה **אלמנטרית** (מסדר $n$) היא מטריצה שהתקבלה ממטריצת היחידה $I$ (מסדר $n$) על־ידי ביצוע פעולה אלמנטרית.[1]

**דוגמאות**

א. המטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא מטריצה אלמנטרית, שכן היא התקבלה ממטריצת היחידה $I$ (מסדר 3) על־ידי כפל השורה השנייה של $I$ ב־$\left(-\frac{2}{3}\right)$, כלומר על־ידי ביצוע הפעולה האלמנטרית:

$$R_2 \to -\frac{2}{3}R_2$$

ב. המטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא מטריצה אלמנטרית, שכן היא התקבלה מ־$I$ (מסדר 4) על־ידי הפעולה האלמנטרית:

$$R_4 \to R_4 + 3R_2$$

ג. המטריצה

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

היא מטריצה אלמנטרית, שהתקבלה מ־$I$ (מסדר 4) על־ידי הפעולה האלמנטרית:

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$

◀

1 הפעולות האלמנטריות על מטריצות תוארו בפרק 1. נמנה אותן שוב:
1. החלפת שתי שורות של המטריצה.
2. כפל שורה של המטריצה בסקלר שונה מאפס.
3. הוספת כפולה בסקלר של שורה אחת לשורה אחרת של המטריצה.

**סימון 3.9.2 סימון מטריצות אלמנטריות**

תהי $A$ מטריצה כלשהי, ותהי נתונה פעולה אלמנטרית שנסמנה $\varphi$. את המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי ביצוע הפעולה $\varphi$ נסמן $\varphi(A)$. בפרט, המטריצות האלמנטריות הן כל המטריצות מהצורה $\varphi(I)$, כאשר $\varphi$ היא איזשהי פעולה אלמנטרית.

הטענה הבאה קושרת בין פעולות אלמנטריות ומטריצות אלמנטריות.

**טענה 3.9.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. תהי $I$ מטריצת היחידה מסדר $n$, ותהי $\varphi$ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A) = \varphi(I) \cdot A$$

כלומר, התוצאה של פעולה אלמנטרית על $A$ זהה לתוצאת הכפל של $A$ משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה.

לפני שנוכיח טענה זו, נדגים.

**שאלה 3.9.1**

תהי

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ותהי $\varphi$ הפעולה:

[2] $$\varphi : R_4 \to R_4 + 3R_2$$

חשבו את $\varphi(A)$ ואת $\varphi(I)$ (עבור $I$ מסדר 4) והראו כי:

$$\varphi(I) \cdot A = \varphi(A)$$

**התשובה בעמוד 319**

**הוכחת טענה 3.9.3**

תחילה נזכיר שלפי למה 3.4.3, לכל $A,B$ שעבורן מוגדרת המכפלה $AB$ מתקיים:

$$[AB]_i^r = [A]_i^r B \qquad (*)$$

כעת נוכיח את הטענה עבור כל טיפוס של פעולה אלמנטרית בנפרד.

א. $\varphi : R_i \leftrightarrow R_j$

עבור $k$ השונה מ־$i$ ומ־$j$, השורות של $A$ זהות לשורות המתאימות של $\varphi(A)$, ובסימנים:

עבור $k \neq i \ , j$:

2 כלומר $\varphi$ היא הפעולה של הוספת 3 פעמים השורה השנייה לשורה הרביעית.

(1) $$\left[\varphi(A)\right]_k^r = \left[A\right]_k^r$$

וכמובן גם עבור $j$ , $k \neq i$:

(2) $$\left[\varphi(I)\right]_k^r = \left[I\right]_k^r$$

ולכן עבור $j$ , $k \neq i$:

$$\left[\varphi(I)A\right]_k^r \underset{(*)}{\underset{\uparrow}{=}} \left[\varphi(I)\right]_k^r A \underset{(2)}{\underset{\uparrow}{=}} \left[I\right]_k^r A \underset{(*)}{\underset{\uparrow}{=}} \left[IA\right]_k^r \underset{IA=A}{\underset{\uparrow}{=}} \left[A\right]_k^r \underset{(1)}{\underset{\uparrow}{=}} \left[\varphi(A)\right]_k^r$$

ובסיכום קיבלנו כי השורה ה־ $k$ של $\varphi(I)\cdot A$ שווה לשורה ה־ $k$ של $\varphi(A)$, לכל $k$ השונה מ־ $i$ ומ־ $j$.

עבור $k = i$,

(3) $$[\varphi(A)]_i^r = [A]_j^r$$

וכן:

(4) $$[\varphi(I)]_i^r = [I]_j^r$$

ולכן:

$$[\varphi(I)A]_i^r \underset{(*)}{\underset{\uparrow}{=}} [\varphi(I)]_i^r A \underset{(4)}{\underset{\uparrow}{=}} [I]_j^r A \underset{(*)}{\underset{\uparrow}{=}} [IA]_j^r = [A]_j^r \underset{(3)}{\underset{\uparrow}{=}} [\varphi(A)]_i^r$$

כלומר, השורה ה־ $i$ של $\varphi(I)A$ שווה לשורה ה־ $i$ של $\varphi(A)$. ההוכחה של שוויון השורה ה־ $j$ של $\varphi(I)A$ ושל $\varphi(A)$ אנלוגית לחלוטין להוכחת שוויון השורה ה־ $i$.

ב. $\varphi : R_i \leftrightarrow tR_i \quad (t \neq 0)$

כמקודם, לכל $k \neq i$

$$\left[\varphi(A)\right]_k^r = \left[A\right]_k^r$$

וכן:

$$\left[\varphi(I)\right]_k^r = \left[I\right]_k^r$$

עבור $k \neq i$ אפשר, אם כן, להשתמש באותה הוכחה כמו ב־א ולהסיק כי השורה ה־ $k$ של $\varphi(I)A$ שווה לשורה ה־ $k$ של $\varphi(A)$.

עבור $k = i$

$$\left[\varphi(A)\right]_i^r = t\left[A\right]_i^r$$

וכן:

$$\left[\varphi(I)\right]_i^r = t\left[I\right]_i^r$$

ומכאן:

$$\left[\varphi(I)A\right]_i^r = \left[\varphi(I)\right]_i^r A = t\left[I\right]_i^r A = t\left[IA\right]_i^r = t\left[A\right]_i^r = \left[\varphi(A)\right]_i^r$$

ג. $\varphi : R_i \to R_i + tR_j$

$\varphi$ היא הפעולה האלמנטרית של הוספת $t$ פעמים השורה ה־ $j$ לשורה ה־ $i$, כלומר:

$$\varphi : R_i \to R_i + tR_j$$

לכל $k \neq i$, כמו בחלק א נקבל:

$$[\varphi(I)A]_k^r = [\varphi(A)]_k^r$$

עבור $k = i$,

$$[\varphi(A)]_i^r = [A]_i^r + t[A]_j^r \tag{5}$$

$$[\varphi(I)]_i^r = [I]_i^r + t[I]_j^r \tag{6}$$

ולכן:

$$[\varphi(I)A]_i^r \underset{(*)}{=} [\varphi(I)]_i^r A \underset{(6)}{=} \left([I]_i^r + t[I]_j^r\right)A$$

$$= [I]_i^r A + t[I]_j^r A \underset{(*)}{=} [IA]_i^r + t[IA]_j^r$$

$$= [A]_i^r + t[A]_j^r \underset{(5)}{=} [\varphi(A)]_i^r$$

אם כן, לכל $1 \leq k \leq n$ השורה ה־ $k$ של $\varphi(A)$ שווה לשורה ה־ $k$ של $\varphi(I) \cdot A$, ולכן $\varphi(A) = \varphi(I) \cdot A$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.9.2**

תהי:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

נגדיר שלוש פעולות אלמנטריות:

$$\varphi_1 : R_2 \to \frac{1}{2}R_2$$

$$\varphi_2 : R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\varphi_3 : R_3 \to R_3 + 2R_2$$

ודאו על־ידי חישוב ישיר, כי $\varphi_i(I)A = \varphi_i(A)$ עבור $i = 1,2,3$.

**התשובה בעמוד 320**

את הטענה הקודמת נוכל להכליל למספר כלשהו של פעולות.

**טענה 3.9.4**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, ותהי $A'$ מטריצה אשר התקבלה מ־$A$ על־ידי ביצוע הפעולות האלמנטריות $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ (בסדר זה), אז:

$$A' = \varphi_k(I) \cdot \varphi_{k-1}(I) \ldots \varphi_1(I) \cdot A$$

**שאלה 3.9.3**

הוכיחו את הטענה האחרונה.

**התשובה בעמוד 321**

תהי $\varphi$ פעולה אלמנטרית. נגדיר פעולה אלמנטרית "הפוכה" ל־$\varphi$, שנסמנה $\varphi^{-1}$, כך:

א. אם $\varphi : R_i \leftrightarrow R_j$ אז $\varphi^{-1} : R_i \leftrightarrow R_j$ (כלומר $\varphi = \varphi^{-1}$).

ב. אם $\varphi : R_i \to tR_i$ כאשר $t \neq 0$, אז $\varphi^{-1} : R_i \to \frac{1}{t} R_i$.

ג. אם $\varphi : R_i \to R_i + tR_j$ כאשר $i \neq j$, אז $\varphi^{-1} : R_i \to R_i - tR_j$.

הפעולה $\varphi^{-1}$ "הפוכה" לפעולה $\varphi$ במובן זה, שאם נבצע על מטריצה $A$ תחילה את $\varphi$ ואחר כך את $\varphi^{-1}$, נקבל שוב את $A$.

בסימונים:

$$\varphi^{-1}(\varphi(A)) = A \qquad (1)$$

באותו אופן גם:

$$\varphi(\varphi^{-1}(A)) = A \qquad (2)$$

**שאלה 3.9.4**

יהיו

$$\varphi : R_2 \to tR_2 \ , \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר $t \neq 0$. חשבו במפורש את $\varphi(\varphi^{-1}(A))$ ואת $\varphi^{-1}(\varphi(A))$.

**התשובה בעמוד 321**

על פי טענה 3.9.4, מן השוויונות (1) ו־(2) דלעיל נובע כי לכל פעולה אלמנטרית $\varphi$, מתקיים:

$$\varphi^{-1}(I) \cdot \varphi(I) \cdot A = \varphi(I) \cdot \varphi^{-1}(I) \cdot A = A \qquad (*)$$

ובפרט עבור $A = I$ מתקיים $\varphi^{-1}(I)\varphi(I) = \varphi(I)\varphi^{-1}(I) = I$.

כמסקנה נקבל:

---

**מסקנה 3.9.5**

כל מטריצה אלמנטרית $\varphi(I)$ היא הפיכה, וההופכית שלה היא $\varphi^{-1}(I)$. כלומר:[3]

$$(\varphi^{-1}(I))^{-1} = \varphi^{-1}(I)$$

---

ממסקנה 3.9.5 נקבל גם:

---

**מסקנה 3.9.6**

כל מטריצה שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות היא מטריצה הפיכה. יתר כל כן, אם $B = \varphi_1(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_k(I)$ אז:

$$B^{-1} = \varphi_k^{-1}(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1^{-1}(I)$$

---

**הוכחה**

לפי מסקנה 3.9.5, כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה; מכפלה של מספר סופי של מטריצות הפיכות היא הפיכה (לפי שאלה 3.8.3), ולכן מכפלה של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות היא הפיכה. לפי אותה שאלה נקבל גם כי:

$$(\varphi_1(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_k(I))^{-1} = (\varphi_k(I))^{-1}\cdot\ldots\cdot(\varphi_1(I))^{-1} \qquad (*)$$

עתה, לפי מסקנה 3.9.5, לכל $1 \le i \le k$:

$$(\varphi_i(I))^{-1} = \varphi_i^{-1}(I)$$

ולכן מ־(*) נקבל:

$$(\varphi_1(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_k(I))^{-1} = \varphi_k^{-1}(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1^{-1}(I)$$

**מ.ש.ל.**

בכך מצאנו משפחה גדולה של מטריצות הפיכות: כל המטריצות האלמנטריות, וכל המכפלות של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות. מתברר שבזאת מיצינו את כל המטריצות ההפיכות, שכן –

---

**טענה 3.9.7**

כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

---

**הוכחה**

תהי $A$ מטריצה הפיכה (מסדר $n$). נתבונן במשוואה הוקטורית:

$$Ax = 0 \qquad (*)$$

---

3 זכרו: $\left(\varphi(I)\right)^{-1}$ הוא הסימון למטריצה ההופכית ל־$\varphi(I)$. לעומת זאת, $\varphi^{-1}(I)$ היא המטריצה האלמנטרית שהתקבלה מ־$I$ על־ידי $\varphi^{-1}$.

למשוואה זו יש פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי. נראה זאת:

ראשית - קל לראות כי $c = 0$ הוא פתרון.

שנית - נניח כי $c$ הוא פתרון כלשהו של המשוואה (*), כלומר

$$Ac = 0$$

ונוכיח כי בהכרח $c = 0$.

נכפול את שני אגפי השוויון ב־ $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-1}(Ac) = A^{-1}0 = 0$$

אולם:

$$A^{-1}(Ac) = (A^{-1}A)c = Ic = c$$

ולכן:

$$c = 0$$

יצאנו מפתרון כלשהו והראינו כי הוא בהכרח וקטור האפס, ולכן זהו אכן הפתרון היחיד.

עתה, כזכור, המשוואה הוקטורית (*) שקולה למערכת לינארית הומוגנית של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים, וכפי שלמדתם בפרק 1, מכך שלמערכת לינארית הומוגנית של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים יש פתרון יחיד (הפתרון הטריוויאלי), נובע כי הצורה הקנונית של המטריצה המצומצמת של המערכת, שהיא במקרה שלנו $A$, היא $I$ (משפט 1.14.2).

המעבר למטריצה קנונית נעשה, כזכור, על־ידי פעולות אלמנטריות, הווי אומר - קיימת סדרת פעולות אלמנטריות $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ כך ש־

$$\varphi_k\left(\ldots\left(\varphi_2\left(\varphi_1(A)\right)\right)\ldots\right) = I$$

ומכאן, על פי טענה 3.9.4, נסיק ש־

$$\varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I) \cdot A = I \qquad (1)$$

נסמן $B = \varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)$. אזי השוויון האחרון פירושו $BA = I$.

המטריצה $B$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, ולכן לפי מסקנה 3.9.6, היא הפיכה וההופכית לה היא המטריצה $B^{-1} = \varphi_1^{-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_k^{-1}(I)$. נכפול את אגפי השוויון (1) ב־ $B^{-1}$ ונקבל:

$$A = B^{-1}$$

לכן $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, משום ש־ $B^{-1}$ היא כזאת.

**מ.ש.ל.**

**דוגמה**

נתבונן במטריצה $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&0\end{pmatrix}$. אנו נראה שהיא הפיכה, ונציג אותה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. כדי לבצע זאת, נבצע שורה של פעולות דירוג שנועדו להביא את המטריצה למטריצת מדרגות קנונית (שתהיה, כפי שמיד נראה, מטריצת היחידה), ונעקוב אחר המטריצות האלמנטריות המתאימות.

הפעולה הראשונה שנבחר לבצע היא החלפת השורה הראשונה והשנייה (אין הכרח לבצע דווקא פעולה זו – ניתן היה לפעול על פי שיטת גאוס, אך מהתבוננות במטריצה קל לראות שהחלפת השורות כדאית).

אם כן, אנו מבצעים את הפעולה $\varphi_1 : R_1 \leftrightarrow R_2$, המביאה את $A$ לצורה $\begin{pmatrix}2&0\\3&1\end{pmatrix}$. כעת נבצע את הפעולה $\varphi_2 : R_1 \to \frac{1}{2}R_1$, המביאה אותה לצורה $\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$. נסיים בביצוע הפעולה $\varphi_3 : R_2 \to R_2 - 3R_1$, המביאה את המטריצה למטריצת היחידה. לפי טענה 3.9.4, $I=\varphi_3(I)\varphi_2(I)\varphi_1(I)A$, ועל כן $A=\varphi_1(I)^{-1}\varphi_2(I)^{-1}\varphi_3(I)^{-1}$. לפי מסקנה 3.9.6:

$$\varphi_1(I)^{-1}=\varphi_1^{-1}(I)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(I)^{-1}=\varphi_2^{-1}(I)=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\varphi_3(I)^{-1}=\varphi_3^{-1}(I)=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$$

ודאו על־ידי חישוב ישיר כי אכן מתקיים: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$. בזאת הצגנו את המטריצה שממנה יצאנו כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. ◀

על־ידי שילוב מסקנה 3.9.6 וטענה 3.9.7 נקבל:

**מסקנה 3.9.8**

מטריצה $A$ היא הפיכה אם ורק אם $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

כזכור (הגדרה 1.8.1), מטריצה $B$, המתקבלת ממטריצה $A$ על־ידי סדרה סופית של פעולות אלמנטריות, מכונה **שקולת שורות** ל־$A$. לאור הטענות האחרונות, ברור כי $B$ שקולת שורות ל־$A$ אם ורק אם קיימות מטריצות אלמנטריות $\varphi_1(I),\dots,\varphi_k(I)$ כך שמתקיים:

$$B=\varphi_k(I)\dots\varphi_1(I)A$$

**מסקנה 3.9.9**

$B$ היא שקולת שורות ל־$A$ אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש־

$$B = CA$$

**הוכחה**

אם $B$ מטריצה שקולת שורות ל־$A$, אז קיימות מטריצות אלמנטריות $\varphi_1(I),\ldots,\varphi_k(I)$ המקיימות:

$$B = \varphi_k(I)\ldots\varphi_1(I)A$$

לפי מסקנה 3.9.8, $C = \varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)$ היא מטריצה הפיכה, ולכן $B = CA$ כאשר $C$ הפיכה.

אם $B = CA$ כאשר $C$ הפיכה, אז לפי מסקנה 3.9.8 –

$$C = \varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)$$

כאשר $\varphi_i(I)$ מטריצה אלמנטרית לכל $1 \le i \le k$, ולכן $B = \varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)A$.
היות שכפל במטריצה אלמנטרית שקול לביצוע פעולה אלמנטרית, נובע כי $B$ התקבלה מ־$A$ על־ידי סדרה של פעולות אלמנטריות, ולכן $B$ שקולת שורות ל־$A$.

**מ.ש.ל.**

**מסקנה 3.9.10**

מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה אם ורק אם $A$ שקולת שורות ל־$I$.

**הוכחה**

נניח כי $A$ הפיכה, ונוכיח כי $A$ שקולת שורות ל־$I$.
מאחר ש־$A = A\cdot I$, על פי מסקנה 3.9.9 (כאשר מציבים $A$ במקום $B$, $I$ במקום $A$ ו־$A$ במקום $C$), נובע כי $A$ שקולת שורות ל־$I$.

נניח כעת כי $A$ שקולת שורות ל־$I$, ונוכיח כי $A$ הפיכה:
על פי מסקנה 3.9.9, קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש־

$$A = CI$$

אבל

$$CI = C$$

ולכן קיבלנו

$$A = C$$

ומאחר ש־$C$ הפיכה, הרי ש־$A$ הפיכה.

**מ.ש.ל.**

בשאלה הבאה תתבקשו להוכיח כמה תכונות של יחס שקילות השורות בין מטריצות. על נכונות תכונות אלה למדתם כבר בפרק 1, אך הפעם נבקש כי תוכיחו אותם בעזרת מסקנה 3.9.10.

**שאלה 3.9.5**

הוכיחו:

א. כל מטריצה היא שקולת שורות לעצמה.

ב. אם $A$ שקולת שורות ל־ $B$, אז $B$ שקולת שורות ל־$A$.

ג. אם $A$ שקולת שורות ל־ $B$ ו־ $B$ שקולת שורות ל־ $C$, אז $A$ שקולת שורות ל־ $C$.

**התשובה בעמוד 322**

**שאלה 3.9.6**

בסוף הסעיף הקודם הוכחנו כי מטריצה אלכסונית אשר כל איברי האלכסון הראשי שלה שונים מ־0 היא הפיכה. כל מטריצה אלכסונית שאיברי האלכסון בה שונים מ־0 ניתנת אם כן (לפי מסקנה 3.9.9) להצגה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות. מצאו, אם כן, הצגה של המטריצה

$$\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

($a_i \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$)

כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

**התשובה בעמוד 323**

**שאלה 3.9.7**

תהי $A$ שקולת שורות ל־ $B$. הוכיחו כי $A$ הפיכה אם ורק אם $B$ הפיכה.

**התשובה בעמוד 323**

הבטחנו בסעיף הקודם לאפיין את המטריצות ההפיכות, ובמסקנה 3.9.10 אכן עשינו זאת.[4] אבל כדי שתרוו נחת מהאפיון, כדאי שנשכנע אתכם שניתן לבדוק אם מטריצה ריבועית נתונה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות או לא.

**כיצד בודקים אם מטריצה ריבועית היא הפיכה?**

ובכן, נצא ממטריצה ריבועית כלשהי $A$. נבצע על $A$ פעולות אלמנטריות בהתאם לשיטת הדירוג של גאוס שלמדתם בפרק 1, ונביא אותה לצורת מדרגות קנונית.

קיימות שתי אפשרויות:

א. במהלך הדירוג נגיע למטריצה שבה יש שורת אפסים, או:

ב. בסיום תהליך הדירוג נגיע למטריצת היחידה.[5]

$A$ היא כמובן שקולת שורות לכל אחת מהמטריצות שדרכן נעבור:

4 המטריצות ההפיכות הן המכפלות של מספר סופי של מטריצות אלמנטריות.

5 ראו משפט 1.14.4.

לפיכך, אם יקרה א, הרי ש־$A$ שקולת שורות למטריצה שיש בה שורת אפסים. אבל מטריצה עם שורת אפסים אינה הפיכה ולכן, על פי שאלה 3.9.7, גם $A$ אינה הפיכה. אם יקרה ב, הרי ש־$A$ שקולת שורות ל־ $I$ וממילא – על פי מסקנה 3.9.10 – $A$ הפיכה.

נניח עתה שמצאנו בתהליך הדירוג כי:

$$\varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)A = I$$

אזי, לא זו בלבד ש־$A$ הפיכה, אלא:

$$A^{-1} = \varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)$$

ולכן:

$$A^{-1} = \varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)\cdot I$$

ולכן:

$$A^{-1} = \varphi_k\left(\varphi_{k-1}(\ldots\varphi_2(\varphi_1(I))\ldots)\right)$$

הווי אומר, $A^{-1}$ היא המטריצה המתקבלת מכך שמבצעים על המטריצה $I$ בדיוק אותן פעולות (באותו סדר) שמבצעים על $A$ כדי להביאה ל־ $I$.

הנה תיאור דרך רישום שהיא נוחה, מבחינה טכנית, לחישוב $A^{-1}$:[6]

רושמים את המטריצה $A$ ולימינה את המטריצה $I$ כשביניהן קו הפרדה, כך:

$$[A \mid I]$$

מבצעים על המטריצה הגדולה המתקבלת באופן זה את סדרת הפעולות האלמנטריות המביאות את $A$ למטריצת מדרגות קנונית. תוך כדי כך מתבצעות אותן פעולות גם על המטריצה $I$, וכאשר $A$ הופכת ל־ $I$, $I$ הופכת ל־ $A^{-1}$.

בסימונים:

$$[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}]$$

**דוגמה**

עבור

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

נבדוק אם $A$ הפיכה, ואם כן – נמצא את $A^{-1}$ בדרך שתוארה לעיל.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 27 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_1 \to R_2 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 24 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to 1/6 R_3]{R_2 \to 1/2 R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1/6 & 0 & 1/6 \end{array}\right]$$

6 בדרך זו בודקים "באותה מכה" אם $A$ הפיכה.

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 3R_3]{R_1 \to R_1 + 3R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{array}\right] = \left[ I \mid A^{-1} \right]$$

נסיק כי $A$ הפיכה ומתקיים:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

כדאי שתוודאו על־ידי כפל ישיר כי אכן:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

▶

**שאלה 3.9.8**

לפי השיטה שהודגמה זה עתה, קבעו לגבי כל אחת מהמטריצות הבאות אם היא הפיכה אם לאו. אם המטריצה הפיכה, מצאו את המטריצה ההופכית שלה.

א. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

ב. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

ג. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

**התשובה בעמוד 324**

# 3.10 אפיונים נוספים של מטריצות הפיכות

בסעיף זה נבסס כמה קריטריונים שקולים להפיכות מטריצה ריבועית נתונה.

**טענה 3.10.1**

מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם לכל וקטור עמודה $b \in F^n$, למשוואה הוקטורית $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

**הוכחה**

א. נניח כי $A$ הפיכה. יהי $b \in F^n$ וקטור עמודה כלשהו.
עלינו להוכיח כי למשוואה הוקטורית

$$Ax = b$$

יש פתרון יחיד.
אם $c$ הוא פתרון של המשוואה, אז $Ac = b$, ולכן על־ידי כפל שני האגפים של השוויון משמאל ב־ $A^{-1}$, נקבל:

$$c = A^{-1}b$$

הווי אומר, כל וקטור פתרון שווה בהכרח לוקטור $A^{-1}b$, ולכן אם קיים פתרון אז הוא יחיד.
להשלמת ההוכחה בדקו בעצמכם כי וקטור העמודה $A^{-1}b$ הוא אכן פתרון.

ב. נניח כי לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ קיים פתרון יחיד ל־

$$Ax = b$$

ונוכיח כי $A$ הפיכה.
מההנחה נובע בפרט כי קיים פתרון יחיד למשוואה $Ax = 0$, אבל מכך נובע כי $A$ שקולת שורות ל־ $I$ לפי משפט 1.14.2, ולכן על פי מסקנה 3.9.11, $A$ הפיכה.

**מ.ש.ל.**

**טענה 3.10.2**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם למשוואה הוקטורית

$$Ax = 0$$

אין פתרון לא־טריוויאלי.

**הוכחה**

אם $A$ הפיכה, אז לפי טענה 3.10.1, לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ יש פתרון יחיד למשוואה הוקטורית $Ax = b$. בפרט, יש פתרון יחיד במקרה ש־ $b = 0$. כלומר, יש פתרון יחיד למשוואה $Ax = 0$. מאחר שקיים למשוואה זו הפתרון הטריוויאלי, נובע מכך שאין למשוואה זו פתרון לא־טריוויאלי.

בכיוון ההפוך, נניח כי למשוואה $Ax = 0$ אין פתרון לא־טריוויאלי. אז $A$ שקולת שורות ל־ $I$, ולכן לפי מסקנה 3.9.11 – $A$ הפיכה.

**מ.ש.ל.**

---

**טענה 3.10.3**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם העמודות של $A$ הן בלתי תלויות לינארית.

---

**הוכחה**

לפי משפט 2.6.5 בפרק 2, העמודות של $A$ בלתי תלויות לינארית אם ורק אם למשוואה

$$Ax = 0$$

יש רק פתרון טריוויאלי, ותנאי זה, על פי טענה 3.10.2, הוא תנאי הכרחי ומספיק להפיכות של $A$.

**מ.ש.ל.**

---

**טענה 3.10.4**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם השורות של $A$ הן בלתי תלויות לינארית.

---

**הוכחה**

לפי משפט 3.8.4, $A$ הפיכה אם ורק אם $A^t$ הפיכה. לפי טענה 3.10.3, $A^t$ הפיכה אם ורק אם עמודותיה של $A^t$ הן בלתי תלויות לינארית. אבל עמודותיה של $A^t$ אינן אלא השורות של $A$, ובסך הכול קיבלנו כי $A$ הפיכה אם ורק אם השורות של $A$ בלתי תלויות לינארית.

**מ.ש.ל.**

---

**טענה 3.10.5**

מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם לכל וקטור עמודה $b \in F^n$, למשוואה הוקטורית $Ax = b$ קיים פתרון.

---

שימו לב, ההבדל בין טענה זו לבין טענה 3.10.1 היא שכאן לא דרשנו את יחידות הפתרון.

**הוכחה**

א. אם $A$ הפיכה, אז לפי טענה 3.10.1 – לכל משוואה מהצורה

$$Ax = b$$

יש פתרון יחיד (ובפרט – יש פתרון).

ב. אם לכל $b \in F^n$ קיים פתרון למשוואה

$$Ax = b$$

אז $n$ העמודות של $A$ פורשות את $F^n$, ולכן על פי משפט 2.7.8, $n$ העמודות של $A$ הן בלתי תלויות לינארית. לכן, על פי טענה 3.10.3, $A$ הפיכה.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 3.10.1**

תהי $A \in \mathbf{M}_n(F)$. הוכיחו כי:

א. $A$ הפיכה אם ורק אם עמודותיה, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

ב. $A$ הפיכה אם ורק אם שורותיה, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

**התשובה בעמוד 325**

נסכם את התנאים ההכרחיים והמספיקים להפיכות שמצאנו במשפט אחד.

---

**משפט 3.10.6**

תהי $A \in \mathbf{M}_n(F)$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.

כל אחת מהטענות שלהלן היא תנאי הכרחי ומספיק להפיכות של $A$.

א. $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ב. $A$ שקולת שורות ל־ $I$.

ג. קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש־ $CA = I$.

ד. צורת המדרגות הקנונית של $A$ היא $I$.

ה. לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ קיים פתרון יחיד למשוואה $Ax = b$

ו. לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ קיים פתרון למשוואה $Ax = b$

ז. למשוואה $Ax = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי.

ח. העמודות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, הן בלתי תלויות לינארית.

ט. השורות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, הן בלתי תלויות לינארית.

י. העמודות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

יא. השורות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

---

מפאת חשיבותן של תוצאות אלה, אנו ממליצים כי תעברו בקפידה על כל סעיפיו של משפט 3.10.6 ותוודאו כי נהירה לכם דרך ההוכחה לכך שכל אחד מהם הוא תנאי הכרחי ומספיק להפיכות (בהסתמך על המשפטים והטענות הקודמים לניסוח המשפט).

**שאלה 3.10.2**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות מסדר $n$.

הוכיחו כי $AB$ הפיכה אם ורק אם גם $A$ וגם $B$ הפיכות.

**התשובה בעמוד 326**

**שאלה 3.10.3**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות מסדר $n$.

א. הוכיחו כי

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

אם ורק אם:

$$AB = BA$$

ב. מצאו מטריצות ממשיות $A$ ו־ $B$ מסדר $2 \times 2$ שעבורן:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

ג.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

קבעו ביחס לכל אחת מהמטריצות שלהלן אם היא סינגולרית או הפיכה.

.1 $A$   .2 $B$   .3 $AB$   .4 $A^2$   .5 $B^2$

**התשובה בעמוד 326**

**שאלה 3.10.4**

א. תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$ מהצורה:

$$A = \begin{matrix} n-1\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\*\\\vdots\\*\end{matrix}}\right. \\ \phantom{0} \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\qquad\quad B \qquad\quad}^{n-1} & \begin{matrix}*\\*\\\vdots\\*\end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר $B$ מטריצה כלשהי מסדר $(n-1)\times(n-1)$ והכוכבים מסמנים סקלרים כלשהם.

הראו כי לכל מספר טבעי $k$ מתקיים:

$$[1]\ A^k = \begin{matrix} n-1\left\{\vphantom{\begin{matrix}*\\*\\\vdots\\*\end{matrix}}\right. \\ \phantom{0} \end{matrix} \begin{bmatrix} \overbrace{\qquad\quad B^k \qquad\quad}^{n-1} & \begin{matrix}*\\*\\\vdots\\*\end{matrix} \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 \end{bmatrix}$$

רמז: השתמשו באינדוקציה על $k$.

1 כאן הכוכבים מסמנים סקלרים מסוימים, לאו דווקא את אלה המופיעים במטריצה עצמה.

ב. תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$ שאיבריה $a_{ij}$ מקיימים[2]

$$a_{ij} = 0$$

לכל $i \geq j$.

הוכיחו כי:

$$A^n = 0_{n\times n}$$

(שימו לב שהמעריך $n$ שווה לסדר המטריצה $A$, שגם הוא $n$.)

רמז: השתמשו באינדוקציה על הסדר $n$ של המטריצה ובחלק א של השאלה.

**התשובה בעמוד 328**

לסיום הפרק, נדון בסיבה נוספת להגדרה ה"משונה" של כפל המטריצות (או לפחות, להגדרת הכפל של מטריצה בוקטור).

---

**הגדרה 3.10.7 העתקה לינארית**

יהיו $F$ שדה, $n,m$ מספרים טבעיים, ותהי $T$ העתקה (כלומר, פונקציה) מ־ $F^n$ ל־ $F^m$. נאמר ש־$T$ היא **העתקה לינארית**, או בקיצור - כי $T$ היא **לינארית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. לכל $v,w \in F^n$ מתקיים $T(v+w) = T(v) + T(w)$.

ב. לכל $v \in F^n$ ולכל סקלר $s \in F$ מתקיים $T(sv) = sT(v)$.

---

**דוגמה 1**

ההעתקה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, המוגדרת על־ידי $T(x,y) = 2x - y$, היא העתקה לינארית. נוכיח זאת:

א. לכל $v = (a,b), w = (c,d)$ ב־ $\mathbb{R}^2$, מתקיים:

$$\begin{aligned} T(v+w) &= T((a+c,b+d)) = 2(a+c) - (b+d) = (2a-b) + (2c+d) \\ &= T((a,b)) + T((c,d)) = T(v) + T(w) \end{aligned}$$

ב. לכל $s \in \mathbb{R}$, $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, מתקיים:

$$T(sv) = T((sa,sb)) = 2(sa) - (sb) = s(2a-b) = sT(v)$$

▸

**דוגמה 2**

ההעתקה $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, המוגדרת על־ידי $T((x,y)) = (x+1,0,y)$, איננה העתקה לינארית. אכן, לו הייתה זו העתקה לינארית, היה מתקיים (בפרט) $T((2,0)) = 2T((1,0))$. אבל $T((2,0)) = (3,0,0)$, ואילו $2T((1,0)) = 2(2,0,0) = (4,0,0)$. ▸

---

2 עבור $n = 3$, למשל, מטריצה כזאת נראית כך:

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**שאלה 3.10.5**

עבור כל אחת מההעתקות הבאות מ־ $\mathbb{R}^2$ ל־ $\mathbb{R}^2$, בדקו האם היא לינארית:

א. $T((x,y)) = (2x,0)$

ב. $T((x,y)) = (x,y)$

ג. $T((x,y)) = (x^2,y)$

ד. $T((x,y)) = (x \cdot y, y)$

**התשובה בעמוד 331**

**שאלה 3.10.6**

תהי $T$ העתקה מ־ $F^n$ ל־ $F^m$. הוכיחו כי $T$ לינארית אם ורק אם לכל $v,w \in F^n$ ולכל זוג סקלרים $s,t \in F$ מתקיים $T(sv+tw) = sT(v) + tT(w)$.

**התשובה בעמוד 331**

**שאלה 3.10.7**

תהי $A \in M_{m\times n}(F)$ מטריצה, ותהי $T$ ההעתקה מ־ $F^n$ ל־ $F^n$ המוגדרת על־ידי $T(v) = Av$ (שימו לב - אנו רואים את הארגומנט $v$ כוקטור עמודה, ולכן הכפל המופיע בהגדרת ההעתקה מוגדר היטב). הוכיחו כי $T$ העתקה לינארית.

**התשובה בעמוד 331**

העתקות לינאריות הן מושג מרכזי באלגברה לינארית, ובהמשך נעסוק בהן בהרחבה. בשאלה האחרונה הוכחתם כי פעולת הכפל של מטריצה בוקטור מגדירה העתקה לינארית. בהמשך הקורס נוכיח, כי כל העתקה לינארית ניתנת לביטוי על־ידי פעולת כפל של מטריצה מסוימת בוקטור. תכונה זו מאפשרת "לתרגם" בעיות העוסקות בהעתקות לינאריות לבעיות העוסקות במטריצות.

# תשובות לשאלות בפרק 3

**תשובה 3.1.1** **השאלה בעמוד 228**

א. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$, $[A]_{3,2}=7$.

ב. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 \\ 8 & 16 & 32 \\ 16 & 32 & 64 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2^{1+1} & 2^{1+2} & 2^{1+3} \\ 2^{2+1} & 2^{2+2} & 2^{2+3} \\ 2^{3+1} & 2^{3+2} & 2^{3+3} \end{bmatrix}=A$, ו־ $[A]_{3,2}=2^5=32$.

ג. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. האיבר $[A]_{3,2}$ אינו מוגדר, מאחר שבמטריצה רק שתי שורות!

ד. $A=\begin{bmatrix} 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{1+n} \\ 2^3 & 2^4 & & 2^{2+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^{m+1} & 2^{m+2} & \cdots & 2^{m+n} \end{bmatrix}$. האיבר $[A]_{3,2}$ מוגדר רק אם $m\ge 3, n\ge 2$, ובמקרה זה ערכו $[A]_{3,2}=2^5=32$.

**תשובה 3.1.2** **השאלה בעמוד 229**

שתי המטריצות הן מאותו הסדר. כדי שיתקיים השוויון

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ u & 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z & y \\ y & x^2 \end{bmatrix}$$

דרוש כי:

$$z=0$$

$$x=y$$

$$u=y$$

$$x^2=9$$

ושוויונות אלה יתקיימו אם ורק אם $x=\pm 3$, $z=0$, $x=y=u$.

**תשובה 3.2.1** **השאלה בעמוד 232**

נסמן $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$.

א. מתוך ההגדרה נקבל בשני האגפים את וקטור השורה: $\left[a_{1i},\ldots,a_{mi}\right]$

ב. מתוך ההגדרה נקבל בשני האגפים את וקטור העמודה:

$$\begin{bmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{bmatrix}$$

**תשובה 3.2.2** **השאלה בעמוד 233**

מההגדרה נקבל:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

ואז:

$$(A^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = A$$

**תשובה 3.2.3** **השאלה בעמוד 233**

א. תהי $A$ מטריצה מסדר $m \times n$, ונניח כי $A$ סימטרית. לפי ההגדרה, $A^t$ הינה מטריצה מסדר $n \times m$. $A$ סימטרית, כלומר $A = A^t$, ובפרט הסדרים של $A$ ושל $A^t$ שווים, וזה נכון רק אם $m = n$, כלומר רק אם $A$ היא מטריצה ריבועית.

ב. נתבונן לדוגמה במטריצה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

אז:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

האיבר ה־$(2,1)$ של $A$ הוא 3 והאיבר ה־$(2,1)$ של $A^t$ הוא 2, ולכן $A \neq A^t$, כלומר $A$ אינה סימטרית אף על פי ש־$A$ ריבועית.

**תשובה 3.2.4** **השאלה בעמוד 234**

יהיו $1 \le i \le n$ ו־ $1 \le j \le n$ כלשהם.

1. אם $i = j$, אז האיבר ה־$(i,j)$ של $A$, שהוא $a_{ij}$, שווה ל־ $a_{ji}$ (שכן $i = j$), שהוא האיבר ה־$(j,i)$ של $A$, והוא גם האיבר ה־$(i,j)$ של $A^t$, כדרוש.
2. אם $i \neq j$, אז האיבר ה־$(i,j)$ של $A$ אינו נמצא על האלכסון הראשי של $A$, ולכן לפי הנתון $a_{ij}$ הוא 0. באופן דומה, גם $a_{ji}$ הוא 0, אבל $a_{ji}$ הוא האיבר ה־$(j,i)$ של $A$ והוא גם האיבר ה־$(i,j)$ של $A^t$, ולכן איברים אלה שווים.

מ־1 ומ־2 נקבל כי לכל $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, האיבר ה־$(i,j)$ של $A$ שווה לאיבר ה־$(i,j)$ של $A^t$, ולכן $A = A^t$, כלומר $A$ סימטרית.

**תשובה 3.3.1** **השאלה בעמוד 236**

א. לפי הגדרת הסכום:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 2+0 \\ 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ב. $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & 2+2 & 3+0 \\ 1+(-3) & 3+2 & 2+\sqrt{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 2+\sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

**תשובה 3.3.2** **השאלה בעמוד 236**

השוויון הנדון שקול לארבעת השוויונות הבאים:

$$x + y = u$$

$$y + z = 2u$$

$$2x + z = 0$$

$$u + y = 5$$

נוכל לראות זאת כמערכת משוואות; למערכת זו פתרון יחיד (בדקו!):

$$x = \frac{30}{7} - 5, \quad y = 5 - \frac{15}{7}, \quad z = \frac{45}{7} - 5, \quad u = \frac{15}{7}$$

**תשובה 3.3.3** **השאלה בעמוד 236**

אין ערכים מספריים ל־ $\delta,\gamma,\beta,\alpha$ שעבורם יתקיים השוויון, שכן כדי שיתקיים שוויון דרוש בפרט שהאיבר ה־ $(2,3)$ של סכום המטריצות שבאגף שמאל ישווה לאיבר ה־ $(2,3)$ של המטריצה שמימין.

אבל באגף שמאל האיבר ה־ $(2,3)$ של הסכום הוא

$$7 + 1 = 8$$

בעוד שבאגף ימין האיבר ה־ $(2,3)$ הוא 1.

