Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Jon Pascal Miklavčič

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

15. maj 2025

Osnovni podatki in Plateaujev problem

Minimalne ploskve si bomo ogledali v Evklidskih prostorih. Seveda se na njih lahko gleda v poljubni Riemannovi mnogoterosti dimenzije vsaj 3, ampak v tem primeru ne obstaja vedno povezava s kompleksno analizo.

To so ploskve v prostoru, ki lokalno minimiziarjo ploščino v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

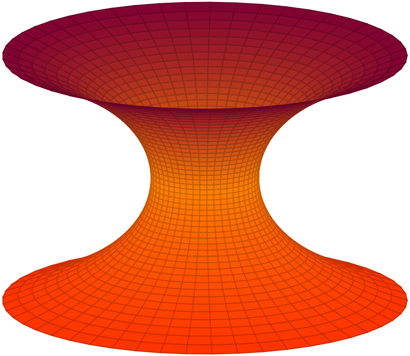
Te ploskve se pojavijo naravno v našem svetu. Zakoni fizike pravijo, da bo milni mehurček, ki ga napenja sklenjena krivulja v prostoru dobil obliko minimalne ploskve.

Če vzamamo kos raztegljivega blaga v obliki diska in ga kot zaveso obesimo na krivuljo v prostoru, kjer pustimo, da se blago po robu prosto premika, bo zavzelo obliko minimalne ploskve. Pozicija točk na ploskvi pa bo glede na originalno pozicijo prestavljala konformno parametizacijo.

Eksperimenti z milnimi mehurčki. Joseph Plateau - 1873.

Plateaujev problem - Ali vsaka sklenjena Jordanova krivulja (krivulja homemorfna S^1) v $\mathbb{R}^3$ razpenja minimalno ploskev? Odgovor je pritrdilen, kar sta neodvisno dokazala Tibor Radó (1930) in Jesse Douglas (1932). Po drugi starni pa če bi vzeli 2 ali več Jordanovih krivulj, ni nujno, da jih lahko povezali z minimalno ploskvijo.

Leonhard Euler - 1744 - Ketenoida



Slika: Katenoida

Definicija

Minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$ je taka, ki lokalno minimizira ploščino med vsemi bližnjimi ploskvami z istim robom.

Prva poznana minimalna ploskev.

Leta 1744 je Euler dokazal, da je ketenoida minimalna ploskev. Je edina netrivialna rotacijska minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$.

Dobimo jo z rotacijo grafa hiperboličnega kosinusa (t. i. "verižnice") okoli izbrane osi v $\mathbb{R}^3$. Torej

$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

$$(\varphi, z) \mapsto (\cos\varphi \cdot \cosh z, \sin\varphi \cdot \cosh z, z).$$

J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

Naj bo D omejena podmnožica ravnine $\mathbb{R}^2$ z odsekoma $\mathscr{C}^1$ robom bD. Naj bo funkcija $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ razreda $\mathscr{C}^2$ definirana na zaprtju $\overline{D}$. Njen graf je množica točk

$$\mathcal{G}_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y)\right\}$$

in ima površino enako

$$\mathrm{Area}(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Hočemo najti funkcije f, ki bodo imele najmanjšo ploščino med vsemi bližnjimi grafi nad $\overline{D}$ z enakimi robnimi vrednostmi.

Izberemo $\mathscr{C}^1$ funkcijo $h : \overline{D} \to \mathbb{R}$, za katero velja $h(bD) \equiv 0$. Za $s \in \mathbb{R}$ si ogledamo naslednjo funkcijo:

$$s \longmapsto \mathrm{Area}(f + sh) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Funkcija f bo stacionarna točka ploščinskega funkcionala natanko tedaj, ko bo pri $s = 0$ za vse zgoraj opisane deformacije h veljalo

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathrm{Area}(f + sh) = 0.$$

J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

To lahko razpišemo na

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \mathrm{Area}(f+sh) &= \iint_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \sqrt{1+(f_x+sh_x)^2+(f_y+sh_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Ker poznamo robne vrednosti deformacije h in funkcije f je na tem koraku smiselno uporabiti Gaussov izrek, ki bo zgornji integral po območju povezal integralom po robu tega območja.

Če upoštevamo, da za funkcijo h in vektorsko polje $\mathbf{F}$ velja $\mathrm{div}(h\mathbf{F}) = \nabla h \cdot \mathbf{F} + h \cdot \mathrm{div}(\mathbf{F})$ dobimo t. i. prvo Greenovo identiteto

$$\iint_D \nabla h \cdot \mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{bD} h\mathbf{F}\,\mathbf{n} \cdot \mathrm{d}s - \iint_D h \cdot \mathrm{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

kjer je $\mathbf{n}$ normala na rob območja. V našem primeru izberemo $\mathbf{F} = \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}$.

