

# Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Jon Pascal Miklavčič

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

7. maj 2025

# Osnovni podatki in Plateaujev problem

Minimalne ploskve si bomo ogledali v Evklidskih prostorih. Seveda se na njih lahko gleda v poljubni Riemannovi mnogoterosti dimenzije vsaj 3, ampak v tem primeru ne obstaja vedno povezava s kompleksno analizo.

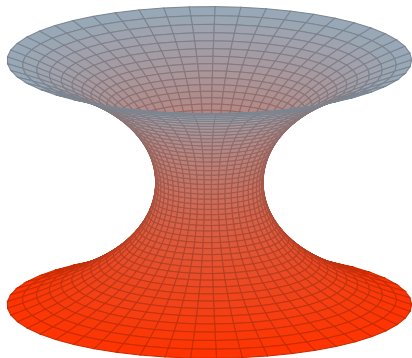
To so ploskve v prostoru, ki **lokalno minimizirajo ploščino** v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

Te ploskve se pojavijo naravno v našem svetu. Zakoni fizike pravijo da bo milni mehurček, ki ga napenja sklenjena krivulja v prostoru dobil obliko minimalne ploskve.

Če vzamamo kos raztegljivega blaga v obliki diska in ga kot zaveso obesimo na krivuljo v prostoru, kjer pustimo, da se blago po robu prosto premika, bo zavzelo obliko minimalne ploskve. Pozicija točk na ploskvi pa bo glede na originalno pozicijo prestavljala **konformno parametizacijo**.

Eksperimenti z milnimi mehurčki. **Joseph Plateau** - 1873.

**Plateaujev problem** - Ali vsaka sklenjena Jordanova krivulja (krivulja homomorfna  $S^1$ ) v  $\mathbb{R}^3$  razpenja minimalno ploskev? Odgovor je pritrdilen, kar sta neodvisno dokazala Tibor Radó (1930) in Jesse Douglas (1932). Po drugi starni pa če bi vzeli 2 ali več Jordanovih krivulj, ni nujno, da jih lahko povezali z minimalno ploskvijo.



Slika: Katenoida

## Definicija

Minimalna ploskev v  $\mathbb{R}^3$  je taka, ki **lokalno minimizirajo ploščino** med vsemi bližnjimi ploskvami z istim robom.

Leta 1744 je Euler dokazal, da je ketenoida minimalna ploskev. Podan je kot

$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

$$(\varphi, z) \mapsto (\cos \varphi \cdot \cosh z, \sin \varphi \cdot \cosh z, z).$$

Poleg **Enneperjeve ploskve** je to edina neravna, polna, orinetabilna minimalna ploskev v  $\mathbb{R}^3$ , ki ima najmanjšo totalno Gaussovo ukrivljenost  $4\pi$ .

Ploskev je **polna**, če je metrika, inducirana iz ambientnega prostora (Riemannova metrika), polna.

## J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

Naj bo  $D$  omejena podmnožica ravnine  $\mathbb{R}^2$  z odsekoma  $\mathcal{C}^1$  robom  $\partial D$ . Naj bo funkcija  $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$  razreda  $\mathcal{C}^2$  definirana na zaprtju  $\overline{D}$ . Njen graf je množica točk

$$\mathcal{G}_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y) \}$$

in ima površino enako

$$\text{Area}(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy.$$

Hočemo najti funkcije  $f$ , ki bodo imele najmanjšo ploščino med vsemi bližnjimi grafi nad  $\overline{D}$  z enakimi robnimi vrednostmi.

Izberemo  $\mathcal{C}^1$  funkcijo  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , za katero velja  $h(\partial D) \equiv 0$ . Za  $s \in \mathbb{R}$  si ogledamo naslednjo funkcijo:

$$s \mapsto \text{Area}(f + sh) \in \mathbb{R}_+.$$

Funkcija  $f$  bo stacionarna točka **ploščinskega funkcionala** natanko tedaj, ko bo pri  $s = 0$  za vse zgoraj opisane deformacije  $h$  veljalo

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(f + sh) = 0.$$

To lahko razpišemo na

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sqrt{1 + (f_x + sh_x)^2 + (f_y + sh_y)^2} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy\end{aligned}$$

Ker poznamo robne vrednosti deformacije  $h$  in funkcije  $f$  je na tem koraku smiselno uporabiti Gaussov izrek, ki bo zgornji integral po območju povezal integralom po robu tega območja.