**תשובה 3.3.4** **השאלה בעמוד 240**

נסמן:

$$B = \left[b_{ij}\right] \quad ; \quad A = \left[a_{ij}\right]$$

השוויון $tA = tB$ פירושו שלכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$ta_{ij} = tb_{ij}$$

מכיוון ש־ $t \neq 0$, יש לו הופכי $t^{-1}$, ומכפל שני אגפי השוויון הזה ב־ $t^{-1}$ נקבל שלכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

כלומר:

$$A = B$$

שימו לב שאם $t = 0$, הטענה אינה נכונה. במקרה זה לכל שתי מטריצות מאותו סדר, $A$ ו־ $B$

$$tA = tB = 0$$

גם אם $A \neq B$.

**תשובה 3.3.5** **השאלה בעמוד 240**

א. לפי הגדרת ההפרש:

$$A - B = A + (-B)$$

האיבר ה־ $(i, j)$ של $A$ הוא $a_{ij}$, והאיבר ה־ $(i, j)$ של $-B$ הוא $-b_{ij}$. לכן האיבר ה־ $(i, j)$ של $A - B$ הוא:

$$a_{ij} + (-b_{ij}) = a_{ij} - b_{ij}$$

ולכן:

$$A - B = \left[(a_{ij} - b_{ij})\right]_{m \times n}$$

ב. על פי תכונות החיבור:

$$B + (A - B) = B + \left[(-B) + A\right] = \left[B + (-B)\right] + A = 0 + A = A$$

ולכן $A - B$ הוא פתרון של המשוואה:

$$B + X = A$$

להוכחת העובדה כי $A - B$ הוא הפתרון היחיד, נניח כי $C$ הוא פתרון, כלומר כי מתקיים:

$$B + C = A$$

נוסיף $(-B)$ לשני אגפי השוויון, ונקבל:

$$(-B) + (B + C) = (-B) + A \qquad (*)$$

אבל:

$$(-B) + (B + C) = \left[(-B) + B\right] + C = 0 + C = C$$

וכן:

$$(-B) + A = A + (-B) = A - B$$

לכן, לפי (*) נקבל כי:

$$C = A - B$$

לפיכך $A - B$ הוא הפתרון היחיד של המשוואה הנידונה.

**תשובה 3.3.6** **השאלה בעמוד 241**

א. אם $A = [a_{ij}]$, אזי לכל $i, j$ מתקיים:

$$\left[(sA)^t\right]_{ij} = \left[sA\right]_{ji} = sa_{ji} = s\left[A^t\right]_{ij} = \left[sA^t\right]_{ij}$$

ולכן $s(A^t) = (sA)^t$.

ב. אם $A$ ו־ $B$ הן מטריצות מסדר $m \times n$, אז גם $A + B$ הוא מסדר $n \times m$, ולכן $A^t$, $B^t$ ו־ $(A + B)^t$ הן מסדר $n \times m$, וכן גם $A^t + B^t$ היא מסדר $n \times m$. מתקיים:

$$\left[(A + B)^t\right]_{ij} = \left[A + B\right]_{ji} = \left[A\right]_{ji} + \left[B\right]_{ji} = \left[A^t\right]_{ij} + \left[B^t\right]_{ij} = \left[A^t + B^t\right]_{ij}$$

ולכן:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

**תשובה 3.3.7** **השאלה בעמוד 241**

אם $A$ ו־ $B$ הן מטריצות סימטריות, כלומר $A = A^t$ ו־ $B = B^t$, אז:

$$(A+B)^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי משפט 3.3.7}}}{=} A^t + B^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{מהנתון}}}{=} A + B$$

כלומר $(A+B)^t = A + B$, ולכן $A + B$ הינה מטריצה סימטרית.

**תשובה 3.4.1** **השאלה בעמוד 243**

$$\begin{bmatrix}5, & 6, & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix} = 5\cdot 2 + 6\cdot 4 + 0\cdot 2 = 34$$

**תשובה 3.4.2** **השאלה בעמוד 245**

$$c_{12} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\\1/2\end{bmatrix} = 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot\frac{1}{2} = 17$$

$$c_{21} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 1\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 = 11$$

$$c_{22} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\\1/2\end{bmatrix} = 2\cdot 0 + 4\cdot 0 + 1\cdot 3 + (-1)\cdot 4 + 0\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$c_{31} = \begin{bmatrix}3 & 7 & 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = 3\cdot 1 + 7\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 = 21$$

$$c_{41} = \begin{bmatrix}4 & 3 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\-2\\1\\0\end{bmatrix} = 4\cdot 1 + 3\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 0 = 16$$

$$c_{42}=\begin{bmatrix}4 & 3 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\3\\4\\1/2\end{bmatrix}=4\cdot 0+3\cdot 0+(-2)\cdot 3+(-1)\cdot 4+1\cdot\frac{1}{2}=-9\frac{1}{2}$$

כבר מצאנו בגוף הטקסט כי $c_{11}=8$ וכי $c_{32}=10\frac{1}{2}$. כעת חושבו כל איברי $A\cdot B$, וקיבלנו:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ A_{4\times 5}}}{\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 7 & 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & -2 & -1 & 1\end{bmatrix}}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ B_{5\times 5}}}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\\ -2 & 3\\ 1 & 4\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}}=\underset{\substack{\uparrow\\ C_{4\times 2}}}{\begin{bmatrix}8 & 17\\ 11 & -1\\ 21 & 10\frac{1}{2}\\ 16 & -9\frac{1}{2}\end{bmatrix}}$$

**תשובה 3.4.3** **השאלה בעמוד 245**

א. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 3 & -1 & 2\\ -6 & 0 & 4\end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $3\times 3$.

$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $3\times 2$.

לכן המכפלה $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2}$ מוגדרת, והיא המטריצה $C$ מסדר $3\times 2$ שאיבריה הם:

$$C=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 14 & 3\\ 12 & 8\end{bmatrix}$$

לדוגמה, את האיבר ה־$(2,1)$ של $C$ קיבלנו על־ידי כפל השורה השנייה של $A$, $\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, בעמודה הראשונה של $B$,

$$\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}=3\cdot 2+(-1)\cdot 4+2\cdot 6=6-4+12=14$$

ב. $A=\begin{bmatrix}1/2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $3\times 2$.

$B=\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $3\times 1$.

לכן המכפלה $A_{3\times 3} \cdot B_{3\times 1}$ מוגדרת, והיא המטריצה $C$ מסדר $3 \times 1$ שאיבריה הם:

$$C = \begin{bmatrix} 28 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

לדוגמה, את האיבר ה־$(1,1)$ של $C$ קיבלנו על־ידי כפל השורה הראשונה של $A$ בעמודה הראשונה (והיחידה) של $B$:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-2) + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = -1 + 9 + 20 = 28$$

ג. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $1 \times 3$.

$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $3 \times 2$.

לכן המכפלה $A_{1\times 3} \cdot B_{3\times 2}$ מוגדרת, והיא המטריצה $C$ מסדר $1 \times 2$:

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$$

לדוגמה, את האיבר ה־$(1,2)$ של $C$ קיבלנו על־ידי המכפלה הבאה:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = (-1) \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 \cdot 5 = -3 + 2 + 5 = 4$$

ד. אורך השורות במטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ הוא 2, והוא שונה מאורך העמודות במטריצה $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ שהוא 3, ולכן המכפלה $A \cdot B$ אינה מוגדרת.

(שימו לב שהמכפלה $B \cdot A$ כן מוגדרת, שכן אורך השורות של $B$ הוא 2 והוא שווה לאורך העמודות של $A$.)

ה. אורך השורות במטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ הוא 3, והוא שווה לאורך העמודה במטריצה $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ שהוא 3, ולכן מוגדרת המכפלה $A \cdot B$ והיא מטריצה מסדר $1 \times 1$, כלומר סקלר.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 2 = -1 + 1 + 12 = 12$$

ו. $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $3 \times 1$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ הינה מטריצה מסדר $1 \times 3$, ולכן המכפלה $A_{3\times 1} \cdot B_{1\times 3}$ מוגדרת, והיא מטריצה מסדר $3 \times 3$:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

לדוגמה, האיבר ה־ $(2,3)$ של $C$ התקבל מכפל השורה השנייה של $A$, $\frac{1}{2}$, בעמודה השלישית של $B$, 6:

$$\frac{1}{2}\cdot 6 = 3$$

ז. אורך השורות במטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ הוא 2, והוא שווה לאורך העמודות במטריצה $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$, ולכן מוגדרת המכפלה $A_{3\times 2}\cdot B_{2\times 2}$, והיא מטריצה $C$ מסדר $3\times 2$.

$$C=\begin{bmatrix}12 & 15\\ -3 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

ח. המטריצות $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ ו־ $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ הן מטריצות מסדר $2\times 2$, ולכן מוגדרת המכפלה $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}$, והיא מטריצה $C$ מסדר $2\times 2$:

$$C=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

ט. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $2\times 3$. $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $3\times 2$, ולכן המכפלה $A_{2\times 3}\cdot B_{3\times 2}$ מוגדרת, והיא מטריצה מסדר $2\times 2$:

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

י. $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $1\times 3$ ו־ $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ היא מטריצה מסדר $3\times 2$, ולכן מוגדרת המכפלה והיא מטריצה מסדר $1\times 2$ (וקטור שורה):

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

יא. תהי $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ מטריצה כלשהי מסדר $n\times p$. המכפלה $O_{m\times n}\cdot B_{n\times p}$ מוגדרת, והיא מטריצה מסדר $m\times p$. נסמנה $C=\left[c_{ij}\right]$.

השורה ה־ $i$ של $O_{m\times n}$ היא שורת אפסים ולכן האיבר ה־ $(i,j)$ של $C$ הוא:

$$c_{ij}=0\cdot b_{1j}+0\cdot b_{2j}+\ldots+0\cdot b_{nj}=0$$

כלומר, כל איברי $C$ הם אפסים, ולכן:

$$O_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=O_{m\times p}$$

יב. תהי $A$ מטריצה כלשהי מסדר $m \times n$. המכפלה $A_{m\times n} \cdot O_{n\times q}$ מוגדרת והיא מטריצה מסדר $m \times q$. נסמנה $C = \left[d_{ij}\right]$.

האיבר ה־ $(i, j)$ של $D$ הוא:

$$d_{ij} = a_{i1} \cdot 0 + ... + a_{in} \cdot 0 = 0$$

ולכן:

$$A_{m\times n} \cdot O_{n\times q} = O_{m\times q}$$

**תשובה 3.4.4** **השאלה בעמוד 246**

א. כדי שהמכפלה $A_{m\times n} \cdot B_{p\times q}$ תהיה מוגדרת, דרוש שיתקיים $n = p$.
כדי שהמכפלה $B_{p\times q} \cdot A_{m\times n}$ תהיה מוגדרת, דרוש שיתקיים $q = m$.
כדי ששתי המכפלות תהיינה מוגדרות, דרוש אפוא כי $p = n$ וגם $q = m$, כלומר ש־ $B$ תהיה מטריצה מסדר $n \times m$. בתנאים אלה, המכפלה $A_{m\times n} \cdot B_{n\times m}$ היא מסדר $m \times m$, ואילו המכפלה $B_{n\times m} \cdot A_{m\times n}$ היא מסדר $n \times n$.

ב. (א) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 2 ושונה מאורך העמודות ב־ $A$ שהוא 3, ולכן המכפלה $B \cdot A$ אינה מוגדרת.

(ב) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 1 ושונה מאורך העמודות ב־ $A$ שהוא 3, ולכן גם במקרה זה המכפלה $B \cdot A$ אינה מוגדרת.

(ג) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 2 ושונה מאורך העמודות ב־ $A$ שהוא 1, ולכן המכפלה $B \cdot A$ אינה מוגדרת.

(ד) $B$ היא מסדר $2 \times 3$ ו־ $A$ היא מסדר $2 \times 2$ ולכן המכפלה $B_{3\times 2} \cdot A_{2\times 2}$ מוגדרת.
המכפלה $A_{2\times 2} \cdot B_{3\times 2}$ אינה מוגדרת כלל וממילא אין השוויון $AB = BA$ מתקיים.

(ה) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 1 ושווה לאורך העמודות של $A$, ולכן מוגדרת המכפלה $B \cdot A$. את המכפלה הזאת חישבנו בסעיף ו של שאלה 3.4.3 וקיבלנו כי:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

(ו) ראו את הסעיף הקודם.

(ז) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 2 ושונה מאורך העמודות במטריצה $A$, ולכן המכפלה $B \cdot A$ אינה מוגדרת.

(ח) אורך השורות של $B$ הוא 2 ושווה לאורך העמודות של $A$, ולכן מוגדרת גם המכפלה $B \cdot A$, ולפי סעיף ח בשאלה 3.4.3:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A \cdot B$$

(ט) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 2 ושווה לאורך העמודות ב־ $A$, ולכן מוגדרת המכפלה $B \cdot A$.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

לפי סעיף ט בשאלה 3.4.3, $AB$ היא מסדר $2 \times 2$ ולכן בוודאי $AB \neq BA$.

(י) אורך השורות במטריצה $B$ הוא 2 ושונה מאורך העמודות של $A$ שהוא 1, ולכן $BA$ אינה מוגדרת.

ג. אם $A$ היא מטריצה מסדר $m \times n$ ואם המכפלות $A \cdot B$ ו־ $B \cdot A$ מוגדרות, אז לפי סעיף א, $B$ היא מטריצה מסדר $n \times m$. במקרה זה $A \cdot B$ היא מטריצה מסדר $m \times m$, כלומר $A \cdot B$ היא מטריצה ריבועית מסדר $m$. אורך שורותיה שווה, אם כן, לאורך עמודותיה.

ד. לפי סעיף א, אם $A$ היא מטריצה מסדר $m \times n$, אז המכפלות $A \cdot B$ ו־ $B \cdot A$ מוגדרות אם ורק אם $B$ היא מסדר $n \times m$. במקרה זה, $A \cdot B$ היא מטריצה ריבועית מסדר $m$ ו־ $B \cdot A$ היא מטריצה ריבועית מסדר $n$. לכן $A \cdot B$ ו־ $B \cdot A$ תהיינה מאותו סדר רק אם $m = n$, כלומר אם $A$ ו־ $B$ שתיהן מטריצות ריבועיות מאותו סדר.

ה. תהי $A$ מטריצה מסדר $m \times n$. המכפלה $A \cdot A$ מוגדרת רק אם אורך השורות של $A$ שווה לאורך העמודות של $A$, כלומר רק אם $m = n$, ובניסוח אחר - המכפלה $A \cdot A$ מוגדרת רק אם $A$ היא מטריצה ריבועית.

**תשובה 3.4.5** **השאלה בעמוד 248**

$$E_{m\times n}^{(k\cdot\ell)} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & \ell & \\ & \downarrow & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} & \leftarrow k \end{array}$$

א. תהי $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ מטריצה כלשהי מסדר $n \times p$.
נחשב את המכפלה $E_{m\times n}^{(k,\ell)} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$ לכל $i \neq k$.

השורה ה־ $i$ של $E_{m\times n}^{(k,\ell)}$ היא שורת אפסים, ולכן על פי מסקנה 3.4.4א, לכל $i \neq k$ השורה ה־ $i$ של $C_{m\times p}$ היא שורת אפסים.

נחשב כעת את השורה ה־ $k$ של $C_{m\times p}$:
איבר $c_{kj}$ בשורה זו הוא מכפלת השורה ה־ $k$ של $E_{m\times n}^{(k,\ell)}$ בעמודה ה־ $j$ של $B$, כלומר:

$$c_{kj} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \ell & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$$= 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \ldots + 1 \cdot b_{\ell j} + \ldots + 0 \cdot b_{nj}$$

ולכן:

$$c_{kj} = b_{\ell j}$$

מאחר שתוצאה זו נכונה לכל $1 \leq j \leq p$, נסיק ש־ $\left[C\right]_k^r = \left[B\right]_\ell^r$

ובסיכום:

$$E_{m\times n}^{(k\cdot\ell)}B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ b_{\ell 1} & \cdots & b_{\ell p}\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \leftarrow k\\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

ב. עבור $A=\left[a_{ij}\right]_{q\times m}$ נחשב את

$$A\cdot E_{m\times n}^{(k,l)}=D_{q\times n}=\left[d_{ij}\right]_{q\times n}$$

לכל $j\neq\ell$.

העמודה ה־ $j$ של $E_{m\times n}^{(k\cdot\ell)}$ היא עמודת אפסים, ולכן על פי מסקנה 3.4.4ב, לכל $j\neq\ell$ העמודה ה־ $j$ של $A\cdot E_{m\times n}^{(k\cdot\ell)}$ היא עמודת אפסים. נחשב כעת את העמודה ה־ $\ell$ של $A\cdot E_{m\times n}^{(k\cdot\ell)}$:

לכל $1\leq i\leq q$:

$$d_{i\ell}=\left[a_{i1}\quad\ldots\quad a_{im}\right]\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} & \begin{array}{c}\\ \\ \\ \leftarrow k\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

$$=0\cdot a_{i1}+\ldots+1\cdot a_{ik}+\ldots+0\cdot a_{im}$$

כלומר:

$$d_{i\ell}=a_{ik}$$

ולכן $[D]_\ell^c=[A]_k^c$. ובסיכום:

$$A\cdot E_{m\times n}^{(k,\ell)}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & \cdots & a_{1k} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & a_{qk} & \cdots & 0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{ccccc}\quad & \quad & \uparrow & \quad & \quad\\ & & \ell & & \end{array}\end{array}$$

ג. נסמן:

$$F_{m\times m}=E_{m\times n}^{(k,\ell)}E_{n\times m}^{(\ell,k)}$$

לפי סעיפים א ו־ב בשאלה זו, כל השורות של $F_{m\times m}$, פרט אולי לשורה $k$, הן שורות של אפסים, וכל העמודות של $F_{m\times m}$, פרט אולי לעמודה ה־ $k$, הן עמודות של אפסים.

מכאן נובע כי כל איברי $F_{m\times m}$, פרט אולי לאיבר ה־ $(k,k)$, הם אפסים. נחשב את האיבר ה־ $(k,k)$, שהוא מכפלת השורה ה־ $k$ של $E_{m\times n}^{(k,\ell)}$ בעמודה ה־ $k$ של $E_{n\times m}^{(\ell,k)}$.

$$F_{kk} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} & & & \ell & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ \end{array}$$

$$F_{kk} = \begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0\end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= 0 \cdot 0 + \ldots + 1 \cdot 0 + \ldots + 0 \cdot 0 = 1$$

ולכן $F_{m\times m}$ היא המטריצה שכל איבריה, פרט לאיבר ה־$(k,k)$, הם אפסים, והאיבר ה־$(k,k)$ שלה הוא 1. בסימונים שבשאלה זו –

$$F_{m\times m} = E_{m\times m}^{(k,k)}$$

**תשובה 3.4.6** **השאלה בעמוד 249**

א. תהיינה $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ ו־$B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix}$.

קל לראות כי $A$ ו־$B$ הינן מטריצות סימטריות, אולם

$$AB = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7 & 20\\ 13 & 36\end{bmatrix}$$

והאיבר ה־$(2,1)$ של $AB$, שהוא 13, שונה מ־20, שהוא האיבר ה־$(2,1)$ של $(AB)^t$. לכן $AB$ אינה סימטרית.

ב. נניח כי $A,B$ סימטריות.

$$(AB)^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{טענה 3.4.5}}}{=} B^t A^t \underset{\substack{\uparrow \\ A,B\ \text{סימטריות}}}{=} BA \qquad (1)$$

אם $AB$ סימטרית אז $(AB)^t = AB$, ולכן לפי (1) נקבל $AB = BA$. להפך, אם $AB = BA$, אז לפי (1) נקבל $(AB)^t = AB$, כלומר $AB$ סימטרית.

**תשובה 3.5.1** **השאלה בעמוד 254**

תהי $A$ מטריצה מסדר $m \times n$ כאשר $m \neq n$, ותהי $X$ מטריצה מסדר $p \times q$.

אם המכפלה $AX$ מוגדרת, אז לפי הגדרת כפל מטריצות $p = n$, ואז $AX$ היא מטריצה מסדר $m \times q$.

היות שלפי הנתון $AX = A$ ו־$A$ היא מסדר $m \times n$, נובע כי $q = n$, כלומר $X$ היא מטריצה מסדר $n \times n$. מכאן שאורך השורות של $X$, $n$, שונה מאורך העמודות של $A$, $m$, ולכן המכפלה $XA$ אינה מוגדרת וממילא אין משמעות לשוויון $XA = A$.

**תשובה 3.5.2** **השאלה בעמוד 255**

$I_n$ הינה מטריצה מסדר $n \times n$ ולכן המכפלה $A \cdot I_n$ מוגדרת והיא מטריצה מסדר $m \times n$. נראה שלכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le n$, האיבר ה־ $(i,j)$ של $A \cdot I_n$ שווה לאיבר ה־ $(i,j)$ של $A$. נסמן $A = \left[a_{ij}\right]$.

$$\left[AI_n\right]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}$$

$$= a_{i1} \cdot \delta_{i1} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + \ldots + a_{ij} \cdot \delta_{jj} + \ldots + a_{in} \cdot \delta_{nj}$$

$$= a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \ldots + a_{ij} \cdot 1 + \ldots + a_{in} \cdot 0 = a_{ij} = \left[A\right]_{ij}$$

**תשובה 3.5.3** **השאלה בעמוד 256**

ניתן להוכיח את השוויון הדרוש ישירות, כפי שעשינו בהוכחת חלק א של המשפט. אולם נציג כאן הוכחה אחרת, קצרה יותר, המסתמכת על חלק א של המשפט לצורך הוכחת חלק ב. נשים לב כי:

$$(C(A+B))^t \underset{\text{טענה 3.4.5}}{\uparrow}= (A+B)^t C^t \underset{\text{משפט 3.3.7}}{\uparrow}= (A^t + B^t)C^t \underset{\text{משפט 3.5.5א}}{\uparrow}= A^t C^t + B^t C^t \underset{\text{טענה 3.4.5}}{\uparrow}= (CA)^t + (CB)^t \underset{\text{משפט 3.3.7}}{\uparrow}= (CA+CB)^t$$

כלומר $(C(A+B))^t = (CA+CB)^t$. לפי טענה 3.3.4 נסיק כי:

$$C(A+B) = (C(A+B)^t)^t = ((CA+CB)^t)^t = CA+CB$$

כדרוש.

**תשובה 3.6.1** **השאלה בעמוד 259**

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB \ne BA$$

**תשובה 3.6.2** **השאלה בעמוד 266**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = A^4 \cdot A^4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{16} = A^8 \cdot A^8 = \begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 34 & 21 \\ 21 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1597 & 987 \\ 987 & 610 \end{bmatrix}$$

$$A^{32} = A^{16} \cdot A^{16} = \begin{bmatrix} 1597 & 987 \\ 987 & 610 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1597 & 987 \\ 987 & 610 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3524578 & 2178209 \\ 2178209 & 1346269 \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{bmatrix} a_{34} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{32}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3524578 & 2178209 \\ 2178209 & 1346269 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5702887 \\ 3524578 \end{bmatrix}$$

ולכן האיבר ה־ 34 בסדרת פיבונצ'י הוא $5,702,887$.

**תשובה 3.6.3** **השאלה בעמוד 267**

נסמן:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$$

א.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n + b_n \end{bmatrix}$$

וממילא $A + B$ היא אלכסונית.

ב. ודאו בעצמם כי מהגדרת הכפל נובע שעבור $i \neq j$ מתקיים $[AB]_{ij} = 0$, וממילא - $AB$ אלכסונית.

ג. קל לוודא שעבור $i = j$ , $[AB]_{ij} = [AB]_{ii} = a_i b_i$. נסיק כי:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

קיבלנו כי כפל מטריצות אלכסוניות אינו אלא "כפל איבר איבר", ובפרט נובע מכך כי מטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל.

**תשובה 3.6.4** **השאלה בעמוד 267**

א. נוכיח את הטענה באינדוקציה על $k$.

עבור $k = 1$ הטענה ברורה מאליה.

נניח כי הטענה נכונה עבור $k = \ell - 1$, כלומר כי:

$$A^{\ell-1}=\begin{bmatrix} a_1^{\ell-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{\ell-1}\end{bmatrix}$$

ונוכיח שהטענה נכונה עבור $k=\ell$, כלומר כי:

$$A^{\ell}=\begin{bmatrix} a_1^{\ell} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{\ell}\end{bmatrix}$$

ואמנם

$$A^{\ell}=A^{\ell-1}\cdot A=\begin{bmatrix} a_1^{\ell-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{\ell-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{bmatrix}$$

(על פי הנחת האינדוקציה והתשובה לחלק ב בשאלה הקודמת)

$$=\begin{bmatrix} a_1^{\ell-1}\cdot a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{\ell-1}\cdot a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1^{\ell} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n^{\ell}\end{bmatrix}$$

ב. על פי חלק א של השאלה נקבל:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27\end{bmatrix}$$

**תשובה 3.7.1** **השאלה בעמוד 272**

א. אם $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הם פתרונות של המערכת הלינארית $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, אז

$$A(\mathbf{c}-\mathbf{d})\underset{\substack{\uparrow\\ \text{משפט 3.5.5}}}{=}A\mathbf{c}-A\mathbf{d}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{לפי הנתון}}}{=}\mathbf{b}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

ולכן $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

ב. נניח כי $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הם פתרונות של המערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, ונוכיח כי הם שווים זה לזה. לפי חלק א של שאלה זו, היות ש־ $\mathbf{c}$ ו־ $\mathbf{d}$ הם פתרונות של $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, הרי ש־ $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. אבל לפי הנתון יש למערכת זו פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי, ולכן $\mathbf{c}-\mathbf{d}=\mathbf{0}$ או $\mathbf{c}=\mathbf{d}$. לפיכך למערכת $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ יש לכל היותר פתרון אחד.

ג. נוכיח ראשית כי כל וקטור עמודה מהטיפוס $\mathbf{c}_0+\mathbf{d}$, כאשר $\mathbf{d}$ הוא פתרון כלשהו של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, הוא פתרון של $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. ואמנם

$$A(\mathbf{c}_0+\mathbf{d})=A\mathbf{c}_0+A\mathbf{d}=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$$

(שהרי $\mathbf{c}_0$ הוא פתרון מסוים של $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$).

נוכיח עתה כי כל פתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ניתן לתיאור כסכום של $\mathbf{c}_0$ ופתרון כלשהו של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

יהי $\mathbf{c}$ פתרון כלשהו של $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, כלומר $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$. מאחר שגם $\mathbf{c}_0$ הוא פתרון של $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, הרי שלפי חלק א, $\mathbf{c} - \mathbf{c}_0$ הוא פתרון של $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

נסמן $\mathbf{d} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_0$ ונקבל:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_0 + (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{d}$$

**תשובה 3.7.2** **השאלה בעמוד 273**

לפי הנתון $\mathbf{c}$ הינו פתרון של המערכת האי־הומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, כלומר $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$.

יהי $t$ סקלר כלשהו.

$$A(t\mathbf{c}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי טענה 3.5.6}}}{=} t(A\mathbf{c}) = t\mathbf{b} \qquad (*)$$

לכן אם $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, אז $A(t\mathbf{c}) = \mathbf{b}$, ולכן לפי (*), במקרה זה:

$$t\mathbf{b} = \mathbf{b} \qquad (**)$$

יהי:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

אז מ־(**) נקבל כי לכל $1 \le i \le m$, $tb_i = b_i$.

לפי הנתון $\mathbf{b} \ne \mathbf{0}$. כלומר קיים $1 \le j \le m$ שעבורו $b_j \ne 0$.

לפי (**) $tb_j = b_j$, והיות ש־ $b_j \ne 0$ נוכל לחלק את השוויון האחרון ב־ $b_j$ ונקבל כי $t = 1$. כלומר, $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ רק אם $t = 1$.

אם $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית, אז:

$$A(t\mathbf{c}) = \mathbf{0}$$

מצד שני, לפי (*):

$$A(t\mathbf{c}) = t\mathbf{b}$$

ולכן במקרה זה:

$$t\mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad (***)$$

היות ש־ $\mathbf{b} \ne \mathbf{0}$, יש $1 \le j \le m$ שעבורו $b_j \ne 0$. ולכן מ־(***) נקבל כי:

$$tb_j = 0$$

והיות ש־ $b_j \ne 0$, אפשר לחלק את השוויון האחרון ב־ $b_j$ ונקבל $t = 0$.

כלומר, אם $t\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, אז $t = 0$.

**תשובה 3.7.3** **השאלה בעמוד 273**

נניח כי $\mathbf{c}$ הוא הפתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, כלומר $A\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

אם $B$ היא מטריצה שעבורה מוגדרת המכפלה $BA$, אז:

$$(BA)\mathbf{c} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{קיבוציות}}}{=} B(A\mathbf{c}) = B\mathbf{b}$$

ולכן $\mathbf{c}$ הוא פתרון של המערכת $(B \cdot A)\mathbf{x} = B \cdot \mathbf{b}$.

**תשובה 3.7.4** **השאלה בעמוד 273**

מאחר ש־ $I\mathbf{b} = \mathbf{b}$ , הוקטור $\mathbf{b}$ הוא פתרון של המערכת $I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

יהי $\mathbf{c}$ פתרון כלשהו של המערכת $I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , ונוכיח כי $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ .

$\mathbf{c}$ הוא פתרון, ולכן:

$$I\mathbf{c} = \mathbf{b} \qquad (*)$$

מצד שני:

$$I\mathbf{c} = \mathbf{c} \qquad (**)$$

מ־(*) ומ־(**) נקבל:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}$$

ולכן $\mathbf{c}$ הוא הפתרון **היחיד** למערכת $I\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

**תשובה 3.8.1** **השאלה בעמוד 276**

נתון ש־ $A$ מטריצה הפיכה, כלומר קיימת $A^{-1}$ כך שמתקיים:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

א. לפי הנתון:

$$A' \cdot A = I \qquad (1)$$

נכפול את שני אגפי השוויון (1) מימין ב־ $A^{-1}$ ונקבל:

$$(A' \cdot A)A^{-1} = I \cdot A^{-1} \qquad (2)$$

היות שכפל מטריצות הוא קיבוצי, נוכל לרשום את (2) גם כך:

$$A'(A \cdot A^{-1}) = I \cdot A^{-1}$$

או

$$A' \cdot I = I \cdot A^{-1}$$

ומן הניטרליות של $I$ נקבל כי:

$$A' = A^{-1}$$

ב. לפי הנתון:

$$A \cdot A' = I$$

נכפול את שני אגפי השוויון הקודם משמאל ב־ $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot A') = A^{-1} \cdot I$$

או

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot A' = A^{-1} \cdot I$$

או

$$I \cdot A' = A^{-1} \cdot I$$

ולכן:

$$A' = A^{-1}$$

**תשובה 3.8.2** **השאלה בעמוד 277**

א. $A$ מטריצה הפיכה, ולכן קיימת מטריצה $A^{-1}$ המקיימת:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

נכפול את שני אגפי השוויון $AB = O$ משמאל ב־ $A^{-1}$ :

$$A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot O$$

או:

$$(A^{-1} \cdot A)B = A^{-1} \cdot O$$

כלומר:

$$I \cdot B = A^{-1} \cdot O$$

או:

$$B = A^{-1} \cdot O$$

והיות ש־

$$A^{-1} \cdot O = O$$

נקבל:[1]

$$B = O$$

ב. נניח בשלילה כי:

$$A \cdot B = O$$

מאחר ש־ $A$ הפיכה, נובע מחלק א שמתקיים:

$$B = O$$

אבל $B$ הפיכה ומטריצת האפס בוודאי אינה הפיכה (למשל, משום שיש בה שורה של אפסים), והגענו לסתירה.

ג.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

לכל מטריצה $B$ , שהיא מהצורה

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix}$$

מתקיים:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$AB = O$$

לפיכך, אם נבחר עבור $\alpha$ ו־ $\beta$ ערכים כלשהם, שלא שניהם אפס, נקבל $B \neq O$ שעבורה $AB = O$.

שימו לב כי מצאנו כאן זוג מטריצות $A$ ו־ $B$ שכל אחת מהן שונה מאפס ובכל זאת מכפלתן מתאפסת. מצב כזה לא ייתכן במספרים הממשיים: שם - אם $\alpha \neq 0$ ו־ $\beta \neq 0$, אז בהכרח $\alpha\beta \neq 0$.

1 באופן דומה מוכיחים שאם $BA = O$ ו־ $A$ הפיכה, אז $B = O$.

בסעיף הבא של שאלה זו נוכיח כי המצב $AB = O$, כאשר גם $A \neq O$ וגם $B \neq O$, ייתכן רק כאשר שתי המטריצות $A$ ו־ $B$ הן סיגולריות. אם אפילו אחת מהן היא הפיכה - אז מכך שהמכפלה מתאפסת נובע שהשנייה שווה לאפס. לפיכך מהווה הדוגמה שנתנו הוכחה לכך שהמטריצות

$$B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & -\beta \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

שתיהן מטריצות סינגולריות.

ד. נתון כי $A \neq O$, $B \neq O$ ו־ $AB = O$.

עלינו להוכיח כי

(i) $A$ סינגולרית.

(ii) $B$ סינגולרית.

**הוכחת (i)**

נניח בשלילה כי $A$ הפיכה. אז מכך ש־

$$AB = O$$

ומחלק א של השאלה נקבל

$$B = O$$

בסתירה לנתון. לכן $A$ סינגולרית.

**הוכחת (ii)**

נניח בשלילה כי $B$ הפיכה. אז מהשוויון

$$AB = O$$

נסיק על פי חלק א של השאלה כי $A = O$, בסתירה לנתון.

לכן גם $B$ סינגולרית.

**תשובה 3.8.3** **השאלה בעמוד 278**

עבור $k = 2$ הטענה נכונה לפי משפט 3.8.4ג, הקובע:

אם $A_1$ ו־ $A_2$ הפיכות אז $A_1 \cdot A_2$ הפיכה ומתקיים:

$$(A_1 \cdot A_2) = A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

נניח כעת כי המכפלה $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}$ של $k$ מטריצות הפיכות היא הפיכה וכי

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1})^{-1} = A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$$

ונוכיח כי גם המכפלה $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ של $k$ מטריצות הפיכות היא הפיכה ומתקיים:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$$

ואמנם, אם נסמן

$$B = A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1} \qquad (*)$$

אז לפי הנחת האינדוקציה $B$ הפיכה ומתקיים

$$B^{-1} = A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1} \qquad (**)$$

ולכן – לפי משפט 3.8.4ג – מאחר ש־ $A_k$ הפיכה, גם $B \cdot A_k$ הפיכה ומתקיים:

$$(BA_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot B^{-1} \qquad (**)$$

נציב בשוויון האחרון את הערכים של $B$ ו־ $B^{-1}$ (מ־(*) ו־(**)) ונקבל:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{k-1} \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$$

כפי שרצינו להוכיח. (ויתרנו על הסוגריים בגלל קיבוציות הכפל.)

**תשובה 3.8.4** **השאלה בעמוד 279**

בתשובה הקודמת הוכחנו כי לכל $A_1, \ldots, A_k$ הפיכות $A_1 \cdot \ldots \cdot A_k$ הפיכה ומתקיים:

$$(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_1^{-1}$$

נציב במסקנה זו

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$$

ונקבל:

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

**תשובה 3.8.5** **השאלה בעמוד 279**

א. אם אחד מאיברי האלכסון מתאפס, אזי השורה המתאימה היא שורת אפסים, וממילא המטריצה אינה הפיכה.

ב. כבר ראינו כי מכפלת מטריצות אלכסוניות היא מטריצה אלכסונית, שאיברי האלכסון שלה הם מכפלות איברי האלכסונים של שני הגורמים (ובפרט, מטריצות אלכסוניות מתחלפות בכפל).
לכן:

$$\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

שימו לב, לכל $i$, $\frac{1}{a_i}$ מוגדר, שכן לכל $i$ , $a_i \neq 0$.

**תשובה 3.8.6** **השאלה בעמוד 279**

אנו תרים אחר מטריצה $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ המקיימת:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x-3y & 2x+y \\ z-3w & 2z+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

על־ידי השוואת רכיבי המטריצות שבשני האגפים, נקבל מערכת של ארבע משוואות בארבעה נעלמים: $x, y, z, w$. למערכת זו פתרון יחיד (ודאו!): $x = \frac{1}{7}, y = -\frac{2}{7}, z = \frac{3}{7}, w = \frac{1}{7}$. ודאו ישירות כי המטריצה $\begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$ אכן הופכית ל־$A$.

**תשובה 3.9.1** **השאלה בעמוד 282**

נרשום

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ו־$\varphi$ היא הפעולה של הוספת 3 פעמים השורה השנייה לשורה הרביעית:

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{21}+a_{41} & 3a_{22}+a_{42} & 3a_{23}+a_{43} & 3a_{24}+a_{44} \end{bmatrix}$$

כמו כן -

$$\varphi(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

עתה:

$$\varphi(I)A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\varphi(I)} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{A}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 3a_{21}+a_{41} & 3a_{22}+a_{42} & 3a_{23}+a_{43} & 3a_{24}+a_{44} \end{bmatrix}}_{\varphi(A)}$$

ואכן:

$$\varphi(I) \cdot A = \varphi(A)$$

**תשובה 3.9.2** **השאלה בעמוד 284**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

א.

$$\varphi_1 : R_2 \to \frac{1}{2}R_2$$

לכן:

$$\varphi_1(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2.5&3\\7&8&9\end{bmatrix}$$

$$\varphi_1(I)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\varphi_1(I)\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&2.5&3\\7&8&9\end{bmatrix}$$

אכן:

$$\varphi_1(A)=\varphi_1(I)\cdot A$$

ב.

$$\varphi_2 : R_2 \leftrightarrow R_3$$

לכן:

$$\varphi_2(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{bmatrix}$$

$$\varphi_2(I)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi_2(I)\cdot A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\7&8&9\\4&5&6\end{bmatrix}$$

אכן!

$$\varphi_2(A)=\varphi_2(I)\cdot A$$

גם במקרה זה.

ג.

$$\varphi_3 : R_3 \to R_3+2R_2$$

לכן:

$$\varphi_3(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3(I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3(I) \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

ושוב -

$$\varphi_3(A) = \varphi_3(I) \cdot A$$

**תשובה 3.9.3** **השאלה בעמוד 285**

עבור $k = 1$ תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $A'$ מטריצה שהתקבלה מ־$A$ על־ידי פעולה אלמנטרית $\varphi_1$. אז לפי הטענה הקודמת:

$$A' = \varphi_1(A) = \varphi_1(I) \cdot A$$

נניח באינדוקציה כי אם $A'$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי סדרה של $k-1$ פעולות אלמנטריות $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$, אז:

$$A' = \varphi_{k-1}(I) \ldots \varphi_1(I) \cdot A$$

תהי כעת $A''$ מטריצה שהתקבלה מ־$A$ על־ידי סדרה של $k$ פעולות אלמנטריות $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}, \varphi_k$. נסמן ב־$A'$ את המטריצה שהתקבלה מ־$A$ על־ידי ביצוע סדרת הפעולות $\varphi_{k-1}, \ldots, \varphi_2, \varphi_1$. אז לפי הנחת האינדוקציה:

$$A' = \varphi_{k-1}(I) \ldots \varphi_1(I) \cdot A$$

$A''$ מתקבלת מ־$A'$ על־ידי פעולה אלמנטרית אחת, ולכן לפי הטענה הקודמת:

$$A'' = \varphi_k(I) \cdot A' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי הנחת האינדוקציה}}}{=} \varphi_k(I)\varphi_{k-1}(I) \ldots \varphi_1(I) \cdot A$$

**תשובה 3.9.4** **השאלה בעמוד 285**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

יהי $t$ סקלר שונה מאפס, ותהי $\varphi$ הפעולה האלמנטרית:

$$\varphi : R_2 \to tR_2$$

אזי:

$$\phi(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4t&5t&6t\\2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi^{-1}\left(\varphi(A)\right)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4t/t&5t/t&6t/t\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&0\end{bmatrix}=A$$

$$\varphi^{-1}(A)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4/t&5/t&6/t\\2&1&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi\left(\varphi^{-1}(A)\right)=\begin{bmatrix}1&2&3\\4/t\cdot t&5/t\cdot t&6/t\cdot t\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&0\end{bmatrix}=A$$

**תשובה 3.9.5** **השאלה בעמוד 290**

א. היות ש־ $I$ מטריצה הפיכה, והיות שלכל מטריצה $A$, $AI=A$, נובע ממסקנה 3.9.10 כי $A$ שקולת שורות לעצמה.

ב. נניח כי $A$ שקולת שורות ל־ $B$. לפי מסקנה 3.9.10, קיימת מטריצה הפיכה $C$ המקיימת:

$$A=CB \tag{1}$$

$C$ הפיכה, לכן קיימת המטריצה $C^{-1}$. נכפול את השוויון (1) משמאל ב־ $C^{-1}$ ונקבל:

$$C^{-1}A=C^{-1}(CB)=\left(C^{-1}C\right)B=IB=B$$

ולכן, היות ש־ $C^{-1}$ אף היא הפיכה, נובע ממסקנה 3.9.10 כי $B$ שקולת שורות ל־ $A$.

ג. אם $A$ שקולת שורות ל־ $B$ ו־ $B$ שקולת שורות ל־ $C$, אז קיימות מטריצות הפיכות $D,E$ (מהסדרים המתאימים) המקיימות

$$A=DB,\ B=EC$$

ולכן:

$$A=DB=D(EC)=(DE)C$$

$D$ ו־ $E$ הפיכות, לכן גם המכפלה $DE$ הפיכה, ולכן לפי מסקנה 3.9.10, $A$ שקולת שורות ל־ $C$.