J. L. Lagrange 1760 - enačba za minimalne grafe

Torej

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \mathrm{Area}(f+sh) = \iint_D \nabla h \cdot \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D h \cdot \mathrm{div}\left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

Zaradi zveznosti h, je izraz enak 0 za vse izbore h natanko takrat, ko je divergenca identično enaka 0 na D. To lahko zapišemo v naslednji obliki

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} = \frac{\left(1+f_y^2\right)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + \left(1+f_x^2\right)f_{yy}}{\left(1+|\nabla f|^2\right)^{3/2}} = 0,$$

kar je pa dalje ekvivalentno

$$\left(1+f_y^2\right)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + \left(1+f_x^2\right)f_{yy} = 0.$$

To je Euler-Lagrangeova enačba za ploščinski funkcional. Je eliptična PDE drugega reda, ki jo poznamo pod imenom enačba za minimalne grafe.

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na bD sploh obstaja in ali je enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó za omejena konveksna območja $D \subset \mathbb{R}^2$. Rešitev je enolična in absolutno minimizira ploščino med *vsemi* ploskvami s takim robom.

Ukrivljenost krivulj in ploskev

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Pred tem si moramo najprej ogledati koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$.

Aksiom

Ukrivljenost krivulje ali ploskve je invariantna za afine linearne preslikave $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oblike $x \mapsto Ax + b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$ in $A \in O_n(\mathbb{R})$ iz ortogonalne grupe na $\mathbb{R}^n$. Takim preslikavam pravimo toge.

Toge preslikave so ravno izometrije Evklidske metrike na $\mathbb{R}^n$.

Enostavna posledica izreka o implicitni funkciji je ta, da lahko vsako gladko krivuljo C okoli točke $p \in C$ predstavimo kot graf nad njeno tangento T_pC. Analogna trditev drži za ploskve.

Najprej si bomo ogledali ukrivljenost gladke krivulje v ravnini, torej $C \subset \mathbb{R}^2$. V tem primeru lahko poljubno točko $p \in C$, s togim premikom premaknemo v koordinatno izhodišče, njeno tangento T_pC pa na x os. Lokalno je torej krivulja C v okolici izhodišča graf gladke funkcije $y = f(x)$, definirane na intervalu okoli $0 \in \mathbb{R}$. Očitno velja $f(0) = f'(0) = 0$. Taylorjev razvoj f pri 0 se potem glasi

$$y = f(x) = \frac{1}{2} f''(0)x^2 + o\left(x^2\right),$$

kjer je $h(x) = o\left(g(x)\right) \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$.

Ukrivljenost krivulj

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najbolje prilegala razvoju te funkcije v točki $(0, 0)$. Očitno je, da ima ta krožnica središče na y osi in se dotika grafa v točki $(0, 0)$, torej je oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, razen v primeru, ko je $f''(0) = 0$, kadar pa dobimo $r = \infty$. Če to enačbo razrešimo na y v okolici $(0, 0)$ dobimo

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} + o\left(x^2\right)\right) = \frac{1}{2r}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Primerjava dobljene enačbe z enačbo razvojem f nam pokaže, da je za $f''(0) \neq 0$

$$r = 1/f''(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Taki krožnici pravimo pritisnjena krožnica, recipročni vrednosti radija

$$\kappa = f''(0) = 1/r$$

pa predznačena ukrivljenost krivulje v $(0, 0)$. Njeno absolutno vrednost $|\kappa| = |f''(0)| \geq 0$ imenujemo ukrivljenost, $|r| = 1/|\kappa| = 1/\left|f''(0)\right|$ pa krivinski radij.

Ukrivljenost ploskev

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. Na ploskvi fiksiramo točko $p \in S$. S togo preslikavo lahko premaknemo p v $(0,0,0)$ in T_pS v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Potem lahko S okoli koorinatnega izhodišča izrazimo kot graf oblike

$$z = f(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0)y^2\right) + o\left(x^2+y^2\right).$$

Označimo z A Hessjevo matriko funkcije f v točki $(0,0)$:

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{bmatrix}.$$

Izberemo si zdaj enotski vektor $v = (v_1, v_2)$ v (x,y) ravnini. S Σ_v označimo ravnino skozi koordinatno izhodišče, ki jo razpenjata vektor v in koordinatna os z. Presečišče $C_v := S \cap \Sigma_v$ je krivulja na S parametrizirana z

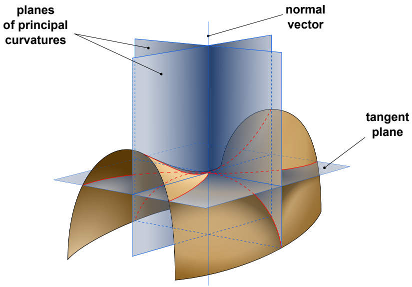
$$z = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{1}{2}(Av \cdot v)t^2 + o\left(t^2\right)$$

za $t \in \mathbb{R}$ blizu 0. Iz prejšnje drsnice o ukrivljenosti krivulj in dobljene formule vemo, da je

$$\kappa_v = Av \cdot v = f_{xx}(0)v_1^2 + 2f_{xy}(0,0)v_1v_2 + f_{yy}(0)v_2^2$$

predznačena ukrivljenost krivulje C_v v točki $(0,0)$.