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \nabla h \cdot \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy \\ &= - \iint_D \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) h \, dx dy,\end{aligned}$$

Zaradi zveznosti  $h$ , je izraz enak 0 za vse izbore  $h$  natanko takrat, ko je integrand poleg  $h$  identično enak 0 na  $D$ .

Torej

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = 0.$$

To lahko zapišemo v naslednji obliki

$$\operatorname{Div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} = 0,$$

kar je pa dalje ekvivalentno

$$\mathcal{G}(f) = (1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

To je **Euler-Lagrangeova enačba** za ploščinski funkcional. Je eliptična PDE drugega reda, ki jo poznamo pod imenom **enačba za minimalne grafe**.

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na  $\partial D$  sploh obstaja in ali je ta rešitev enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó, in sicer za omejena konveksna območja  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Rešitev je enolična in absolutno minimizira ploščino med *vsemi* ploskvami s takim robom.

# Ukrivljenost krivulj in ploskev

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Pred tem si moramo najprej ogledati koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$ .

## Aksiom

Ukrivljenost krivulje ali ploskve je invariantna za affine linearne preslikave  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  oblike  $x \mapsto Ax + b$ , kjer je  $b \in \mathbb{R}^n$  in  $A \in O_n(\mathbb{R})$  iz ortogonalne grupe na  $\mathbb{R}^n$ . Takim preslikavam pravimo **toge**.

Toge preslikave so ravno izometrije Evklidske metrike na  $\mathbb{R}^n$ .

Enostavna posledica izreka o implicitni funkciji je ta, da lahko vsako gladko krivuljo  $C$  okoli točke  $p \in C$  predstavimo kot graf nad njeno tangento  $T_p C$ . Analogna trditev drži za ploskve.

Najprej si bomo ogledali ukrivljenost gladke krivulje v ravnini, torej  $C \subset \mathbb{R}^2$ . V tem primeru torej lahko poljubno točko na krivulji  $p \in C$ , s togim premikom premaknemo v koordinatno izhodišče  $(0, 0)$ , njeno tangento  $T_p C$  pa na  $x$  os. Torej, lokalno gledano je krivulja  $C$  v okolici točke  $(0, 0)$  graf gladke funkcije  $y = f(x)$ , definirane na intervalu okoli  $0 \in \mathbb{R}$ . Očitno velja  $f(0) = f'(0) = 0$ . Taylorjev razvoj  $f$  pri 0 se potem glasi

$$y = f(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2).$$

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najbolje prilegala razvoju te funkcije v točki  $(0, 0)$ . Očitno je, da ima ta krožnica središče na  $y$  osi in se dotika grafa v točki  $(0, 0)$ , torej je oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , razen v primeru, ko je  $f''(0) = 0$ , kadar pa dobimo  $r = \infty$ . Če to enačbo razrešimo na  $y$  v okolici  $(0, 0)$  dobimo

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2r}x^2 + o(x^2).$$

Primerjava dobljene enačbe z enačbo razvojem  $f$  nam pokaže, da je za  $f''(0) \neq 0$

$$r = 1/f''(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

enolično določa radij, pri katerim se krožnica najbolje ujema in se ujema s krivuljo v točki  $(0, 0)$ . Taki krožnici pravimo **pritisnjena krožnica**, recipročni vrednosti radija

$$\kappa = f''(0) = 1/r$$

pa **predznačena ukrivljenost** krivulje v  $(0, 0)$ . Njeno absolutno vrednost  $|\kappa| = |f''(0)| \geq 0$  imenujemo **ukrivljenost**,  $|r| = 1/|\kappa| = 1/|f''(0)|$  pa **krivinski radij**.