**תשובה 3.9.6** **השאלה בעמוד 290**

לכל $1 \le k \le n$ המטריצה האלכסונית

$$\phi_k(I) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & a_k & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{עמודה } k \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow k \ \text{שורה} \\ \\ \\ \end{array}$$

היא מטריצה אלמנטרית, שכן היא מתקבלת ממטריצת היחידה, $I$, על־ידי כפל השורה ה־ $k$ שלה בסקלר $a_k$, שאינו אפס.

כבר הראינו שכפל מטריצות **אלכסוניות** אינו אלא "כפל איבר איבר", ולכן המכפלה

$$\varphi_1(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(I) \qquad (*)$$

שהיא

$$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$$

אינה אלא

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$$

וקיבלנו, אם כן, הצגה של $A$ כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

**תשובה 3.9.7** **השאלה בעמוד 290**

נתון כי $A$ שקולת שורות ל־ $B$, כלומר קיימת מטריצה הפיכה $C$ המקיימת:

$$A = CB \qquad (*)$$

א. נניח כי $B$ הפיכה, אז $A$, כמכפלה של מטריצות הפיכות, גם היא הפיכה.

ב. נניח כי $A$ הפיכה. מאחר שגם $C$ הפיכה, נוכל לכפול את (*) ב־ $C^{-1}$, שאף היא הפיכה, ולקבל:

$$C^{-1}A = B$$

כאן הוצגה $B$ כמכפלה של מטריצות הפיכות, ולכן גם $B$ הפיכה.

**תשובה 3.9.8** **השאלה בעמוד 292**

א.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{3}R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 14/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to \frac{3}{14}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/7 & 3/14 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + \frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6/21 & 1/14 \\ 0 & 1 & -1/7 & 3/14 \end{array}\right]$$

$$= [I|A^{-1}]$$

לכן $A$ הפיכה ומתקיים:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6/21 & 1/14 \\ -1/7 & 3/14 \end{bmatrix}$$

ב.

$$[B|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

ובמטריצה השמאלית קיבלנו כבר בשלב זה שורת אפסים, ולכן $B$ אינה הפיכה.

ג.

$$[C|I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1 \\ R_4 \to R_4 - 2R_1}]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 \to -1/2R_3 \\ R_4 \to -1/3R_4}]{R_2 \to -R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 4/3 & 5/3 & 2/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - 2R_2 \\ R_3 \to -R_3 - R_2 \\ R_4 \to -R_4 - R_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & -3/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 & -4/3 & -4/3 & 1 & 0 & -1/3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_3 \to -2R_3 \\ R_4 \to -3/2 R_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 + R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_4 \to R_4 - R_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1/2 & -1 & 1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to -R_4}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + 3R_4 \\ R_3 \to R_3 - 3R_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

לכן $C$ הפיכה ו־

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 3/2 & 1 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

בדקו בעצמכם כי:

$$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**תשובה 3.10.1** **השאלה בעמוד 295**

א. לפי טענה 3.10.3, $A$ הפיכה רק אם עמודותיה ( $n$ במספר) הן בלתי תלויות לינארית כוקטורים ב־ $F^n$. אך $n$ וקטורים ב־ $F^n$ הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם הם פורשים את $F^n$, ולכן $A$ הפיכה אם ורק אם עמודותיה פורשות את $F^n$.

ב. לפי טענה 3.10.4, $A$ הפיכה רק אם שורותיה ( $n$ במספר) הן בלתי תלויות לינארית כוקטורים ב־ $F^n$. אולם $n$ וקטורים ב־ $F^n$ הם בלתי תלויים לינארית אם ורק אם הם פורשים את $F^n$, ולכן $A$ הפיכה אם ורק אם שורותיה פורשות את $F^n$.

**תשובה 3.10.2** **השאלה בעמוד 295**

א. אם $A$ ו־ $B$ הפיכות, כבר הוכחנו כי $AB$ הפיכה (ראו משפט 3.8.4).

ב. האפשרויות האחרות ביחס ל־ $A$ ו־ $B$ הן:

1. $A$ רגולרית (הפיכה) ו־ $B$ סינגולרית.
2. $A$ סינגולרית ו־ $B$ רגולרית.
3. $A$ סינגולרית ו־ $B$ סינגולרית.

נוכיח כי בכל אחד משלושת המקרים האלה $AB$ סיגולרית.

1. נניח בשלילה כי $AB$ רגולרית.

מאחר ש־ $A$ רגולרית, הרי שגם $A^{-1}$ רגולרית וגם המכפלה $A^{-1}(AB)$ היא רגולרית (כמכפלת מטריצות רגולריות). מאידך גיסא, מכפלה זו שווה ל־ $B$ ו־ $B$ סינגולרית, והגענו לסתירה. לכן $AB$ סינגולרית.

2. נניח בשלילה כי $AB$ רגולרית.

מאחר ש־ $B$ רגולרית, גם $B^{-1}$ רגולרית ולכן גם המכפלה $(AB)B^{-1}$ רגולרית. מאידך גיסא, מכפלה זו שווה ל־ $A$ ו־ $A$ סינגולרית, והגענו לסתירה. לכן $AB$ סינגולרית.

3. נניח בשלילה כי $AB$ רגולרית.

$A$ סינגולרית ולכן איננה שקולת שורות ל־ $I$, ולפיכך שקולת שורות למטריצה $A'$ עם שורת אפסים (כפי שהוכחנו בפרק 2). כלומר, קיימת סדרת פעולות אלמנטריות, $\varphi_1,...,\varphi_k$, כך ש־

$$\varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)A = A'$$

ולכן (על־ידי כפל מימין ב־ $B$):

$$(\varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I)\cdot A)B = A'B$$

ובזכות קיבוציות הכפל נוכל לרשום גם:

$$(\varphi_k(I)\cdot\ldots\cdot\varphi_1(I))(AB) = A'B \qquad (*)$$

אבל המטריצות $\varphi_1(I),\ldots,\varphi_k(I)$ הן רגולריות (בתור מטריצות אלמנטריות) והמטריצה $AB$ רגולרית (על פי הנחתנו), ולכן גם המכפלה שבאגף שמאל של (*) היא רגולרית. ומכאן ש־ $A'B$ רגולרית. אבל ב־ $A'$ יש שורת אפסים ולכן גם ב־ $A'B$ יש שורת אפסים, ולכן $A'B$ אינה יכולה להיות רגולרית, והגענו לסתירה. לפיכך $AB$ סינגולרית.

**תשובה 3.10.3** **השאלה בעמוד 296**

א. נניח כי $AB = BA$

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B) = A(A+B) + B(A+B)\\ &= A^2 + AB + BA + B^2\\ &= A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2\end{aligned}$$

נניח כעת כי:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (1)$$

כפי שראינו, מתקיים גם

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \qquad (2)$$

ולכן מתקיים $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$. נחסיר $A^2 + B^2$ משני האגפים ונקבל:

$$AB + BA = 2AB (= AB + AB)$$

כעת נחסיר $AB$ משני האגפים ונקבל $AB = BA$.

ב. נבחר:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

בדקו ומצאו כי $AB \neq BA$, ולכן, על פי חלק א של השאלה:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

ואמנם, בחישוב ישיר מקבלים

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ואילו:

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ג. 1. ננסה "להפוך" את $A$:

$$\left[A \middle| I\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \end{array}\right]$$

לכן $A$ הפיכה ו־

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

2. השורות השנייה והשלישית של $B$ שוות זו לזו, ולכן השורות של $B$ תלויות לינארית כווקטורים ולכן $B$ סינגולרית.
3. היות ש־$A$ רגולרית ו־$B$ סינגולרית, נובע משאלה 3.10.2 כי $AB$ סינגולרית.
4. $A$ רגולרית ולכן $A^2$ רגולרית, כמכפלה של (שתי) מטריצות רגולריות.
5. $B$ סינגולרית, ולכן לפי שאלה 3.10.2, $B^2$ סינגולרית.

**תשובה 3.10.4** **השאלה בעמוד 296**

א. תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, שהשורה ה־$n$־ית שלה היא שורת אפסים:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נסמן:

$$^{2}\,B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

בעזרת סימון זה נוכל לרשום את $A$ כך:

$$A=\begin{bmatrix} & & & * \\ & B & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נחשב את $A^2$. אם $1 \le i \le n-1$ ו־$1 \le j \le n-1$, האיבר $(i,j)$ של $A^2$ שווה ל־

$$\left[A^2\right]_{ij}=\left[a_{i1}\dots a_{i(n-1)}\ \ *\right]\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{(n-1)j} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=a_{i1}a_{1j}+\dots+a_{i(n-1)}a_{(n-1)j}+0=\left[B^2\right]_{ij}$$

לכן איברי $A^2$ המופיעים ב־$(n-1)$ השורות הראשונות וב־$(n-1)$ העמודות הראשונות שווים בהתאמה לאיברי $B^2$.

2 $B$ מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

השורה ה־$n$־ית של $A^2$ היא שורת אפסים, שכן השורה ה־$n$־ית של $A$ היא שורת אפסים.[3] לכן המטריצה $A^2$ היא בעלת המבנה הבא:

$$A^2 = \begin{bmatrix} & & & * \\ & B^2 & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נניח עתה שעבור $k$ מסוים המטריצה $A^k$ היא מהצורה:

$$^{4}\ A^k = \begin{bmatrix} & & & * \\ & B^k & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נחשב את $A^k A = A^{k+1}$.

אם $1 \le i \le n-1$, $1 \le j \le n-1$, האיבר ה־$(i,j)$ של $A^{k+1}$ הוא:

$$\left[A^{k+1}\right]_{ij} = \sum_{p=1}^{n}\left[A^k\right]_{ip} a_{pj}$$

$$\overset{5}{=} \sum_{p=1}^{n-1}\left[A^k\right]_{ip} a_{pj} + \left[A^k\right]_{in} \overset{0}{\overset{\|}{\overbrace{a_{nj}}}}$$

$$\overset{6}{=} \sum_{p=1}^{n-1}\left[B^k\right]_{ip} \left[B\right]_{pj} = \left[B^{k+1}\right]_{ij}$$

השורה ה־$n$־ית של $A^{k+1}$ היא שורת אפסים, שכן השורה ה־$n$־ית של $A^k$ היא שורת אפסים (על פי ההנחה).

לכן המטריצה $A^{k+1}$ היא מן הצורה

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} & & & * \\ & B^{k+1} & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כפי שרצינו להוכיח.

ב. נתבונן במטריצה ריבועית מסדר 2 בעלת המבנה הנדון:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

אז

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כנדרש.

---

3 ראו מסקנה 3.8.4.

4 כלומר $\left[A^k\right]_{ij} = \left[B^k\right]_{ij}$ עבור $1 \le i, j \le n-1$.

5 שכן על פי הנתון, השורה ה־$n$־ית היא שורת אפסים. לכן $a_{nj} = 0$.

6 על פי הנחת האינדוקציה (וראו הערה לעיל).

נניח שעבור $n = k$ הטענה נכונה. כלומר, נניח שכל מטריצה $A$ מסדר $k$ שעבורה

$$a_{ij} = 0 \quad (i \geq j)$$

מקיימת:

$$A^k = O_{k \times k}$$

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $k+1$ בעלת המבנה הנדון. אז המטריצה $B$, שאיבריה הם איברי $A$ הנמצאים ב־ $k$ השורות ו־ $k$ העמודות הראשונות של $A$, היא מטריצה ריבועית מסדר $k$ ומן הצורה הנדונה.

לכן על פי הנחת האינדוקציה:

$$B^k = O_{k \times k} \tag{1}$$

את המטריצה $A$ נוכל לרשום כך:

$$A = \begin{bmatrix} & & & * \\ & B & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

על פי חלק א מתקיים:

$$A^k = \begin{bmatrix} & & & * \\ & B^k & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ועל פי (1):

$$A^k = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נחשב את $A^{k+1}$.

השורה ה־ $(k+1)$ של $A^{k+1}$ היא שורת האפס, שכן השורה ה־ $(k+1)$ של $A^k$ היא שורת האפס.

נמצא את $\left[A^{k+1}\right]_{ij}$ כאשר $1 \leq i \leq k$:

$$\left[A^{k+1}\right]_{ij} = \sum_{p=1}^{k+1} \left[A^k\right]_{ip} a_{pj}$$

$$\overset{7}{=} \sum_{p=1}^{k} \left[A^k\right]_{ip} a_{pj} + \left[A^k\right]_{i(k+1)} \underset{\overset{\|}{0}}{a_{(k+1)j}}$$

$$\overset{8}{=} \sum_{p=1}^{k} [\underset{\overset{\|}{0}}{B^k}]_{ip} a_{pj} = 0$$

7 $a_{(k+1)j} = 0$, שכן השורה ה־ $k+1$ של $A$ היא שורת אפסים.
8 על פי ההנחה $B^k = 0$.

כל איברי המטריצה $A^{k+1}$ הם אפסים, כלומר

$$A^{k+1} = O_{(k+1)\times(k+1)}$$

ובזה נסתיימה ההוכחה באינדוקציה.

**תשובה 3.10.5** **השאלה בעמוד 298**

ההעתקות הנתונות בסעיפים א וב הן ליניאריות - בודקים זאת ישירות על פי ההגדרה, כמו בדוגמה א הקודמת לשאלה. ההעתקה המופיעה בסעיף ג איננה ליניארית, למשל משום ש־

$$T((2,0)) = (4,0) \neq (2,0) = 2(1,0) = 2T((1,0))$$

ההעתקה המופיעה בסעיף ד איננה ליניארית , למשל משום ש־

$$T((1,1) + (1,0)) = T(2,1) = (2,1)$$

ואילו:

$$T((1,1)) + T((1,0)) = (1,1) + (0,0) = (1,1)$$

**תשובה 3.10.6** **השאלה בעמוד 298**

נניח תחילה כי $T$ מקיימת את התנאי הנתון בשאלה. אם נציב בתנאי זה את המקרה הפרטי שבו $s = t = 1$, נקבל כי $T$ מקיימת את תנאי א של הגדרה 3.10.7, ואם נציב בתנאי את המקרה הפרטי שבו $t = 0$, נקבל כי $T$ מקיימת את תנאי א של הגדרה 3.10.7.

בכיוון ההפוך, נניח כי $T$ ליניארית ונוכיח כי היא מקיימת את התנאי הנתון בשאלה. אכן:

$$T(sv + tw) = T(sv) + T(tw) = sT(v) + tT(w)$$

(השוויון הראשון על פי תנאי א בהגדרה 3.10.7, השוויון השני על פי תנאי ב בהגדרה 3.10.7).

**תשובה 3.10.7** **השאלה בעמוד 298**

נראה כי $T$ מקיימת את התנאי המופיע בשאלה 3.10.7. אכן, מתכונות כפל מטריצה בוקטור מתקיים:

$$T(sv + tw) = A(sv + tw) = A(sv) + A(tw) = sAv + tAw = sT(v) + tT(w)$$

# פרק 4: דטרמיננטות

# 4.1 הגדרת הדטרמיננטה

בפרק זה נעסוק באחד המושגים החשובים והשימושיים בתורת המטריצות - הדטרמיננטה. הדטרמיננטה היא פונקציה המקבלת כקלט **מטריצה ריבועית** $A$ מעל שדה מסוים, ומחזירה כפלט סקלר בודד באותו שדה, שאותו נסמן ב־$|A|$. כלומר, אם $F$ שדה כלשהו, אזי הדטרמיננטה היא פונקציה מ־$M_n(F)$ ל־$F$. בתחילת הפרק נעסוק בהגדרתה של פונקציה זו. רק לאחר שנלמד כיצד לחשב את הפונקציה באופן טכני, נעבור לדון בשימושיה ובמשמעותה.

נגדיר את הדטרמיננטה באופן **רקורסיבי**. דוגמה להגדרה רקורסיבית פגשתם בפרק הקודם, שם הוגדרה סדרת פיבונצ'י כך:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1$$

ולכל $n \geq 3$,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

הגדרה זו אינה מספקת נוסחה ישירה לחישוב ערכו של $f_n$ על פי $n$, אלא מתכון המאפשר לחשבו על סמך הערכים הקודמים בסדרה; זהו אופיין של הגדרות רקורסיביות. באופן דומה, הגדרת הדטרמיננטה תהיה רקורסיבית על פי **סדר המטריצה**: תחילה נגדיר את הדטרמיננטה עבור מטריצות מסדר $1 \times 1$ ו־$2 \times 2$, ולאחר מכן נלמד כיצד לחשב דטרמיננטות של מטריצות כלליות מסדר $n \times n$ באמצעות דטרמיננטות של מטריצות מסדרים נמוכים יותר.

---

**הגדרה 4.1.1 דטרמיננטה של מטריצה מסדר $1 \times 1$**

אם $A = [a]$, אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = a$$

כלומר, הדטרמיננטה של מטריצה הכוללת סקלר בודד הוא הסקלר עצמו.

---

---

**הגדרה 4.1.2 דטרמיננטה של מטריצה מסדר $2 \times 2$**

אם $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

---

**דוגמה**

אם $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, אז $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 15 - 12 = 3$. ◄

**סימון**

אם $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, נסמן את הדטרמיננטה $\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right\|$ בקיצור על־ידי השמטת הסוגריים מסביב למטריצה, כך: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. גם כאשר נגדיר בהמשך דטרמיננטות כלליות של מטריצות ריבועיות מסדרים גבוהים, נסמן את הדטרמיננטה בקיצור על־ידי $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ במקום $\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \right\|$.

רק עבור מטריצות מסדר $1 \times 1$ מומלץ לא לקצר ולהשתמש בסימון המלא $\|[a]\|$, שכן כאשר הסקלר $a$ לקוח משדה המספרים הממשיים, הסימון המקוצר עשוי לבלבל מאחר ש־$|a|$ מסמן את הערך המוחלט של $a$, ואילו כאשר אנו מחשבים את הדטרמיננטה של המטריצה $[a]$, אנו מעוניינים בערך הסקלר עצמו, כלומר $\|[a]\| = a$.

יש המסמנים גם את הדטרמיננטה של מטריצה $A$ ב־$\det A$ במקום $|A|$, וכך אין חשש לבלבול בשום מקרה.

**שאלה 4.1.1**

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$, מעל שדה המספרים הממשיים.

ב. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, מעל שדה המספרים הממשיים.

ג. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , מעל השדה $\mathbb{Z}_2$.

**התשובה בעמוד 393**

**הערה**

בהמשך הפרק, כהרגלנו, בכל עת שנתאר מטריצה ולא נציין את השדה מעליו היא מוגדרת, הניחו שהכוונה היא לשדה המספרים הממשיים.

**שאלה 4.1.2**

חשבו את $A$ אם ידוע כי:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 2$$

**התשובה בעמוד 393**

כדי להגדיר דטרמיננטות של מטריצות מסדרים גבוהים, נזדקק להגדרה הבאה:

---

**הגדרה 4.1.3**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$, כאשר $n \geq 2$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, **המטריצה המינורית**[1] ה־ $i, j$ של $A$ היא המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי מחיקת השורה ה־ $i$ והעמודה ה־ $j$. נסמן מטריצה זו ב־ $A^M_{ij}$. הדטרמיננטה של מטריצה זו נקראת **המינור** ה־ $i, j$ של $A$.

---

שימו לב, אם $A$ היא מטריצה מסדר $n \times n$, אז $A^M_{ij}$ היא מטריצה מסדר $(n-1)\times(n-1)$.

**דוגמאות**

א. אם $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, אז $A^M_{12}$ היא המטריצה $[2]$, מסדר $1 \times 1$

$$A^M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = [2]$$

והמינור ה־ $1,2$ של $A$ הוא $2$.

ב. אם $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, אז $A^M_{22}$ היא המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^M_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

והמינור ה־ $2,2$ של $A$ הוא $1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$. ◀

כעת נוכל להציג את הגדרת הדטרמיננטה באופן כללי.

---

**הגדרה 4.1.4 הדטרמיננטה**

תהי $A = [a_{ij}]$ מטריצה מסדר $n \times n$ מעל שדה $F$, כאשר $n \geq 2$. נניח כי הגדרנו את הדטרמיננטה לכל מטריצה ריבועית מסדר $(n-1)\times(n-1)$ מעל $F$. אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} [A]_{1i} \left| A^M_{1i} \right|$$

---

1 מינורית - משנית, בלעז.

**הערות**

א. נכתוב את ההגדרה באופן מפורש יותר, ללא שימוש בסימן הסכימה:

$$|A| = a_{11}\left|A_{11}^M\right| - a_{12}\left|A_{12}^M\right| + a_{13}\left|A_{13}^M\right| - a_{14}\left|A_{14}^M\right| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\left|A_{1n}^M\right|$$

ובמילים: כדי לחשב את הדטרמיננטה, אנו עוברים על השורה הראשונה של המטריצה, וכופלים כל ערך בה בדטרמיננטת המטריצה המינורית, שהיא מסדר $(n-1)\times(n-1)$, המתאימה למיקומו בשורה. את הערכים שמתקבלים אנו מחברים ומחסרים, לסירוגין. שימו לב לשימוש בביטוי $(-1)^{1+i}$ המקבל את הערכים $\pm 1$ לסירוגין, בהתאם לזוגיות של $i$.

ב. בהגדרה לעיל הנחנו כי $n \geq 2$. עבור $n = 1$ כבר הגדרנו את הדטרמיננטה בהגדרה 4.1.1. תוכלו לתהות - מה לגבי $n = 2$? הרי גם עבור ערך זה כבר הגדרנו את הדטרמיננטה באופן עצמאי מהגדרה 4.1.4! מיד נראה, כי שתי ההגדרות השונות לכאורה עבור $n = 2$ הן שקולות.

**דוגמה**

נפתח בהדגמת חישוב דטרמיננטות של מטריצות קטנות יחסית, על פי הגדרה 4.1.4.

תהי $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ מטריצה כללית מסדר $2\times 2$.

האיבר הראשון בשורה הראשונה של המטריצה הוא $a_{11}$, והמטריצה המינורית המתאימה היא $A_{11}^M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix}$. האיבר השני בשורה הראשונה של המטריצה הוא $a_{12}$, והמטריצה המינורית המתאימה היא $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} \end{bmatrix} = A_{12}^M$.

על פי הגדרה 4.1.4, הדטרמיננטה של $A$ היא:

$$|A| = a_{11}\left|A_{11}^M\right| - a_{12}\left|A_{12}^M\right| = a_{11}\left|\begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix}\right| - a_{12}\left|\begin{bmatrix} a_{21} \end{bmatrix}\right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ואכן קיבלנו את הביטוי המופיע בהגדרה 4.1.2. ◀

**דוגמה**

תהי $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ מטריצה כללית מסדר $3\times 3$.

תחילה נחשב את המינורים המתאימים לאיברי השורה הראשונה:

$$\left|A_{11}^M\right| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$\left|A_{12}^M\right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}$$

$$\left|A_{13}^M\right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

לכן:

$$\begin{aligned}|A| &= a_{11}\left|A_{11}^M\right| - a_{12}\left|A_{12}^M\right| + a_{13}\left|A_{13}^M\right| \\ &= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

נסכם:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

◀

בדוגמה האחרונה קיבלנו נוסחה מפורשת עבור דטרמיננטה של מטריצה מסדר $3 \times 3$. באופן דומה, ניתן להמשיך ולפתח נוסחאות מפורשות עבור דטרמיננטות של מטריצות ריבועיות מכל סדר. כפי שתוכלו לדמיין, נוסחאות אלה הולכות ומתארכות ככל שסדר המטריצה עולה (קוראים אמיצים מוזמנים לכתוב נוסחה מפורשת עבור דטרמיננטות מסדר $4 \times 4$), ואיננו ממליצים שתנסו לזכור נוסחאות אלה, אפילו לא עבור מטריצות מסדר $3 \times 3$.

בהינתן מטריצה נתונה, תוכלו לחשב את הדטרמיננטה שלה על־ידי שימוש רקורסיבי בהגדרה 4.1.4. בהמשך הפרק נלמד דרכים מהירות יותר לחישוב הדטרמיננטה.

**שאלה 4.1.3**

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הממשית

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

בשתי דרכים:

א. על פי הגדרה 4.1.4

ב. בעזרת הנוסחה המפורשת דלעיל.

**התשובה בעמוד 393**

**שאלה 4.1.4**

א. נתונה המטריצה:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 2 & 7 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 4 & 2\\ 4 & 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$$

חשבו את $|A|$.

ב. כמה דטרמיננטות מסדר 2 היה עליכם לחשב?

ג. כמה דטרמיננטות מסדר 2 יש לחשב כדי לחשב (לפי ההגדרה) דטרמיננטה של מטריצה ריבועית מסדר 5? ומסדר 6?

**התשובה בעמוד 393**

**שאלה 4.1.5**

תהי:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -7 & 5 & 1\\ 4 & 3 & -6 & 0\\ -1 & 2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

חשבו את $|A|$.

**התשובה בעמוד 395**

## 4.2 משפט הפיתוח

הגדרה 4.1.4 נותנת, למראית עין, חשיבות מיוחדת לשורה הראשונה במטריצה. בהמשך נראה כי אין כך הדבר, ולמעשה יכולנו להגדיר את הדטרמיננטה באמצעות כל אחת מהשורות, או אף העמודות! ליתר דיוק, נוכיח את המשפט הבא:

---

**משפט 4.2.1 משפט הפיתוח**

תהי $A=\left[a_{ij}\right]$ מטריצה מסדר $n\times n$, כאשר $n\geq 2$. אזי:

א. לכל $1\leq i\leq n$,
$$|A|=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|A_{ij}^{M}\right|$$
זהו פיתוח של הדטרמיננטה לפי השורה ה־ $\boldsymbol{i}$.

ב. לכל $1\leq j\leq n$,
$$|A|=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\left|A_{ij}^{M}\right|$$
זהו פיתוח של הדטרמיננטה לפי העמודה ה־ $\boldsymbol{j}$.

---

**הערות**

א. פיתוח לפי השורה $i=1$ מתלכד למעשה עם הגדרת הדטרמיננטה.

ב. שימו לב למקדם $(-1)^{i+j}$ המופיע לפני המחובר $a_{ij}\left|A_{ij}^{M}\right|$; פירושו בפשטות שיש לקחת איבר זה עם מקדם " $+$ " כאשר $i+j$ זוגי, ועם מקדם " $-$ " כאשר $i+j$ אי־זוגי.

נוכל להמחיש זאת על־ידי כתיבת הסימן של $(-1)^{i+j}$ במקום האיבר ה־ $i,j$ במטריצה $A$, מה שייצור דוגמת לוח שחמט, שבאלכסון הראשי שלו מופיעים רק סימני " $+$ ":

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & & \cdots \\ - & + & - & + & & \cdots \\ + & - & + & - & & \cdots \\ - & + & - & + & & \cdots \\ & & & & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & + \end{bmatrix}$$

ניתן אפוא לנסח במילים את תוכנו של משפט הפיתוח כך:

לשם חישוב הדטרמיננטה נוכל לבחור שורה (או עמודה), כרצוננו, לכפול את איבריה במינורים שלהם, ולסכם את המכפלות עם סימנים מתאימים. הדוגמה הבאה מראה כי על־ידי בחירה מתאימה של שורה, או עמודה, לפיתוח הדטרמיננטה, ניתן לחסוך עבודה רבה.

**דוגמה**

נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה $A$ (מסדר $4 \times 4$):

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -17.5 & 1937.39 & -178 \\ 0 & 267 & -1 & 89 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 9 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

אם נחשב את הדטרמיננטה על־ידי פיתוח לפי השורה הראשונה (כלומר, על פי ההגדרה), יהיה עלינו לחשב ארבע דטרמיננטות של מטריצות ריבועיות מסדר $3$. אולם, נבחין שהעמודה הראשונה מכילה רק איבר אחד שונה מאפס. לפיכך, אם נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה, יתאפסו כל המחוברים פרט לאחד (שהמקדם שלו הוא "$+$"). כלומר,

$$|A| = 2\left|A_{11}^M\right| - 0 + 0 - 0 = 2\left|A_{11}^M\right|$$

לכן נותר לנו לחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המינורית $A_{11}^M$, שהיא:

$$\begin{bmatrix} 267 & -1 & 89 \\ 0 & 0 & -3 \\ 9 & 0 & 36 \end{bmatrix}$$

את הדטרמיננטה שעלינו לחשב בשלב זה נחשב **לפי השורה השנייה**. גם כאן כל המחוברים פרט לאחד מתאפסים. האיבר $-3$, המופיע שם, נמצא במקום ה־$(2,3)$ של המטריצה שבה עוסקים כרגע, ולכן יש לכפול אותו במקדם $-1 = (-1)^5 = (-1)^{2+3}$, לפיכך:

$$|A| = 2\left|A_{11}^M\right| = 2(-1)(-3)\begin{vmatrix} 267 & -1 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \big(0 - (-9)\big) = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$$

◀

את הוכחת משפט הפיתוח נדחה לסוף הפרק, ועד אז נרשה לעצמנו להשתמש במשפט כאילו כבר הוכחנו אותו (כאשר נוכיח את המשפט בהמשך, ניזהר כמובן שלא להשתמש בתוצאות שהסקנו בינתיים מהמשפט עצמו!). נפתח במסקנה השימושית הבאה:

---

**מסקנה 4.2.2**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$, ונניח כי יש ב־$A$ שורת אפסים או עמודת אפסים. אזי $|A| = 0$.

---

**הוכחה**

נפתח את הדטרמיננטה לפי שורת (או עמודת) האפסים, ונקבל סכום של אפסים, כלומר אפס.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.2.1**

חשבו את $|A|$ עבור המטריצות הנתונות להלן.

בכל מקרה נסו לחשב בדרך הקצרה ביותר, תוך שימוש במשפט הפיתוח.

א. $$A=\begin{bmatrix}1&3&0&7\\0&4&0&8\\2&5&6&9\\0&0&0&10\end{bmatrix}$$

ב. $$A=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\2&0&1/11&0\\80&5&100&-2\\11&0&0&0\end{bmatrix}$$

ג. $$A=\begin{bmatrix}1&x&y&0&z\\0&2&0&0&u\\0&t&3&0&y\\g&h&\ell&4&w\\0&0&0&0&5\end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 395**

**שאלה 4.2.2**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר 2 שעבורה $|A|=5$.

א. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $B$ המתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפת סדר שורות $A$.

ב. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $B$ המתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפת סדר עמודות $A$.

ג. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת, $A^t$.

**התשובה בעמוד 396**

**שאלה 4.2.3**

תהי $A$ מטריצה מסדר $2\times 2$. חשבו את $|A|$ אם:

א. יש ב־$A$ שורת אפסים.

ב. יש ב־$A$ עמודת אפסים.

ג. שתי השורות של $A$ שוות זו לזו.

ד. שתי העמודות של $n\times n$ שוות זו לזו.

**התשובה בעמוד 397**

**שאלה 4.2.4**

תהי $A$ מטריצה מסדר $2\times 2$.

א. יהי $t$ סקלר כלשהו ותהי $B=tA$. בטאו את $|B|$ באמצעות $|A|$.

ב. תהי $C$ המטריצה המתקבלת מ־$A_{ij}^M$ על־ידי כפל **אחת השורות** של $A_{ij}^M$ ב־$t$. בטאו את $|C|$ באמצעות $|A|$.

**התשובה בעמוד 398**

**שאלה 4.2.5**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות מסדר $2 \times 2$.

קבעו ביחס לכל אחת מהטענות שלהלן אם היא נכונה אם לאו (נמקו כמובן!).

א. $|AB| = |A||B|$

ב. $|A+B| = |A| + |B|$

**התשובה בעמוד 398**

**שאלה 4.2.6**

תהי $A$ מטריצה מסדר $2 \times 2$.

הוכיחו כי $|A| = 0$ אם ורק אם השורות של $A$ תלויות לינארית כוקטורים ב־ $\mathbb{R}^2$.

**התשובה בעמוד 399**

**שאלה 4.2.7**

תהי $A$ המטריצה:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \hat{a}_{21} & a_{22} + \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$$

הוכיחו כי:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{vmatrix}$$

**התשובה בעמוד 400**

# 4.3 תכונות הדטרמיננטה

בסעיף זה נראה כיצד משתנה הדטרמיננטה של מטריצה $A$ כאשר מבצעים שינויים מסוימים במטריצה. בין השאר נבדוק מה קורה לדטרמיננטה כאשר מבצעים פעולות אלמנטריות על שורות המטריצה, או כאשר "משחלפים" אותה. בעזרת התוצאות שנקבל נוכל לפשט מאוד את דרך חישוב הדטרמיננטה. בשאלות שבהם סיימנו את הסעיף הקודם היו כלולות למעשה כל הטענות שבכוונתנו להוכיח, אלא שהן התייחסו רק לדטרמיננטות של מטריצות מסדר $2 \times 2$. להלן נעסוק בדטרמיננטות של מטריצות מסדר $n \times n$ המוגדרות מעל שדה כלשהו, כאשר $n$ הוא מספר טבעי כלשהו.

נבחן תחילה את ההשפעה של פעולת השחלוף של מטריצה על הדטרמיננטה שלה.

**משפט 4.3.1 הדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת**

אם $A$ היא מטריצה מסדר $n \times n$, אז:[1]

$$\left|A^t\right| = |A|$$

**הוכחה**

נוכיח את המשפט באינדוקציה על $n$.

עבור $n = 1$, המשפט טריוויאלי, משום שבמקרה זה $A^t = A$.

נניח עתה כי $n \geq 2$ ונניח שטענת המשפט נכונה לכל מטריצה מסדר $(n-1) \times (n-1)$.

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$, ונוכיח כי:

$$\left|A^t\right| = |A|$$

נרשום את רכיבי המטריצות הנידונות באופן מפורש, כך:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נחשב את $|A|$ על־ידי **פיתוח לפי השורה הראשונה**:

$$|A| = (-1)^2 a_{11}\left|A_{11}^M\right| + (-1)^3 a_{12}\left|A_{12}^M\right| + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\left|A_{1n}^M\right|$$

את $\left|A^t\right|$ נחשב על־ידי **פיתוח לפי העמודה הראשונה**:

$$\begin{aligned} \left|A^t\right| &= (-1)^2 [A^t]_{11}\left|(A^t)_{11}^M\right| + (-1)^3 [A^t]_{21}\left|(A^t)_{21}^M\right| + \ldots + (-1)^{1+n} [A^t]_{n1}\left|(A^t)_{n1}^M\right| \\ &= (-1)^2 a_{11}\left|(A^t)_{11}^M\right| + (-1)^3 a_{12}\left|(A^t)_{21}^M\right| + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n}\left|(A^t)_{n1}^M\right| \end{aligned}$$

1 זכרו: $A^t$ היא המטריצה המשוחלפת, ששורותיה הן העמודות של $A$ ועמודותיה הן השורות של $A$, באותו הסדר.

אנו רואים כי כדי להוכיח כי $|A^t| = |A|$, די שנראה כי לכל $i$ $(1 \le i \le n)$ מתקיים:

$$\left|A_{1i}^M\right| = \left|(A^t)_{i1}^M\right|$$

אולם, לאור הקשר שבין $A$ ו־$A^t$, קל להיווכח כי $(A^t)_{i1}^M = (A_{1i}^M)^t$. לכן, על סמך הנחת האינדוקציה, ומכיוון שהסדר של כל אחת מהמטריצות המינוריות שבפיתוח הדטרמיננטה הוא $(n-1)\times(n-1)$, מתקיים

$$\left|A_{1i}^M\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{לפי הנחת}\\ \text{האינדוקציה}}}{=} \left|(A_{1i}^M)^t\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{לפי השוויון}\\ \text{דלעיל}}}{=} \left|(A^t)_{i1}^M\right|$$

כפי שרצינו.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.3.1**

בדקו כי $|A^t| = |A|$ עבור

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

כאשר אתם מפתחים הן את $A$ והן את $A^t$, לפי **השורה ראשונה**.

**התשובה בעמוד 401**

**משפט 4.3.2**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפה של שתי שורות (או שתי עמודות)[2] זו בזו. אזי:

$$|B| = -|A|$$

כלומר, החלפה של שתי שורות של $A$ (או שתי עמודות) הופכת את סימן הדטרמיננטה של $A$.[3]

**הערה**

כל תכונה של דטרמיננטה שמתייחסת לשורות של מטריצה, נכונה גם לעמודות. דבר זה נובע ממשפט 4.3.1, המבטיח לנו שכתיבת שורות $A$ כעמודות לא תשנה את ערך הדטרמיננטה. בהוכחת משפט 4.3.2, שתובא להלן, נדגים כיצד מסיקים ממשפט על השורות את המשפט האנלוגי לגבי העמודות; בהמשך ננסח את הטענות לגבי השורות והעמודות כאחת, ונוכיח רק לגבי השורות. המעבר לעמודות ייעשה באותו אופן כמו בהוכחת משפט 4.3.2.

2 החלפה של שתי עמודות במטריצה זו בזו תכונה **פעולה אלמנטרית על עמודות המטריצה**. בדומה, כפל עמודה בסקלר שונה מאפס והוספת כפולה של עמודה אחת לעמודה אחרת אף הן **פעולות אלמנטריות על עמודות**.

3 לשון אחר: פעולה אלמנטרית מטיפוס (1) על שורות (או עמודות) המטריצה הופכת את סימן הדטרמיננטה.

**4.3.2 הוכחת משפט**

נניח כי $A=[a_{ij}]$ היא מטריצה מסדר $n\times n$, ונוכיח את המשפט בנוגע **לשורות המטריצה** באינדוקציה על $n$.

אנחנו מניחים כמובן ש־ $n\geq 2$, שהרי עבור $n=1$ אין משמעות למשפט.

עבור $n=2$ הבדיקה קלה (ביצעתם אותה במסגרת שאלה 4.2.1). במקרה זה:

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11}$$

$$=-|A|$$

נניח כעת כי $n\geq 3$ וכי טענת המשפט נכונה לכל מטריצה ריבועית מסדר $n-1$, ונוכיח את הטענה עבור מטריצה ריבועית $A$ כלשהי מסדר $n$. תהי, אם כן, $A$ המטריצה מסדר $n\times n$:

$$A=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{השורה ה־} i\\ \\ \leftarrow \text{השורה ה־} j\\ \\ \\ \end{array}$$

ותהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי החלפת השורה ה־ $i$ והשורה ה־ $j$ זו בזו. כלומר:

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{j1} & \cdots & a_{jn}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{השורה ה־} i\\ \\ \leftarrow \text{השורה ה־} j\\ \\ \\ \end{array}$$

מאחר ש־ $n\geq 3$, קיימת במטריצה $B$ לפחות שורה אחת נוספת פרט לשורות ה־ $i$ וה־ $j$ (שביניהן החלפנו), ונוכל לפתח את $|B|$ על פי שורה כזאת. יהי, אם כן, $p$ מספר השונה מ־ $i$ ומ־ $j$, ונפתח על פי השורה ה־ $p$. אזי:

$$|B|=(-1)^{p+1}a_{p1}\left|B_{p1}^M\right|+(-1)^{p+2}a_{p2}\left|B_{p2}^M\right|+\ldots+(-1)^{p+n}a_{pn}\left|B_{pn}^M\right|$$

ובעזרת שימוש בסימן הסכום $\sum$:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{pk} \left|B_{pk}^{M}\right| \tag{1}$$

יהי $1 \le k \le n$. לא תתקשו לוודא כי $B_{pk}^{M}$ מתקבלת מ־ $A_{pk}^{M}$ על־ידי החלפת שתי שורות של $A_{pk}^{M}$ זו בזו, ולכן על פי הנחת האינדוקציה:

$$\left|B_{pk}^{M}\right| = -\left|A_{pk}^{M}\right|$$

לכן נוכל לרשום את (1) כך:

$$|B| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{pk} \left(-\left|A_{pk}^{M}\right|\right) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^{p+k} a_{pk} \left|A_{pk}^{M}\right|$$
$$= -|A|$$

נותר להוכיח את התכונה בנוגע ל**עמודות המטריצה**:

תהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי החלפת שתי **עמודות** זו בזו.

נעבור למטריצות המשוחלפות; היות שאלה מתקבלות על־ידי החלפת השורות בעמודות, נובע כי $B^t$ מתקבלת מ־ $A^t$ על־ידי החלפה של שתי **שורות** זו בזו. לכן:

$$|B| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{משפט} \\ 4.3.1}}{=} |B^t| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{הוכחנו} \\ \text{כבר}}}{=} -|A^t| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{משפט} \\ 4.3.1}}{=} -|A|$$

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.3.2**

תהי $B$ המטריצה המתקבלת מהמטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

על־ידי החלפת ה**עמודה** הראשונה ב**עמודה** השנייה.

בדקו כי $|B| = -|A|$ על־ידי חישוב מפורש של $|A|$ ושל $|B|$.

**התשובה בעמוד 401**

---

**משפט 4.3.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי כפל שורה (או עמודה) של $A$ בסקלר $t$. אזי:

$$|B| = t|A|$$

---

**הוכחה**

נוכיח, כאמור, את הטענות עבור השורות. את הטענות האנלוגיות עבור עמודות מסיקים באותה דרך כבהוכחת משפט 4.3.2, על־ידי מעבר למטריצה המשוחלפת.