Ukrivljenost ploskev



Na enotski krožnici $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$ kvadratna forma $v \mapsto Av \cdot v$ doseže svoj maksimum κ_1 in minimum κ_2; ti dve vrednosti imenujemo glavni ukrivljenosti ploskve S v točki 0. Ker je matrika A simetrična sta κ_1 in κ_2 njeni lastni vrednosti. Vrednosti

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sl} A, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A$$

imenujemo povprečna ukrivljenost in Gaussova ukrivljenost ploskve S v točki 0.

Sled matrike A je enaka $\triangle f(0,0) = f_{xx}(0,0) + f_{yy}(0,0)$. Po drugi strani, pa je sled matrike enaka vsoti njenih lastnih vrednosti. To implicira

$$\triangle f(0,0) = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H.$$

Geometrijska interpretacija enačbe za minimalne grafe

Naslednjo trditev je leta 1776 dokazal Meusnier in s tem karakteriziral minimalne grafe s srednjo ukrivljenostjo.

Izrek

Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ razreda $\mathscr{C}^2$, definirana na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ reši enačbo za minimalne grafe

$$\mathscr{G}(f) := \left(1 + f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_x^2\right) f_{yy} = 0$$

natanko tedaj, ko ima njen graf $S = \mathcal{G}_f$ v vsaki točki ničelno srednjo ukrivljenost.

Dokaz:
Izberimo točko $p_0 \in D$. Evklidske koordinate, ki ohranijo z smer izberemo tako, da velja $p_0 = (0,0)$, $f(0,0) = 0$ in

$$f(x,y) = ax + O\left(x^2 + y^2\right), \quad \text{za } a \geq 0.$$

Ekvivalenco iz trditve je zato dovolj dokazati v točki $(0,0)$. Izberimo si naslednjo ortonormirano bazo $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(1,0,a), \quad \mathbf{v}_2 = (0,1,0), \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(-a,0,1).$$

Vidimo, da $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$ razpenjata tangentno T_0S ravnino v $(0,0)$, $\mathbf{v}_3$ pa je normala na T_0S. Označimo z (u,v,w) Evklidske koordinate, ki so vezane na to bazo.

Dokaz Meusnierjevega izreka

Torej se prvotne koordinate izrazijo kot

$$(x, y, z) = u\mathbf{v}_1 + v\mathbf{v}_2 + w\mathbf{v}_3.$$

V koordinatah (u, v, w) je ploskev S na okolici koordinatnega izhodišča podana kot graf oblike

$$w = g(u, v), \quad g(0,0) = 0, \quad \mathrm{d}g(0,0) = 0.$$

Vemo, da je srednja ukrivljenost S v točki $(0,0)$ enaka $2H = \triangle g(0,0)$. Za dokončanje dokaza bomo g prevedli na f in izrazili $\mathscr{G}(f)(0,0)$ z $\triangle g(0,0)$.

V koordinatah (x, y, z) je ploskev S parametrizirana kot

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(u - ag(u,v)), \quad y = v, \quad z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(au + g(u,v)).$$

Ker je S prav tako podana z $z = f(x, y)$ dobimo izraz

$$au + g(u,v) = \sqrt{1+a^2} \cdot f\left(\frac{u - ag(u,v)}{\sqrt{1+a^2}}, v\right).$$

Ta izraz zdaj dvakrat odvajamo po u in po v:

$$\begin{aligned}
g_{uu} &= f_{xx}\left(1 - ag_u\right)^2 / \sqrt{1+a^2} + f_x\left(-ag_{uu}\right)\\
g_{vv} &= f_{xx}\left(-ag_v\right)^2 / \sqrt{1+a^2} + f_x\left(-ag_{vv}\right) + f_{xy}\left(-2ag_v\right) + f_{yy}\sqrt{1+a^2}.
\end{aligned}$$