Naj bo  $S \subset \mathbb{R}^3$  gladka ploskev. Na ploskvi fiksiramo točko  $p \in S$ . S togo preslikavo lahko premaknemo  $p$  v  $(0, 0, 0)$  in  $T_p S$  v  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Potem lahko,  $S$  okoli koordinatnega izhodišča izrazimo kot graf oblike

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} \left( f_{xx}(0) x^2 + 2 f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0) y^2 \right) + o(x^2 + y^2).$$

Označimo z  $A$  Hessjevo matriko funkcije  $f$  v točki  $(0, 0)$ :

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix}.$$

Izberemo si zdaj enotski vektor  $v = (v_1, v_2)$  v  $(x, y)$  ravnini. S  $\Sigma_v$  označimo ravnino skozi koordinatno izhodišče, ki jo razpenjata vektor  $v$  in koordinatna os  $z$ . Presečišče  $C_v := S \cap \Sigma_v$  je krivulja na  $S$  parametrizirana z

$$z = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{1}{2} (Av \cdot v) t^2 + o(t^2)$$

za  $t \in \mathbb{R}$  blizu 0. Iz prejšnje drsnice o ukrivljenosti krivulj in dobljene formule vemo, da je

$$\kappa_v = Av \cdot v = f_{xx}(0) v_1^2 + 2 f_{xy}(0, 0) v_1 v_2 + f_{yy}(0) v_2^2$$

predznačena ukrivljenost krivulje  $C_v$  v točki  $(0, 0)$ .

Na enotski krožnici  $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$  kvadratna forma  $v \mapsto Av \cdot v$  doseže svoj maksimum  $\kappa_1$  in minimum  $\kappa_2$ ; ti dve vrednosti imenujemo **glavni ukrivljenosti** ploskve  $S$  v točki 0. Ker je matrika  $A$  simetrična sta  $\kappa_1$  in  $\kappa_2$  njeni lastni vrednosti. Vrednosti

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \text{sl } A, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A$$

imenujemo **povprečna ukrivljenost** in **Gaussova ukrivljenost** ploskve  $S$  v točki 0.

Sled matrike  $A$  je enaka  $\Delta f(0, 0) = f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0)$ . Po drugi strani, pa je sled matrike enaka vsoti njenih lastnih vrednosti. To implicira

$$\Delta f(0, 0) = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H$$

Ker je matrika  $A$  simetrična, sta lastna vektorja, ki pripadata lastnim vrednostim  $\kappa_1$  in  $\kappa_2$ , pravokotna. Z ortogonalno rotacijo ravnine  $(x, y)$  lahko tadva vektorja premaknemo v  $(1, 0)$  oziroma  $(0, 1)$ . Potem enačba za  $S$  dobi normalno obliko

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} (\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2)$$

# Geometrijska interpretacija enačbe za minimalne grafe

Naslednjo trditev je leta 1776 dokazal Meusnier in s tem karakteriziral minimalne grafe s srednjo ukrivljenostjo.

## Izrek

Funkcija  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  razreda  $\mathcal{C}^2$ , definirana na domeni  $D \subset \mathbb{R}^2$  reši enačbo za minimalne grafe

$$\mathcal{G}(f) := \left(1 + f_y^2\right) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_x^2\right) f_{yy} = 0$$

natanko tedaj, ko ima njen graf  $S = \mathcal{G}_f$  v vsaki točki ničelno srednjo ukrivljenost.

*Dokaz:*

Izberimo točko  $p_0 \in D$ . Evklidske koordinate, ki ohranijo  $z$  smer izberemo tako, da velja  $p_0 = (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$  in

$$f(x, y) = ax + O\left(x^2 + y^2\right), \quad \text{za } a \geq 0.$$

Ekvivalenco iz trditve je zato dovolj dokazati v točki  $(0, 0)$ . Izberimo si naslednjo ortonormirano bazo  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1, 0, a), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-a, 0, 1).$$

Vidimo, da  $\mathbf{v}_1$  in  $\mathbf{v}_2$  razpenjata tangentno  $T_0 S$  ravnino v  $(0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3$  pa je normala na  $T_0 S$ . Označimo z  $(u, v, w)$  Evklidske koordinate, ki so vezane na to bazo.

# Dokaz Meusnierjevega izreka

Torej se prvotne koordinate izrazijo kot

$$(x, y, z) = u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3.$$

V koordinatah  $(u, v, w)$  je ploskev  $S$  na okolici koordinatnega izhodišča podana kot graf oblike

$$w = g(u, v), \quad g(0, 0) = 0, \quad dg(0, 0) = 0.$$

Vemo, da je srednja ukrivljenost  $S$  v točki  $(0, 0)$  enaka  $H = \Delta g(0, 0)$ . Za dokončanje dokaza bomo  $g$  prevedli na  $f$  in izrazili  $\mathcal{G}(f)(0, 0)$  z  $\Delta g(0, 0)$ .