נניח כי $B$ התקבלה מ־$A$ על־ידי כפל השורה ה־$i$ של $A$ בסקלר $t$. כלומר, נניח כי:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ta_{i1} & \cdots & ta_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נפתח את $|B|$ לפי השורה ה־$x$:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, ta_{ij} \left|B_{ij}^M\right| \tag{1}$$

$B$ נבדלת מ־$A$ רק בשורתה ה־$i$, ולכן המטריצות המתקבלות מ־$A$ ומ־$B$ לאחר מחיקת השורה ה־$i$ ועמודה כלשהי הן זהות, ולפיכך לכל $1 \le j \le n$, $B_{ij}^M = A_{ij}^M$, ולכן את (1) נוכל לרשום כך:

$$|B| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, ta_{ij} \left|A_{ij}^M\right| = t\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \left|A_{ij}^M\right|\Big)$$

אבל הסכום הרשום בסוגריים באגף ימין של שוויון זה אינו אלא הפיתוח של $|A|$ לפי השורה ה־$i$, ולכן קיבלנו $|B| = t|A|$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.3.3**

א. עבור המטריצות $A$ ו־$B$

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

(שימו לב כי $B$ התקבלה מ־$A$ על־ידי כפל העמודה השלישית ב־3).

בדקו על־ידי חישוב מפורש כי:

$$|B| = 3|A|$$

ב. תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$ ויהי $t$ סקלר.

בטאו את $|tA|$ באמצעות $|A|$.

**התשובה בעמוד 402**

**משפט 4.3.4**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות הנבדלות זו מזו רק בשורה (או עמודה) אחת, השורה (העמודה) ה־ $2 \times 2$.

תהי $C$ מטריצה אשר שורתה (עמודתה) ה־ $i$ היא סכום השורות (העמודות) ה־ $i$ של $A$ ושל $B$, ושאר שורותיה (עמודותיה) שוות לאלה של $A$ (או של $B$). אזי:

$$|C| = |A| + |B|$$

**הוכחה**

נוכיח את המשפט בנוגע לשורות. השלימו בעצמכם את הגִרסה עבור עמודות.

נתונות המטריצות $A$, $B$ ו־ $C$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad ; \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{i1} & \cdots & \hat{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \hat{a}_{i1} & \cdots & a_{in} + \hat{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נפתח את $|C|$ לפי השורה ה־ $i$ ונשים לב לעובדה כי לכל $1 \le j \le n$,

$$A_{ij}^M = B_{ij}^M = C_{ij}^M \text{ [4]}$$

אם כן:

$$|C| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (a_{ij} + \hat{a}_{ij}) \left|C_{ij}^M\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|C_{ij}^M\right| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \hat{a}_{ij} \left|C_{ij}^M\right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}^M\right| + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \hat{a}_{ij} \left|B_{ij}^M\right| = |A| + |B|$$

**מ.ש.ל.**

**משפט 4.3.5**

אם במטריצה ריבועית $A$ יש שתי שורות שוות (או שתי עמודות שוות), אז:

$$|A| = 0$$

4 $A, B, C$ נבדלות זו מזו רק בשורה ה־ $i$, וזו נמחקת כאשר "מייצרים" את המטריצות המינוריות $C_{ij}^M, B_{ij}^M, A_{ij}^M$.

**הוכחה עבור מטריצות ממשיות**

בשלב זה נוכיח את המשפט עבור מטריצות ממשיות - כלומר כאלה המוגדרות מעל שדה המספרים הממשיים. המשפט אמנם נכון עבור מטריצות המוגדרות מעל שדה שרירותי, אך לצורך מתן הוכחה כללית נידרש לפתח כלים נוספים, ולכן נדחה אותה בשלב זה. את ההוכחה במקרה הכללי ניתן בסוף הפרק, בצמוד להוכחת משפט הפיתוח (שגם את הוכחתו, כזכור, דחינו לסוף הפרק). עם זאת, בהמשך הפרק נרשה לעצמנו להסתמך על משפט 4.3.5, כאילו הוכחנו אותו באופן כללי.

ניגש, אם כן, להוכחה (במקרה הממשי):

החלפת שתי השורות השוות של $A$ זו בזו אינה משנה את $A$ ולכן גם לא את $|A|$. אולם לפי משפט 4.3.2, החלפה כזאת הופכת את סימן הדטרמיננטה. לכן $|A| = -|A|$, כלומר $2|A| = 0$, ולכן $|A| = \frac{1}{2} \cdot 2|A| = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.3.4**

היכן ניצלנו, בהוכחה דלעיל, את ההנחה כי המטריצה היא מטריצה ממשית? האם תוכלו להוכיח כבר בשלב הזה משפט כללי יותר מזה שהוכחנו?

**התשובה בעמוד 402**

**שאלה 4.3.5**

נתונה המטריצה הממשית:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

בדקו על־ידי פיתוח לפי השורה הראשונה כי $|A| = 0$.

(שימו לב כי יש ב־$A$ שתי שורות שוות.)

**התשובה בעמוד 402**

כבר בדקנו במשפטים קודמים כיצד משתנה הדטרמיננטה כאשר מחליפים את סדר השורות במטריצה, וכיצד היא משתנה כאשר כופלים שורה כלשהי בסקלר. שתי הפעולות האלה הן הפעולות האלמנטריות מטיפוסים (1) ו־(2) על מטריצה שתוארו בפרק 1.

כעת נבדוק מהי השפעתה של פעולה אלמנטרית מטיפוס (3) (הוספת כפולה של שורה אחת של מטריצה לשורה אחרת של אותה מטריצה) על הדטרמיננטה. כפי שתיווכחו, בדיקה זו אינה נעשית רק מטעמי "שלמות" - כדי שנדע שטיפלנו בכל הפעולות האלמנטריות, אלא הכרת התוצאה מייעלת במידה ניכרת את תהליך החישוב של דטרמיננטות.

**משפט 4.3.6**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת כפולה של שורה (עמודה) כלשהי לשורה (עמודה) אחרת. אזי:

$$|B| = |A|$$

כלומר, הפעולה האלמנטרית של הוספת כפולה של שורה (עמודה) לשורה (עמודה) אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.

**הוכחה**

נניח, לשם נוחות הכתיבה, כי הוספנו לשורה הראשונה כפולה ב־$t$ של השורה השנייה, ונחשב בעזרת משפט 4.3.4 ומשפט 4.3.3:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ta_{21} & a_{12}+ta_{22} & \dots & a_{1n}+ta_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ta_{21} & ta_{22} & \dots & ta_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + t\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(המחובר הראשון בסכום דלעיל הוא $|A|$, ואילו השני הוא 0 על פי משפט 4.3.5, שכן מופיעה בו דטרמיננטה של מטריצה ששתי שורותיה הראשונות שוות זו לזו.) קיבלנו, אם כן, כי $|B| = |A|$.

את המקרה הכללי של הוספת כפולה ב־$t$ של השורה ה־$A$ לשורה ה־$\lambda$ תוכיחו בעצמכם כחלק מהשאלה העוקבת.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.3.6**

א. הוכיחו את משפט 4.3.6 למקרה שבו $B$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת כפולה ב־$t$ של השורה ה־$B$ לשורה ה־$i$ של $A$.

ב. תהי $A$ המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ותהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת כפולה ב־ $-3$ של העמודה השנייה לעמודה השלישית. בדקו על־ידי חישוב ישיר כי $|A| = |B|$.

**התשובה בעמוד 403**

בשלב זה מצויים בידינו הכלים הדרושים לחישוב יעיל של דטרמיננטות. חישוב כזה מורכב, בדרך כלל, מהשלבים האלה:

א. אם יש שורה (או עמודה) שאיבריה הם מספרים שלמים שיש להם גורם משותף, נוציא גורם זה מחוץ לדטרמיננטה. בדומה, אם מופיעים שברים, נוכל להוציא מחוץ לדטרמיננטה את השבר שמונהו 1 ומכנהו הוא המכנה המשותף, כך שבתוך השורה המתאימה יופיעו מספרים שלמים בלבד.[5]

ב. נבחר שורה (או עמודה) שרירותית, אך רצוי שיופיע בה מספר רב ככל האפשר של אפסים, ואם אין כאלה - לפחות שורה (או עמודה) שכמה מאיבריה הם 1 או $-1$. על־ידי פעולות אלמנטריות מהסוג השלישי (אשר אינן משנות את הדטרמיננטה) נאפס את כל איברי השורה (או העמודה) שבחרנו, פרט לאחד.

ג. לאחר שקיבלנו שורה (או עמודה) שכל איבריה, פרט לאחד, הם אפסים, נפתח את הדטרמיננטה לפי שורה (או עמודה) זו. בפיתוח זה יופיע רק מחובר אחד ובו מינור שהוא דטרמיננטה מסדר קטן יותר.

ד. נמשיך בפעולות דומות על הדטרמיננטה הקטנה יותר שהתקבלה.

**דוגמה**

נחשב את $|A|$ עבור:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 21 & 27 & 6 \\ -3 & 8 & -27 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

נוציא גורם משותף 3 מהשורה הראשונה ולאחריו גורם משותף 9 מהעמודה השלישית:

$$|A| = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 9 & 2 \\ -3 & 8 & -27 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

---

5 למשל $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1/3 & 2/5 & 1/5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5/15 & 6/15 & 3/15 \end{vmatrix} = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

בשורה השלישית מופיעים שני אפסים; נאפס את ה־3 שמופיע שם במקום ה־$(3,2)$, על־ידי הוספת **העמודה הרביעית** מוכפלת ב־ $(-3)$ לעמודה השנייה:

$$= 27\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -10 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי שורה שלישית (המקדם של ה־1 שבמקום ה־$(3,4)$ הוא $(-1)^{3+4}$, כלומר $(-1)$):

$$= -27\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -3 & -10 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

נוסיף את העמודה השלישית לראשונה ואחר כך נוציא גורם משותף $(-1)$ מהשורה השנייה:

$$= 27\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

נפתח לפי שורה אחרונה (המקדם של ה־1 בשורה זו הוא $1 = (-1)^6 = (-1)^{3+3}$):

$$= 27 \cdot 1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 27 \cdot 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 27 \cdot 6(10-1) = 1458$$

▸

**שאלה 4.3.7**

חשבו:

א. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & 17 \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$

**התשובה בעמוד 404**

לסיום סעיף זה נבחן סוג מסוים של מטריצות שעבורן חישוב הדטרמיננטה פשוט במיוחד.

**הגדרה 4.3.7**

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית עילית** אם כל איבריה אשר מתחת לאלכסון הראשי הם אפסים.

כלומר, $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית עילית אם לכל $i > j$, $a_{ij} = 0$.[6]

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית תחתית** אם כל איבריה אשר מעל לאלכסון הראשי הם אפסים.

כלומר, $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית תחתית אם לכל $i < j$, $a_{ij} = 0$.

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית** אם היא משולשית עילית או משולשית תחתית.

צורתה של מטריצה משולשית מסבירה את שמה. כך נראית מטריצה משולשית עילית:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

וכך נראית מטריצה משולשית תחתית:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

שימו לב, מטריצות סקלריות ואלכסוניות הן בפרט גם מטריצות משולשיות.

**משפט 4.3.8**

הדטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי שלה. כלומר, אם $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית מסדר $n \times n$, אז:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

**שאלה 4.3.8**

הוכיחו את משפט 4.3.8.[7]

**התשובה בעמוד 405**

ממשפט 4.3.8 נקבל שכדי לחשב דטרמיננטה, לא הכרחי למצוא שורה או עמודה במטריצה שכדאי לפתח על פיה, או להגיע למצב שיש שורה או עמודה כזאת. אפשר תמיד לבצע פעולות לדירוג המטריצה כמו שלמדנו בפרק 1. אם במהלך תהליך הדירוג נקבל שורת אפסים, נוכל לעצור ולומר שהדטרמיננטה היא אפס. אם לא – נקבל בסוף התהליך מטריצה משולשית שאת הדטרמיננטה שלה אנו יודעים כעת לחשב בקלות.

6 אנחנו מקצרים וכותבים שהתכונה מתקיימת עבור $i > j$, כאשר הכוונה היא, כמובן, שאם המטריצה $A$ היא מסדר $n \times n$ אז התכונה מתקיימת לכל $n \geq i > j \geq 1$, כלומר לכל $i, j$ רלוונטיים. בדרך קיצור זו ננהג מדי פעם גם בהמשך כדי למנוע סרבול.

7 (רמז: אינדוקציה!).

והנה עוד כמה שאלות לתרגול:

**שאלה 4.3.9**
עבור

$$A = \begin{bmatrix} x^2 - y^2 & (x-y)^2 & 0 \\ x+y & x-y & 0 \\ x-y & 3x+y & 2y \end{bmatrix}$$

הוכיחו כי לכל $x$ ו־ $y$ ממשיים מתקיים $|A| = 0$.

**התשובה בעמוד 407**

**שאלה 4.3.10**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ממשית מסדר $B$ המקיימת $A^t = -A$, כלומר, לכל $1 \le i\,, j \le n$:

$$a_{ij} = -a_{ji}$$ [8]

מטריצה כזאת נראית כך:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

מטריצה כזאת מכונה מטריצה **אנטיסימטרית**.

הוכיחו כי במקרה זה, אם $n$ **אי־זוגי** אז $|A| = 0$.

**התשובה בעמוד 407**

**שאלה 4.3.11**

תהי $A_n$ מטריצה ריבועית מסדר $n$ הנתונה על־ידי

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

כאשר $x_1, \dots, x_n$ סקלרים כלשהם.

$A_n$ נקראת **מטריצת וַנדרמוֹנְדֶה** (Vandermonde).

הוכיחו כי עבור $n = 2,3$:

$$|A_n| = \prod_{j<i} (x_i - x_j)$$ [9]

(הערה: הנוסחה ל־ $|A_n|$ נכונה לכל $n$ טבעי, אך נסתפק בהוכחה עבור $n = 2,3$.)

**התשובה בעמוד 408**

8 שימו לב שעבור $i = j$ נקבל $a_{ii} = -a_{ii}$, ומכיוון ש־ $A$ ממשית, נובע כי $a_{ii} = 0$.

9 הסימון $\prod$ משמש לתיאור מכפלה. $\prod_{j<i} (x_i - x_j)$ היא המכפלה של כל הביטויים מהטיפוס $(x_i - x_j)$ שבהם $(1 \le i, j \le n)$ $i > j$.

**שאלה 4.3.12**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. מהו המספר המרבי של אפסים היכולים להופיע כאיברים של $A$ אם ידוע כי $|A| \neq 0$ ?

**התשובה בעמוד 408**

**שאלה 4.3.13**

חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**התשובה בעמוד 408**

**שאלה 4.3.14**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ממשית ותהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת כפולה ב־4 של השורה הראשונה של $A$ לשורה השנייה של $A$. תהי $C$ המטריצה המתקבלת מ־$B$ על־ידי החלפת העמודה הראשונה של $B$ בעמודה השנייה של $B$, ותהי $D$ המטריצה המתקבלת מ־$C$ על־ידי כפל ב־2 של כל איבר בשורה הראשונה. תהי $E$ המטריצה המשוחלפת של $D$.

בטאו את $|E|$ באמצעות $|A|$.

**התשובה בעמוד 409**

**שאלה 4.3.15**

חשבו:

א. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 20 & 10 & 40 & -50 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} 4 & 180 & 49 \\ 0 & 270 & 35 \\ 0 & 360 & 21 \end{vmatrix}$

ד. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

ה. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

**התשובה בעמוד 409**

**שאלה 4.3.16** (שאלת רשות)

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$ ותהי $B$ מטריצה ריבועית מסדר $m$.

תהי $C$ מטריצה ריבועית מסדר $n+m$,

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A_{n\times n} & X_{n\times m} \\ \hline O_{m\times n} & B_{m\times m} \end{array}\right]$$

כאשר $O_{m\times n}$ היא מטריצת האפס מסדר $m\times n$ ו־ $X_{n\times m}$ היא מטריצה כלשהי מהסדר הנקוב.
הוכיחו כי:

$$|C| = |A||B|$$

רמז: עבור $B$ נתונה כלשהי, הוכיחו את המשפט באינדוקציה על הסדר $n$ של המטריצה הריבועית $A$.

**התשובה בעמוד 410**

**שאלה 4.3.17** (שאלת רשות)

הוכיחו שהדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

היא מספר שלם המתחלק ב־ $\frac{n(n+1)}{2}$.

**התשובה בעמוד 410**

**שאלה 4.3.18**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n\times n$ שבה מופיע בכל שורה המספר 1 פעם אחת וכל שאר איברי השורה הם אפסים, וגם מופיע בכל עמודה המספר 1 פעם אחת וכל שאר איברי העמודה הם אפסים.
מהו ערכה של $|A|$?

**התשובה בעמוד 412**

**שאלה 4.3.19**

יהיו $\alpha,\beta$ ממשיים. חשבו את הדטרמיננטה מסדר $n$:[10]

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \alpha+\beta & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha & \alpha & \dots & \alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

רמז: חשבו את סכום כל השורות!

**התשובה בעמוד 412**

10 כלומר: $[A]_{ij} = \begin{cases} \alpha+\beta & , \ i=j \\ \alpha & , \ i\neq j \end{cases}$

**שאלה 4.3.20**

תהי $A_n$ המטריצה הריבועית מסדר $n$ אשר איברי האלכסון המשני שלה שווים ל־1 ויתר איבריה הם אפסים.

הוכיחו (באינדוקציה על $n$) כי:

$$|A_n| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

**התשובה בעמוד 413**

**שאלה 4.3.21**

א. מהו הערך של $\alpha$ אם:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

ב. עבור אילו ערכים של $\lambda$ מתקיים $|\lambda I - A| = 0$, כאשר $A$ היא המטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ?

**התשובה בעמוד 414**

**שאלה 4.3.22**

תהי:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{bmatrix}$$

כלומר:

$$[A]_{ij} = \begin{cases} n & , \quad i \neq j \\ i & , \quad i = j \end{cases}$$

חשבו את $|A|$.

**התשובה בעמוד 415**

## 4.4 התאפסות הדטרמיננטה

בפרק הקודם, כאשר עסקנו בשאלה מתי מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה, מצאנו אפיונים שונים של תכונת ההפיכות. באמצעות הדטרמיננטה נוכל לתת אפיון נוסף ושימושי לתכונה זו.

---

**משפט 4.4.1**

מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

באופן שקול, מטריצה ריבועית $A$ היא לא הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

---

להוכחת המשפט ניעזר בלמה הבאה:

---

**למה 4.4.2**

אם $A$ שקולת שורות ל־ $B$ [1] אז $|A| = 0$ אם ורק אם $|B| = 0$.

---

**הוכחה**

מאחר ש־$A$ שקולת שורות ל־ $B$, הרי ש־$A$ מתקבלת מ־ $B$ על־ידי סדרה של פעולות אלמנטריות על שורות $A$. בסעיף הקודם ראינו כי:

- החלפת שורות הופכת את סימן הדטרמיננטה.
- כפל שורה בסקלר שונה מאפס כופל את הדטרמיננטה באותו סקלר.
- הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.

לפיכך, במעבר מ־$A$ ל־ $B$ משתנה הדטרמיננטה בכל שלב בכך שהיא מוכפלת בסקלר שונה מאפס (היכול להיות גם שווה ל־1).

כלומר, קיים $t \neq 0$, כך ש־ $|A| = t|B|$.

משוויון זה ברור כי $|A| = 0$ אם ורק אם $|B| = 0$.

**מ.ש.ל.**

**הוכחת משפט 4.4.1**

תהי $A$ מטריצה ריבועית. טענת המשפט שקולה לצמד הטענות:

א. אם $A$ הפיכה, אז $|A| \neq 0$.

ב. אם $A$ אינה הפיכה, אז $|A| = 0$.

---

1 כלומר, אם $A$ מתקבלת מ־ $B$ על־ידי ביצוע סדרה של פעולות אלמנטריות.

נוכיח אותן:

א. אם $A$ מטריצה הפיכה, אז $A$ שקולת שורות ל־ $I$ (משפט 3.10.6ב), ומאחר ש־ $|I| \neq 0$, הרי על פי למה 4.4.2, $|A| \neq 0$.

ב. נניח כי $A$ לא הפיכה. מאחר ש־$A$ ריבועית, היא שקולת שורה למטריצה $A'$ שיש בה שורת אפסים (משפט 1.14.4). לכן $|A'| = 0$, ולכן על פי למה 4.4.2, $|A| = 0$.

**מ.ש.ל.**

**הערה**

לאור משפט 4.4.1, אי־התאפסות הדטרמיננטה היא תנאי שקול לכל אחד מן התנאים המופיעים במשפט 3.10.6.

**שאלה 4.4.1**

אילו מהמטריצות המופיעות בשאלה 4.3.15 הן הפיכות?

**התשובה בעמוד 415**

**שאלה 4.4.2**

הוכיחו שאם $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ היא מטריצה הפיכה מעל $\mathbb{R}$, אז גם $\begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a_{13} & 3 & a_{23} & a_{33} \\ -a_{12} & 4 & -a_{22} & -a_{32} \end{bmatrix}$ הפיכה.

**התשובה בעמוד 415**

**שאלה 4.4.3**

עבור אילו ערכים של הסקלר הממשי $a$ המטריצה $\begin{bmatrix} a-2 & 4 & 3 \\ 1 & a+1 & -2 \\ 0 & 0 & a-4 \end{bmatrix}$ הפיכה ?

**התשובה בעמוד 416**

**שאלה 4.4.4**

תהי $A = [a_{ij}]$ מטריצה מסדר $n \times n$ בעלת התכונה כי סכום האיברים של כל שורה שלה הוא אפס. כלומר, לכל $i$, $1 \leq i \leq n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$$

חשבו את $|A|$.

**התשובה בעמוד 416**

# 4.5 הדטרמיננטה של מכפלת מטריצות

הנה תכונה מרשימה של דטרמיננטות:

**משפט 4.5.1 הדטרמיננטה של מכפלת מטריצות**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות מאותו סדר (ומעל אותו שדה). אזי:

$$|AB| = |A||B|$$

**הוכחה**

הוכחת המשפט תיעשה בשלבים - תחילה למקרה ש־ $A$ היא מטריצה אלמנטרית, לאחר מכן למקרה ש־ $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, ולבסוף ל־ $A$ כלשהי.

**שלב א** – נניח כי $A$ היא **מטריצה אלמנטרית** ו־ $B$ היא מטריצה ריבועית מאותו הסדר, ונוכיח:

$$|AB| = |A||B|$$

בסעיף 3.9 עסקנו במטריצות אלמנטריות. כזכור, מטריצה אלמנטרית $A$ היא מטריצה המתקבלת ממטריצת היחידה, $I$, על־ידי ביצוע פעולה אלמנטרית $\varphi$ על שורות $A$, כלומר $A = \varphi(I)$. יתר על כן, על פי טענה 3.9.3, אם $\varphi$ פעולה אלמנטרית כלשהי ו־ $C$ מטריצה כלשהי, אז ביצוע הפעולה $\varphi$ על $C$ כמוה ככפל $C$ משמאל ב־ $\varphi(I)$, כלומר:

$$\varphi(C) = \varphi(I)C$$

קיימים שלושה טיפוסים של פעולות אלמנטריות, ובהוכחתנו נתייחס לכל טיפוס בנפרד.

1. $\varphi$ היא החלפה הדדית של שתי שורות (בסימנים: $\varphi : R_i \leftrightarrow R_j$). כלומר, $\varphi(I)$ מתקבלת על־ידי החלפת שורות ב־ $I$ זו בזו.
במקרה זה, לפי משפט 4.3.2,

$$|A| = |\varphi(I)| = -|I| = -1 \qquad (1)$$

וכן,

$$|\varphi(B)| = -|B| \qquad (2)$$

לכן:

$$|AB| = |\varphi(\mathrm{I})B| = |\varphi(B)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי (2)}}}{=} -|B| = (-1)|B| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{לפי (1)}}}{=} |A||B|$$

2. $\varphi$ היא כפל שורה בסקלר $t \neq 0$ (בסימנים: $\varphi : R_i \to tR_i$). כלומר, $\varphi(I)$ מתקבלת מ־ $I$ על־ידי כפל שורה כלשהי ב־ $t$.
במקרה זה,

$$|A| = |\varphi(I)| = t|I| = t \qquad (1)$$

$$|\varphi(B)| = t|B| \qquad (2)$$

ולכן:

$$|AB| = |\varphi(\mathrm{I})B| = |\varphi(B)| \underset{\uparrow \atop \text{לפי (2)}}{=} t|B| \underset{\uparrow \atop \text{לפי (1)}}{=} |A||B|$$

3. $\varphi$ היא הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת (בסימנים: $\varphi : R_i \to R_i + tR_j$). כלומר, $\varphi(I)$ מתקבלת מ־ $I$ על־ידי הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת.

במקרה זה,

$$|A| = |\varphi(I)| = |I| = 1 \qquad (1)$$

$$|\varphi(B)| = |B| \qquad (2)$$

ולכן לכל $B$,

$$|AB| = |\varphi(I)B| = |\varphi(B)| \underset{\uparrow \atop \text{לפי (2)}}{=} |B| = 1 \cdot |B| \underset{\uparrow \atop \text{לפי (1)}}{=} |A||B|$$

ובזאת סיימנו את הוכחת שלב א.

**שלב ב** – נניח כי $A$ היא **מכפלה של מטריצות אלמנטריות** ו־ $B$ היא מטריצה ריבועית מאותו הסדר, ונוכיח:

$$|AB| = |A||B|$$

ההוכחה תהיה באינדוקציה על מספר הגורמים $n$ במכפלה המתארת את $A$.

כאשר $n = 1$, $A = \varphi(I)$, ולפי שלב א:

$$|AB| = |A||B|$$

נניח כי טענת שלב ב נכונה עבור מטריצות $A$, שהן מכפלות של $n-1$ מטריצות אלמנטריות $(n \geq 2)$.

נוכיח כי טענה זו נכונה עבור מטריצות $A$, שהן מכפלות של $n$ מטריצות אלמנטריות.

תהי, אם כן,

$$A = \varphi_n(I)\varphi_{n-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)$$

אזי:

$$\begin{aligned}
|AB| &= |\varphi_n(I)\varphi_{n-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)B| \\
&\overset{1}{=} |\varphi_n(I)\varphi_{n-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)B| \\
&\overset{2}{=} |\varphi_n(I)| \cdot |\varphi_{n-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)B| \\
&\overset{3}{=} |\varphi_n(I)| \cdot |\varphi_{n-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)| \cdot |B| \\
&\overset{4}{=} |\varphi_n(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)| \cdot |B| = |A||B|
\end{aligned}$$

כדרוש.

1 כפל מטריצות הוא קיבוצי.
2 לפי שלב א.
3 לפי הנחת האינדוקציה.
4 שוב, לפי שלב א.

**שלב ג** – נוכיח את טענת המשפט עבור $A$ ריבועית **כלשהי** ו־ $B$ מטריצה ריבועית מאותו הסדר.

נבחין בין שני מקרים:

א. $A$ הפיכה $\left(|A| \neq 0\right)$.

ב. $A$ לא הפיכה $\left(|A| = 0\right)$.

א. אם $A$ הפיכה, אז לפי מסקנה 3.9.8, $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות, ולכן על פי שלב ב:

$$|AB| = |A||B|$$

ב. אם $A$ לא הפיכה $\left(|A| = 0\right)$, אז $A$ אינה שקולת שורה למטריצת היחידה $I$, ולכן היא שקולת שורה למטריצה שיש בה שורת אפסים.[5] כלומר, קיימות מטריצות אלמנטריות $\varphi_1(I),\dots,\varphi_k(I)$ כך שבמטריצה

$$A' = \varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)A$$

יש שורת אפסים. מכאן נובע כי לכל $B$, יש במטריצה $A'B$ שורת אפסים,[6] כלומר במטריצה

$$\varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)AB$$

יש שורת אפסים, ולכן:

$$|\varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)AB| = 0$$

אבל המטריצה $\varphi_k(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1(I)AB$ שקולת שורה למטריצה $AB$, ולכן גם:

$$|AB| = 0$$

נסכם:

כאשר $A$ לא הפיכה, אז מחד גיסא,

$$|A||B| = 0|B| = 0$$

מאידך גיסא,

$$|AB| = 0$$

ולפיכך גם במקרה זה:

$$|AB| = |A||B|$$

**מ.ש.ל.**

5 ראו משפטים 1.14.4 ו 3.10.6.

6 מסקנה 3.4.4.

כמסקנה ממשפט 4.5.1 נקבל:

**מסקנה 4.5.2**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות המקיימות:

$$AB = I$$

אז $A$ ו־ $B$ שתיהן הפיכות וכל אחת מהן היא ההופכית של האחרת,[7] כלומר $AB = BA = I$.

**שאלה 4.5.1**

הראו כיצד נובעת המסקנה האחרונה ממשפט 4.5.1.

**התשובה בעמוד 416**

**שאלה 4.5.2**

את הטענות שבשאלה זו כבר הוכחתם בעבר. הפעם הוכיחו אותן תוך שימוש במשפט 4.5.1 ובאפיון של מטריצות הפיכות כמטריצות שהדטרמיננטה שלהן שונה מאפס.

א. אם $A$ לא הפיכה ו־ $B$ הפיכה, אז $AB$ וגם $BA$ שתיהן לא הפיכות.

ב. מכפלה של שתי מטריצות הפיכות היא הפיכה.

**התשובה בעמוד 417**

**שאלה 4.5.3**

נניח ש־ $A,B$ מטריצות ריבועיות מאותו הסדר, כך ש־ $A^2 + AB = I$. הוכיחו ש־$A$ ו־ $B$ מתחלפות, כלומר $AB = BA$.

**התשובה בעמוד 417**

**שאלה 4.5.4**

הוכיחו כי:

א. אין מטריצה $B$, $B \in M_3(\mathbb{R})$, כך ש־ $B^2 = -I$.

ב. אם $A,B$, $A, B \in M_7(\mathbb{R})$, הן מטריצות הפיכות, אז $AB + BA \neq 0$.

**התשובה בעמוד 417**

7 את המסקנה הזאת יכולנו להוכיח בקלות גם בעקבות משפט 3.10.6 בלי להסתמך על משפט 4.5.1, אלא שכאן ההוכחה אלגנטית יותר.

# 4.6 כלל קרמר

בפרק 1 למדנו כיצד לפתור מערכות משוואות לינאריות כלליות, ובפרט מערכות משוואות לינאריות של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים. שיטת הפתרון - שיטת החילוץ של גאוס - לא נתנה בידינו נוסחה מפורשת למציאת הפתרונות, אלא רק מתכון למציאתם. בסעיף זה נראה כיצד נוכל לתת ביטוי מפורש, בעזרת דטרמיננטות, עבור רכיבי הפתרון.

תהי נתונה מערכת לינארית של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & \dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

נסמן ב־ $A$ את מטריצת המקדמים המצומצמת וב־ $B$ את וקטור העמודה של המקדמים החופשיים:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

**משפט 4.6.1 כלל קרמר**

אם $|A| \neq 0$, אז למערכת $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ יש פתרון יחיד, $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, ורכיביו נתונים על־ידי:

לכל $1 \le k \le n$,

$$c_k = \frac{|A_k|}{|A|} \qquad (1)$$

כאשר $A_k$ היא המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי החלפת העמודה ה־ $k$ של $A$ בוקטור העמודה $\mathbf{b}$.

**הערה**

נוסחה זו אינה יעילה לחישוב מעשי של הפתרון, שכן מספר הצעדים הכרוך בחישוב הדטרמיננטות הרלוונטיות גדול מזה הדרוש בתהליך החילוץ של גאוס. העניין בכלל קרמר הוא בכך, שהוא מראה במפורש כיצד הפתרונות תלויים במקדמי המערכת. הכרת התלות הזאת חשובה, למשל, בבעיות מעשיות שבהן מקדמי המערכת הם מספרים שנמדדו בניסיון ואינם ידועים במדויק; במקרים כאלה רוצים לדעת מה קורה לפתרונות כאשר מבצעים שינויים קטנים במקדמי המערכת.

**הוכחת משפט 4.6.1**

כבר ראינו כי מתוך $|A| \neq 0$ נובע שלמערכת $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ יש פתרון יחיד. נסמנו $(c_1, \dots, c_n)$.[1]

1 ראו משפט 3.10.6 וזכרו כי $|A| \neq 0$ אם ורק אם $A$ הפיכה (משפט 4.4.1).

ה־$n$־יה $(c_1,\dots,c_n)$ מקיימת אם כן:

$$\begin{matrix} a_{11}c_1 & + & \dots & +a_{1n}c_n & = & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1 & + & \dots & +a_{nn}c_n & = & b_n \end{matrix} \qquad (2)$$

נחשב כעת את $|A_1|$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$ {}^{2}= \begin{vmatrix} \overbrace{a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n}^{\text{זוהי העמודה הראשונה של המטריצה}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}c_1 + \dots + a_{nn}c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$ {}^{3}= \begin{vmatrix} a_{11}c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}c_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}c_2 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2}c_2 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\dots+ \begin{vmatrix} a_{1n}c_n & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$ {}^{4}= c_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\dots+ c_n \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$ {}^{5}= c_1|A| + c_2\cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 = c_1|A|$$

כלומר,

$$|A_1| = c_1|A|$$

2 לפי (2).

3 על־ידי שימוש חוזר במשפט 4.3.4 לעמודות.

4 לפי משפט 4.3.3 לעמודות.

5 שכן, בכל אחת מן הדטרמיננטות (פרט לראשונה) יש שתי עמודות שוות.

ולכן:

$$c_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

באותו אופן, מקבלים כי לכל $1 \le k \le n$:

$$c_k = \frac{|A_k|}{|A|}$$

**מ.ש.ל.**

**דוגמה**

נפתור את המערכת הבאה בעזרת כלל קרמר:

$$x + 4y + 2z = 19$$

$$2x + y + 2z = 19$$

$$2x + 3y + z = 18$$

נחשב:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11$$

$|A| \neq 0$, ולכן למערכת יש פתרון יחיד, ואפשר לחשבו באמצעות הכלל שלמדנו.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 19 & 4 & 2 \\ 19 & 1 & 2 \\ 18 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 51$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 19 & 2 \\ 2 & 19 & 2 \\ 2 & 18 & 1 \end{vmatrix} = 17$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 19 \\ 2 & 1 & 19 \\ 2 & 3 & 18 \end{vmatrix} = 45$$

ומכאן:

$$x_1 = \frac{51}{11} \qquad x_2 = \frac{17}{11} \qquad x_3 = \frac{45}{11}$$

▶

**שאלה 4.6.1**

פתרו בעזרת כלל קרמר את המערכת:

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 = 10$$

**התשובה בעמוד 417**

**שאלה 4.6.2**

פתרו בעזרת כלל קרמר את המערכת:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$$

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$$

**התשובה בעמוד 418**

# 4.7 המטריצה המצורפת

בסעיף זה נפתח דרך חדשה לחישוב המטריצה ההופכית למטריצה הפיכה נתונה, תוך שימוש בכלל קרמר.

---

**טענה 4.7.1**

תהי $A$ מטריצה הפיכה, ויהיו $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ איברי הבסיס הסטנדרטי של $F^n$, רשומים כעמודות.[1]

לכל $j$, $1 \le j \le n$, נסמן ב־ $\mathbf{b}_j$ את הפתרון היחיד של המערכת $|A| = |\phi(I)| = \lambda|I| = \lambda$,[2] ותהי $B$ המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים $\mathbf{b}_j$.

אזי $B = A^{-1}$.

---

**הוכחה**

לפי מסקנה 4.5.2, מספיק להוכיח כי $AB = I$.

לשם כך, די שנוכיח כי לכל $1 \le j \le n$, העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא העמודה ה־ $j$ של $I$.

אבל העמודה ה־ $j$ של $I$ אינה אלא הוקטור:

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j \text{ מקום}$$

לכן, די לנו שנוכיח כי לכל $1 \le j \le n$, העמודה ה־ $j$ של $AB$ שווה ל־ $\mathbf{e}_j$.

העמודה ה־ $j$ של $|AB| = |A||B|$ היא המכפלה של $A$ בעמודה ה־ $j$ של $B$,[3] והעמודה ה־ $j$ של $B$ היא הוקטור $\mathbf{b}_j$, ולכן עלינו להוכיח כי $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$. אולם זה כמובן נכון, שהרי $\mathbf{b}_j$ הוא הפתרון של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$.

**מ.ש.ל.**

מצאנו, אם כן, כי למציאת העמודות של $A^{-1}$ עלינו לפתור את המערכות $= |\phi_n(I)\cdot\ldots\cdot\phi_1(I)|\cdot|B| = |A||B|$ עבור $j = 1,\ldots,n$, ופתרונותיהן יהיו העמודות של $A^{-1}$.

---

1 כלומר, $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ ,..., $\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2 לכל $1 \le j \le n$ למערכת הלינארית $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$ קיים פתרון יחיד (מדוע?).

3 ראו למה 3.4.3.

כעת נבטא את הפתרון של $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{b}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$, באמצעות כלל קרמר.

לשם נוחות הסימונים, נבחר בשלב זה **$j$ קבוע**.

לפי כלל קרמר,

$$b_{ij} = \frac{|A_i|}{|A|} \tag{1}$$

כאשר $A_i$ היא המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפת העמודה ה־$i$ של $A$ ב־$\mathbf{e}_j$. נרשום $A = [A_{ij}]$, ואז:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{שורה } j \\ \\ \\ \end{matrix}$$

כאן, בעמודה ה־$i$, רשום הוקטור $\mathbf{e}_j$.

לחישוב $|A_i|$ נפתח את הדטרמיננטה של $A_i$ לפי העמודה ה־$i$, ומאחר שכל האיברים פרט ל־$j$ בעמודה זו הם אפסים, נקבל כי:

$$|A_i| = (-1)^{j+i}\left|A^M_{ji}\right|$$

נציב את התוצאה האחרונה ב־(1) ונקבל:

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}\left|A^M_{ji}\right|}{|A|} \tag{2}$$

השוויון (2) נכון לכל $1 \le i, j \le n$, ומכאן שהמטריצה $A^{-1}$ ההופכית ל־$A$ נתונה על־ידי:[4]

$$A^{-1} = [b_{ij}]$$

---

**הגדרה 4.7.2**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$.

**המטריצה המצורפת** ל־$A$, שסימנה $\operatorname{adj} A$,[5] היא המטריצה שהאיבר ה־$(i, j)$ שלה נתון על־ידי:

$$[\operatorname{adj} A]_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A^M_{ji}\right|$$

---

4 שימו לב כי לצורך חישוב האיבר ה־$(i, j)$ של $A^{-1}$ אנו משתמשים במטריצת המינורית ה־$j,i$ של $A$.

5 adj הוא קיצור המילה האנגלית adjoint, שתרגומה המילולי הוא "צמוד". עם זאת, בחרנו בביטוי "המטריצה המצורפת", ולא "המטריצה הצמודה", משום שהמינוח האחרון ישמש אותנו בהמשך הקורס לתיאור מושג אחר.

מטענה 4.7.1 נסיק:

**מסקנה 4.7.3**

אם $A$ מטריצה הפיכה אזי:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$$

**שאלה 4.7.1**

עבור $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ המקיימת $|A| \neq 0$, חשבו את $\operatorname{adj} A$ ותארו באמצעותה את $A^{-1}$.

**התשובה בעמוד 419**

התבוננו בשוויון

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A \tag{1}$$

אשר מוכח במסקנה 4.7.3, ותקף לכל מטריצה הפיכה.

אם נציב במקום $A^{-1}$ בשוויון $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ את אגף ימין של (1), ונכפול את השוויון שהתקבל ב־ $|A|$, נקבל:

$$A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A|I \tag{2}$$

מסתבר ששוויון זה נכון עבור **כל** מטריצה, הפיכה או לא. נוכיח עתה משפט זה באופן ישיר.

**משפט 4.7.4**

לכל מטריצה ריבועית $A$ מתקיים $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A|I$.

**הוכחה**

תהיינה $A = [a_{ij}]$ , $\operatorname{adj} A = [b_{ij}]$. נסמן $C = (\operatorname{adj} A)A = [c_{ij}]$.

נוכיח ראשית כי לכל $i$ מתקיים $c_{ii} = |A|$:

האיבר $c_{ii}$ שווה למכפלת השורה ה־ $i$ של $\operatorname{adj} A$ בעמודה ה־ $i$ של $A$, כלומר:

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \left|A_{ki}^{M}\right| a_{ki} \tag{1}$$

אולם, אגף ימין של (1) אינו אלא פיתוח $|A|$ לפי העמודה ה־ $i$, ולכן $c_{ii} = |A|$, כפי שרצינו להוכיח.

נוכיח עתה שאם $i \neq j$, אז $c_{ij} = 0$:

האיבר $c_{ij}$ שווה למכפלת השורה ה־ $i$ של $\operatorname{adj} A$ בעמודה ה־ $j$ של $A$, כלומר:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (-1)^{i+k} \left|A_{ki}^M\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \left|A_{ki}^M\right| \tag{2}$$

איברי העמודה ה־ $i$ של $A$ אינם משתתפים בסכום האחרון. לכן, אילו במקום המטריצה $A$ היינו לוקחים את המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי מחיקת העמודה ה־ $i$ והצבת העמודה ה־ $j$ (של $A$) במקומה, הסכום באגף ימין של (2) לא היה משתנה. לכן, אם $D = [d_{ij}]$ היא המטריצה המתקבלת מ־ $n$ בצורה דלעיל, אז:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} d_{kj} \left|D_{ki}^M\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} d_{ki} \left|D_{ki}^M\right| \tag{3}$$

(כי $d_{ki} = d_{kj} = a_{kj}$ לכל $1 \leq k \leq n$, וכן $A_{ki}^M = D_{ki}^M$.)

אולם בשוויון הימני של (3) רשום בדיוק פיתוח הדטרמיננטה של $D$ לפי העמודה ה־ $i$, כלומר $c_{ij} = |D|$, ומכיוון שב־ $D$ יש שתי שורות שוות, נובע ש־ $|D| = 0$. לכן $c_{ij} = 0$.

קיבלנו אפוא כי:

$$(\operatorname{adj} A)A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & |A| \end{pmatrix} = |A| I$$

כעת, כדי להוכיח ש־ $A \cdot \operatorname{adj} A = |A| I$, נפעיל את התוצאה האחרונה על המטריצה $A^t$, ונקבל:

$$(\operatorname{adj} A^t) A^t = \left|A^t\right| I$$

אבל $\operatorname{adj} A^t = (\operatorname{adj} A)^t$ [6], וכן $\left|A^t\right| = |A|$, ולכן נקבל כי:

$$(\operatorname{adj} A)^t A^t = |A| I \tag{4}$$

לפי טענה 3.4.5, אגף שמאל של (4) שווה ל־ $(A \cdot \operatorname{adj} A)^t$, ולכן $(A \cdot \operatorname{adj} A)^t = |A| I$, ואם נשחלף את השוויון האחרון נקבל:

$$A \cdot \operatorname{adj} A = |A| I$$

**מ.ש.ל.**

6 הוכיחו תכונה זו בעצמכם.

# 4.8 תמורות

סעיף זה, וכן הסעיף הבא, הם בחזקת חומר רשות בקורס.

הגדרת הדטרמיננטה, כזכור, הייתה הגדרה **רקורסיבית** - לא נתנו הגדרה מפורשת לדטרמיננטה של מטריצה ריבועית כללית, אלא **מתכון** לחישובה מתוך דטרמיננטה של מטריצות מסדרים נמוכים יותר. בסעיף הבא נציג ביטוי מפורש לערכה של הדטרמיננטה - כזה שאינו תלוי בהגדרתה עבור מטריצות קטנות יותר. לצורך זה, נזדקק לכלי מתמטי חדש - **תמורה**. התמורה היא מושג מרכזי באלגברה, אך בסעיף זה נציג רק את ההגדרות והתכונות הבסיסיות הנחוצות לצורך פיתוח הדטרמיננטה.

---

**הגדרה 4.8.1 תמורה**[1]

יהי $n$ מספר טבעי. פונקציה חד־חד־ערכית ועל מהקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לעצמה נקראת **תמורה על הקבוצה** $\{1,2,\ldots,n\}$.

אוסף התמורות הללו מסומן ב־ $S_n$.

---

נסמן תמורה $\sigma \in S_n$ על־ידי $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$, כאשר $\sigma(i) = a_i$ לכל $1 \le i \le n$.

- שימו לב כי כל תמורה $\sigma \in S_n$ היא פונקציה הפיכה, והפונקציה ההופכית לה $\sigma^{-1}$ גם היא תמורה.

**דוגמה**

התמורה $\sigma \in S_5$, המקיימת $\sigma(1) = 3,\ \sigma(2) = 2,\ \sigma(3) = 4,\ \sigma(4) = 5,\ \sigma(5) = 1$, תסומן כך:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

התמורה ההפוכה לה, $\sigma^{-1}$, מקיימת:

$$\sigma^{-1}(1) = 5,\ \sigma^{-1}(2) = 2,\ \sigma^{-1}(3) = 1,\ \sigma^{-1}(4) = 3,\ \sigma^{-1}(5) = 4$$

כלומר $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. ◀

---

**הגדרה 4.8.2 היפוך (בתמורה)**

תהי $\sigma \in S_n$. אם $i < j$ אך $\sigma(i) > \sigma(j)$, נאמר כי $(\sigma(i),\sigma(j))$ הוא **היפוך** ב־ $\sigma$.[2]

---

1 תמורה - permutation.

2 שימו לב, איננו רואים היפוך, בפני עצמו, כתמורה. היפוך הוא פשוט זוג ערכים בתוך תמורה, המקיים את התנאי המופיע בהגדרה 4.8.2.

**דוגמה**

בתמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}$ ישנם בדיוק חמישה היפוכים: $(3,2),(3,1),(2,1),(4,1),(5,1)$ (ודאו!).

**הגדרה 4.8.3 זוגיות של תמורה**

תהי $\sigma\in S_n$, ויהי $k$ מספר ההיפוכים ב־$\sigma$. המספר $(-1)^k$ נקרא **הסימן של** $\sigma$, ומסומן $\operatorname{sgn}(\sigma)$.
אם $\operatorname{sgn}(\sigma)=1$ נאמר כי $\sigma$ **זוגית**, אחרת נאמר כי $\sigma$ **אי־זוגית**.

**דוגמאות**

א. התמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&4&5&1\end{pmatrix}$ מכילה חמישה היפוכים, ולכן $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^5=-1$, כלומר $\sigma$ אי־זוגית.

ב. תמורת הזהות, שאותה נסמן מעתה ב־$\varepsilon$, אינה מכילה היפוכים כלל, ולכן $\operatorname{sgn}(\varepsilon)=(-1)^0=1$, ו־$\varepsilon$ היא זוגית.

**הגדרה 4.8.4 חילוף**

תמורה $\sigma\in S_n$ המקיימת $\sigma(i)=j,\ \sigma(j)=i$ עבור איזשהו זוג $i\neq j$, וכן $\sigma(k)=k$ לכל $k\neq i,j$, נקראת **חילוף** (או **טרנספוזיציה**).

**דוגמה**

התמורה $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$ היא חילוף ב־$S_5$, שכן $\sigma(3)=5,\ \sigma(5)=3$, ו־$\sigma(1)=1,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(4)=4$.

**שאלה 4.8.1**

הוכיחו כי כל חילוף הוא תמורה אי־זוגית.

**התשובה בעמוד 420**

**הערה**

אם $\sigma$ חילוף, אז גם $\sigma^{-1}$ היא חילוף ומתקיים $\sigma^{-1}=\sigma$.

מאחר שתמורות הן פונקציות, ניתן להרכיב תמורות ב־$S_n$. ההרכבה של שתי תמורות גם היא תמורה (נמקו!).

**שאלה 4.8.2**

חשבו את הרכבת התמורות $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&4&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$ ב־$S_5$.

**התשובה בעמוד 420**

**הערה**

מעתה והלאה, נסמן את ההרכבה $\sigma_1 \circ \sigma_2$ על־ידי סימון כפל, $\sigma_1 \cdot \sigma_2$, או בקיצור $\sigma_1\sigma_2$, ונקרא להרכבת תמורות בשם **כפל תמורות**.
שימו לב, מאחר שתמורות הן, בפרט, פונקציות, כפל תמורות היא פעולה קיבוצית.

מעניין לשאול, כיצד מתנהג הסימן של כפל תמורות ביחס לסימן של כל אחת מן התמורות.

**משפט 4.8.5 כפליות הסימן**

אם $\sigma, \tau \in S_n$ תמורות, אזי $\text{sgn}(\sigma \cdot \tau) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau)$.

לפני הוכחת המשפט נציג כמה סימונים, הגדרות ולֶמָּה שישמשו ככלי עזר להוכחה.

**סימון**

נסמן $X = \{(i,j) | 1 \le i, j \le n,\ i \ne j\}$.

**הערה**

הגדרת הקבוצה $X$ תלויה במספר $n$. לאורך סעיף זה, נניח כי $n$ הוא מספר טבעי קבוע כלשהו, ולכן גם $X$ קבועה לאורך הסעיף.

**הגדרה א**

נאמר שתת־קבוצה $Y$ של $X$ היא **תקנית**, אם לכל $(i,j)$ ב־$X$, בדיוק אחד מן הזוגות $(i,j),(j,i)$ שייך ל־$Y$.

**דוגמה**

$T = \{(i,j) | 1 \le i < j \le n\}$ היא קבוצה תקנית. ◀

**שאלה 4.8.3**

נניח כי $n = 3$. אילו מהקבוצות הבאות הן תקניות?

א. $Y = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$
ב. $Y = \{(1,2),(3,1),(2,3)\}$
ג. $Y = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$
ד. $Y = \{(1,2),(2,1),(3,1),(2,3)\}$

התשובה בעמוד 420

**הגדרה ב**

א. אם $(i,j) \in X$, נסמן $s(i,j) = 1$ אם $i < j$, ו־$s(i,j) = -1$ אם $i > j$.
ב. אם $(i,j) \in X$ ו־$\sigma \in S_n$, נסמן $\sigma(i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$.

שימו לב כי:

- $\sigma(i,j) \in X$.
- לכל $\tau \in S_n$ מתקיים:

$$\sigma\tau(i,j) = (\sigma\tau(i),\sigma\tau(j)) = (\sigma(\tau(i)),\sigma(\tau(j))) = \sigma(\tau(i),\tau(j)) = \sigma(\tau(i,j))$$

---

**למה א**

אם $Y$ תת־קבוצה תקנית של $X$ ו־ $\sigma \in S_n$, אז $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\sigma(i,j)) \cdot s(i,j)\big)$.

---

**הוכחה**

תחילה נראה כי אגף ימין של השוויון אינו תלוי בבחירת $Y$:

לכל $(i,j) \in X$, או ש־ $(i,j) \in Y$, או ש־ $(j,i) \in Y$. מספיק להראות שלכל $(i,j) \in X$, $s(\sigma(i,j)) \cdot s(i,j) = s(\sigma(j,i)) \cdot s(j,i)$. שוויון זה נובע מיידית מכך ש־

$$s(i,j) = -s(j,i), s(\sigma(i,j)) = -s(\sigma(j,i))$$

מספיק, אם כן, להוכיח את הטענה עבור $Y = T$, כאשר $T = \{(i,j) | 1 \le i < j \le n\}$. זכרו שראינו ש־ $T$ היא קבוצה תקנית. במקרה זה, הביטוי $s(\sigma(i,j)) \cdot s(i,j)$ (כאשר $i < j$) מקבל את הערך $-1$ אם ורק אם $s(\sigma(i,j)) \ne s(i,j)\ (= 1)$, כלומר אם ורק אם $s(\sigma(i,j)) = -1$, כלומר אם ורק אם $\sigma(i) > \sigma(j)$, כלומר אם ורק אם $(\sigma(i),\sigma(j))$ הוא היפוך ב־ $\sigma$. לכן אגף ימין של השוויון המבוקש שווה ל־ $(-1)$ בחזקת מספר ההיפוכים ב־ $\sigma$ - וזוהי בדיוק ההגדרה של $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

**מ.ש.ל.**

**הערה**

אם $Y$ היא תת־קבוצה תקנית של $X$ ו־ $\sigma \in S_n$, אז מאחר ש־ $\sigma$ היא חד־חד־ערכית ועל, גם הקבוצה $\sigma(Y) = \{\sigma(i,j) | (i,j) \in Y\}$ היא תקנית.

**הוכחת משפט 4.8.5**

תהיינה $\sigma,\tau \in S_n$ זוג תמורות. נבחר קבוצה תקנית כלשהי $Y \subseteq X$. לפי למה א:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\sigma\tau(i,j)) \cdot s(i,j)\big) = \prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\sigma(\tau(i,j))) \cdot s(i,j)\big)$$

נשים לב ש־ $\big(s(i,j)\big)^2 = 1$ לכל $(i,j)$, לכן את הביטוי המופיע באגף ימין של השוויון נוכל לכתוב כך:

$$\prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\sigma(\tau(i,j))) \cdot s(\tau(i,j)) \cdot s(\tau(i,j)) \cdot s(i,j)\big)$$

נפריד מכפלה זו לשתי מכפלות נפרדות:

$$= \prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\sigma(\tau(i,j))) \cdot s(\tau(i,j))\big) \prod_{(i,j)\in Y} \big(s(\tau(i,j)) \cdot s(i,j)\big)$$

נסמן $Z = \tau(Y)$. אזי המכפלה השמאלית היא $\prod_{(i,j)\in Z} \left(s(\sigma(i,j)) \cdot s(i,j)\right)$. על פי ההערה שלפני ההוכחה, $Z = \tau(Y)$ היא קבוצה תקנית, לכן על פי למה א, המכפלה השמאלית שווה ל־ $\operatorname{sgn}(\sigma)$. גם המכפלה הימנית, $n \times n$, שווה על פי למה א ל־ $\operatorname{sgn}(\tau)$. קיבלנו אפוא:

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

**מ.ש.ל.**

---

**למה 4.8.6**

תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהיו $1 \le i, j \le n$ אינדקסים שונים. נגדיר תמורה, $\sigma' \in S_n$, באופן הבא:

$$\sigma'(k) = \begin{cases} \sigma(j) & : k = i \\ \sigma(i) & : k = j \\ \sigma(k) & : k \neq i, j \end{cases}$$

אזי $\sigma'$ מתקבלת על־ידי כפל מימין של $\sigma$ בחילוף.

---

**הוכחה**

תהי $\tau \in S_n$ התמורה המחליפה בין $i$ ו־ $j$. ודאו כי $\sigma' = \sigma \cdot \tau$.

**מ.ש.ל.**

---

**למה 4.8.7**

ניתן להציג כל תמורה $\sigma \in S_n$ כמכפלה של חילופים,[3] ואם מספר החילופים בהצגה כזאת הוא $k$, אז $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

---

**הוכחה**

נוכיח באינדוקציה על $n$ שכל תמורה ב־ $S_n$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים.

עבור $n = 1$, התמורה היחידה ב־ $S_1$ היא תמורת הזהות, ואותה אנו רואים כמכפלה של אפס חילופים.

יהי $n \ge 2$, ונניח שכל תמורה ב־ $S_{n-1}$ ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים. תהי $\sigma \in S_n$.

אם $\sigma(n) < n$, אז קיים אינדקס $j < n$ כך ש־ $\sigma(j) = n$. נסמן $i = n$. נגדיר תמורה $\sigma'$ כמו בלמה 4.8.6. אזי $\sigma'$ מתקבלת מ־ $\sigma$ על־ידי מכפלה בחילוף ומקיימת $\sigma'(n) = n$. שימו לב שבמקרה זה גם $\sigma$ מתקבלת מ־ $\sigma'$ על־ידי מכפלה באותו החילוף, לאור ההערה שלאחר שאלה 4.8.1.

---

3 את תמורת הזהות נראה גם כמכפלה של אפס חילופים.

ישנן, אם כן, שתי אפשרויות. או ש־ $\sigma(n) = n$, או ש־ $\sigma$ מתקבלת על־ידי כפל בחילוף מהתמורה $\sigma'$ המקיימת $\sigma'(n) = n$. לאור זאת נוכל, במידת הצורך, להחליף את $\sigma$ ב־ $\sigma'$, כדי להניח בלא הגבלת הכלליות ש־ $\sigma(n) = n$.

כעת נוכל לראות את $\sigma$ כתמורה $\tau$ ב־ $S_{n-1}$, על־ידי צמצום. כלומר, $\tau(k) = \sigma(k)$ לכל $1 \le k \le n-1$. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן לכתוב את $\tau$ כמכפלה של חילופים. אך מכך קיבלנו הצגה של $\sigma$ כמכפלה של אותם החילופים. בזאת הושלמה האינדוקציה.

אם $\sigma$ היא מכפלה של $k$ חילופים, אזי לפי שאלה 4.8.1 ומשפט 4.8.5 נקבל כי $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

**מ.ש.ל.**

**שאלה 4.8.4**

הראו כי מספר החילופים בהצגת תמורה כמכפלה של חילופים אינו יחיד.

כלומר, מצאו דוגמה לתמורה $\sigma \in S_n$ ושתי הצגות שונות שלה כמכפלה של חילופים, כך שבכל הצגה מספר שונה של חילופים.

**התשובה בעמוד 420**

מלמה 4.8.7 נובע כי למספר החילופים בהצגות שונות של אותה התמורה חייבת להיות אותה הזוגיות. כמו כן, נקבל את המסקנה הבאה:

**מסקנה 4.8.8**

לכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

**הוכחה**

נרשום $\sigma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_k$, כאשר $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ הם חילופים.

אזי $\sigma^{-1} = \sigma_k^{-1} \cdot \ldots \cdot \sigma_1^{-1}$ (זכרו כי כפל תמורות הוא למעשה הרכבת פונקציות). לכן, לפי למה 4.8.7, נקבל $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (-1)^k = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

**מ.ש.ל.**

בזאת סיימנו לבסס את התכונות היסודיות של תמורות וכפל תמורות שלהן אנו נזקקים. בסעיף הבא נשתמש בתמורות כדי לתת הגדרה מפורשת, לא־רקורסיבית, למושג הדטרמיננטה. עם זאת, נעיר שחקר תמורות בפני עצמו הוא בעל חשיבות רבה באלגברה, ותוכלו ללמוד על כך בהרחבה במסגרת הקורס "מבנים אלגבריים".

# 4.9 הדטרמיננטה כפונקציית נפח

בסעיף 4.1 הגדרנו את מושג הדטרמיננטה. לכל מטריצה ריבועית מעל שדה $F$, התאמנו סקלר ב־$F$ הנקרא הדטרמיננטה של המטריצה, ולמדנו לחשב סקלר זה באמצעות פיתוח לפי שורות/עמודות. כמו כן, למדנו תכונה מרשימה ושימושית של הדטרמיננטה - ערכה שונה מאפס אם ורק אם המטריצה הפיכה. כמה שאלות מתעוררות באופן טבעי:

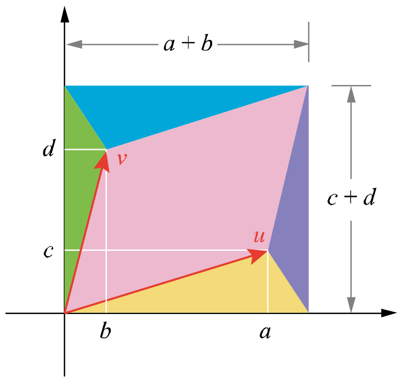
1. מדוע הגבלנו את עצמנו מלכתחילה למטריצות ריבועיות?
2. האם ניתן להגדיר את הדטרמיננטה באופן שאיננו "חישובי", על־ידי נוסחה "סגורה"?
3. האם ניתן לייחס משמעות גיאומטרית למושג זה?

בסעיף זה ננסה לענות על שאלות אלה.

כדי לרכוש אינטואיציה, נפתח בדיון בלתי פורמלי במשמעות הדטרמיננטה של מטריצה ממשית מסדר $2 \times 2$.

**דוגמה א**

תהי $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ מטריצה מסדר $2 \times 2$ עם מקדמים ממשיים. נסתכל על שורות המטריצה כזוג וקטורים $v = [b \quad d]$, $u = [a \quad c]$, ונתבונן במקבילית הנפרשת על־ידי הווקטורים הללו. לצורך האיור, נניח כי רכיבי שני הווקטורים חיוביים (ולכן שני הווקטורים מתוארים ברביע הראשון), וכי הווקטור $u$ מופיע "לימינו" של הווקטור $v$.




נחשב את שטח המקבילית הצבועה בוורוד. שטח המשולש הצהוב באיור, שבסיסו באורך $a+b$ וגובהו $X$, הוא $(a+b)c/2$. זהו גם שטח המשולש הכחול, החופף לו. באופן דומה, שטח המשולשים הירוק והסגול הוא $(c+d)b/2$. את שטח המקבילית נקבל על־ידי הפחתת שטחם של ארבעת המשולשים משטחו של המלבן המופיע באיור. השטח המתקבל הוא:

$$(a+b)(c+d)-2\frac{(a+b)c}{2}-2\frac{(c+d)b}{2}=ac+bc+ad+bd-ac-bc-bc-bd$$
$$=ad-bc$$

כלומר, קיבלנו כי שטח המקבילית שווה לדטרמיננטה של המטריצה $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. ◄

שימו לב כי אם אחד מהוקטורים $u,v$ מתאפס, אזי המקבילית הנוצרת על־ידי הוקטורים מוכלת כולה בישר, ולכן שטחה אפס. באופן אינטואיטיבי נוכל לומר, כי צורה חד־ממדית במרחב דו־ממדי היא בעלת שטח אפס. הבחנה זו מתאימה לתכונה המוכרת, כי הדטרמיננטה של מטריצה שאחת משורותיה היא וקטור האפס היא אפס.

מתוך דוגמה א ניתן להתפתות ולהסיק כי שטח מקבילית הנוצרת על־ידי זוג וקטורים במישור שווה לדטרמיננטת המטריצה ששורותיה הן זוג הוקטורים. אך יש להיזהר. מה יקרה אם נחליף את סדר השורות? כלומר, אם נתבונן במטריצה $\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}$ במקום במטריצה $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$? שטח המקבילית, כמובן, לא ישתנה, אך הדטרמיננטה תחליף את סימנה. נשנה, אם כן, את מסקנתנו:

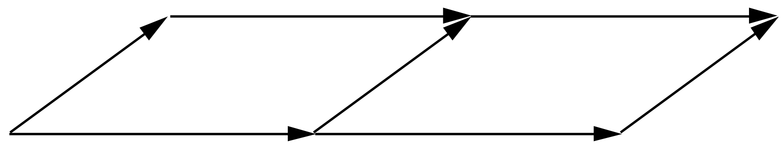
**הדטרמיננטה של מטריצה מסדר $2\times 2$ מודדת את שטח המקבילית הנפרשת על־ידי שורות המטריצה "עד כדי סימן". כלומר, הדטרמיננטה היא "שטח מכוון", וערכה המוחלט שווה לשטח המקבילית.**

שימו לב כי זוהי מסקנה בלתי־פורמלית - לא הגדרנו מהו "שטח מכוון", ואף לא הוכחנו באופן מדויק את טענתנו על אודות ערכה המוחלט של הדטרמיננטה. ביסוס פורמלי של המסקנה והוכחתה ינבע מתוך הדיון הכללי בהמשך הסעיף, אך בכל זאת נרשה לעצמנו להסתמך על המסקנה כמוטיבציה.

"כיווניות" הדטרמיננטה עשויה להיראות, במבט ראשון, כפגם אסתטי, אך למעשה, בזכות תכונה זו, מהווה הדטרמיננטה אמצעי גמיש יותר לחישוב שטחים, בהיותה פונקציה "מולטי־לינארית" (הסבר על מינוח זה יגיע מיד), כפי שממחישה הדוגמה הבאה:

**דוגמה ב**

תהי $A=\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ מטריצה מסדר $2\times 2$ עם מקדמים ממשיים. נסמן ב־ $D=ad-bc$ את הדטרמיננטה של $Y=\{(1,2),(2,1),(3,1),(2,3)\}$, ולשם פשטות, נניח כי הדטרמיננטה חיובית. נסמן ב־ $B=\begin{bmatrix} 2a & 2c \\ b & d \end{bmatrix}$ את המטריצה המתקבלת על־ידי כפל השורה הראשונה של $A$ ב־ 2. אזי הדטרמיננטה של $B$ היא $2ad-2bc=2D$. הפירוש הגיאומטרי לעובדה זו ברור - אם נכפול את אחת מצלעות הבסיס של מקבילית פי שניים, נקבל מקבילית גדולה יותר, שאותה נוכל לראות כאיחוד של שני עותקים של המקבילית המקורית:



מהאיור ברור, כי שטחה של המקבילית החדשה יהיה כפול משטח המקבילית המקורית. עובדה זו תואמת את האינטואיציה הטבעית שלנו, שלפיה איחוד צורות זרות במישור הוא בעל שטח השווה לסכום השטחים המקוריים. לאור אינטואיציה זו, ולאור הדוגמה דלעיל, נוכל לצפות להכללה הבאה: אם $A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & c_2 \\ b & d \end{bmatrix}$ , $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b & d \end{bmatrix}$, אזי שטח המקבילית הנוצרת על־ידי שורות המטריצה $A = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b & d \end{bmatrix}$ יהיה שווה לסכום שטחי המקביליות הנוצרות על־ידי שורות $A_1$ ו־ $A_2$.

אך כאן עלינו להיזהר משטחים חופפים. נניח, למשל, כי $a_2 = -a_1,\ c_2 = -c_1$. במקרה זה, השורה הראשונה של המטריצה $A$ היא $0$, שטח המקבילית המתאימה הוא $0$, ולכן אנו רואים כי השטח אינו בהכרח סכום השטחים. לעומת זאת, אם בכל האמור לעיל היינו משתמשים בדטרמיננטה במקום בשטח, לא הייתה מתעוררת בעיה זו, שהרי $\det A = \det A_1 + \det A_2$ (משפט 4.3.4). יתר על כן, ראינו כי אם $s,t$ הם זוג סקלרים ממשיים, ואם $A = \begin{bmatrix} sa_1 + ta_2 & sc_1 + tc_2 \\ b & d \end{bmatrix}$ (כלומר, השורה הראשונה של $A$ היא הצירוף הלינארי של השורות הראשונה של $A_1$ ו־ $A_2$, עם המקדמים $s,t$), אזי ממשפטים 4.3.3 ו־4.3.4 נסיק כי $\det A = s\det A_1 + t\det A_2$. תכונה זו "תופסת" את האינטואיציה הטבעית שלנו על אודות "לינאריות" הנפח/השטח (היזכרו בהגדרה 3.10.7).

**הערה**

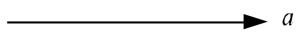
האמור לעיל פירושו כי הדטרמיננטה היא פונקציה לינארית בשורה הראשונה של המטריצה שאותה היא מקבלת. כלומר, אם **נקבע** את השורה **השנייה**, ונראה את הדטרמיננטה כפונקציה של השורה הראשונה של המטריצה, אזי תתקבל העתקה לינארית. כמובן, כל האמור נכון גם אם נחליף בין השורה הראשונה והשנייה (כלומר נקבע את השורה הראשונה, ונראה את הדטרמיננטה כפונקציה של השורה השנייה). לכן נהוג לקרוא לתכונה זו **מולטי־לינאריות**.

**הערה ליודעי חשבון אינפיניטסימלי**

מושג האינטגרל, כפי שפותח בקורס חשבון אינפיניטסימלי 2, משמש לחישוב השטח הכלוא בין הגרף של פונקציה לבין ציר ה־ $x$. גם שם ראיתם כי ייתכן שהאינטגרל שלילי, ובמקרה כזה השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר $x$ הוגדר (עבור פונקציה $f(x)$ שהיא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$) **כערכו המוחלט** של האינטגרל $\int_a^b f(x)dx$. כלומר, האינטגרל מהווה גם הוא "שטח מכוון". האינטגרל, בדומה לדטרמיננטה, הוא בעל תכונת "לינאריות" - עבור פונקציות אינטגרביליות $f(x),\ g(x)$ בקטע $[a,b]$, מתקיים $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. אם היינו מחליפים את האינטגרל בערכו המוחלט, לא היה מתקיים שוויון נאה ושימושי זה.

**דוגמה ג**

ראינו כי דטרמיננטה של מטריצה ממשית מסדר $2\times 2$ מודדת שטח "מכוון" של מקבילית במישור. כעת נתחקה אחר משמעות הדטרמיננטה של מטריצות ריבועיות ממשיות מסדרים אחרים. הדוגמה הפשוטה ביותר היא מטריצה $[a]$ מסדר $1\times 1$. במקרה זה, המטריצה מכילה מספר בודד. נוכל לחשוב על מספר זה כעל וקטור ב־$\mathbb{R}^1$ באורך $|a|$ (כאן הכוונה לערך מוחלט, לא לדטרמיננטה), היוצא מהראשית (בכיוון ימין אם $a$ חיובי, ובכיוון שמאל אם $a$ שלילי):



הדטרמיננטה של המטריצה שווה לערכו של הסקלר $a$, ולכן ערכה המוחלט של הדטרמיננטה שווה לאורכו של הווקטור. ◀

אם כן, עבור מטריצות מסדר $1\times 1$, מודדת הדטרמיננטה אורך (עד כדי סימן). עבור מטריצות מסדר $2\times 2$ מודדת הדטרמיננטה שטח. וודאי תנחשו כי עבור מטריצות מסדר $3\times 3$ מודדת הדטרמיננטה נפח (שוב, עד כדי סימן). ניתן להוכיח זאת באופן גיאומטרי, באופן אנלוגי לחישוב שהצגנו בדוגמה א. לא נביא הוכחה זאת כאן, אך נציין כי תוצאה זו תנבע ממילא מהפיתוח הכללי שנביא בהמשך הסעיף.

לאור הדוגמאות שראינו בסעיף זה, נוכל להתפתות ולנחש כי הדטרמיננטה של מטריצה מסדר $n\times n$ מודדת את הנפח ה־"$n$־ממדי" של מקבילון במרחב $F^n$. אך לטענה זו אין משמעות בשלב זה, מאחר שהגיאומטריה האוקלידית (במישור ובמרחב) נותנת בידינו הגדרה לשטחם של מצולעים במישור ולנפחם של מצולעים במרחב התלת־ממדי בלבד, ובוודאי שאין משמעות לנפח כאשר אנו עובדים מעל שדה שאינו שדה המספרים הממשיים. כדי להתגבר על כך, יהיה עלינו להגדיר באופן מדויק את מושג הנפח (ה"מכוון") של מקבילון במרחב. אנו נראה כי הדרך **היחידה** לעשות זאת היא להגדיר את נפחו של מקבילון כזה באמצעות מושג הדטרמיננטה עצמו. נסביר את כוונתנו: אנו מעוניינים להגדיר מושג של "נפח מכוון" עבור "מקבילונים". כלומר, ברצוננו להגדיר פונקציה $V$, המקבלת כקלט מטריצה ששורותיה $a_1,a_2,\ldots,a_n$ הם $n$ וקטורים, ומחזירה כפלט סקלר $V(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ המציין את ה"נפח המכוון" של ה"מקבילון" הנוצר על־ידי שורות המטריצה. בטרם נגדיר פונקציה זו, נברר לעצמנו כמה תכונות שנצפה כי הפונקציה $V$ תקיים אותן.. את המטריצה נסמן ב־$[a_1,a_2,\ldots,a_n]$ (שימו לב, כאן כל $a_i$ הוא וקטור שורה; יכולנו כמובן לעבוד עם וקטורי עמודה, אך בהמשך נראה ששתי הגישות שקולות לחלוטין).

**תכונה א:** $V=([a_1,a_2,\ldots,a_n])=0$ אם $a_i=a_j$ עבור $i\neq j$ כלשהם.

**הסבר**

בדוגמה א דלעיל, ראינו כי שטח מקבילית שאחת מצלעותיה היא וקטור האפס הוא אפס, מאחר שמקבילית כזאת היא אובייקט "חד־ממדי" בתוך מרחב דו־ממדי. אם $a_i=a_j$ עבור $i\neq j$ כלשהם, אזי המקבילון הנפרש על־ידי הווקטורים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ מוכל במרחב הנפרש על־ידי $n-1$ וקטורים במרחב $F^n$, ולכן נצפה כי הנפח ה־"$n$־ממדי" של מקבילון כזה יהיה $0$.

**תכונה ב:** לכל זוג סקלרים $s,t$ מתקיים השוויון:

$$V(\left[a_1,a_2,\dots,a_{i-1},sa_i+t\hat{a}_i,a_{i+1},\dots,a_n\right])$$
$$=sV(\left[a_1,a_2,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n\right])+tV(\left[a_1,a_2,\dots,a_{i-1},\hat{a}_i,a_{i+1},\dots,a_n\right])$$

**הסבר**

כפי שראינו בדוגמה ב, אנו מצפים כי $V$ תהיה פונקציה "חיבורית" בכל אחת מן השורות, כדי לבטא את האינטואיציה שלנו שלפיה נפח גוף המתקבל מאיחוד גופים (זרים) שווה לסכום הנפחים. כמו כן אנו מצפים שאם נכפול את אחת השורות בסקלר, תוכפל הדטרמיננטה בסקלר המתאים – שכן למעשה אנו מסתכלים על אותו גוף, אלא ששינינו את קנה־המידה בהתאם לסקלר הזה.[1] במילים אחרות, אנו מצפים שהפונקציה $V$ תהיה לינארית (הגדרה 3.10.7) בכל אחת מן השורות, או כפי שנאמר מעתה – מולטי־לינארית. על פי שאלה 3.10.6, זהו בדיוק התנאי דלעיל.

**תכונה ג:** אם $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי, אזי $V([\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n])=1$.

**הסבר**

שטח הריבוע במישור, הנפרש על־ידי וקטורי הבסיס הסטנדרטי, הוא $1$, ונפח הקובייה במרחב התלת־ממדי, הנפרשת על־ידי וקטורי הבסיס הסטנדרטי, גם הוא $1$. אנו נדרוש כי תכונת "נירמול" זו תתקיים גם עבור גופים מממד גדול יותר. בשלב זה ייתכן שתתהו מדוע דווקא $1$ ולא $-1$, שהרי אנו מגדירים נפח "עד כדי סימן"; בחירתנו ב־$1$ היא אכן שרירותית. כלומר, יכולנו לדרוש כי נפח "מקבילון היחידה" יהיה $-1$. דרישה שכזאת הייתה משנה בהמשך את הגדרת הפונקציה $V$, ומובילה להגדרת הפונקציה $-V$ במקומה (וברור כי אין הבדל מהותי בין שתי הפונקציות – הבחירה עם מי מהן לעבוד היא שרירותית).

שימו לב כי כל שלוש התכונות לעיל אינן תלויות בכך שאנו עובדים עם סקלרים ממשיים. למעשה, נוכל לעבוד מעל כל שדה $F$. ואכן, ההגדרה שניתן בהמשך לא תהיה תלויה בשדה. עבור שדות כלליים, לא נוכל לתאר איורים כפי שעשינו בסעיף הקודם (אפילו לא בממד נמוך), אך בכל זאת נוכל לפתח עבורם את מושג הנפח. כלומר, אנו יוצקים משמעות גיאומטרית של "נפח מקבילון" במרחב $F^n$, באופן שאינו תלוי באופיו של $F$. "נפח" זה יהיה סקלר ב־$F$.

**הגדרה 4.9.1 פונקציית נפח**

אם $V$ היא פונקציה מ־$M_n(F)$ לשדה $F$, ומקיימת את התכונות:

א. $V=([a_1,a_2,\dots,a_n])=0$ אם $a_i=a_j$ עבור $i\neq j$ כלשהם.

ב. לכל זוג סקלרים $s,t$ ולכל $i$ מתקיים השוויון:

$$V([a_1,a_2,\dots,a_{i-1},sa_i+t\hat{a}_i,a_{i+1},\dots,a_n])$$
$$=sV([a_1,a_2,\dots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\dots,a_n])+tV([a_1,a_2,\dots,a_{i-1},\hat{a}_i,a_{i+1},\dots,a_n])$$

1 מכאן גם מקור השם "סקלר" באלגברה לינארית – כפל בסקלר פירושו הגיאומטרי הוא שינוי הסקאלה (scale) – שינוי קנה־המידה.

ג. אם $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $F^n$, אזי $V([\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n])=1$.

נאמר כי $V$ היא **פונקציית נפח** ב־ $F^n$.

---

בהמשך נוכיח כי לכל שדה $F$ ומספר טבעי $n$, קיימת פונקציית נפח אחת ויחידה ב־ $F^n$. לפני שניגש למלאכה זו, נוכיח תכונה נוספת של פונקציות נפח, הנובעות מהתכונות א, ב.

---

**טענה 4.9.2**

פונקציית נפח $V$ היא פונקציה **מתחלפת**, במובן הבא:

אם מטריצה $B$ מתקבלת ממטריצה $A$ על־ידי החלפת שתי שורות של $A$ זו בזו, אז $V(B)=-V(A)$.

---

**הוכחה**

נקבע $n-2$ וקטורי שורה $a_1,a_2,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_{j-1},a_{j+1},\ldots,a_n$ ב־ $F^n$.

נסמן ב־ $V':F^n\times F^n\to F$ את הפונקציה המוגדרת על־ידי:

$$V'(a_i,a_j)=V(\left[a_1,a_2,\ldots,a_n\right])$$

עלינו להראות כי $V'(a_i,a_j)=-V'(a_j,a_i)$.

אכן, משילוב תכונות א ו־ב נקבל:

$$V'(a_i,a_j)=V'(a_i,a_i)+V'(a_i,a_j)=V'(a_i,a_i+a_j)=V'(a_i,a_i+a_j)-V'(a_i+a_j,a_i+a_j)$$

$$=V'(-a_j,a_i+a_j)=-V'(a_j,a_i+a_j)=-V'(a_j,a_i)-V'(a_j,a_j)=-V'(a_j,a_i)$$

**מ.ש.ל.**

נקבע שדה $F$ ומספר טבעי $n$, ונניח כי $V$ היא פונקציית נפח ב־ $F^n$. הארגומנט של פונקציה זו היא מטריצה ששורותיה הם וקטורים $a_1,a_2,\ldots,a_n$ ב־ $F^n$, ונוכל לבטא כל אחד מהם כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס הסטנדרטי. לכל $1\le j\le n$ נרשום:

$$a_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}\mathbf{e}_i$$

מתכונה ב של פונקציית הנפח נקבל כי:

$$V([a_1,\ldots,a_n])=V\left(\left[\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}\mathbf{e}_i,a_2,\ldots,a_n\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}\left(\left[\mathbf{e}_i,a_2,\ldots,a_n\right]\right)$$

קיבלנו ביטוי של $V([a_1,\ldots,a_n])$ כסכום של $n$ מחוברים. כעת נביע את $a_2$ כצירוף לינארי של איברי הבסיס הסטנדרטי, נציב ביטוי זה בנוסחה לעיל, ונקבל ביטוי חדש ל־ $V([a_1,\ldots,a_n])$ הכולל $n^2$ מחוברים. נחזור על תהליך זה עבור כל אחד מהוקטורים $a_1,a_2,\ldots,a_n$, ונקבל כי

$$V([a_1,\ldots,a_n])=\sum_{\sigma}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}V\left(\left[\mathbf{e}_{\sigma(1)},\mathbf{e}_{\sigma(2)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(n)}\right]\right)$$

כאשר הסכימה היא על פני כל הפונקציות $\sigma$ מהקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לעצמה. שימו לב כי אם $\sigma$ אינה תמורה, כלומר אינה חד־חד־ערכית ועל, אזי $V\left(\left[\mathbf{e}_{\sigma(1)},\mathbf{e}_{\sigma(2)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(n)}\right]\right)$ מתאפס, לפי תכונה א של פונקציית הנפח. לכן מספיק לסכום על פני הפונקציות $\sigma$ שהינן תמורות. כמו כן, על פי למה 4.8.10, כל תמורה ניתנת להצגה כמכפלה של חילופים, ואם מספרם הוא $k$ אז סימן התמורה הוא $(-1)^k$. לפי טענה 4.9.2, חילוף בודד של שניים משורות הארגומנט של $V$ הופך את סימן הפונקציה. לכן, אם נבצע $k$ חילופים, ערך הפונקציה יוכפל ב־ $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$. לכן

$$V\left(\left[\mathbf{e}_{\sigma(1)},\mathbf{e}_{\sigma(2)},\ldots,\mathbf{e}_{\sigma(n)}\right]\right) = \operatorname{sgn}(\sigma)V\left(\left[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\right]\right) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot 1 = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

(בשוויון שלפני האחרון השתמשנו בתכונה ג של פונקציית הנפח).

מכאן נקבל:

---

**מסקנה 4.9.3**

אם קיימת פונקציית נפח $V$ ב־ $F^n$, אזי היא נתונה על־ידי הנוסחה:

$$V([a_1,\ldots,a_n]) = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n} \qquad (*)$$

בפרט, פונקציית נפח ב־ $F^n$ נקבעת באופן יחיד.

---

**הערה**

אם $\sigma$ היא תמורה ב־ $S_n$, אזי הרכיבים $a_{\sigma(1),1},\ldots,a_{\sigma(n),n}$ של מטריצה $[a_{ij}]_{n\times n}$, כוללים בדיוק איבר אחד מכל שורה ומכל עמודה. אוסף רכיבים כזה במטריצה מכונה **אלכסון מוכלל**. למשל, אוסף הרכיבים $a_{1,1},\ldots,a_{n,n}$ המתאים לתמורת הזהות, מתאר את האלכסון הראשי המוכר לכם. באיור הבא מתואר האלכסון המוכלל המתאים לתמורה $\sigma = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13}\\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}}\end{bmatrix}$$

כדי לחשב את ערכו של הביטוי המופיע בנוסחה (*), יש אם כן לעבור על כל האלכסונים המוכללים במטריצה הנתונה ולכפול את רכיביהם. את המכפלות שהתקבלו יש לחבר או לחסר, בהתאם לסימן התמורות המתאימות לאלכסונים הללו.

**שאלה 4.9.1**

עבור $n = 2,3$, כתבו את הנוסחה (*), ללא שימוש בסימן הסכימה (שימו לב לאינדקסים).

**התשובה בעמוד 420**

**שאלה 4.9.2**

הוכיחו כי הביטוי המופיע באגף ימין של (*) שווה לביטוי:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

**התשובה בעמוד 420**

באמצעות השאלה הקודמת נוכל להוכיח תכונה שימושית נוספת של פונקציות נפח.

**למה 4.9.4**

פונקציית נפח $V_n$ ב־ $F^n$ מקיימת $V_n(A) = V_n(A^t)$ לכל מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$.