V koordinatah  $(x, y, z)$  je ploskev  $S$  parametrizirana kot

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(u - ag(u, v)), \quad y = v, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(au + g(u, v)).$$

Ker je  $S$  prav tako podana z  $z = f(x, y)$  dobimo izraz

$$au + g(u, v) = \sqrt{1+a^2} \cdot f\left(\frac{u - ag(u, v)}{\sqrt{1+a^2}}, v\right).$$

Ta izraz zdaj dvakrat odvajamo po  $u$  in po  $v$ :

$$g_{uu} = f_{xx} (1 - ag_u)^2 / \sqrt{1+a^2} + f_x (-ag_{uu})$$

$$g_{vv} = f_{xx} (-ag_v)^2 / \sqrt{1+a^2} + f_x (-ag_{vv}) + f_{xy} (-2ag_v) + f_{yy} \sqrt{1+a^2}.$$

## Dokaz Meusnierjevega izreka

Če ovrednotimo druge parcialne odvode pri  $(u, v) = (0, 0)$ , kar se ujema z  $(x, y) = (0, 0)$  in upoštevamo  $f_x(0, 0) = a$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ ,  $g_u(0, 0) = g_v(0, 0) = 0$  dobimo

$$g_{uu}(0, 0) = f_{xx}(0, 0)/\sqrt{1 + a^2} - a^2 g_{uu}(0, 0)$$

$$g_{vv}(0, 0) = -a^2 g_{vv}(0, 0) + f_{yy}(0, 0) \sqrt{1 + a^2}$$

in tako

$$f_{xx}(0, 0) = \sqrt{1 + a^2}^3 g_{uu}(0, 0), \quad f_{yy}(0, 0) = \sqrt{1 + a^2} g_{vv}(0, 0)$$

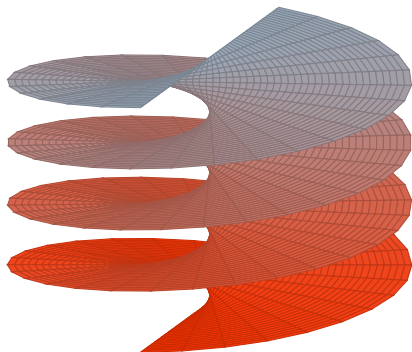
Tako pri  $(0, 0)$  dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(f) &= (1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} \\ &= \sqrt{1 + a^2}^3 g_{uu} + (1 + a^2) \sqrt{1 + a^2} g_{vv} \\ &= \sqrt{1 + a^2}^3 \triangle g. \end{aligned}$$

To pokaže, da je  $\mathcal{G}(f)(0, 0) = 0$  natanko tedaj, ko je  $\triangle g(0, 0) = 2H = 0$ . □

### Definicija

Gladka ploskev v  $\mathbb{R}^3$  je **minimalna**, če je njena povprečna ukrivljenost v vsaki točki ničelna, t. j.  $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$ .



Slika: Helikoid

Meusnier je leta 1776 dokazal, da je helikoid minimalna ploskev. V kartezičnih koordinatah je podan kot

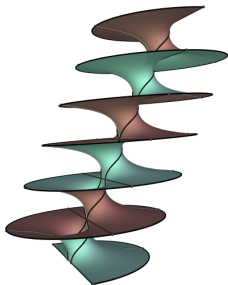
$$x = \rho \cos(\theta),$$

$$y = \rho \sin(\theta),$$

$$z = \theta,$$

za  $\rho$  in  $\theta$  od  $-\infty$  do  $\infty$ .

Poleg ravnine je to edina minimalna ploskev, ki jo lahko "sestavimo" iz premic. Take ploskve imenujemo **premonosne plovke**.



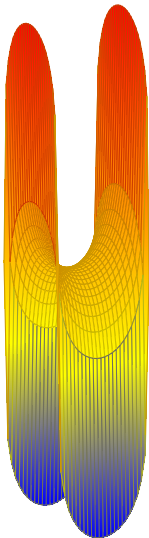
**Slika:** Eden Riemannovih minimalnih primerov

Proti koncu svojega življenja je Bernhard Riemann odkril družino enoparametričnih minimalnih ploskev  $R_\lambda$  za  $\lambda \in (0, \infty)$ . Parametrizirane so s periodičnimi ravninskimi domenami in so **pravilno vložene** kot minimalne ploskve v  $\mathbb{R}^3$ . Vsaka horizontalna ravnina s ploskvijo seka v premici ali pa krožnici. Ko pošljemo  $\lambda \rightarrow 0$  te ploskve konvergirajo h katenoidu, če pa pošljemo  $\lambda \rightarrow \infty$  konvergirajo h helikoidu.