**הוכחה**

על פי טענה 4.9.4, פונקציית נפח (אם קיימת) $V_n$ ב־ $F^n$ נתונה על־ידי:

$$V_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),\mathrm{n}}$$

לפי שאלה 4.9.2 מתקיים גם:

$$V_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

תהי $B = A^t$. הרכיב ה־$(i,j)$ של $B$ הוא $a_{ji}$, ולכן:

$$V_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1),1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n),n}$$

אך הביטוי באגף ימין שווה ל־ $V_n(B)$, לפי אותו הטיעון שהפעלנו עבור $V_n(A)$. מכאן נסיק ש־

$$V_n(A) = V_n(B) = V_n(A^t)$$

**מ.ש.ל.**

שימו לב שעדיין לא הוכחנו כי הפונקציה הנתונה במסקנה 4.9.3 היא פונקציית נפח. כל שהראינו הוא כי אם קיימת פונקציה כזאת, אז היא יחידה, ונתונה על־ידי הנוסחה (*). כעת נוכיח את קיום פונקציית הנפח.

**טענה 4.9.5**

לכל $n$ טבעי קיימת פונקציית נפח יחידה $V_n$ ב־ $F^n$. יתר על כן, אם $n \geq 2$ אז לכל $1 \leq i \leq n$, מתקיים:

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

**הוכחה**

את יחידות פונקציית הנפח כבר ראינו במסקנה 4.9.3. נשלים את הוכחת הטענה באינדוקציה על $n$.

עבור $n=1$, פונקציית הזהות היא בבירור פונקציית נפח.

יהי $n \geq 2$, ונניח כי מצאנו פונקציית נפח $V_{n-1}$ ב־$F^{n-1}$. נבחר שרירותית $1 \leq i \leq n$, ונגדיר פונקציה $V_n$ על פי הכלל הנתון לעיל, כלומר:

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

נראה שהפונקציה $V_n$ היא פונקציית נפח. זוהי הוכחה מורכבת, בעלת כמה חלקים.

**טענה א:** אם מטריצה $B$ מתקבלת ממטריצה $A$ על־ידי החלפת שתי שורות סמוכות $A$, נניח השורות ה־ $k,k+1$, אז $V_n(B) = -V_n(A)$.

לפי הנחת האינדוקציה, הפונקציה $V_{n-1}$ היא פונקציית נפח, ולכן היא פונקציה מתחלפת, לפי טענה 4.9.2.

יהי $1 \leq j \leq n$ אינדקס השונה מ־ $k,k+1$. אזי המטריצות המינוריות $A_{ji}^M, B_{ji}^M$ גם הן נבדלות זו מזו על־ידי החלפת שתי שורות סמוכות. מאחר ש־ $V_{n-1}$ מתחלפת, מתקיים $V_{n-1}(A_{ji}^M) = -V_{n-1}(B_{ji}^M)$. כמו כן, שימו לב ש־ $[B]_{ji} = [A]_{ji}$. לכן:

$$(-1)^{i+j} [B]_{ji} V_{n-1}(B_{ji}^M) = -(-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

מאחר ש־ $B$ התקבלה מ־$A$ על־ידי החלפת השורות ה־ $k,k+1$, המטריצה המינורית $B_{ki}^M$ שווה למטריצה המינורית $A_{k+1,i}^M$, ומתקיים $[B]_{k,i} = [A]_{k+1,i}$. לכן:

$$\begin{aligned}(-1)^{i+k} [B]_{k,i} V_{n-1}(B_{k,i}^M) &= (-1)^{i+k} [A]_{k+1,i} V_{n-1}(A_{k+1,i}^M) \\ &= -(-1)^{i+k+1} [A]_{k+1,i} V_{n-1}(A_{k+1,i}^M)\end{aligned}$$

באופן דומה:

$$(-1)^{i+k+1} [B]_{k+1,i} V_{n-1}(B_{k+1,i}^M) = -(-1)^{i+k} [A]_{k,i} V_{n-1}(A_{k,i}^M)$$

שלושת השוויונות שהצגנו מראים שבביטוי

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

מופיעים בדיוק אותם המחוברים שבביטוי

$$V_n(B) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [B]_{ji} V_{n-1}(B_{ji}^M)$$

אחרי **החלפת סימן** (והחלפת סדר המחוברים ה־ $k,k+1$). לכן $V_n(B) = -V_n(A)$.

**טענה ב:** $V_n$ מקיימת את תכונה א בהגדרת פונקציית הנפח.

נניח שבמטריצה $A$ יש שתי שורות שוות. עלינו להראות ש־ $V_n(A) = 0$. על־ידי החלפת מספר שורות סמוכות, נוכל להניח שהשורות השוות סמוכות זו לזו: לפי טענה א, בכל צעד חילוף שכזה, משתנה רק סימנו של $V_n(A)$.

נניח, אם כן, כי השורה ה־ $A$ של $A$ שווה לשורה ה־ $k+1$.

נתבונן באינדקס $j$, כאשר $j \neq k, k+1$. אז למטריצה המינורית $A_{ji}^M$ יש שתי שורות (סמוכות) זהות, לכן לפי הנחת האינדוקציה $V_{n-1}(A_{ji}^M) = 0$.

לכן, בביטוי $V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$ כל המחוברים מתאפסים פרט לשני המחוברים המתאימים לשורות ה־ $k, k+1$, ולכן:

$$V_n(A) = (-1)^{i+k} [A]_{k,i} V_{n-1}(A_{ki}^M) + (-1)^{i+k+1} [A]_{k+1,i} V_{n-1}(A_{k+1,i}^M)$$
$$= (-1)^{i+k} \left( [A]_{k,i} V_{n-1}(A_{ki}^M) - [A]_{k+1,i} V_{n-1}(A_{k+1,i}^M) \right)$$

המטריצות המינוריות $A_{ki}^M, A_{k+1,i}^M$ שוות מאחר שהשורות ה־ $k, k+1$ שוות, ומאותו נימוק מתקיים $[A]_{k,i} = [A]_{k+1,i}$. מכאן נסיק ש־ $V_n(A) = (-1)^{i+k} \cdot 0 = 0$.

**טענה ג:** הפונקציה $V_n$ היא מולטי־לינארית.

עלינו להראות ש־ $V_n$ לינארית בכל אחת מן השורות. נקבע $1 \leq k \leq n$, ונקבע $n-1$ וקטורי שורה $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n \in F^n$. לכל וקטור $v \in F^n$, תהי $A(v)$ המטריצה ששורותיה הן $a_1, \ldots, a_{k-1}, v, a_{k+1}, \ldots, a_n \in F^n$, בסדר זה. עלינו להראות כי ההעתקה $D : F^n \to F$, המוגדרת על־ידי $D(v) = V_n\left(A(v)\right)$, היא העתקה לינארית. כלומר, עלינו להראות (ראו סעיף 3.10) כי ההעתקה שומרת על החיבור ועל הכפל בסקלר.

נראה כי ההעתקה שומרת על החיבור. הבדיקה עבור הכפל בסקלר מתבצעת באופן דומה.

עלינו להראות, אם כן, כי $D(v+w) = D(v) + D(w)$ לכל זוג וקטורים $v, w$.

כדי לחשב את ערכו של הביטוי

$$D(v+w) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A(v+w)]_{ji} V_{n-1}(A(v+w)_{ji}^M)$$

נפריד בין שני מקרים הנוגעים לערכו של האינדקס $j$.

**מקרה ראשון:** $j \neq k$

במקרה זה מתקיים:

$$[A(v+w)]_{ji} = [A(v)]_{ji} = [A(w)]_{ji} = a_{ji}$$

(כי השורה ה־ $j$ אינה תלויה ב־ $v$ וב־ $w$.)

כמו כן, לפי הנחת האינדוקציה, $V_{n-1}$ מולטי־לינארית, לכן:

$$V_{n-1}(A(v+w)_{ji}^{M}) = V_{n-1}(A(v)_{ji}^{M}) + V_{n-1}(A(w)_{ji}^{M})$$

**מקרה שני:** $j = k$

במקרה זה מתקיים:

$$A(v+w)_{ji}^{M} = A(v)_{ji}^{M} = A(w)_{ji}^{M}$$

(מכיוון שהשורה ה־ $k$ נמחקת במטריצות המינוריות האלה.) כמו כן, ברור כי:

$$[A(v+w)]_{ji} = [v+w]_i = [v]_i + [w]_i = [A(v)]_{ji} + [A(w)]_{ji}$$

משילוב השוויונות שאספנו בשני המקרים, נקבל:

$$D(v+w) = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \left(V_{n-1}(A(v)_{ji}^{M}) + V_{n-1}(A(w)_{ji}^{M})\right) + (-1)^{i+k}([v]_i + [w]_i)\left(V_{n-1}(A(v+w)_{ki}^{M})\right)$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} V_{n-1}(A(v)_{ji}^{M}) + \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} V_{n-1}(A(w)_{ji}^{M})$$
$$+ (-1)^{i+k}[v]_i V_{n-1}(A(v+w)_{ki}^{M}) + (-1)^{i+k}[w]_i V_{n-1}(A(v+w)_{ki}^{M})$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} V_{n-1}(A(v)_{ji}^{M}) + (-1)^{i+k}[v]_i V_{n-1}(A(v)_{ki}^{M})$$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} V_{n-1}(A(w)_{ji}^{M}) + (-1)^{i+k}[w]_i V_{n-1}(A(w)_{ki}^{M})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A(v)]_{ji} V_{n-1}(A(v)_{ji}^{M}) + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A(w)]_{ji} V_{n-1}(A(w)_{ji}^{M}) = D(v) + D(w)$$

כדרוש.

**טענה ד:** אם $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ וקטורי הבסיס הסטנדרטי, אזי $V([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]) = 1$.

עלינו להראות כי $V_n(I_n) = 1$ (כאשר $I_n$ היא מטריצת היחידה מסדר $n$).

אכן, לכל $j \neq i$ מתקיים $[I_n]_{ji} = 0$, ולכן:

$$V_n(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [I_n]_{ji} V_{n-1}([I_n]_{ji}^{M}) = (-1)^{i+i} [I_n]_{ii} V_{n-1}([I_n]_{ii}^{M})$$

$$= (-1)^{2i} \cdot 1 \cdot V_{n-1}([I_n]_{ii}^{M}) = V_{n-1}([I_n]_{ii}^{M})$$

שימו לב ש־ $[I_n]_{ii}^{M} = I_{n-1}$, ולכן $V_n(I_n) = V_{n-1}([I_n]_{ii}^{M}) = V_{n-1}(I_{n-1}) = 1$, לפי הנחת האינדוקציה.

משילוב טענות ב, ג, ו־ד נסיק ש־ $V_n$ היא פונקציית נפח. לפי הגדרת הפונקציה, היא מקיימת את השוויון

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

עבור $i$ מסוים שאותו בחרנו **באופן שרירותי**.

מכאן **שלכל** $1 \le i \le n$, הביטוי $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$ מגדיר פונקציית נפח. אך מאחר שפונקציית הנפח – אם קיימת – היא יחידה, נסיק ש־ $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$ מתלכד עם $V_n(A)$ **לכל** $1 \le i \le n$.

**מ.ש.ל.**

כעת נראה כי הדטרמיננטה מתלכדת עם פונקציית הנפח שאת קיומה הוכחנו בטענה 4.9.5.

---

**משפט 4.9.6**

יהי $n$ מספר טבעי ויהי $F$ שדה. הדטרמיננטה היא פונקציית הנפח היחידה ב־ $F^n$, והיא נתונה על־ידי הנוסחה

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

לכל $A \in \mathbf{M}_n(F)$. יתר על כן, לכל $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \left| A_{ji}^M \right| \qquad (1)$$

וכן:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \left| A_{ij}^M \right| \qquad (2)$$

---

שימו לב, השוויון (1) הוא כלל הפיתוח לפי העמודה ה־ $F$, והשוויון (2) הוא כלל הפיתוח לפי השורה ה־ $F$.

**הוכחה**

לפי מסקנה 4.9.3 וטענה 4.9.5, לכל $n$ טבעי קיימת פונקציית נפח יחידה $V_n$ ב־ $F^n$, הנתונה על־ידי:

$$V_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

נותר לנו להראות כי פונקציה זו מתלכדת עם הדטרמיננטה, כלומר ש־ $V_n(A) = |A|$ לכל $A \in \mathbf{M}_n(F)$, וכי מתקיימים השוויונות (1) ו־(2). נוכיח זאת באינדוקציה על $n$.

עבור $n = 1$ הטענה מתקיימת באופן טריוויאלי.

נניח שטענתנו מתקיימת עבור $n - 1$, כאשר $n \ge 2$.

לפי טענה 4.9.5 מתקיים

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

לכל $A \in \mathbf{M}_n(F)$ ולכל $1 \le i \le n$. לפי הנחת האינדוקציה, $V_{n-1}(A_{ji}^M) = \left|A_{ji}^M\right|$ לכל $1 \le j \le n$, לכן

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \left|A_{ji}^M\right|$$

ולכן:

$$V_n(A^t) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \left|A_{ij}^M\right|$$

אך לפי למה 4.9.4 מתקיים $V_n(A) = V_n(A^t)$. נסיק ש־

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \left|A_{ji}^M\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \left|A_{ij}^M\right|$$

עבור $i = 1$, הביטוי שהתקבל באגף ימין הוא, לפי ההגדרה, הדטרמיננטה $|A|$. לכן:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \left|A_{ji}^M\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \left|A_{ij}^M\right|$$

**מ.ש.ל.**

בזאת פרענו שני חובות ישנים – הוכחנו כללית את משפט 4.3.5 (שהרי הדטרמיננטה, בהיותה פונקציית נפח, מקיימת את תכונה א – שהיא בדיוק טענת משפט 4.3.5), וכן הוכחנו את משפט 4.2.1.

לסיום הפרק, נדגים שימוש בהצגת הדטרמיננטה בעזרת תמורות לחישוב דטרמיננטה שקשה לחשב על־ידי פיתוח לפי שורות או עמודות:

**שאלה 4.9.3**

תהי $A$ מטריצה מהצורה הבאה

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר הכוכביות מציינות סקלרים כלשהם. מהי $|A|$?

**התשובה בעמוד 421**

# תשובות לשאלות בפרק 4

**תשובה 4.1.1** **השאלה בעמוד 336**

א. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 32 = -29$

ב. מעל שדה המספרים הממשיים: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 1+1 = 2$

ג. מעל השדה $\mathbb{Z}_2$: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 1+1 = 0$

**תשובה 4.1.2** **השאלה בעמוד 336**

לפי פיתוח הדטרמיננטה נקבל:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = x - 6$$

לפי הנתון:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 2$$

לכן,

$$x - 6 = 2$$

ומכאן:

$$x = 8$$

**תשובה 4.1.3** **השאלה בעמוד 339**

א.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -6 - 2(-2-3) + 4(-2) = -6 + 10 - 8 = -4$$

ב. על פי הנוסחה:

$$|A| = 1 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot 2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0 - 6 + 4 + 6 - 8 - 0 = -4$$

**תשובה 4.1.4** **השאלה בעמוד 340**

א. $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

נחשב את $|A|$:

$$|A| = 1\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 7(16+4) - 1(-4-0) + 3(2-0) = 140 + 4 + 6 = 150$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(16+4) - 1(12-8) + 3(-6-16) = 40 - 4 - 66 = -30$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-4-0) - 7(12-8) + 3(0+4) = -8 - 28 + 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2-0) - 7(-6-16) + (0+4) = 4 + 154 + 4 = 162$$

לכן:

$$|A| = 150 - 3(-30) + 2(-24) - 162 = 150 + 90 - 48 - 162 = 30$$

ב. לשם חישוב $|A|$ היה עלינו לחשב 4 דטרמיננטות מסדר 3, ולשם חישוב כל דטרמיננטה מסדר 3 היה עלינו לחשב 3 דטרמיננטות מסדר 2, ובסך הכול חישבנו 12 דטרמיננטות מסדר 2 כדי למצוא את $|A|$. (למעשה היה עלינו לחשב רק 6 דטרמיננטות, כי במהלך החישוב הופיעה כל דטרמיננטה מסדר 2 פעמיים.)

למשל, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ הוא המינור ה־1,2 במטריצה

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

וכן המינור ה־1,1 במטריצה:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

ג. אנו רואים כי כדי לחשב דטרמיננטה מסדר $n$, יש לחשב $n$ דטרמיננטות מסדר $(n-1)$. לכן, כדי לחשב דטרמיננטה מסדר $n$, יש לחשב $n(n-1)(n-2)\dots 4\cdot 3$ דטרמיננטות מסדר 2.

כדי לחשב דטרמיננטה מסדר 5, יש לחשב $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ דטרמיננטות מסדר 2.

כדי לחשב דטרמיננטה מסדר 6, יש לחשב $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 = 360$ דטרמיננטות מסדר 2 (כמובן שלא כולן שונות זו מזו, כפי שצוין בחלק ב של התשובה).

**תשובה 4.1.5** **השאלה בעמוד 340**

זוהי שאלה מכשילה - אנו מקווים כי הבחנתם בכך.

המטריצה

$$A=\begin{bmatrix}2 & -7 & 5 & 1\\ 4 & 3 & -6 & 0\\ -1 & 2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

אינה ריבועית! הדטרמיננטה שלה אינה מוגדרת!

**תשובה 4.2.1** **השאלה בעמוד 343**

א. $$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 7\\ 0 & 4 & 0 & 8\\ 2 & 5 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

נפתח את $|A|$ לפי השורה הרביעית, שכל איבריה, פרט לזה שבמקום ה־ $(4,4)$, הם אפסים. המקדם המתאים לאיבר זה הוא $(-1)^{4+4}=(-1)^8=1$. לכן נקבל:

$$u,v\in F^n,\lambda,\mu\in F$$

את הדטרמיננטה מסדר 3 שעלינו לחשב בשלב זה נפתח לפי העמודה השלישית, שכל איבריה, פרט לזה שבמקום ה־ $(3,3)$, הם אפסים. המקדם המתאים לאיבר זה הוא:

$$(-1)^{3+3}=(-1)^6=1$$

ולכן:

$$|A|=10\cdot 6\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}=10\cdot 6\cdot 4=240$$

ב. $$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1/11 & 0\\ 80 & 5 & 100 & -2\\ 11 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

נפתח את $|A|$ לפי השורה הרביעית. בפיתוח זה, כל המחוברים פרט לזה המתאים לאיבר שבמקום ה־ $(4,1)$, מתאפסים. המקדם המתאים לאיבר זה הוא

$$(-1)^{4+1}=(-1)^5=-1$$

ולכן:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 0 & 1/11 & 0\\ 80 & 5 & 100 & -2\\ 11 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=-11\begin{vmatrix}0 & 2 & 5\\ 0 & 1/11 & 0\\ 5 & 100 & -2\end{vmatrix}$$

את הדטרמיננטה מסדר 3 שעלינו לחשב כעת נפתח לפי העמודה הראשונה. המחובר היחיד שאינו מתאפס הוא זה המתאים לאיבר הנמצא במקום ה־ $(3,1)$. מקדמו הוא:

$$(-1)^{3+1}=(-1)4=1$$

ולכן:

$$|A| = -11\cdot 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1/11 & 0 \end{vmatrix} = -11\cdot 5\cdot\frac{(-3)}{11} = 15$$

ג. $$A = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 & u \\ 0 & t & 3 & 0 & y \\ g & h & \ell & 4 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

נפתח את $|A|$ לפי השורה החמישית, שכל איבריה, פרט לזה שבמקום ה־ $(5,5)$, הם אפסים. המקדם של המחובר המתאים לאיבר זה הוא $(-1)^{5+5} = 1$.

לכן:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 & z \\ 0 & 2 & 0 & 0 & u \\ 0 & t & 3 & 0 & y \\ g & h & \ell & 4 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 3 & 0 \\ g & h & \ell & 4 \end{vmatrix}$$

את הדטרמיננטה מסדר 4 שעלינו לחשב בשלב זה נפתח לפי השורה השנייה, שכל איבריה, פרט לזה שבמקום ה־ $(2,2)$, הם אפסים. מקדמו של המחובר המתאים לאיבר זה הוא $(-1)^{2+2} = 1$, והמינור המתאים לו מתקבל ממחיקת השורה השנייה והעמודה השנייה של המטריצה הקודמת.

לכן:

$$= 5\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ g & \ell & 4 \end{vmatrix}$$

את הדטרמיננטה מסדר 3 שעלינו לחשב כעת נפתח לפי העמודה השלישית. האיבר היחיד השונה מאפס בעמודה זו הוא זה הנמצא במקום ה־ $(3,3)$, והמקדם המתאים לו הוא $(-1)^{3+3} = 1$. לכן:

$$= 5\cdot 2\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 4\cdot 3 = 120$$

**תשובה 4.2.2** **השאלה בעמוד 343**

תהי:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

נתון כי:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 5$$

א. במקרה זה

$$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$|B| = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22} = -|A| = -5$$

ב. במקרה זה

$$B = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$|B| = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -|A| = -5$$

ג. המטריצה המשוחלפת, $A^t$ , היא המטריצה הבאה:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$|A^t| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = |A| = 5$$

**תשובה 4.2.3** **השאלה בעמוד 343**

א. אם ב־ $A$ יש שורת אפסים, אז:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

או

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$|A| = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

או

$$|A| = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0$$

וקיבלנו כי **בכל מקרה**

$$|A| = 0$$

וראו גם מסקנה 4.2.2.

ב. אם יש ב־ $A$ עמודת אפסים, אז:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

או

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$|A| = 0 \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = 0$$

או

$$|A| = a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{21} = 0$$

וקיבלנו כי **בכל מקרה**

$$|A| = 0$$

וראו גם מסקנה 4.2.2.

ג. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{11} & a_{21} \end{bmatrix}$

(השורה השנייה של $A$ שווה לשורה הראשונה).

ולכן:

$$|A| = a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11} = 0$$

ד. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{bmatrix}$

(העמודה השנייה של $A$ שווה לעמודה הראשונה).

ולכן:

$$|A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$$

**תשובה 4.2.4** **השאלה בעמוד 343**

תהי

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

מטריצה כלשהי מסדר $2 \times 2$.

א. אם

$$B = t\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

נקבל כי:

$$|B| = ta_{11}ta_{22} - ta_{12}ta_{21} = t^2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t^2|A|$$

ב. אם

$$C = \begin{bmatrix} ta_{11} & ta_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

נקבל כי:

$$|B| = ta_{11}a_{22} - ta_{12}a_{21} = t(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = t|A|$$

תוצאה דומה נקבל אם נכפול ב־ $t$ את השורה השנייה של $A$ או את אחת מעמודותיה.

**תשובה 4.2.5** **השאלה בעמוד 344**

א. הטענה נכונה. נוכיח זאת:

תהיינה $A$ ו־ $B$ שתי מטריצות כלשהן מסדר $2 \times 2$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \ , \ \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

מכפלתן:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
|AB| &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} \\
&-(a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} + a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} + a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} + a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}) \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) + a_{12}a_{21}(b_{21}b_{12} - b_{22}b_{11}) \\
&= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \\
&= |A||B|
\end{aligned}
$$

ומצאנו, אם כן, כי

$$|AB| = |A||B|$$

כפי שרצינו להוכיח.

ב. הטענה אינה נכונה.

לדוגמה, אם

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

אז:

$$|A| = 6, \quad |B| = 2, \quad |A| + |B| = 8$$

ולעומת זאת:

$$|A + B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 8$$

**תשובה 4.2.6** **השאלה בעמוד 344**

תהי:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

**כיוון ראשון**

נניח ששורותיה של $A$ תלויות לינארית. במקרה זה, אחד מבין הווקטורים, $(a_{11}, a_{12}), (a_{21}, a_{22})$, הוא כפולה בסקלר של השני. נניח למשל כי:

$$(a_{21}, a_{22}) = t(a_{11}, a_{12})$$

כלומר

$$a_{21} = ta_{11}, \; a_{22} = ta_{12}$$

ואז:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}ta_{12} - a_{12}ta_{11} = 0$$

באופן דומה מוכיחים את המקרה שבו השורה הראשונה היא כפולה של השנייה.

**כיוון שני**

נניח כי $|A| = 0$.

כלומר

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

דהיינו:

$$a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

נפריד לשני מקרים:

א. $a_{12} = 0$

במקרה זה נובע כי $a_{11} = 0$ או $a_{22} = 0$.[1]

אם $a_{11} = 0$, אז השורה הראשונה של $i$ היא $j$.

כל קבוצה המכילה את וקטור האפס היא תלויה לינארית, ולכן שתי שורותיה של $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1/3 & 2/5 & 1/5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5/15 & 6/15 & 3/15 \end{vmatrix} = \frac{1}{15}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ תלויות לינארית.

אם $a_{11} \neq 0$ אז $a_{22} = 0$, ואז

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

ושתי השורות תלויות לינארית, שכן

$$(a_{21}, 0) = \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}, 0)$$

(שימו לב כי $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ מוגדר במקרה זה, שכן $a_{11} \neq 0$).

ב. $a_{12} \neq 0$

במקרה זה, מ־(*) נובע כי

$$a_{21} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \cdot a_{11}$$

כמו כן, ברור כי

$$a_{22} = \frac{a_{22}}{a_{12}} \cdot a_{12}$$

ולכן

$$(a_{21}, a_{22}) = \frac{a_{22}}{a_{12}}(a_{11}, a_{12})$$

ושורותיה של $A$ תלויות לינארית.

**תשובה 4.2.7** **השאלה בעמוד 344**

הדטרמיננטה של $A$ היא:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \hat{a}_{21} & a_{22} + \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22} + \hat{a}_{22}) - a_{12}(a_{21} + \hat{a}_{21})$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11}\hat{a}_{22} - a_{12}\hat{a}_{21}$$

1 (או שניהם כאחד).

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{vmatrix}$$

**תשובה 4.3.1** **השאלה בעמוד 346**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

נפתח את $|A|$ לפי השורה הראשונה, ונקבל כי:

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-9) + (6-4) = -3 + 2 = -1$$

$A^t$ היא המטריצה:

$$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

נפתח את $|A^t|$ לפי השורה הראשונה:

$$|A^t| = 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(8-9) - 2(0-3) + (0-4) = -3 + 6 - 4 = -1$$

קיבלנו:

$$|A^t| = |A|$$

**תשובה 4.3.2** **השאלה בעמוד 348**

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

נפתח את $|B|$ לפי השורה הראשונה:

$$|B| = 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 3(8-9) + (4-6) = 3 - 2 = 1$$

כבר ראינו בשאלה 4.3.1 כי

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ולכן:

$$1 \times 1$$

**תשובה 4.3.3** **השאלה בעמוד 349**

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

א. נפתח את $|A|$ לפי העמודה השנייה:

$$|A| = (-1)^{1+2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -4(20+2) - 3(6-5) = -88 - 3 = -91$$

נפתח את $|B|$ לפי העמודה השנייה:

$$|B| = (-1)^{1+2} \cdot 4 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -4(60+6) - 3(18-15)$$

$$= -4 \cdot 3(20+2) - 3 \cdot 3(6-5) = 3 \cdot (-91) = -273$$

$$|B| = -273 = 3 \cdot (-91) = 3|A|$$

ב. $tA$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי כפל כל אחת מ־$n$ שורותיה בסקלר $t$.
כפל שורה אחת בסקלר מתבטא בכפל הדטרמיננטה באותו סקלר, ולכן כפל $n$ שורות באותו סקלר מתבטא בכפל הדטרמיננטה באותו סקלר $n$ פעמים, כלומר:

$$|tA| = t^n |A|$$

**תשובה 4.3.4** **השאלה בעמוד 351**

המקום היחיד בהוכחה שבו ניצלנו את ההנחה, הוא בעצם השימוש בביטוי $\frac{1}{2}$, כלומר בהנחה כי $1+1 = 2$ הוא איבר הפיך. למעשה הוכחנו את המשפט מעל כל שדה שבו $1+1 \neq 0$.

**תשובה 4.3.5** **השאלה בעמוד 351**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

נפתח את $|A|$ לפי השורה הראשונה:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (12-15) - 2(6-12) + 3(5-8) = -3 + 12 - 9 = 0$$

**תשובה 4.3.6** **השאלה בעמוד 352**

א. תהיינה $A$ ו־ $B$ המטריצות הריבועיות הבאות:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ta_{j1} & \cdots & a_{in}+ta_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

לפי משפטים 4.3.4 ו־4.3.3 נקבל כי:

$$|B|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ta_{j1} & \cdots & ta_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+t\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

המחובר הראשון בסכום שבאגף ימין הוא $|A|$, המחובר השני הוא המכפלה ב־ $t$ של דטרמיננטה של מטריצה שבה השורות ה־ $i$ וה־ $j$ שוות זו לזו. לכן מחובר זה מתאפס.

ובסיכום:

$$|B|=|A|$$

ב. $$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

למרות שעדיף לפתח לפי העמודה השנייה או לפי השורה השלישית, נפתח את $|A|$ וגם את $|B|$ לפי העמודה השלישית, כדי שתומחש ההוכחה של התכונה הרלבנטית:

$$|A|=-2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-2\cdot 2-6+3\cdot(-11)=-4-6-33=-43$$

$B$ היא המטריצה הבאה:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -11 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|B|=-11\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-11\cdot 2+2\cdot 6+3\cdot(-11)=-22+12-33=-43$$

ואכן:

$$|A|=|B|$$

**תשובה 4.3.7** **השאלה בעמוד 354**

א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \\ R_4 \to R_4 + 4R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & 11 \\ 0 & 2 & 10 & 14 \\ 0 & 11 & 10 & 17 \end{vmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה ונקבל:

$$= \begin{vmatrix} 5 & 10 & 11 \\ 2 & 10 & 14 \\ 11 & 10 & 17 \end{vmatrix}$$

נוציא מעמודה שנייה גורם משותף 10:

$$= 10 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 11 \\ 2 & 1 & 14 \\ 11 & 1 & 17 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} 10 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 11 \\ -3 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שנייה, ונזכור כי המקדם של ה־1 הוא $(-1)^{2+1}$, כלומר $-1$:

$$= -10 \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -10(-18-18) = 360$$

ב. לחישוב הדטרמיננטה בסעיף זה נסמן את עמודות המטריצה ב־ $C_1, C_2, C_3, C_4$, ונבצע פעולות אלמנטריות על העמודות כך:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & 3 & 17 \end{vmatrix} \overset{\substack{C_3 \to C_3 + \frac{5}{2}C_1 \\ C_4 \to C_4 + \frac{11}{2}C_1}}{=} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & \frac{11}{2} & \frac{33}{2} \\ 4 & 1 & 10 & 30 \\ 4 & -1 & 13 & 39 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי שורה ראשונה:

$$= (-2) \begin{vmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{33}{2} \\ 1 & 10 & 30 \\ -1 & 13 & 39 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \\ 1 & 10 & 10 \\ -1 & 13 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

השוויון האחרון נובע מכך שבדטרמיננטה האחרונה יש שתי עמודות זהות.

ג.
$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix} \overset{R_2 \to R_2 + R_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\overset{[2]}{=} - \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

2 הוצאנו מהשורה השנייה גורם משותף $(-1)$.

האפס שקיבלנו נמצא בעמודה הראשונה בשורה השנייה. אם נמשיך ונאפס את איברי העמודה הראשונה, חלק מאיברי המטריצה יהיו שברים. כדי לחסוך בכתיבת שברים, נאפס את איברי **השורה השנייה**. לשם כך, נבצע פעולות על העמודות כך:[3]

$$\overset{\substack{C_3\to C_3-3C_2\\ C_4\to C_4-C_2}}{=} -\begin{vmatrix} 3 & -5 & 17 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 7 & -28 & -2\\ 8 & -8 & 29 & 2 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי שורה שנייה (המקדם של ה־1 הוא $(-1)^{2+2}$, כלומר 1):[4]

$$= -\begin{vmatrix} 3 & 17 & 1\\ -5 & -28 & -2\\ 8 & 29 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 17 & 1\\ 5 & 28 & 2\\ 8 & 29 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-2R_1}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 17 & 1\\ -1 & -6 & 0\\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & -6\\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 5+12 = 17$$

ד.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13\\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21\\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2\\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2\to R_2-2R_1\\ R_3\to R_3-3R_1\\ R_4\to R_4-2R_1\\ R_5\to R_5-R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6\\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 4 & 6\\ -11 & 1 & -1 & -8\\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2\to R_2-R_1\\ R_3\to R_3-11R_1\\ R_4\to R_4+2R_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & -10 & -23 & -41\\ 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ -10 & -23 & -41\\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 10 & 23 & 41\\ 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_2\to R_2-10R_1\\ R_3\to R_3-4R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 11\\ 0 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 11\\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -3+55 = 52$$

**תשובה 4.3.8** **השאלה בעמוד 355**

נוכיח את המשפט ל**מטריצה משולשת עילית** באינדוקציה על $n$.

עבור $n=1$, מטריצה משולשת עילית מסדר 1 נראית כך:

$$A = \left[a_{11}\right]$$

ואכן:

$$|A| = a_{11}$$

נבדוק גם עבור $n=2$. מטריצה משולשת עילית מסדר 2 נראית כך:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

3 אין זו הדרך היחידה להימנע משברים.

4 ולאחר מכן נוציא מהשורה השנייה גורם משותף $(-1)$.

ואכן:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$$

נניח עתה כי הטענה נכונה עבור מטריצות משולשיות עיליות מסדר $n-1$, ונוכיח אותה עבור מטריצות משולשיות עיליות מסדר $n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה $|A|$ לפי העמודה הראשונה ונקבל כי:

$$|A| = a_{11} \cdot \left|A_{11}^M\right| \qquad (1)$$

המינור $\left|A_{11}^M\right|$ הוא דטרמיננטה של מטריצה משולשית מסדר $n-1$ שאיברי האלכסון שלה הם $a_{22}, \dots, a_{nn}$. לכן, על פי הנחת האינדוקציה:

$$\left|A_{11}^M\right| = a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

ולפי (1)

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

כפי שרצינו להוכיח.

אפשר להוכיח את המשפט ל**מטריצה משולשית תחתית** באותו אופן, אך אנו נציג כאן דרך אחרת:
נניח ש־ $A$ היא מטריצה משולשית תחתית:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ a_{n2} & a_{n2} & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

אז המטריצה המשוחלפת $A^t$ היא מהצורה:

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & \dots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{n2} \\ 0 & & a_{33} & & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

זוהי מטריצה משולשית עילית, ולכן לפי מה שכבר הוכחנו:

$$\left|A^t\right| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

אבל

$$\left|A^t\right| = |A|$$

ולכן

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

כפי שרצינו להוכיח.

**תשובה 4.3.9** **השאלה בעמוד 356**

$$A = \begin{bmatrix} x^2-y^2 & (x-y)^2 & 0 \\ x+y & x-y & 0 \\ x-y & 3x+y & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x-y)(x+y) & (x-y)^2 & 0 \\ x+y & x-y & 0 \\ x-y & 3x+y & 2y \end{bmatrix}$$

לחישוב $|A|$ נוציא מן השורה הראשונה גורם משותף, $x-y$, ונקבל:

$$|A| = (x-y)\begin{vmatrix} x+y & x-y & 0 \\ x+y & x-y & 0 \\ x-y & 3x+y & 2y \end{vmatrix}$$

באגף ימין קיבלנו דטרמיננטה של מטריצה שבה יש שתי שורות שוות. דטרמיננטה של מטריצה כזאת מתאפסת ולכן:

$$|A| = (x-y)\cdot 0 = 0$$

**תשובה 4.3.10** **השאלה בעמוד 356**

$A$ היא מטריצה כזאת:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{2n} & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן:

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & \\ a_{13} & a_{23} & 0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

אנו רואים כי $A^t$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי כפל כל שורה של $A$ ב־$(-1)$, ולכן:

$$|A^t| = (-1)^n|A|$$

$n$ אי־זוגי ולכן נקבל:

$$(-1)^n = -1$$

כלומר:

$$|A^t| = -|A|$$

מאידך גיסא:

$$|A^t| = |A|$$

ולכן

$$|A| = -|A|$$

כלומר

$$2|A| = 0$$

וזה ייתכן רק אם $|A| = 0$.

**תשובה 4.3.11** **השאלה בעמוד 356**

עבור $n = 2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad |A_1| = x_2 - x_1 = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

עבור $n = 3$:

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1^2 \end{vmatrix}$$

נוציא גורם משותף $x_2 - x_1$ מהשורה הראשונה, ו־ $x_3 - x_1$ מהשורה השנייה, ונקבל:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 \\ 1 & x_3 + x_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) = \prod_{j<i}(x_i - x_j)$$

**תשובה 4.3.12** **השאלה בעמוד 357**

אם $|A| \neq 0$, אז בוודאי שאין ב־$A$ שורת אפסים. לפיכך, **בכל** שורה של $A$ חייב להיות איבר שונה מ־0. הווי אומר, ב־$A$ חייבים להיות **לפחות** $|A|$ איברים השונים מ־0.

האם קיימת מטריצה ריבועית מסדר $A$, שבה יש **רק** $n$ איברים שונים מאפס ושהדטרמיננטה שלה אינה מתאפסת?

התשובה היא כן! למשל, במטריצת היחידה $I$ מסדר $n$, רק $n$ איברי האלכסון הראשי שונים מאפס. מטריצה זו היא, בין היתר, משולשית, ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון הראשי שלה, כלומר $|I| = 1 \neq 0$.

**מסקנה**

המספר המקסימלי של אפסים במטריצה מסדר $n$ שהדטרמיננטה שלה שונה מאפס הוא $n^2 - n$.
($n^2$ הוא המספר הכולל של איברים במטריצה.)

**תשובה 4.3.13** **השאלה בעמוד 357**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

נחסר את השורה הראשונה מהשורה השנייה, מהשורה השלישית ומהשורה הרביעית. ערך הדטרמיננטה לא ישתנה ונקבל:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

פיתוח לפי עמודה ראשונה     פיתוח לפי שורה ראשונה

**תשובה 4.3.14** **השאלה בעמוד 357**

נבדוק את ערכי הדטרמיננטות $B,C,D,E$.

$B$ מתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת השורה הראשונה של $A$ כפולה ב־4 לשורה השנייה של $A$. לכן:

$$|B| = |A|$$

$C$ מתקבלת מ־ $B$ על־ידי החלפת עמודות. לכן:

$$|C| = -|B|$$

$D$ מתקבלת מ־ $C$ על־ידי כפל של כל איבר בשורה הראשונה ב־2. לכן:

$$|D| = 2|C|$$

$E$ היא המטריצה המשוחלפת של $D$, כלומר $E = D^t$. לכן:

$$|E| = |D|$$

ובסך הכול נקבל:

$$|E| = |D| = 2|C| = -2|B| = -2|A|$$

**תשובה 4.3.15** **השאלה בעמוד 357**

לצורך החישוב ביצענו פעולות אלמנטריות על השורות ועל העמודות של המטריצות הנדונות וביצענו את השינויים בערך הדטרמיננטות בהתאם. הנה התוצאות שקיבלנו:

א. $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14$$

ב. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 20 & 10 & 40 & -50 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0$$

ג. $$\begin{vmatrix} 4 & 180 & 49 \\ 0 & 270 & 35 \\ 0 & 360 & 21 \end{vmatrix} = -27720$$

ד. $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -48$$

ה. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -19$

**תשובה 4.3.16** **השאלה בעמוד 357**

תהי $B$ מטריצה ריבועית כלשהי מסדר $m$, כאשר $m$ מספר טבעי נתון כלשהו.

בהמשך ההוכחה המטריצה $B$ **קבועה**.

נוכיח ראשית כי עבור מטריצה $A$ כלשהי מסדר $1 \times 1$, המטריצה $C$, הנתונה על־ידי

$$C = \left[\begin{array}{c:c} A & X \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right]$$

מקיימת:

$$|C| = |A||B|$$

ובכן, אם $A$ מטריצה ריבועית מסדר 1, כלומר $A = [a_{11}]$, אז $|A| = a_{11}$, ובמקרה זה $C$ היא מסדר $m+1$ ונראית כך:

$$C = \left[\begin{array}{c:cccc} a_{11} & * & \dots & \dots & * \\ \hdashline 0 & & & & \\ & & B & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{array}\right]$$ [5]

פיתוח $|C|$ לפי העמודה הראשונה נותן

$$|C| = a_{11}|B| = |A||B|$$

כנדרש.

נניח עתה באינדוקציה כי הטענה נכונה עבור $A$ ריבועית כלשהי מסדר $n-1$, כלומר כי הדטרמיננטה של המטריצה $C$, מסדר $m+n-1$, הנתונה על־ידי

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

מקיימת:

$$|C| = |A||B|$$

תהי עתה $A = [a_{ij}]$ מטריצה ריבועית כלשהי מסדר $n$, ונתבונן במטריצה מסדר $m+n$ הנתונה על־ידי:

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A & X \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$ [6]

5 * מציין איבר כלשהו.

6 $B$ היא זאת שקבענו מקודם. איברי המטריצה $X$ הם סקלרים כלשהם.

עלינו להוכיח כי:

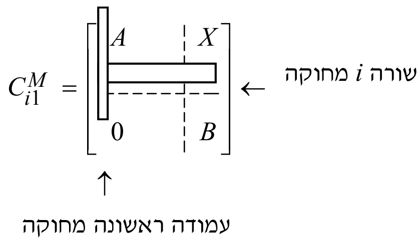
$$|C| = |A||B|$$

נפתח את $|C|$ לפי העמודה הראשונה:

$$|C| = a_{11}\left|C_{11}^M\right| - a_{21}\left|C_{21}^M\right| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\left|C_{n1}^M\right| + \ldots \qquad (1)$$

יתר המחוברים בפיתוח של $|C|$ לפי העמודה הראשונה מתאפסים, שכן יתר איברי העמודה הראשונה הם אפסים.

עבור $1 \le i \le n$ נבדוק כעת מהי המטריצה המינורית $C_{i1}^M$ המופיעה בפיתוח דלעיל:




כלומר, $C_{i1}^M$ היא מטריצה מהטיפוס

$$C_{i1}^M = \left[\begin{array}{c|c} A_{i1} & X \\ \hline 0 & B \end{array}\right]$$

שבה $A_{i1}$ היא המטריצה הריבועית מסדר $n-1$ המתקבלת מ־$A$ על־ידי מחיקת השורה ה־$i$ והעמודה הראשונה של $A$. כלומר $A_{i1}$ היא המטריצה המינורית של האיבר ה־$i,1$ של $A$, ולכן:

$$A_{i1} = A_{i1}^M$$

מאחר ש־$A_{i1}$ היא מסדר $n-1$, הרי לפי הנחת האינדוקציה

$$\left|C_{i1}^M\right| = |A_{i1}||B| = \left|A_{i1}^M\right||B|$$

ושוויון זה נכון לכל $i$ ($1 \le i \le n$).

נציג תוצאה זו בשוויון (1) ונקבל:

$$|C| = a_{11}\left|A_{11}^M\right||B| - a_{21}\left|A_{21}^M\right||B| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\left|A_{n1}^M\right||B|$$

כלומר:

$$|C| = \left(a_{11}\left|A_{11}^M\right| - a_{21}\left|A_{21}^M\right| + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\left|A_{n1}^M\right|\right)|B|$$

הכופל הרשום בסוגריים באגף ימין של השוויון האחרון אינו אלא הפיתוח של $|A|$ לפי העמודה הראשונה, ולכן השוויון האחרון פירושו

$$|C| = |A||B|$$

כפי שרצינו להוכיח.

מאחר ש־$B$ הייתה מטריצה ריבועית כלשהי, הרי שהוכחנו את הטענה עבור שתי מטריצות $A$ ו־$B$ כלשהן.

**תשובה 4.3.17** **השאלה בעמוד 358**

אם כל האיברים במטריצה כלשהי שלמים, אז גם הדטרמיננטה היא מספר שלם (כי הדטרמיננטה היא סכום של מכפלות של איברים הלקוחים מתוך המטריצה). אם נחבר לשורה האחרונה במטריצה את כל קודמותיה, נקבל (על־ידי שימוש חוזר במשפט 4.3.6) מטריצה בעלת אותה דטרמיננטה, שבה השורה האחרונה היא השורה שכל איבריה שווים ל־ $\frac{n(n+1)}{2}$. נוציא סקלר זה החוצה (תוך שימוש במשפט 4.3.3), ונישאר עם דטרמיננטה של מטריצה שרכיביה שלמים. לכן נקבל בסך הכול שהדטרמיננטה היא $\frac{n(n+1)}{2}$ כפול איזשהו מספר שלם.

**תשובה 4.3.18** **השאלה בעמוד 358**

כל אחת מהשורות של $A$ היא מהטיפוס:

$$\begin{bmatrix}0 & \dots & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

בכל אחת מהשורות של $A$ מופיע המספר 1 במקום אחר (כי אחרת הייתה ב־ $A$ עמודה שבה מופיע המספר 1 יותר מפעם אחת). לכן קיימת שורה של $A$ שבה ה־1 מופיע במקום הראשון, קיימת שורה של $A$ שבה ה־1 מופיע במקום השני, ... וקיימת שורה של $A$ שבה ה־1 מופיע במקום ה־ $n$־י. על־ידי סדרה סופית של החלפות הדדיות של שורות של $A$ נוכל, אם כן, להגיע למטריצה ששורתה הראשונה היא:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

שורתה השנייה היא:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

ובאופן כללי – לכל שורה $i$ $(1 \le i \le n)$ ה־1 מופיע במקום ה־ $i$:

$$\begin{bmatrix}0 & \dots & 0\underset{\substack{\uparrow\\ \text{מקום } i}}{1}0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

אבל המטריצה שאלה הן שורותיה אינה אלא מטריצת היחידה $I$.

מצאנו, אם כן, כי ניתן להגיע מ־ $A$ ל־ $I$ על־ידי מספר סופי של החלפות הדדיות של שורות (פעולות אלמנטריות מטיפוס (1)). כל החלפה כזאת משנה את סימן הדטרמיננטה. לכן, אם ביצענו $m$ החלפות כאלה כדי לעבור מ־ $A$ ל־ $I$, יוצא כי:

$$|A| = (-1)^m \cdot |I| = (-1)^m$$

הווי אומר:

$$|A| = \pm 1$$

כדי להדגים שייתכן כי נקבל 1 וייתכן כי נקבל $-1$, שימו לב כי המטריצות

$$A_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ו־

$$A_2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

שתיהן מן הטיפוס הנדון בשאלה, וכי:

$$|A_1| = 1 \;,\; |A_2| = -1$$

**תשובה 4.3.19** **השאלה בעמוד 358**

נחשב את הדטרמיננטה הבאה:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & \alpha & \dots & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha & \dots & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta & \dots & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

נחבר בזו אחר זו את כל השורות לשורה הראשונה:

$$= \begin{vmatrix} n\alpha+\beta & n\alpha+\beta & n\alpha+\beta & \dots & \dots & n\alpha+\beta \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha & \dots & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta & \dots & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

נחלץ את הגורם המשותף $n\alpha+\beta$ מהשורה הראשונה:

$$= (n\alpha+\beta)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha & \dots & \dots & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha+\beta & \dots & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ \alpha & \alpha & \alpha & \dots & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

עבור $2 \le i \le n$ נבצע את הפעולה $R_i \to R_i - \alpha R_1$:

$$= (n\alpha+\beta)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \beta & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \beta \end{vmatrix} = (n\alpha+\beta)\beta^{n-1}$$

(שהרי קיבלנו מטריצה משולשית, ולכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון הראשי.)

**תשובה 4.3.20** **השאלה בעמוד 359**

נבדוק עבור $n = 2$:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 = (-1)^{\frac{2(2-1)}{2}}$$

אכן, הנוסחה נכונה.

כעת, בהנחה שמתקיים

$$\left|A_{n-1}\right| = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$$

נוכיח כי:

$$\left|A_n\right| = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ואמנם, בפיתוח $\left|A_n\right|$ לפי השורה הראשונה נקבל כי

$$\left|A_n\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n}\left|A_{n-1}\right|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{על פי הנחת האינדוקציה}}}{=} (-1)^{1+n}\cdot(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = (-1)^{\frac{2+2n+(n-1)(n-2)}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{4+n^2-n}{2}} = (-1)^2(-1)^{\frac{n^2-n}{2}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

כנדרש.

**תשובה 4.3.21** **השאלה בעמוד 359**

א.
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_3\to R_3+R_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה ראשונה:

$$= (-1)(2\alpha - 12) = 12 - 2\alpha$$

עתה, $12 - 2\alpha = 4$ אם ורק אם $2\alpha = 8$,

כלומר, אם ורק אם $\alpha = 4$.

ב.
$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

עלינו למצוא את ערכי $\lambda$ שעבורם:

$$\left|\lambda I - A\right| = 0$$

נחשב את

$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+3) + 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$

ולכן $\left|\lambda I - A\right| = 0$ אם ורק אם $\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$, כלומר אם ורק אם $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$.

**תשובה 4.3.22** **השאלה בעמוד 359**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

נחסר את העמודה האחרונה מיתר השורות:

$$= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & \dots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & \dots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)-n & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}$$

הדטרמיננטה שקיבלנו היא דטרמיננטה של מטריצה משולשית ולכן שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי של מטריצה, דהיינו:

$$\begin{aligned} |A| &= (1-n)\cdot(2-n)\dots[\underbrace{(n-1)-n}_{-1}]\cdot n \\ &= (n-1)\cdot(n-2)\dots 1\cdot n\cdot(-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}\cdot n! \end{aligned}$$

**תשובה 4.4.1** **השאלה בעמוד 361**

כל המטריצות המופיעות בשאלה 4.3.15, למעט המטריצה שבחלק ב, הן בעלות דטרמיננטה שונה מאפס, ולכן כולן הפיכות!

המטריצה בחלק ב אינה הפיכה.

**תשובה 4.4.2** **השאלה בעמוד 361**

נסמן ב־ $A$ את המטריצה הראשונה, וב־ $B$ את השנייה.

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{21} & a_{31} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ a_{13} & 3 & a_{23} & a_{33} \\ -a_{12} & 4 & -a_{22} & -a_{32} \end{vmatrix}$$

נפתח לפי השורה השנייה:

$$|B| = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 2|A^t| = 2|A| \neq 0$$

ולכן גם $B$ הפיכה.

**תשובה 4.4.3** **השאלה בעמוד 361**

הדטרמיננטה שווה ל־ $(a-3)(a+2)(a-4)$, לכן המטריצה הפיכה אם ורק אם $a \neq -2,3,4$.

**תשובה 4.4.4** **השאלה בעמוד 361**

אנו יודעים כי סכום איברי כל שורה של $A$ הוא אפס. נתבונן **בעמודות** המטריצה $A$ כוקטורים ב־ $F^n$. אם נסכם עמודות אלה נקבל:

$$[A]_1^c + [A]_2^c + \ldots + [A]_n^c = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

לכן עמודות המטריצה $A$ כוקטורים ב־ $F^n$, תלויות לינארית (מקדמי הצירוף כולם 1), וממשפט 3.10.6 נקבל אפוא כי $A$ סינגולרית ולכן $|A| = 0$.

**תשובה 4.5.1** **השאלה בעמוד 365**

ממשפט 4.5.1 נקבל:

$$|AB| = |A||B|$$

מאידך גיסא אנו יודעים כי

$$|AB| = I$$

ולכן

$$|AB| = |I| = 1$$

ובסך הכול קיבלנו:

$$|A||B| = 1$$

מכאן נקבל גם כי $|A| \neq 0$ וגם $|B| \neq 0$. לפיכך $A$ ו־ $B$ שתיהן הפיכות, ולכן קיימות להן מטריצות הופכיות. עתה נכפול את השוויון

$$AB = I$$

משמאל ב־ $A^{-1}$ ונקבל:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}$$

אבל

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$$

ולכן:

$$B = A^{-1}$$

כמו כן:

$$B^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A$$

**תשובה 4.5.2** **השאלה בעמוד 365**

א. $A$ היא מטריצה לא הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$. לכן, משימוש במשפט 4.5.1, נקבל כי אם $A$ לא הפיכה, אז

$$|AB| = |A||B| = 0$$

וכן

$$|BA| = |B||A| = 0$$

ולכן $AB$ וגם $BA$ לא הפיכות.

ב. אם $A$ ו־ $B$ הן מטריצות רגולריות, אז $|A| \neq 0$ וגם $|A||B| \neq 0$, ולכן $|A||B| \neq 0$, אבל $|AB| = |A||B|$ ולכן $|AB| \neq 0$. לכן $AB$ רגולרית.

**תשובה 4.5.3** **השאלה בעמוד 365**

לפי הנתון $A(A+B) = I$. לכן, לפי מסקנה 4.5.2, $A+B$ הופכית של $A$, לכן גם $(A+B)A = I$.
לכן $A^2 + BA = (A+B)A = I = A(A+B) = A^2 + AB$, לכן $BA = AB$.

**תשובה 4.5.4** **השאלה בעמוד 365**

א. נניח בשלילה שיש מטריצה $B \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש־ $B^2 = -I$. אז:

$$|B|^2 = |B^2| = |-1 \cdot I| = (-1)^3\,|I| = -1$$

אבל $|B|$ הוא מספר ממשי - סתירה.

ב. נניח בשלילה שקיימות $A, B \in M_7(\mathbb{R})$ שהן הפיכות, ומקיימות $AB + BA = 0$.
אז $AB = -BA$, ולכן $|A||B| = |AB| = |-BA| = (-1)^7\,|BA| = -|B||A|$.

מאחר ששתי המטריצות $A$ ו־ $B$ הפיכות, נוכל לצמצם ב־ $|A||B|$ את שני אגפי השוויון $|A||B| = -|B||A|$, ונקבל $1 = -1$, סתירה.

**תשובה 4.6.1** **השאלה בעמוד 368**

עבור המערכת

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$

$$3x_1 - 4x_2 = 10$$

מתקיים:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 30 = -34$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 20 - 3 = 17$$

ולכן הפתרון הוא:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-34}{-17} = 2$$

$$x_2 = \frac{17}{-17} = -1$$

(בדקו על־ידי הצבה. זכרו כי מכך ש־ $|A| \neq 0$, נובע שיש למערכת פתרון **יחיד**. לכן, אם $(2,-1)$ הוא פתרון, הרי שזהו הפתרון היחיד.)

**תשובה 4.6.2** **השאלה בעמוד 369**

עבור מערכת המשוואות

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$$

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4$$

מתקיים:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שנייה:

$$|A_1| = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 11 \end{vmatrix} = -(-11 + 6) = 5$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1}}{=} \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 \\ -19 & 0 & 2 \\ -36 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שנייה:

$$|A_1| = -\begin{vmatrix} -19 & 2 \\ -36 & 11 \end{vmatrix} = -(-209 + 72) = 137$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 10 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_1 \to R_1 - 10R_2 \\ R_3 \to R_3 - 4R_2}}{=} \begin{vmatrix} -28 & 0 & 18 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & 0 & 11 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שנייה:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} -28 & 18 \\ -7 & 11 \end{vmatrix} = -308 + 126 = -182$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 4R_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & -19 \\ -3 & 0 & -36 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה שנייה:

$$|A_3| = -\begin{vmatrix} -1 & -19 \\ -3 & -36 \end{vmatrix} = -(36 - 57) = 21$$

ולכן:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{137}{5} \quad , \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{182}{5} \quad , \quad x_3 = \frac{21}{5}$$

(בדקו על־ידי הצבה וזכרו כי אם זהו פתרון, הרי שזהו הפתרון היחיד.)

**תשובה 4.7.1** **השאלה בעמוד 372**

נסמן:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

על פי הגדרת המטריצה המצורפת:

$$b_{11} = (-1)^{1+1}\left|A_{11}^M\right| = a_{22}$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2}\left|A_{21}^M\right| = -a_{12}$$

$$b_{21} = (-1)^{2+1}\left|A_{12}^M\right| = -a_{21}$$

$$b_{22} = (-1)^{2+2}\left|A_{22}^M\right| = a_{11}$$

ולכן:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

כמו כן:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ואמנם, אם תבדקו תמצאו כי:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

**תשובה 4.8.1** **השאלה בעמוד 375**

ברור כי בכל חילוף יש היפוך בודד, ולכן הסימן של חילוף הוא $-1 = (-1)^1$, ולכן החילוף הוא תמורה אי־זוגית.

**תשובה 4.8.2** **השאלה בעמוד 375**

על־ידי הרכבת התמורות נקבל:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&4&1\end{pmatrix}$$

**תשובה 4.8.3** **השאלה בעמוד 376**

על פי ההגדרה, הקבוצות א ו־ב הן תקניות, והקבוצות ג ו־ד אינן תקניות - למשל, כי בשתיהן מופיעים שני הזוגות $(1,2),(2,1)$, ולא רק אחד מהם.

**תשובה 4.8.4** **השאלה בעמוד 379**

נסמן $\pi=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$, $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$. אלה הם שלושה חילופים ב־ $S_3$, ומתקיים $\sigma=\pi\sigma\tau$. כלומר, מצאנו הצגה של אותה תמורה $\sigma$, פעם כמכפלה של חילוף בודד, ופעם כמכפלה של שלושה.

**תשובה 4.9.1** **השאלה בעמוד 386**

עבור $n=2$ יש שתי תמורות:

$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ שסימנה $+1$, ו־ $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ שסימנה $-1$.

נקבל:

$$V\left(\left[a_1,a_2\right]\right)=\operatorname{sgn}(\sigma_1)a_{11}a_{22}+\operatorname{sgn}(\sigma_2)a_{21}a_{12}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

עבור $n=3$ יש שש תמורות, שלוש מהן זוגיות, ושלוש אי־זוגיות (ודאו ישירות).

$$V\left(\left[a_1,a_2,a_3\right]\right)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

**תשובה 4.9.2** **השאלה בעמוד 387**

נתבונן במכפלה מהצורה $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}$.

כל שלם $1\le k\le n$ מופיע בדיוק פעם אחת בין השלמים $\sigma(1),\ldots,\sigma(n)$, לכן נוכל לכתוב מחדש את המכפלה כך $a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$, שהרי סדר מכפלת הגורמים אינו משפיע על התוצאה.

מאחר שלכל תמורה $\sigma$ מתקיים $\operatorname{sgn}(\sigma)=\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$ (מסקנה 4.8.11), נקבל:

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

אך שימו לב שכאשר $\sigma$ עוברת על פני כל התמורות ב־ $S_n$, גם $\sigma^{-1}$ עוברת על פניהן, ולכן

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}$$

ולכן:

$$\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}$$

## תשובה 4.9.3

השאלה בעמוד 392

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

נוכיח כי $|A|=0$.

אכן, נסמן את הרכיב ה־ $i,j$ של המטריצה ב־ $a_{ij}$. לפי משפט 4.9.6:

$$|A|=\sum_{\sigma\in S_5}\operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}a_{4,\sigma(4)}a_{5,\sigma(5)}$$

אם $\sigma\in S_5$, אז $\sigma(3),\sigma(4),\sigma(5)$ הם שלושה מספרים שונים בין 1 ל־5, ולכן לפחות אחד מהם גדול מ־ 2. כלומר קיים $3\le i\le 5$ כך ש־ $\sigma(i)>2$, ולכן $a_{i,\sigma(i)}=0$. כלומר, בכל אחד מהמחוברים בסכום יש גורם שהוא אפס, לכן כל המחוברים מתאפסים, ו־ $|A|=0$.

# הגדרות ומשפטים בכרך א

**הגדרה 1.1.1 סגירות של קבוצה לגבי פעולה**

תהי $A$ קבוצה ותהי $*$ פעולה על $A$. נאמר כי $A$ **סגורה לגבי** $*$,[1] אם לכל $a,b \in A$ מתקיים:

$$a * b \in A$$

**הגדרה 1.1.2 פעולה קיבוצית (אָסוֹצְיָאטיבית)**

תהי $A$ קבוצה ותהי $*$ פעולה על $A$. נאמר כי $*$ היא פעולה **קיבוצית**, אם $A$ סגורה לגבי $*$, ולכל $a,b,c \in A$ מתקיים:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

**הגדרה 1.1.3 פעולה חילופית (קוֹמוּטָטיבית)**

תהי $A$ קבוצה ותהי $*$ פעולה על $A$. נאמר כי $*$ היא פעולה **חילופית**, אם לכל $a,b \in A$ מתקיים:

$$a * b = b * a$$

**הגדרה 1.1.4 פילוג של פעולה מעל פעולה אחרת (דיסטריבוּטיביוּת)**

תהי $A$ קבוצה, ותהיינה $*,\&$ פעולות על $A$, אשר $A$ סגורה לגביהן. נאמר שהפעולה $*$ **מתפלגת מעל הפעולה** $\&$, אם לכל $a,b,c \in A$ מתקיים:

$$a * (b \,\&\, c) = (a * b) \,\&\, (a * c)$$

**הגדרה 1.1.5 איבר נֵיטְרָלִי**

תהי $*$ פעולה על קבוצה $A$, ויהי $e$ איבר של $A$. נאמר כי $e$ **נֵיטרלי ביחס ל־**$*$, אם לכל $a \in A$ מתקיים:

$$a * e = e * a = a$$

**משפט 1.1.6**

תהי $*$ פעולה על קבוצה $A$.

ב־$A$ יש **לכל היותר איבר אחד** שהוא ניטרלי ביחס ל־$*$.

**מסקנה 1.1.7**

אם $e \in A$ הוא ניטרלי ביחס לפעולה $*$ על $A$, אז $e$ הוא האיבר הניטרלי היחיד של $A$ ביחס ל־$*$.

**הגדרה 1.1.8 איבר הפיך ביחס לפעולה**

תהי $*$ פעולה על קבוצה $A$, ונניח שב־$A$ יש איבר ניטרלי ביחס ל־$*$. נסמן איבר זה ב־$e$. איבר $a \in A$ נקרא איבר **הָפיך ביחס ל־**$*$, אם קיים $b \in A$ המקיים $a * b = b * a = e$.

**טענה 1.1.9**

תהי $\mathbb{Q}$ קבוצת המספרים הרציונליים ותהיינה $+$ ו־ $\cdot$ פעולות החיבור והכפל עליה. אז:

א. $\mathbb{Q}$ סגורה לגבי שתי הפעולות.

---

1 ויש אומרים: **סגורה ביחס ל־** $*$.

ב. שתי הפעולות הן קיבוציות.

ג. שתי הפעולות הן חילופיות.

ד. ב־ $\mathbb{Q}$ המספר 0 ניטרלי ביחס לחיבור והמספר 1 ניטרלי ביחס לכפל.

ה. הכפל מתפלג מעל החיבור.

ו. כל איברי $\mathbb{Q}$ הפיכים ביחס לחיבור, וכל איברי $\mathbb{Q}$ פרט ל־0 הפיכים ביחס לכפל. אכן,

לכל $a,b$ שלמים, $b \neq 0$, $\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=0$

לכל $a,b$ שלמים, $a,b \neq 0$, $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}=1$

### הגדרה 1.2.1 שדה

**שדה** הוא מבנה מתמטי, המורכב מקבוצה $F$, ומשתי פעולות על $F$ שנקרא להן **חיבור** ו**כפל**, שאותן נסמן $+_F$ ו־ $\cdot_F$ (בהתאמה), כך שמתקיימות הדרישות האלה (**אקסיומות השדה**):

א. הקבוצה $F$ **סגורה** לגבי החיבור ולגבי הכפל.

כלומר, לכל $a,b \in F$ מתקיים: $a +_F b \in F$

וגם: $a \cdot_F b \in F$

ב. פעולות החיבור והכפל הן **קיבוציות** (אָסוציאטיבִיוֹת).

כלומר, לכל $a,b,c \in F$ מתקיים:

$(a +_F b) +_F c = a +_F (b +_F c)$

וגם: $(a \cdot_F b) \cdot_F c = a \cdot_F (b \cdot_F c)$

ג. פעולות החיבור והכפל הן **חילופיות** (קומוטטיביות).

כלומר, לכל $a,b \in F$ מתקיים: $a +_F b = b +_F a$

וגם: $a \cdot_F b = b \cdot_F a$

ד. ב־ $F$ יש **איבר ניטרלי** (יחיד) ביחס לחיבור שנסמנו $0_F$, ויש **איבר ניטרלי** (יחיד) ביחס לכפל שנסמנו $1_F$. כלומר, לכל $a \in F$ מתקיים:

$a +_F 0_F = 0_F +_F a = a$

וכן: $a \cdot_F 1_F = 1_F \cdot_F a = a$

ה. האיברים הניטרליים ביחס לחיבור וביחס לכפל הם איברים **שונים** של $F$.

כלומר: $0_F \neq 1_F$

ו. **הכפל מתפלג מעל החיבור** (דיסטריבוטיביוּת).

כלומר, לכל $a,b,c \in F$ מתקיים: $a \cdot_F (b +_F c) = (a \cdot_F b) +_F (a \cdot_F c)$

ז. **כל** איברי $F$ **הפיכים** ביחס לחיבור, ו**כל** איברי $F$ **פרט ל־** $0_F$ **הפיכים** ביחס לכפל. כלומר:

לכל $a \in F$ יש $a' \in F$, כך ש־ $a +_F a' = a' +_F a = 0_F$

ולכל $a \in F$ המקיים $a \neq 0_F$, יש $a'' \in F$, כך ש־ $a \cdot_F a'' = a'' \cdot_F a = 1_F$

### טענה 1.2.2

יהי $F$ שדה, ויהי $a \in F$. קיים איבר **יחיד** $a' \in F$ כך ש־ $a +_F a' = 0_F$.

**הגדרה 1.2.3 האיבר הנגדי**

יהי $a$ איבר של שדה $F$. לַאיבר היחיד $a' \in F$ המקיים $a +_F a' = 0_F$ נקרא **האיבר הנגדי** ל־ $a$, ונסמנו $-a$.

**טענה 1.2.4**

יהי $F$ שדה, ויהי $a \in F$, $a \neq 0_F$. קיים איבר **יחיד** $a' \in F$ כך ש־ $a \cdot_F a' = 1_F$.

**הגדרה 1.2.5 האיבר ההופכי**

יהי $a \neq 0_F$ איבר של שדה $F$. לאיבר היחיד $a' \in F$, המקיים $a \cdot_F a' = 1_F$ נקרא **האיבר ההופכי** ל־ $a$, ונסמנו $a^{-1}$.

**משפט 1.2.6**

יהי $F$ שדה ויהיו $a,b \in F$. השוויון $ab = 0$ מתקיים אם ורק אם $a = 0$ או $b = 0$.

**מסקנה 1.2.7**

האפס של שדה $F$ **אינו** הפיך ביחס לכפל.

**הגדרה 1.2.8 חיסור**

יהי $F$ שדה. לכל $a,b \in F$,
$$a - b := a + (-b)$$

**הגדרה 1.2.9 חילוק**

יהי $F$ שדה. לכל $a,b \in F$, $b \neq 0$,
$$a / b := ab^{-1}$$

**הגדרה 1.3.1 שוויון $n$־יות**

נאמר שה־ $n$־יה $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ **שווה** ל־ $m$־יה $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ונרשום:
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

אם:

א. $n = m$

ב. לכל $i$, $1 \leq i \leq n$, מתקיים: $a_i = b_i$

דהיינו $a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n$

**הגדרה 1.3.2 חיבור $n$־יות מעל שדה**

יהי $F$ שדה, יהי $n$ מספר טבעי נתון, ויהיו $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n), \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.
הסכום $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ הוא ה־ $n$־יה המתקבלת על־ידי חיבור הרכיבים המתאימים של $\mathbf{a}$ ושל $\mathbf{b}$, כלומר:
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

**משפט 1.3.3 תכונות של חיבור $n$־יות**

לכל שדה $F$ ולכל מספר טבעי $n$,

א. הקבוצה $F^n$ סגורה לגבי פעולת החיבור של $n$־יות,
כלומר לכל $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^n$ מתקיים: $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in F^n$

ב. פעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$ היא קיבוצית,
כלומר לכל $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in F^n$ מתקיים: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

ג. פעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$ היא חילופית,
כלומר לכל $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^n$ מתקיים: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

ד. ה־ $n$־יה $\mathbf{0} := (0,\ldots,0) \in F^n$, שכל רכיביה הם האפס של השדה $F$, היא איבר ניטרלי ביחס לפעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$,
כלומר לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

ה. כל איברי $F^n$ הפיכים ביחס לפעולת החיבור של $n$־יות מעל $F$;
לכל $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in F^n$, ה־ $n$־יה $-\mathbf{a} = (-a_1,\ldots,-a_n) \in F^n$, שרכיביה הם האיברים הנגדיים של רכיבי $\mathbf{a}$, מקיימת: $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$

**הגדרה 1.3.4 כפל $n$־יות בסקלרים**

יהיו $F$ שדה, $n$ מספר טבעי נתון, $t \in F$ סקלר נתון, ו־ $\mathbf{a} \in F^n$, $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)$.

**הכפל $t\mathbf{a}$ של $\mathbf{a}$ בסקלר** $t$ מתקבל על־ידי כפל הרכיבים של $\mathbf{a}$ ב־ $t$.

כלומר, $t\mathbf{a} := (ta_1,...,ta_n)$

**משפט 1.3.5 תכונות הכפל בסקלר**

יהי $F$ שדה, ויהי $n$ מספר טבעי נתון.

א. לכל $\mathbf{a} \in F^n$ ולכל סקלר $t \in F$, $t\mathbf{a} \in F^n$

ב. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

ג. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

ד. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$

ה. לכל $\mathbf{a} \in F^n$, ולכל $s$, $t \in F$, $(st)\mathbf{a} = s(t\mathbf{a})$
וכן: $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$

ו. לכל $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^n$ ולכל $t \in F$, $t(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = t\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

**הגדרה 1.4.1 משוואה לינארית מעל שדה**

**משוואה לינארית סטנדרטית ב־ $n$ משתנים מעל שדה $F$** היא משוואה מהטיפוס

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

שבה $x_1,\ldots,x_n$ הם משתנים, ו־ $a_1,\ldots,a_n,b$, המכונים **מקדמי המשוואה**, הם סקלרים (כלומר איברים של $F$). הסקלרים $a_1,\ldots,a_n$ נקראים **מקדמי המשתנים**, הסקלר $b$ נקרא **המקדם החופשי**.

משוואה ב־ $n$ משתנים מעל השדה $F$ נקראת **משוואה לינארית**, אם התנאי שהיא מציבה על $n$־יות מעל $F$ ניתן להצגה באמצעות משוואה לינארית סטנדרטית.

**הגדרה 1.4.2 פתרון של משוואה לינארית**

תהי
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$
משוואה לינארית ב־ $n$ משתנים מעל שדה $F$.

על $n$־יה $(v_1,\ldots,v_n) \in F^n$ של סקלרים מתוך $F$ נאמר שהיא **פתרון** של המשוואה (או שהיא **פותרת** אותה) אם הטענה שהמשוואה מייצגת כאשר $(x_1,\ldots,x_n) = (v_1,\ldots,v_n)$ היא נכונה.

**הגדרה 1.5.1 מערכת לינארית סטנדרטית מסדר $m \times n$ מעל שדה $F$**

**מערכת לינארית סטנדרטית מסדר** $m \times n$ (קרי: "$m$ על $n$"), היא מערכת מהטיפוס:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$x_1,\ldots,x_n$ הם המשתנים, $a_{ij}$ $(1 \le j \le m,\ \ 1 \le i \le n)$ הם מקדמי המשתנים, $b_i$ הם המקדמים החופשיים.

**הגדרה 1.5.2 פתרון של מערכת לינארית**

תהי נתונה מערכת לינארית מסדר $m \times n$, מעל שדה $F$. נסמן ב־ $(x_1,\ldots,x_n)$ את $n$־ית המשתנים שלה.

$n$־יה $(v_1,\ldots,v_n)$ של סקלרים מתוך $F$ נקראת **פתרון של המערכת**, אם היא פותרת כל אחת מ־ $m$ המשוואות של המערכת, כלומר אם עבור $(x_1,\ldots,x_n) = (v_1,\ldots,v_n)$, כל טענות השוויון המתקבלות ממנה הן נכונות.

**הגדרה 1.5.3 מערכת הומוגנית/אי־הומוגנית**

מערכת לינארית, שכל המקדמים החופשיים שלה הם אפסים, נקראת **מערכת** (לינארית) **הומוגנית**.

הצורה הכללית של מערכת הומוגנית היא:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \\
a_{m1}x_{12} + \ldots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}$$

מערכת לינארית שאינה הומוגנית נקראת **מערכת אי־הומוגנית**.

**הגדרה 1.8.1 מטריצות שקולות־שורה**

תהיינה $A,B$ מטריצות מאותו סדר. נאמר ש־ $A$ **שקולת־שורה** (Row equivalent) ל־ $B$, אם יש סדרה סופית של פעולות־שורה עוקבות שמובילה מ־ $A$ ל־ $B$.

**הגדרה 1.10.1 שורת אפס, איבר פותח**

א. שורה של מטריצה, שכל איבריה הם אפסים, מכונה **שורת אפס**.

ב. שורה של מטריצה שאיננה שורת אפס, האיבר הראשון בה משמאל השונה מ־$0$ מכונה **האיבר הפותח** של השורה.

ג. איבר של מטריצת מדרגות, שהוא **ה**איבר **ה**פותח של אחת משורותיה, יכונה להבא **איבר פותח** של המטריצה.

**הגדרה 1.10.2 מטריצת מדרגות**

**מטריצת מדרגות** היא מטריצה שעונה על הדרישות האלה:

א. בכל שורה שאינה שורת אפס, האיבר הפותח הוא מימין לאיברים הפותחים של השורות שמעליו (כשיש שורות כאלה).

ב. כל שורות האפס (אם יש כאלה) הן מתחת לכל השורות שאינן שורות אפס.

**הגדרה 1.10.3 מערכת לינארית מְדוֹרֶגֶת**

מערכת לינארית, אשר מטריצת המקדמים שלה היא מטריצת מדרגות, נקראת **מערכת (לינארית) מְדוֹרֶגֶת**.

**הגדרה 1.10.4 משתנים קשורים ומשתנים חופשיים של מערכת מדורגת**

משתנה של מערכת מדורגת נקרא **משתנה קשור**, אם המקדם המופיע לצדו הוא איבר פותח.

משתנה של המערכת שאינו קשור נקרא **משתנה חופשי**.

**משפט 1.10.5 משפט הדֵירוּג**

כל מטריצה מעל כל שדה ניתנת לדירוג.

**מסקנה 1.10.6**

כל מערכת לינארית שקולה ל**מערכת מדורגת**.

**הגדרה 1.7.1 מערכות לינאריות שקולות**

שתי מערכות לינאריות ב־ $n$ משתנים מעל שדה נתון הן **שקולות** זו לזו, אם יש לשתיהן אותה קבוצת פתרונות.

**הגדרה 1.7.2 שינוי אלמנטרי במערכת לינארית**

**שינוי אלמנטרי** במערכת לינארית הוא שינוי מאחד הטיפוסים האלה:

1. החלפת סדר הופעתן של שתי משוואות במערכת.
2. כפל אחת המשוואות בסקלר שונה מאפס.
3. הוספת כפולה בסקלר של אחת ממשוואות המערכת למשוואה אחרת של המערכת.

**משפט 1.7.3**

אם מערכת לינארית מתקבלת ממערכת נתונה באמצעות סדרה סופית של שינויים אלמנטריים עוקבים, אז היא שקולה למערכת המקורית.

**הגדרה 1.11.1 מטריצת מדרגות קנונית**

**מטריצת מדרגות קנונית** היא מטריצת מדרגות אשר כל האיברים הפותחים בה הם 1, ובכל עמודה שבה יש איבר פותח, וכל יתר האיברים הם 0.

**משפט 1.11.2 קיום הצגה קנונית**

לכל מטריצה, מעל כל שדה, **יש** הצגה קנונית.

לשון אחר – כל מטריצה היא שקולת־שורה למטריצת מדרגות קנונית.

**משפט 1.11.3 יחידות ההצגה הקנונית**

ההצגה הקנונית של כל מטריצה היא **יחידה**.

לשון אחר – כל מטריצה היא שקולת־שורות למטריצת מדרגות קנונית **יחידה**.

**משפט 1.12.1 בוחן לעקביות של מערכות לינאריות מדורגות**

תהי נתונה מערכת לינארית **מדורגת** $A$, מעל שדה כלשהו $F$. המערכת $A$ היא עקבית אם ורק אם במטריצה המתאימה $A$ אין שורה מהטיפוס: $[0,\ldots,0,a] \quad (a \neq 0)$

(כלומר, אם ורק אם במטריצה אין שורה, שהאיבר הפותח שלה הוא בעמודה האחרונה.)

**משפט 1.12.2 כמות הפתרונות של מערכת לינארית מדורגת**

תהי נתונה מערכת לינארית מדורגת $A$ מעל שדה כלשהו $F$, ונניח שהמערכת $A$ עקבית.

א. אם כל המשתנים של המערכת הם קשורים, אז למערכת יש פתרון יחיד.

ב. אם במערכת יש משתנה חופשי אחד לפחות, אז למערכת יש יותר מפתרון אחד.
כמות הפתרונות תלויה, במקרה זה, בכמות איברי השדה $F$:
אם $F$ שדה אינסופי, אז למערכת יש אינסוף פתרונות;
אם $F$ שדה סופי – כמות הפתרונות היא סופית, ושווה למספר איברי $F$ בחזקת מספר המשתנים החופשיים של המערכת.

**מסקנה 1.12.3 כמות הפתרונות של מערכת לינארית מעל $\mathbb{R}$**

לכל מערכת לינארית מעל $\mathbb{R}$ מתקיימת אחת משלוש האפשרויות האלה:

1. למערכת אין פתרון,
2. למערכת יש פתרון יחיד,
3. למערכת יש אינסוף פתרונות.

**משפט 1.13.2**

אם במערכת הומוגנית מספר המשתנים גדול ממספר המשוואות, אז למערכת **יש** פתרון לא־טריוויאלי.

**הגדרה 1.13.3 מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת לינארית**

**מטריצת המקדמים המצומצמת** של מערכת לינארית $A$ מסדר $m \times n$ היא המטריצה מסדר $m \times n$, המורכבת מ־ $n$ העמודות הראשונות של מטריצת המקדמים של $A$, כלומר מעמודות המקדמים של משתני המערכת בלבד.

**משפט 1.14.1**

אם $A$ מטריצת מדרגות קנונית, ריבועית מסדר $n$, שבה בכל שורה יש איבר פותח, אז $A = I_n$.

**משפט 1.14.2**

למערכת לינארית מסדר $n \times n$ מעל שדה $F$ יש פתרון יחיד אם ורק אם מטריצת המקדמים המצומצמת שלה שקולת־שורות למטריצת היחידה $I_n$.

**למה**

תהיינה $A$ ו־ $C$ מטריצות שקולות־שורה.

אם $A'$ מתקבלת מ־ $A$ על־ידי מחיקת אחת מן העמודות של $A$, ו־ $C'$ מתקבלת מ־ $C$ על־ידי מחיקת העמודה המקבילה של $C$, אז גם $A'$ ו־ $C'$ שקולות־שורה.

**משפט 1.14.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. אם לאחת מן המערכות הלינאריות ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלהן יש פתרון יחיד, אז לכל מערכת ש־ $A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה, יש פתרון יחיד.

**משפט 1.14.4**

מטריצת המקדמים המצומצמת של מערכת לינארית **הומוגנית** של $n$ משוואות ב־ $n$ נעלמים מקיימת טענה אחת מהשתיים:

א. או שהיא שקולת־שורה למטריצה שבה יש שורת אפסים, וזאת אם ורק אם **יש** למערכת פתרון לא־טריוויאלי.

ב. או שהיא שקולת־שורה למטריצה היחידה, וזאת אם ורק אם למערכת יש פתרון אחד בלבד – הפתרון הטריוויאלי.

**משפט 1.11.3 יחידות ההצגה הקנונית**

ההצגה הקנונית של כל מטריצה היא **יחידה**.

לשון אחר – כל מטריצה היא שקולת־שורות למטריצת מדרגות קנונית **יחידה**.

**טענה 2.2.1**

**לכל** $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$

**טענה 2.2.2**

יהי $\mathbf{a}$ וקטור ב־ $\mathbb{R}^2$, ויהי $t$ סקלר ממשי.

הקשר הגיאומטרי בין הוקטורים $\mathbf{a}$ ו־ $t\mathbf{a}$ הוא כדלהלן:

א. $t\mathbf{a}$ מונח על הישר שעליו מונח $\mathbf{a}$.

ב. $t\mathbf{a}$ ארוך פי $|t|$ מ־ $\mathbf{a}$.

ג. $t\mathbf{a}$ הוא בכיוון של $\mathbf{a}$ אם $t > 0$, ובכיוון ההפוך ל־ $\mathbf{a}$ אם $t < 0$.

**טענה 2.3.1 הצגה פרמטרית של ישר שעובר דרך הראשית**

אם $\ell$ ישר העובר דרך הראשית במישור או במרחב קרטזי, ו־ $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ היא נקודה עליו, אז:

$$\ell = \{t\mathbf{a} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

ההצגה של $\ell$ בדרך זו מכונה **הצגה פרמטרית של** $\ell$, ואומרים ש־ $\ell$ הוא **הישר שנקבע על־ידי** $\mathbf{a}$.

**טענה 2.3.2 הצגה פרמטרית של ישר כללי**

א. יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ב־ $\mathbb{R}^2$ או ב־ $\mathbb{R}^3$, כאשר $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ו־ $\mathbf{b}$ אינו מונח על הישר העובר דרך הראשית ו־ $\mathbf{a}$.

אזי האוסף $\{t\mathbf{a} + \mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}\}$, שאותו נהוג לסמן בקיצור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$, הוא ישר.

זהו הישר שמקביל לוקטור $\mathbf{a}$ ועובר דרך הנקודה $\mathbf{b}$.

ב. לכל ישר $\ell$ (במישור או במרחב), יש וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, שעבורם $\ell = \mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

(לשון אחר, לכל ישר $\ell$ יש **הצגה פרמטרית** מהצורה $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbf{b}$.)

**טענה 2.3.3 הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך שתי נקודות**

תהיינה $\mathbf{c} \neq \mathbf{d}$ נקודות שונות כלשהן, במישור או במרחב. הישר העובר דרכן הוא:

$$\{t(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

זהו הישר $\ell = \mathbb{R}(\mathbf{c} - \mathbf{d}) + \mathbf{d}$.

**הגדרה 2.3.4 צירוף לינארי**

סכום מהטיפוס $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$

מכונה **צירוף לינארי של הוקטורים** $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$. הסקלרים $s$ ו־ $t$ נקראים **מקדמי הצירוף**.