**Topološka definicija pravline vložitev:** preslikava je pravilna vložitev, če je vložitev in če dodatno velja, da so praslike kompaktni kompaktni.

Meeks, Pérez, Ros so 2015 dokazali, da so helikoidi, katenoidi in Riemannovi minimalni primeri edine ravninske domene, ki jih lahko pravilno vložimo kot minimalne ploskve v  $\mathbb{R}^3$ . Imerzij seveda obstaja veliko več.

# Scherkova ploskev - 1835



Slika: Scherkova ploskev

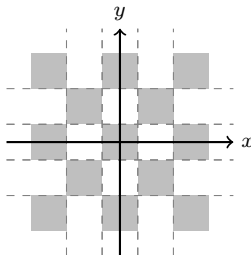
Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prva Scherkova ploskev je invariantna pod dvema ortogonalnima translacijama, torej je dvojno preiodična. Njena glavna veja je graf nad kvadratom

$$P = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)^2, \text{ podana kot}$$

$$z = \ln \cos y - \ln \cos x$$

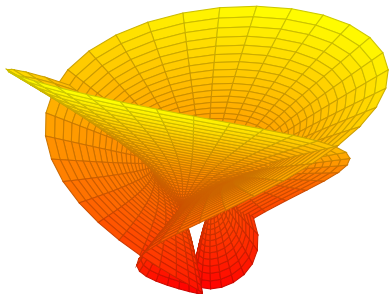
Ta Scherkova ploskev ima največjo Gaussovo ukrivljenost v  $0 \in \mathbb{R}^3$  izmed vseh minimalnih grafov, ki ležijo nad kvadratom  $P$ , in sicer 1.

Torej, če hočemo, da grfa minimalne ploskve obstaja nad določeno domeno, potem ne mora biti poljubno ukrivljen.



Slika: Definijsko območje Scherkove ploskve





Slika: Hennebergova ploskev

**Neorientabilna minimalna ploskev.** Ni vložitev, ima eno singularnost. Do 1981 edina poznana neorientabilna minimalna ploskev.

Meeks leta 1981 odkrije pravilno imerzijo Möbiusovega traku v  $\mathbb{R}^3$ . 2017 je odkrita tudi pravilna vložitev Möbiusovega traku v  $\mathbb{R}^4$ .

# Analičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberemo koordinate  $(u, v)$  na  $\mathbb{R}^2$ . Naj bo  $D \subset \mathbb{R}^2$  omejeno območje z gladkim robom in  $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gladka imerzija. Predpostavimo, da lahko koordinate  $(u, v)$  vedno izberemo tako, da je  $F$  **konformna preslikava**. To pomeni, da bo zanjo veljalo

$$|F_u| = |F_v|, \quad F_u \cdot F_v = 0.$$

Ta predpostavka sledi iz obstoja izotermalnih koordinat, kar bomo utemeljili kasneje. Poglejmo si spet **ploščinski funkcional**, ki ga lahko zapišemo kot

$$\text{Area}(F) = \iint_D |F_u \times F_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{|F_u|^2 |F_v|^2 - |F_u \cdot F_v|^2} \, dudv$$

in **Dirichletov energetski funkcional**

$$\mathcal{D}(F) = \frac{1}{2} \iint_D |\nabla F|^2 \, dudv = \frac{1}{2} \iint_D (|F_u|^2 + |F_v|^2) \, dudv$$

Iz neenakosti

$$|x|^2 |y|^2 - |x \cdot y|^2 \leq |x|^2 |y|^2 \leq \frac{1}{4} (|x|^2 + |y|^2)^2, \quad \text{za } x, y \in \mathbb{R}^n$$

vidimo, da velja  $\text{Area}(F) \leq \mathcal{D}(F)$ , kjer velja enakost natanko tedaj, ko je  $F$  konformna. Sledi, da imata funkcionala iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

## Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Izračunajmo prvo variacijo funkcionala  $\mathcal{D}$ . Če je  $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  gladka preslikava, za katero velja  $h(bD) \equiv 0$ , potem po uporabi prve Greenove identitete v zadnjem enačanju dobimo

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{D}(F) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{D}(F + th) = \iint_D (F_u \cdot h_u + F_v \cdot h_v) \, du dv \\ &= \iint_D \nabla F \cdot \nabla h \, du dv \\ &= - \iint_D \operatorname{div}(\nabla F) \cdot h \, du dv\end{aligned}$$

Ta izraz je enak 0 za poljuben  $h$  natanko tedaj, ko je  $\operatorname{div}(\nabla F) = \Delta X \equiv 0$ . S tem smo dokazali naslednji izrek.

### Izrek

*Konformna imerzija  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ) razreda  $\mathcal{C}^2$  je stacionarna točka ploščinskega funkcionala natanko tedaj, ko je  $F$  harmonična.*

# Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Imerzija  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  na  $D$  določi Riemannovo metriko  $g$ , ki ji pogosto pravimo tudi prva fundamentalna forma, podana s formulo

$$g = |F_u|^2 du^2 + (F_u \cdot F_v)(dudv + dvdu) + |F_v|^2 dv^2 = F^* ds^2$$

Identiteta  $\delta_h \mathcal{D}(F) - \int_D \Delta F \cdot h \, dudv$  pove še več. Količina

$$\frac{2}{|\nabla F|^2} \Delta F = \Delta_g F$$

je intrinzični Laplaceov operator  $F = (F_1, \dots, F_n)$  glede na Riemannovo metriko  $g$  na  $D$ ,  $dA = \frac{1}{2} |\nabla X|^2 \, dudv$  pa je diferencial ploščine ploskve. Torej lahko zgornjo identiteto zapišemo kot

$$\delta_h \text{Area}(F) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(F + sh) = - \int_D \Delta_g F \cdot h \, dA$$

To je formula za prvo variacijo ploščine imerzije ploskve. Pove nam, da je vektorsko polje  $\Delta_g X$  negativen gradient ploščinskega funkcionala v  $F$ .

Naj bo  $M$  gladka ploskev in  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  gladka imerzija, ki na  $M$  določi Riemannovo metriko  $g = F^*ds^2$ . Za poljubno točkao  $p \in M$  obstaja okolica  $U \subset M$  s koordinatami  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  v katerih dana Riemannova metrika  $g$  dobi enostavnejšo obliko

$$g = \lambda (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) \quad \text{za } \lambda > 0.$$

Vsakim takim koordinatam  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  pravimo **izotermalne koordinate** za Riemannovo metriko  $g$ . Naj bo  $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v})$  imerzija  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ki jo dobimo iz  $F$ , če  $(u, v)$  izrazimo z  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ . Dobimo

$$|\tilde{F}_{\tilde{u}}|^2 = |\tilde{F}_{\tilde{v}}|^2 = \lambda, \quad \tilde{F}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{F}_{\tilde{v}} = 0,$$

kar pomeni, da je  $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  konformna imerzija. Obstoj izotermalnih koordinat je odkril C. F. Gauss za rotacijske ploskve. Dokaz v splošnem je zahteven.

Kaj pa globalna situacija? Po zgoraj povedam vemo, da lahko odprto povezano okolico  $U$  točke  $p$  parametriziramo z gladkim difeomorfizmom  $\phi : U' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U \subset M$ , tako da je  $F \circ \phi : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  konformna vložitev. Če je  $\tilde{\phi}$  še ena taka lokalna parametrizacija dela ploskve  $M$ , potem je **prehodna preslikava**  $\phi^{-1} \circ \tilde{\phi}$  konformni difeomorfizem med ravninskima domenama. Če  $\mathbb{R}^2$  identificiramo s kompleksno ravnino  $\mathbb{C}$ , vemo, da so konformni difeomorfizmi med pari povezanih domen v  $\mathbb{C}$  ali holomorfni ali pa antiholomorfni, glede na to, če ohranijo orientacijo. To na  $M$  določi konformno strukturo.

Zbirka vseh takih lokalnih parametrizacij, katerih slike pokrijejo  $M$  se imenuje **konformen atlas** na  $M$  in **kompleksen atlas**, če so prehodne preslikave holomorfne. Slednjega lahko dobimo, če in samo, če je ploskev  $M$  orientabilna. Inverzu  $\phi^{-1} : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^2$  lokalne parametrizacije  $\phi : U' \rightarrow U \subset M$  pravimo **lokalna karta** na  $M$ . Ploskvi opremljeni s konformnim atlasom pravimo **konformna ploskev**, ploskvi s kompleksnim atlasom pa **Riemannova ploskev**. Za konformno ploskev  $M$  je princip konformne imerzije  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  dobro definiran, če nanjo gledamo v lokalnih koordinatah iz konformnega atlasa. Obstaja notranje pojmovanje harmoničnih funkcij na konformni ploskvi in tudi tukaj velja analog

## Izrek

*Konformna imerzija  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  iz konformne oz. Riemannove ploskve je minimalna imerzija natanko tedaj, ko je  $F$  harmonična.*

Glavna ugotovitev je, da so naravne izvirne ploskve, ki jih je smiselno upoštevati (pri parametrizaciji minimalnih ploskev) Riemannove ploskve v orientabilnem primeru in konformne ploskve v neorientabilnem primeru.

# Povezava s kompleksno analizo

Naj bo  $z = u + iv$  kompleksna spremenljivka na  $\mathbb{C}$ . Iz kompleksne analize se spomnimo dveh operatorjev, imenovanih **Wirtingerjeva odvoda**, ki sta definirana kot

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Jedro  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  sestavljajo holomorfne funkcije, jedro  $\frac{\partial}{\partial z}$  pa antiholomorfne funkcije. Glede na tedva operatorja, se Laplaceov operator izrazi kot

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Vidimo, da je funkcija  $F : D \rightarrow \mathbb{R}$  harmonična natanko tedaj, ko je funkcija  $\partial F / \partial z$  holomorfna. Poleg tega je konformnost  $F$  ekvivalentna naslednjemu pogoju

$$|F_u|^2 = |F_v|^2, \quad F_u \cdot F_v = 0 \iff \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_k}{\partial z} \right)^2 = 0$$

Analogen rezultat velja tudi, če  $D$  poljubna **odprta Riemannova ploskev**. Videli smo že, da vsaka imerzija ploskve v  $\mathbb{R}^n$  premore konformno parametrizacijo z Riemannove ploskve.

# Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Torej, imerzija  $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^2$  iz gladke Riemannove ploskve parametrizira konformno minimalno ploskev  $X(M) \subset \mathbb{R}^n$  natanko tedaj, ko je

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \text{holomorfna in velja} \quad \sum_{k=1}^n f_k = 0.$$

Po drugi strani pa preslikava  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , ki zadostuje pogoju  $\sum_{k=1}^n f_k = 0$  in ima ničelno periodo

$$\Re \oint_C f \, dz = 0 \quad \text{za vsako sklenjeno krivuljo } C \subset M$$

določi konformno minimalno imerzijo  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , podano s

$$F(z) = c + 2\Re \int_{z_0}^z f(\zeta) \, d\zeta, \quad z, z_0 \in M, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ker je  $f$  holomorfna, je dovolj da pogoj za ničelno periodnost preverimo na homološki bazi  $H_1(M, \mathbb{Z})$ . Če je  $M$  disk  $\mathbb{D}$  je pogoj izpolnjen na prazno. Definirajmo ničelno kvadriko

$$\mathcal{A} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0 \right\}.$$

Če ji odstartimo izhodišče dobimo punktriano ničelno kvadriko  $\mathcal{A}_* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$ . Zgornji razmislek nam pove, da dobimo vse konformne minimalne ploskve  $D \rightarrow \mathbb{R}^n$  kot integrale holomorfnih preslikav  $f : D \rightarrow \mathcal{A}_* \subset \mathbb{C}^n$ , ki zadostujejo pogoju za ničelno periodnost za vsako krivuljo  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ .



## Weierstrass-Enneperjeva formula v dimenziji $n = 3$

Označimo  $\partial X = \frac{\partial X}{\partial z} dz$ . V dimenziji  $n = 3$  lahko Weierstrass-Enneperjevo formulo za konformno minimalno imerzijo  $X = (X_1, X_2, X_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  napišemo v bolj konkretni obliki:

$$X(z) = X(z_0) + 2\Re \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \partial X_3,$$

kjer je

$$g = \frac{\partial X_3}{\partial X_1 - i\partial X_2} : D \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

holomorfna preslikava na Riemannovo sfero (torej meromorfna funkcija na  $D$ ), ki ji pravimo **kompleksna Gaussova preslikava**. Kompleksno Gaussovo preslikavo dobimo, če standardno Gaussovo preslikavo

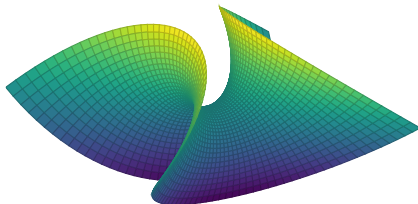
$$\mathbf{N} = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

komponiramo s stereografsko projekcijo  $S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ .

Ena najbolj zanimivih in pomembnih lastnosti kompleksne Gaussove preslikave je ta, da je totalna Gaussova ukrivljenost  $\text{TC}(S) = \int_S K \cdot dA \in [-\infty, 0]$  konformne minimalne ploskve  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  enaka površini Gaussove preslikave  $g : D \rightarrow \mathbb{CP}^1$  (šteto z večkratnostmi), kjer je površina  $\mathbb{CP}^1 = S^2$  enaka  $4\pi$ . Eksplicitno povedano:

$$\text{TC}(X) = -\text{Area}(g(D)).$$

Poznamo tudi primere minimalnih ploskev, ki si deljo isto Gaussovo preslikavo.



Slika: Enneperjeva ploskev

Za Gaussovo preslikavo izberemo  $g(z) = z$ . Če vzamemo  $\partial X_3 = 2z dz$  dobimo Enneperjevo ploskev, če pa vzamemo  $\partial X_3 = \frac{dz}{z}$  pa dobimo katenoid. Eksplicitno povedano:

$$\text{Enneper} \quad X(\zeta) = \Re \int_0^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - z \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right), 1 \right) 2z dz$$

$$\text{Catenoid} \quad X(\zeta) = (1, 0, 0) - \Re \int_1^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - z \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right), 1 \right) \frac{dz}{z}.$$

# Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija  $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  za  $n \geq 0$  in  $D \subset \mathbb{C}$ , ki zadošča

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 + \dots + (F_n')^2 = 0$$

je **holomorfna ničelna krivulja**. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D$$

kjer je  $f : D \rightarrow \mathcal{A}_*$  holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f dz = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

## Posledica

Če je  $D$  enostavno povezana domena v  $\mathbb{C}$ , potem vsaka holomorfna preslikava  $f : D \rightarrow \mathcal{A}_* \subset \mathbb{C}^n$  določa holomorfno ničelno krivuljo po formuli  $F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ .

Če je  $Z = X + iY : D \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfna ničelna krivulja, potem sta njen realni del  $X = \Re Z : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  in njen imaginarni del  $Y = \Im Z : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  konformni minimalni ploskvi. Po drugi strani, pa je vsaka konformna minimalna ploskev lokalno (na vsaki enostavni povezani domeni) relati del holomorfne ničelne krivulje.

## Primer: katenoid in helikoid

Ker sta  $X$  in  $Y$  harmonični konjugiranki, pravimo, da sta **konjugirani minimalni ploskvi**. Konformnim minimalnim ploskvam iz 1-parametrične družine

$$G_t = \Re(e^{it}Z) : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{za } t \in \mathbb{R}$$

pravimo **pridružene minimalne ploskve** holomorfne ničelne krivulje  $Z$ .

**Primer:**

Katenoid in helikoid sta konjugirani minimalni ploskvi - realen in imaginaren del ničelne krivulje

$$F(\zeta) = (\cos \zeta, \sin \zeta, -i\zeta), \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C}$$

Oglejmo si družino minimalnih ploskev glede na relani parameter ( $t \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} G_t(\zeta) &= \Re(e^{it}F(\zeta)) \\ &= \cos t \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cosh y \\ \sin x \cdot \cosh y \\ y \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \sin x \cdot \sinh y \\ -\cos x \cdot \sinh y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pri  $t = 0$  imamo katenoid in pri  $t = \pm\pi/2$  pa helikoid.

Slika: Hleikatenoid animacija

HVALA ZA POZORNOST!