**טענה 2.3.5**

יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ וקטורים שמונחים על ישרים שונים.

אזי אוסף כל הצירופים הלינאריים של $\mathbf{a}$ ו־ $\mathbf{b}$, $\{s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

שאותו אפשר לסמן בקיצור $\mathbb{R}\mathbf{a} + \mathbb{R}\mathbf{b}$, הוא הצגה פרמטרית של המישור.

**טענה 2.3.6**

א. יהיו $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ב־$\mathbb{R}^3$, וקטורים שאינם מונחים על ישר אחד, ותהי $\mathbf{c}$ נקודה ב־$\mathbb{R}^3$. אזי $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{b}+\mathbf{c}$ הוא מישור מקביל למישור $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{b}$, כלומר זהו המישור שמקביל למישור שנפרש על־ידי $\mathbf{a}$ ו־$\mathbf{b}$ ועובר דרך $\mathbf{c}$.

ב. לכל מישור $L$ במרחב, יש וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, כאשר $\mathbf{a},\mathbf{b}$ אינם מונחים על ישר אחד, שעבורם:

$$L=\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{b}+\mathbf{c}$$

(לשון אחר, לכל מישור $L$ יש **הצגה פרמטרית** מהצורה $\mathbb{R}\mathbf{a}+\mathbb{R}\mathbf{b}+\mathbf{c}$.)

**טענה 2.3.7 הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידי שלוש נקודות לא קוויות**

תהיינה $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ נקודות לא קוויות. המישור $L$, הנקבע על־ידי שלוש הנקודות האלה, הוא:

$$L=\mathbb{R}(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\mathbb{R}(\mathbf{b}-\mathbf{c})+\mathbf{c}$$

**טענה 2.3.8**

תהי $a_1x+a_2y=a_3$ משוואה לינארית בשני משתנים מעל $\mathbb{R}$.
אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית, אז אוסף הפתרונות שלה הוא ישר במישור. ישר זה נקרא **הישר המתאים למשוואה**.

**טענה 2.3.9**

אוסף הפתרונות של מערכת לינארית בשני משתנים הוא אחד מאלה:

א. **אוסף ריק** (אין נקודות משותפות לכל הישרים המתאימים למשוואות במערכת).
ב. **נקודה** בודדת (הישרים המתאימים למשוואות הלא־טריוויאליות נחתכים בנקודה אחת; אם המערכת הומוגנית, הנקודה הזאת היא הראשית).
ג. **ישר** (הישרים המתאימים למשוואות הלא־טריוויאליות מתלכדים).
ד. **המישור** כולו (המערכת טריוויאלית).

**טענה 2.3.10**

תהי $a_1x+a_2y+a_3z=a_4$ משוואה לינארית בשלושה משתנים מעל $\mathbb{R}$. אם המשוואה עקבית ולא טריוויאלית אז אוסף הפתרונות שלה הוא מישור במרחב. מישור זה נקרא **המישור המתאים למשוואה**.

**טענה 2.3.11**

אוסף הפתרונות של מערכת לינארית בשלושה משתנים הוא אחד מאלה:
**אוסף ריק**, או **נקודה** בודדת, או **ישר**, או **מישור** במרחב, או **המרחב** כולו.

**הגדרה 2.5.1 צירוף לינארי כללי**

יהיו $F$ שדה, $k$ מספר טבעי, ו־$\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־$F^n$. סכום מהטיפוס

$$s_1\mathbf{a}_1+s_2\mathbf{a}_2+\ldots+s_k\mathbf{a}_k$$

שבו $s_1,\ldots,s_k$ הם סקלרים כלשהם, נקרא **צירוף לינארי** של הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. הסקלרים $s_1,\ldots,s_k$ נקראים **מקדמי הצירוף**.

**משפט 2.5.2**

אם $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ $(k \ge 1)$ הם פתרונות של מערכת הומוגנית, אז כל צירוף לינארי של $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ אף הוא פתרון של אותה מערכת.

**משפט 2.5.3**

יהיו $F$ שדה, ו־ $n$ מספר טבעי, ויהיו

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix},\ldots,\ \mathbf{a}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

$k$ וקטורים ב־ $F^n$, ו־ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ וקטור כלשהו ב־ $F^n$. נתבונן במטריצה

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \\ \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k & \mathbf{b} \end{array}$$

שעמודותיה הן הוקטורים $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots\mathbf{a}_k,\mathbf{b}$.

אז:

$$s_1\mathbf{a}_1 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

**הגדרה 2.6.1 קבוצה בלתי תלויה לינארית; קבוצה תלויה לינארית**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים ב־ $F^n$. נאמר שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ **בלתי תלויה לינארית** אם מן השוויון $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (כאשר $s_1,\ldots,s_k$ סקלרים) נובע בהכרח כי:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0$$

כלומר, הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ היא בלתי תלויה לינארית אם ורק אם **אין** ל־ $\mathbf{0}$ הצגה כצירוף לינארי **לא־טריוויאלי** של איברי הקבוצה. אם הקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ איננה מקיימת תנאי זה, נאמר שהיא **תלויה לינארית**.

**הגדרה 2.6.2 קבוצה תלויה לינארית**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים שונים ב־ $F^n$. נאמר שהקבוצה $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ **תלויה לינארית** אם קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_k$ שלא כולם אפס כך ש־

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

**משפט 2.6.3**

עבור $k \geq 2$, קבוצת בת $k$ וקטורים $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k\}$ ב־$F^n$ היא תלויה לינארית אם ורק אם לפחות אחד מבין הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ הוא צירוף לינארי של האחרים.

**טענה 2.6.4**

א. קבוצת וקטורים שיש לה תת־קבוצה תלויה לינארית היא תלויה לינארית.

ב. אם קבוצת וקטורים היא בלתי־תלויה לינארית, אז כל קבוצה חלקית שלה היא בלתי תלויה לינארית.

**הגדרה 2.6.1′ סדרה בלתי תלויה לינארית; סדרה תלויה לינארית**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים ב־$F^n$. נאמר שהסדרה היא **בלתי תלויה לינארית** אם מן השוויון $s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (כאשר $s_1,\ldots,s_k$ סקלרים) נובע בהכרח כי:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_k = 0$$

נאמר שהסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ **תלויה לינארית** אם היא איננה בלתי תלויה לינארית. כלומר, אם קיימים סקלרים $s_1,\ldots,s_k$ שלא כולם אפס כך ש־

$$s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \ldots + s_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

**טענה 2.6.5**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־$F^n$, ותהי $A$ המטריצה שעמודותיה הן $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$. הוקטורים $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ בלתי־תלויים לינארית אם ורק אם למערכת ההומוגנית ש־$A$ היא מטריצת המקדמים המצומצמת שלה יש פתרון טריוויאלי בלבד.

**משפט 2.6.6**

יהיו $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים ב־$F^n$. אם $k > n$, אז $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ תלויים לינארית.

**מסקנה 2.6.7**

אם $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ וקטורים בלתי תלויים לינארית ב־$F^n$, אז $k \leq n$.

**הגדרה 2.7.1**

על קבוצת/סדרת וקטורים ב־$F^n$ נאמר שהיא **פורשת את $F^n$** אם כל וקטור ב־$F^n$ ניתן להצגה כצירוף לינארי של איברי הקבוצה/סדרה.

**למה 2.7.2**

תהי $A$ מטריצה בעלת $n$ שורות, ונניח שלכל וקטור עמודה $\mathbf{b}$ מאורך $n$, המטריצה $A|\mathbf{b}$ מתארת מערכת משוואות עקבית (מערכת בעלת פתרון). תהי $A'$ מטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי צעד דירוג. אז לכל וקטור עמודה $\mathbf{b}'$ מאורך $n$, גם המטריצה $A'|\mathbf{b}'$ מתארת מערכת משוואות עקבית.

**משפט 2.7.3**

תהי $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ סדרת וקטורים ב־ $F^n$. אם $k < n$, אז הסדרה **אינה פורשת** את $F^n$.

**מסקנה 2.7.4**

אם הסדרה $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$ פורשת את $F^n$, אז $k \ge n$.

**מסקנה 2.7.5**

כל **סדרה** בלתי תלויה לינארית הפורשת את $F^n$ מכילה **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

**מסקנה 2.7.5′**

כל **קבוצה** בלתי תלויה לינארית הפורשת את $F^n$ מכילה **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

**הגדרה 2.7.6 בסיס; בסיס סדור**

קבוצת וקטורים ב־ $F^n$ נקראת **בסיס** ל־ $F^n$ אם:

א. היא בלתי תלויה לינארית.

ב. היא פורשת את $F^n$.

**סדרת** וקטורים ב־ $F^n$ נקראת **בסיס סדור** ל־ $F^n$ אם ורק אם **הקבוצה** המורכבת מאיברי הסדרה מהווה בסיס.

**משפט 2.7.7**

בכל בסיס של $F^n$ יש **בדיוק** $n$ וקטורים שונים.

**משפט 2.7.8**

קבוצה של $n$ וקטורים ב־ $F^n$ פורשת את $F^n$ **אם ורק אם** היא בלתי תלויה לינארית.

**משפט 2.7.9**

אם $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ הוא בסיס סדור ל־ $F^n$, אז ההצגה של כל וקטור $\mathbf{b} \in F^n$ כצירוף לינארי של $\mathbf{a}_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ היא יחידה. כלומר, אם

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} s_i \mathbf{a}_i$$

וגם

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{a}_i$$

אז לכל $i$, $1 \le i \le n$ מתקיים:

$$t_i = s_i$$

**משפט 2.7.10**

אם למערכת ההומוגנית

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

יש רק פתרון אחד (הפתרון הטריוויאלי), אז לכל מערכת מהטיפוס

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_n \end{array}$$

יש פתרון אחד ויחיד.

**משפט 2.7.11**

קבוצה בת $n$ וקטורים שונים ב־ $F^n$ היא בסיס ל־ $F^n$ אם ורק אם מתקיים **אחד** התנאים הבאים:

א. הקבוצה בלתי תלויה לינארית.

ב. הקבוצה פורשת את $F^n$.

**הגדרה 3.1.1 שוויון מטריצות**

שתי מטריצות $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ , $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ (מעל אותו שדה), הן **שוות זו לזו** אם מתקיים:

א. שתי המטריצות הן מאותו סדר, כלומר:

$$m = p,\ n = q$$

ב. האיברים המתאימים בשתי המטריצות שווים זה לזה. כלומר, לכל $i$ ו־ $j$ המקיימים $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

אם המטריצות $A$ ו־ $B$ שוות זו לזו נרשום $A = B$ ; אחרת נרשום $A \ne B$.

**הגדרה 3.2.1 מטריצת שורה/עמודה**

א. מטריצה מסדר $1 \times n$ נקראת **וקטור שורה** (מסדר $n$) או **מטריצת שורה** (מסדר $n$).

ב. מטריצה מסדר $m \times 1$ (כלומר, מטריצה שיש בה עמודה אחת בלבד) נקראת **וקטור עמודה** (מסדר $m$) או **מטריצת עמודה** (מסדר $m$).

**הגדרה 3.2.2**

- את השורה ה־ $i$ של מטריצה $A$ נסמן ב־ $[A]_i^r$.
- את העמודה ה־ $j$ של מטריצה $A$ נסמן ב־ $[A]_j^c$.

**הגדרה 3.2.3 המטריצה המשוחלפת**

תהי $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ מטריצה מסדר $m \times n$. **המטריצה המשוחלפת** של $A$ היא המטריצה מסדר $n \times m$ אשר האיבר ה־ $(i, j)$ שלה הוא האיבר ה־ $(j,i)$ של המטריצה $A$.

את המטריצה המשוחלפת של $A$ מסמנים ב־ $A^t$.

**טענה 3.2.4**

לכל מטריצה $A$, $\left(A^t\right)^t = A$.

**הגדרה 3.2.5 מטריצה ריבועית; אלכסון ראשי; אלכסון משני**

א. מטריצה שבה מספר השורות שווה למספר העמודות (נניח, מסדר $n \times n$), מכונה **מטריצה ריבועית (מסדר $n$)**.

ב. ה־$n$־יה $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ של איברי המטריצה הריבועית $\left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ מכונה בשם **האלכסון הראשי**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ג. ה־$n$־יה $(a_{1n}, a_{2(n-1)}, \ldots, a_{n1})$ של איברי המטריצה הריבועית $\left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ מכונה בשם **האלכסון המשני**.

$$\begin{bmatrix} & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n,1} & & & \end{bmatrix}$$

**הגדרה 3.2.6 מטריצה סימטרית**

מטריצה $A$ נקראת **סימטרית** אם $A^t = A$.

**סימון 3.3.1**

יהיו $m,n$ מספרים טבעיים, ויהי $F$ שדה. נסמן ב־$\mathbf{M}_{m \times n}(F)$ את אוסף כל המטריצות מסדר $m \times n$ מעל $F$, וב־$\mathbf{M}_n(F)$ את אוסף המטריצות הריבועיות מסדר $n$ מעל $F$. (כלומר, $\mathbf{M}_n(F) = \mathbf{M}_{n \times n}(F)$.)

**הגדרה 3.3.2 חיבור מטריצות**

תהיינה $A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}(F)$, ונסמן $A = \left[a_{ij}\right],\ B = \left[b_{ij}\right]$. הסכום $A + B$ הוא המטריצה ב־$\mathbf{M}_{m \times n}(F)$ המוגדרת על־ידי:

$$A + B \overset{\text{def}}{=} \left[(a_{ij} + b_{ij})\right]_{m \times n}$$

לפי הגדרה זו, חיבור מטריצות מתבצע רכיב־רכיב - כלומר האיבר ה־$(i,j)$ במטריצה $A + B$ הוא סכום איברי $(i,j)$ של המטריצות $A$ ו־$B$, כלומר $a_i + b_i$.

**טענה 3.3.3 תכונות החיבור**

פעולת החיבור על הקבוצה $\mathbf{M}_{m \times n}(F)$ מקיימת:

א. **סגירות**: לכל $A, B \in \mathbf{M}_{m \times n}(F)$, $A + B \in \mathbf{M}_{m \times n}(F)$

ב. **חילופיות**: לכל $A,B \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$, $A+B=B+A$ **קיבוציות**:
לכל $A,B,C \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$, $(A+B)+C = A+(B+C)$

ג. **קיום איבר ניטרלי**: תהי $O_{m\times n}$ המטריצה ב־$\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ שכל איבריה אפסים. למטריצה זו נקרא **מטריצת האפס** מסדר $m\times n$ מעל $F$. המטריצה $O_{m\times n}$ ניטרלית ביחס לחיבור.

ד. **קיום איברים נגדיים**: לכל מטריצה $A$ ב־$\mathbf{M}_{m\times n}(F)$ קיימת מטריצה, שתסומן $-A$, המקיימת:
$$A+(-A) = (-A)+A = 0$$

**הגדרה 3.3.4 כפל של מטריצה בסקלר**

תהי $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ מטריצה מעל שדה $F$, ויהי $t\in F$ סקלר. **המכפלה** $tA$ היא המטריצה:
$$tA = [ta_{ij}]$$

כלומר, במטריצה $tA$ האיבר ה־$(i,j)$ הוא מכפלת האיבר ה־$(i,j)$ של $A$ בסקלר $t$.

**משפט 3.3.5 תכונות הכפל של מטריצה בסקלר**

פעולת הכפל בסקלר מקיימת:

א. לכל מטריצה $A\in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ ולכל סקלר $t\in F$, מתקיים: $tA \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$

ב. לכל מטריצה $A\in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ ולכל זוג סקלרים $s,t\in F$ מתקיים:
(i) $(s+t)A = sA+tA$
(ii) $(st)A = s(tA)$

ג. לכל זוג מטריצות $A,B \in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$, ולכל $t\in F$ מתקיים: $t(A+B) = tA+tB$

ד. לכל מטריצה $A\in \mathbf{M}_{m\times n}(F)$ מתקיים:
(i) $1\cdot A = A$
(ii) $0\cdot A = O$
(iii) $(-1)\cdot A = -A$

**הגדרה 3.3.6 הפרש מטריצות**

תהיינה $A$ ו־$B$ שתי מטריצות מאותו סדר. ה**הפרש**, $A-B$, מוגדר על־ידי:
$$A-B \overset{\text{def}}{=} A+(-B)$$

**משפט 3.3.7**

א. לכל מטריצה $A$ ולכל סקלר $s$, מתקיים: $(sA)^t = sA^t$

ב. לכל שתי מטריצות $A,B$ מאותו סדר: $(A+B)^t = A^t + B^t$

**הגדרה 3.4.1**

יהיו

$$B_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad A_{1\times n} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right]$$

וקטור שורה ווקטור עמודה מאותו סדר, מעל שדה מסוים.

המכפלה

$$A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1}$$

היא הסקלר

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

כלומר:

$$A_{1\times n} B_{n\times 1} = \left[a_1, a_2, \ldots, a_n\right] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

למכפלה מסוג זה קוראים **מכפלה סקלרית**.

**הגדרה 3.4.2 מכפלת מטריצות**

תהיינה $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ו־ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times q}$, שתי מטריצות מהסדרים הנקובים. **המכפלה**, $A_{m\times n} \cdot B_{n\times q}$, היא מטריצה מסדר $m \times q$, אשר האיבר ה־ $(i, j)$ שלה, כאשר $1 \le j \le q$, $1 \le i \le m$, הוא מכפלת וקטור השורה ה־ $i$ של $A$ בוקטור העמודה ה־ $j$ של $B$.

אם נסמן $C = AB$, אז לכל $1 \le i \le m$ ו־ $1 \le j \le q$,

$$[C]_{ij} = [A]_i^r [B]_j^c = \left[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

**למה 3.4.3**

תהיינה $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$, $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, ונסמן

$$AB = C = \left[c_{ij}\right]_{m\times p}$$

אזי:

א. השורה ה־ $i$ של $AB$ היא מכפלת השורה ה־ $i$ של $A$ ב־ $B$:

כלומר

$$[C]_i^r = [A]_i^r \cdot B$$

ובמפורש:

$$[c_{i1}, \ldots c_{ip}] = [a_{i1}, \ldots a_{in}]B$$

ב. העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא מכפלת $A$ בעמודה ה־ $j$ של $B$:
כלומר

$$\left[C\right]_j^c = A\cdot\left[B\right]_j^c$$

ובמפורש:

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

**מסקנה 3.4.4**

א. אם השורה ה־ $i$ של $A$ היא שורת אפסים, אז גם השורה ה־ $i$ של $AB$ היא שורת אפסים.

ב. אם העמודה ה־ $j$ של $B$ היא עמודת אפסים, אז גם העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא עמודת אפסים.

**טענה 3.4.5**

לכל שתי מטריצות $B,A$ שעבורן מוגדרת המכפלה $AB$ מתקיים:

$$(AB)^t = B^t A^t$$

(כלומר $B^t A^t$ מוגדרת ושווה ל־ $(AB)^t$).

**משפט 3.5.1 קיבוציות הכפל**

תהיינה $C_{p\times q}$, $B_{n\times p}$, $A_{m\times n}$ מטריצות מהסדרים הנקובים. אז המכפלות $(AB)C$ ו־ $A(BC)$ מוגדרות שתיהן ומתקיים:

$$(AB)C = A(BC)$$

**הגדרה 3.5.2 מטריצת היחידה**

**מטריצת היחידה מסדר** $n$, שסימנה $I_n$, היא המטריצה הריבועית מסדר $n$ אשר כל איברי האלכסון הראשי שלה שווים ל־1 (איבר היחידה של השדה שמעליו אנו פועלים), וכל יתר איבריה הם אפסים. כלומר, $I_n = \left[\delta_{ij}\right]_{n\times n}$ כאשר $\delta_{ij}$ מוגדר על־ידי:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

כאשר אין חשש לאי־בהירות בעניין סדר המטריצה רושמים פשוט $I$ במקום $I_n$, ומסמנים:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

**משפט 3.5.3**

לכל מטריצה $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ (מסדר $m \times n$) מתקיים:

א. $I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}$

ב. $A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}$

**מסקנה 3.5.4**

אם $A$ היא מטריצה ריבועית מסדר $n$, אז:

$$AI_n = I_n A = A$$

**משפט 3.5.5 פילוג הכפל מעל החיבור**

**א. כלל הפילוג השמאלי:**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות מסדר $m \times n$ ו־ $C$ מטריצה מסדר $n \times p$. אזי:

$$(A + B) \cdot C = AC + BC$$

**ב. כלל הפילוג הימני:**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות מסדר $m \times n$ ו־ $C$ מטריצה מסדר $p \times n$. אזי:

$$C \cdot (A + B) = CA + CB$$

**טענה 3.5.6**

תהיינה $A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$ מטריצות שעבורן מוגדרת המכפלה $AB$, ויהי $t$ סקלר כלשהו. אז:

א. $t(AB) = (tA)B$

ב. $t(AB) = A(tB)$

**טענה 3.6.1**

א. הקבוצה $\mathbf{M}_n(F)$ סגורה ביחס לפעולת כפל מטריצות.

ב. פעולת הכפל על $\mathbf{M}_n(F)$ היא פעולה קיבוצית.

ג. מטריצת היחידה $I$ היא איבר ניטרלי ב־ $\mathbf{M}_n(F)$ ביחס לפעולת הכפל.

**הגדרה 3.6.2 מטריצות מתחלפות**

נאמר ששתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, $A$ ו־ $B$, **מתחלפות זו עם זו** (או בקיצור, **מתחלפות**) אם:

$$AB = BA$$

במקרה זה נאמר גם כי $A$ מתחלפת עם $B$ (או $B$ מתחלפת עם $A$).

**מסקנה 3.6.3**

כל מטריצה **סקלרית** מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית $A$ מאותו הסדר.

כלומר, לכל מטריצה ריבועית $A$ מסדר $n$ ולכל סקלר $t$, מתקיים $(tI)A = A(tI)$.

**משפט 3.6.4**

תהי $C = \left[c_{ij}\right]$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.

אם $C$ מתחלפת עם כל מטריצה ריבועית מסדר $n$, אז $C$ היא מטריצה סקלרית.

**הגדרה 3.6.5 חזקה של מטריצה ריבועית**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ויהי $n \geq 0$ מספר שלם.

**החזקה ה־ $n$ ־ית של** $A$, שסימנה $A^n$, מוגדרת באופן אינדוקטיבי כך:

עבור $n = 0$:

$$A^0 \overset{\text{def}}{=} I$$

עבור $n > 0$:

$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

**מסקנה 3.6.6**

אם $B$ ו־ $C$ הן חזקות של מטריצה ריבועית $A$, אז $B$ ו־ $C$ מתחלפות בכפל.

**הגדרה 3.6.7 מטריצה אלכסונית**

מטריצה ריבועית $A = \left[a_{ij}\right]$ נקראת **אלכסונית** אם כל איבריה שמחוץ לאלכסון הראשי הם אפסים.

כלומר $A = \left[a_{ij}\right]$ היא אלכסונית אם לכל $i \neq j$ מתקיים $a_{ij} = 0$.

**טענה 3.6.8**

תהי $A = \left[a_{ij}\right]$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, ותהי $B$ המטריצה האלכסונית:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{bmatrix}$$

אזי:

א.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_1 & a_{12}b_2 & \dots & a_{1n}b_n \\ & & \vdots & \\ a_{n1}b_1 & a_{n2}b_2 & \dots & a_{nn}b_n \end{bmatrix} = \left[ [A]_1^c \, b_1 \;\cdots [A]_n^c \, b_n \right]$$

כלומר, העמודה ה־ $j$ של $AB$ היא העמודה ה־ $j$ של $A$ מוכפלת ב־ $b_j$.

ב.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} b_1a_{11} & b_1a_{12} & \dots & b_1n_{1n} \\ & & \vdots & \\ b_na_{n1} & b_na_{n2} & \dots & b_na_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 [A]_1^r \\ b_2 [A]_2^r \\ \vdots \\ b_n [A]_n^r \end{bmatrix}$$

כלומר, השורה ה־ $i$ של $BA$ היא השורה ה־ $i$ של $A$ מוכפלת ב־ $b_i$.

**טענה 3.8.1**

תהי $A$ מטריצה ריבועית כלשהי מסדר $n$, שיש בה שורת אפסים.

לכל מטריצה $B$ (ריבועית מסדר $n$) מתקיים:

$$AB \neq I$$

**הגדרה 3.8.2 מטריצה הפיכה**

יהי $F$ שדה. מטריצה ריבועית $A$ ב־$\mathbf{M}_n(F)$ נקראת **הפיכה** (או - **רגולרית**) אם קיימת מטריצה $B$ ב־$\mathbf{M}_n(F)$ כך ש־

$$AB = BA = I$$

**טענה 3.8.3**

תהי $A$ מטריצה **הפיכה**.

א. אם $AB = AC$ אז:

$$B = C$$

ב. אם $BA = CA$ אז:

$$B = C$$

**משפט 3.8.4**

א. אם $A$ מטריצה הפיכה, אז גם $A^{-1}$ הפיכה ומתקיים:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ב. המטריצה $A$ הפיכה אם ורק אם המטריצה המשוחלפת $A^t$ הפיכה, ובמקרה זה מתקיים:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

ג. אם $A$ ו־$B$ מטריצות הפיכות (מאותו סדר!) אז גם $AB$ הפיכה ומתקיים:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

**הגדרה 3.9.1 מטריצה אלמנטרית**

מטריצה **אלמנטרית** (מסדר $n$) היא מטריצה שהתקבלה ממטריצת היחידה $I$ (מסדר $n$) על־ידי ביצוע פעולה אלמנטרית.

**סימון 3.9.2 סימון מטריצות אלמנטריות**

תהי $A$ מטריצה כלשהי, ותהי נתונה פעולה אלמנטרית שנסמנה $\varphi$. את המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי ביצוע הפעולה $\varphi$ נסמן $\varphi(A)$. בפרט, המטריצות האלמנטריות הן כל המטריצות מהצורה $\varphi(I)$, כאשר $\varphi$ היא איזשהי פעולה אלמנטרית.

**טענה 3.9.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$. תהי $I$ מטריצת היחידה מסדר $n$, ותהי $\varphi$ פעולה אלמנטרית. אזי:

$$\varphi(A) = \varphi(I) \cdot A$$

כלומר, התוצאה של פעולה אלמנטרית על $A$ זהה לתוצאת הכפל של $A$ משמאל במטריצה האלמנטרית המתאימה.

**טענה 3.9.4**

תהי $A$ מטריצה ריבועית מסדר $n$, ותהי $A'$ מטריצה אשר התקבלה מ־$A$ על־ידי ביצוע הפעולות האלמנטריות $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k$ (בסדר זה), אז:

$$A' = \varphi_k(I) \cdot \varphi_{k-1}(I) \ldots \varphi_1(I) \cdot A$$

**מסקנה 3.9.5**

כל מטריצה אלמנטרית $\varphi(I)$ היא הפיכה, וההופכית שלה היא $\varphi^{-1}(I)$. כלומר:

$$(\varphi^{-1}(I))^{-1} = \varphi^{-1}(I)$$

**מסקנה 3.9.6**

כל מטריצה שהיא מכפלה של מטריצות אלמנטריות היא מטריצה הפיכה. יתר כל כן, אם $B = \varphi_1(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_k(I)$ אז:

$$B^{-1} = \varphi_k^{-1}(I) \cdot \ldots \cdot \varphi_1^{-1}(I)$$

**טענה 3.9.7**

כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

**מסקנה 3.9.8**

מטריצה $A$ היא הפיכה אם ורק אם $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

**מסקנה 3.9.9**

$B$ היא שקולת שורות ל־$A$ אם ורק אם קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש־

$$B = CA$$

**מסקנה 3.9.10**

מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה אם ורק אם $A$ שקולת שורות ל־$I$.

**טענה 3.10.1**

מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם לכל וקטור עמודה $b \in F^n$, למשוואה הוקטורית $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

**טענה 3.10.2**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם למשוואה הוקטורית

$$Ax = 0$$

אין פתרון לא־טריוויאלי.

**טענה 3.10.3**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם העמודות של $A$ הן בלתי תלויות לינארית.

**טענה 3.10.4**

מטריצה ריבועית $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם השורות של $A$ הן בלתי תלויות לינארית.

**טענה 3.10.5**

מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$ היא הפיכה אם ורק אם לכל וקטור עמודה $b \in F^n$, למשוואה הוקטורית $Ax = b$ קיים פתרון.

**משפט 3.10.6**

תהי $A \in \mathbf{M}_n(F)$ מטריצה ריבועית מסדר $n$.

כל אחת מהטענות שלהלן היא תנאי הכרחי ומספיק להפיכות של $A$.

א. $A$ היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ב. $A$ שקולת שורות ל־ $I$.

ג. קיימת מטריצה הפיכה $C$ כך ש־ $CA = I$.

ד. צורת המדרגות הקנונית של $A$ היא $I$.

ה. לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ קיים פתרון יחיד למשוואה

$$Ax = b$$

ו. לכל וקטור עמודה $b \in F^n$ קיים פתרון למשוואה

$$Ax = b$$

ז. למשוואה $Ax = 0$ יש רק פתרון טריוויאלי.

ח. העמודות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, הן בלתי תלויות לינארית.

ט. השורות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, הן בלתי תלויות לינארית.

י. העמודות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

יא. השורות של $A$, כוקטורים ב־ $F^n$, פורשות את $F^n$.

**הגדרה 3.10.7 העתקה לינארית**

יהיו $F$ שדה, $n,m$ מספרים טבעיים, ותהי $T$ העתקה (כלומר, פונקציה) מ־ $F^n$ ל־ $F^m$. נאמר ש־ $T$ היא **העתקה לינארית**, או בקיצור - כי $T$ היא **לינארית**, אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. לכל $v,w \in F^n$ מתקיים $T(v+w) = T(v) + T(w)$.

ב. לכל $v \in F^n$ ולכל סקלר $s \in F$ מתקיים $T(sv) = sT(v)$.

**הגדרה 4.1.1 דטרמיננטה של מטריצה מסדר** $1 \times 1$

אם $A = [a]$, אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = a$$

כלומר, הדטרמיננטה של מטריצה הכוללת סקלר בודד הוא הסקלר עצמו.

**הגדרה 4.1.2 דטרמיננטה של מטריצה מסדר** $2 \times 2$

אם $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

**הגדרה 4.1.3**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$, כאשר $n \geq 2$.

לכל $1 \leq i, j \leq n$, **המטריצה המינורית** ה־ $i, j$ של $A$ היא המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי מחיקת השורה ה־ $i$ והעמודה ה־ $j$. נסמן מטריצה זו ב־ $A_{ij}^M$. הדטרמיננטה של מטריצה זו נקראת **המינור** ה־ $i, j$ של $A$.

**הגדרה 4.1.4 הדטרמיננטה**

תהי $A = \left[a_{ij}\right]$ מטריצה מסדר $n \times n$ מעל שדה $F$, כאשר $n \geq 2$. נניח כי הגדרנו את הדטרמיננטה לכל מטריצה ריבועית מסדר $(n-1) \times (n-1)$ מעל $F$. אזי הדטרמיננטה של $A$ מוגדרת על־ידי:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left[A\right]_{1i} \left|A_{1i}^M\right|$$

**משפט 4.2.1 משפט הפיתוח**

תהי $A = \left[a_{ij}\right]$ מטריצה מסדר $n \times n$, כאשר $n \geq 2$. אזי:

א. לכל $1 \leq i \leq n$,
$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}^M\right|$$

זהו פיתוח של הדטרמיננטה לפי השורה ה־ $\boldsymbol{i}$.

ב. לכל $1 \leq j \leq n$,
$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left|A_{ij}^M\right|$$

זהו פיתוח של הדטרמיננטה לפי העמודה ה־ $\boldsymbol{j}$.

**מסקנה 4.2.2**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$, ונניח כי יש ב־$A$ שורת אפסים או עמודת אפסים. אזי $|A| = 0$.

**משפט 4.3.1 הדטרמיננטה של המטריצה המשוחלפת**

אם $A$ היא מטריצה מסדר $n \times n$, אז:

$$\left|A^t\right| = |A|$$

**משפט 4.3.2**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ המטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי החלפה של שתי שורות (או שתי עמודות) זו בזו. אזי:

$$|B| = -|A|$$

כלומר, החלפה של שתי שורות של $A$ (או שתי עמודות) הופכת את סימן הדטרמיננטה של $A$.

**משפט 4.3.3**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי כפל שורה (או עמודה) של $A$ בסקלר $t$. אזי:

$$|B| = t|A|$$

**משפט 4.3.4**

תהיינה $A$ ו־$B$ מטריצות ריבועיות הנבדלות זו מזו רק בשורה (או עמודה) אחת, השורה (העמודה) ה־$2 \times 2$.

תהי $C$ מטריצה אשר שורתה (עמודתה) ה־$i$ היא סכום השורות (העמודות) ה־$i$ של $A$ ושל $B$, ושאר שורותיה (עמודותיה) שוות לאלה של $A$ (או של $B$). אזי:

$$|C| = |A| + |B|$$

**משפט 4.3.5**

אם במטריצה ריבועית $A$ יש שתי שורות שוות (או שתי עמודות שוות), אז:

$$|A| = 0$$

**משפט 4.3.6**

תהי $A$ מטריצה ריבועית ותהי $B$ מטריצה המתקבלת מ־$A$ על־ידי הוספת כפולה של שורה (עמודה) כלשהי לשורה (עמודה) אחרת. אזי:

$$|B| = |A|$$

כלומר, הפעולה האלמנטרית של הוספת כפולה של שורה (עמודה) לשורה (עמודה) אחרת אינה משנה את הדטרמיננטה.

**הגדרה 4.3.7**

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית עילית** אם כל איבריה אשר מתחת לאלכסון הראשי הם אפסים.

כלומר, $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית עילית אם לכל $i > j$, $a_{ij} = 0$.

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית תחתית** אם כל איבריה אשר מעל לאלכסון הראשי הם אפסים.

כלומר, $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית תחתית אם לכל $i < j$, $a_{ij} = 0$.

מטריצה ריבועית נקראת **משולשית** אם היא משולשית עילית או משולשית תחתית.

**משפט 4.3.8**

הדטרמיננטה של מטריצה משולשית שווה למכפלת איברי האלכסון הראשי שלה. כלומר, אם $|A| = [a_{ij}]$ היא מטריצה משולשית מסדר $n \times n$, אז:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{12} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

**משפט 4.4.1**

מטריצה ריבועית $A$ היא הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

באופן שקול, מטריצה ריבועית $A$ היא לא הפיכה אם ורק אם $|A| = 0$.

**למה 4.4.2**

אם $A$ שקולת שורות ל־ $B$ אז $|A| = 0$ אם ורק אם $|B| = 0$.

**משפט 4.5.1 הדטרמיננטה של מכפלת מטריצות**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות מאותו סדר (ומעל אותו שדה). אזי:

$$|AB| = |A||B|$$

**מסקנה 4.5.2**

תהיינה $A$ ו־ $B$ מטריצות ריבועיות המקיימות:

$$AB = I$$

אז $A$ ו־ $B$ שתיהן הפיכות וכל אחת מהן היא ההופכית של האחרת, כלומר $AB = BA = I$.

**משפט 4.6.1 כלל קרמר**

אם $|A| \neq 0$, אז למערכת $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ יש פתרון יחיד, $\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$, ורכיביו נתונים על־ידי:

לכל $1 \leq k \leq n$,

$$c_k = \frac{|A_k|}{|A|} \qquad (1)$$

כאשר $A_k$ היא המטריצה המתקבלת מ־ $A$ על־ידי החלפת העמודה ה־ $k$ של $A$ בוקטור העמודה $\mathbf{b}$.

**טענה 4.7.1**

תהי $A$ מטריצה הפיכה, ויהיו $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ איברי הבסיס הסטנדרטי של $F^n$, רשומים כעמודות.
לכל $j$, $1 \leq j \leq n$, נסמן ב־ $\mathbf{b}_j$ את הפתרון היחיד של המערכת $\lambda$ $|A| = |\phi(I)| = \lambda|I| = \lambda$, ותהי $B$ המטריצה שעמודותיה הם הוקטורים $\mathbf{b}_j$.
אזי $B = A^{-1}$.

**הגדרה 4.7.2**

תהי $A$ מטריצה מסדר $n \times n$.
**המטריצה המצורפת** ל־ $A$, שסימנה $\operatorname{adj} A$, היא המטריצה שהאיבר ה־ $(i,j)$ שלה נתון על־ידי:

$$[\operatorname{adj} A]_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ji}^M\right|$$

**מסקנה 4.7.3**

אם $A$ מטריצה הפיכה אזי:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj} A$$

**משפט 4.7.4**

לכל מטריצה ריבועית $A$ מתקיים $A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = |A|I$.

**הגדרה 4.8.1 תמורה**

יהי $n$ מספר טבעי. פונקציה חד־חד־ערכית ועל מהקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ לעצמה נקראת **תמורה על הקבוצה** $\{1,2,\ldots,n\}$.

אוסף התמורות הללו מסומן ב־ $S_n$.

**הגדרה 4.8.2 היפוך (בתמורה)**

תהי $\sigma \in S_n$. אם $i < j$ אך $\sigma(i) > \sigma(j)$, נאמר כי $(\sigma(i),\sigma(j))$ הוא **היפוך** ב־ $\sigma$.

**הגדרה 4.8.3 זוגיות של תמורה**

תהי $\sigma \in S_n$, ויהי $k$ מספר ההיפוכים ב־ $\sigma$. המספר $(-1)^k$ נקרא **הסימן של** $\sigma$, ומסומן $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

אם $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ נאמר כי $\sigma$ **זוגית**, אחרת נאמר כי $\sigma$ **אי־זוגית**.

**הגדרה 4.8.4 חילוף**

תמורה $\sigma \in S_n$ המקיימת $\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i$ עבור איזשהו זוג $i \neq j$, וכן $\sigma(k) = k$ לכל $k \neq i,j$, נקראת **חילוף** (או **טרנספוזיציה**).

**משפט 4.8.5 כפליות הסימן**

אם $\sigma,\tau \in S_n$ תמורות, אזי $\operatorname{sgn}(\sigma \cdot \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$.

**למה 4.8.6**

תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ויהיו $1 \le i,j \le n$ אינדקסים שונים. נגדיר תמורה, $\sigma' \in S_n$, באופן הבא:

$$\sigma'(k) = \begin{cases} \sigma(j) & : k = i \\ \sigma(i) & : k = j \\ \sigma(k) & : k \neq i,j \end{cases}$$

אזי $\sigma'$ מתקבלת על־ידי כפל מימין של $\sigma$ בחילוף.

**למה 4.8.7**

ניתן להציג כל תמורה $\sigma \in S_n$ כמכפלה של חילופים, ואם מספר החילופים בהצגה כזאת הוא $k$, אז $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

**מסקנה 4.8.8**

לכל תמורה $\sigma \in S_n$ מתקיים $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

**הגדרה 4.9.1 פונקציית נפח**

אם $V$ היא פונקציה מ־ $M_n(F)$ לשדה $F$, ומקיימת את התכונות:

א. $V = ([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = 0$ אם $a_i = a_j$ עבור $i \neq j$ כלשהם.

ב. לכל זוג סקלרים $s,t$ ולכל $i$ מתקיים השוויון:

$$V([a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, sa_i + t\hat{a}_i, a_{i+1}, \ldots, a_n])$$
$$= sV([a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n]) + tV([a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, \hat{a}_i, a_{i+1}, \ldots, a_n])$$

ג. אם $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ הם וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $F^n$, אזי $V([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]) = 1$.

נאמר כי $V$ היא **פונקציית נפח** ב־ $F^n$.

**טענה 4.9.2**

פונקציית נפח $V$ היא פונקציה **מתחלפת**, במובן הבא:

אם מטריצה $B$ מתקבלת ממטריצה $A$ על־ידי החלפת שתי שורות של $A$ זו בזו, אז $V(B) = -V(A)$.

**מסקנה 4.9.3**

אם קיימת פונקציית נפח $V$ ב־ $F^n$, אזי היא נתונה על־ידי הנוסחה:

$$V([a_1, \ldots, a_n]) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n),n}$$

בפרט, פונקציית נפח ב־ $F^n$ נקבעת באופן יחיד.

**למה 4.9.4**

פונקציית נפח $V_n$ ב־ $F^n$ מקיימת $V_n(A) = V_n(A^t)$ לכל מטריצה $A \in \mathbf{M}_n(F)$.

**טענה 4.9.5**

לכל $n$ טבעי קיימת פונקציית נפח יחידה $V_n$ ב־ $F^n$. יותר על כן, אם $n \geq 2$ אז לכל $1 \leq i \leq n$, מתקיים:

$$V_n(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} V_{n-1}(A_{ji}^M)$$

**משפט 4.9.6**

יהי $n$ מספר טבעי ויהי $F$ שדה. הדטרמיננטה היא פונקציית הנפח היחידה ב־ $F^n$, והיא נתונה על־ידי הנוסחה

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1}, a_{\sigma(2),2} \ldots a_{\sigma(n),n}$$

לכל $A \in \mathbf{M}_n(F)$. יותר על כן, לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ji} \left| A_{ji}^M \right|$$

וכן:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} [A]_{ij} \left| A_{ij}^M \right|$$

מהדורה פנימית
לא להפצה ולא למכירה
מק"ט 20109-5031