Dokaz Meusnierjevega izreka

Če ovrednotimo druge parcialne odvode pri $(u, v) = (0, 0)$, kar se ujema z $(x, y) = (0, 0)$ in upoštevamo $f_x(0,0) = a$, $f_y(0,0) = 0$, $g_u(0,0) = g_v(0,0) = 0$ dobimo

$$\begin{aligned} g_{uu}(0,0) &= f_{xx}(0,0)/\sqrt{1+a^2} - a^2 g_{uu}(0,0) \\ g_{vv}(0,0) &= -a^2 g_{vv}(0,0) + f_{yy}(0,0)\sqrt{1+a^2} \end{aligned}$$

in tako

$$f_{xx}(0,0) = \sqrt{1+a^2}^3 g_{uu}(0,0), \quad f_{yy}(0,0) = \sqrt{1+a^2} g_{vv}(0,0)$$

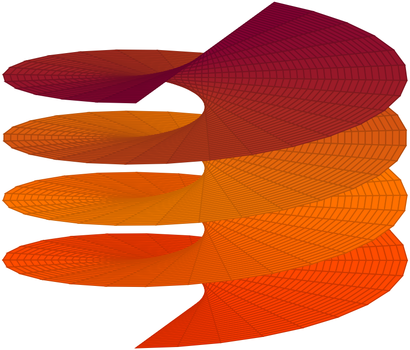
Tako pri $(0,0)$ dobimo

$$\begin{aligned} \mathscr{G}(f) &= \left(1+f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(1+f_x^2\right) f_{yy} \\ &= \sqrt{1+a^2}^3 g_{uu} + \left(1+a^2\right) \sqrt{1+a^2} g_{vv} \\ &= \sqrt{1+a^2}^3 \triangle g. \end{aligned}$$

To pokaže, da je $\mathscr{G}(f)(0,0) = 0$ natanko tedaj, ko je $\triangle g(0,0) = 2H = 0$. $\square$

Definicija

Gladka ploskev v $\mathbb{R}^3$ je minimalna, če je njena povprečna ukrivljenost v vsaki točki ničelna, t. j. $\frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = 0$.



Slika: Helikoid

Meusnier je leta 1776 dokazal, da je helikoid minimalna ploskev.

Dobimo ga tako, da premico v $\mathbb{R}^2$ vrtimo in jo hkrati dvigujemo v smeri osi vrtenja. V kartezičnih koordinatah je podan kot

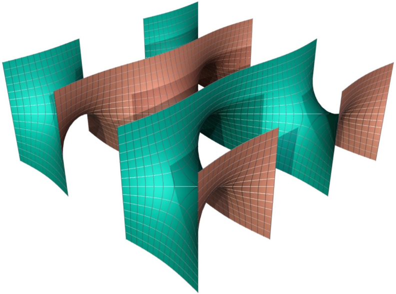
$$x = \rho \cos(\theta),$$
$$y = \rho \sin(\theta),$$
$$z = \theta,$$

za ρ in θ od $-\infty$ do ∞.

Poleg ravnine je to edina minimalna ploskev, ki jo lahko predstavimo kot unijo premic. Take ploskve imenujemo premonosne plokve.

Scherkova ploskev - 1835

Heinrich Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prve nove odkrite minimalne ploskve po helikoidu.



Prva Scherkova ploskev je invariantna pod dvema ortogonalnima translacijama, torej je dvojno preiodična. Njena glavna veja je graf nad kvadratom $P = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)^2$, podana kot

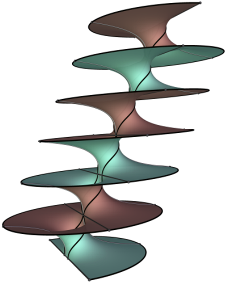
$$z = \ln \cos y - \ln \cos x$$

Ta Scherkova ploskev ima največjo Gaussovo ukrivljenost v $0 \in \mathbb{R}^3$ izmed vseh minimalnih grafov, ki ležijo nad kvadratom P, in sicer -1.

Torej, če hočemo, da graf minimalne ploskve obstaja nad določeno domeno, potem ne mora biti poljubno ukrivljen.

Minimalen graf v $\mathbb{R}^3$ nad celotno ravnino je ravnina.

Riemannovi minimalni primeri - 1867

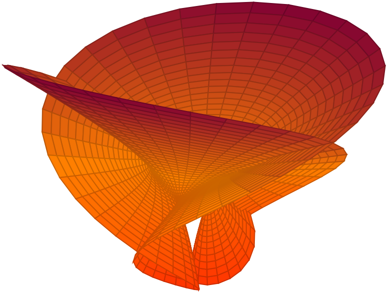


Slika: Eden Riemannovih minimalnih primerov

Proti koncu svojega življenja je Bernhard Riemann odkril družino enoparametričnih minimalnih ploskev R_λ za $\lambda \in (0, \infty)$. Parametrizirane so s periodičnimi ravninskimi domenami. Vsaka horizontalna ravnina se s ploskvijo seka v premici ali pa krožnici.

Ko pošljemo $\lambda \to 0$ te ploskve konvergirajo h katenoidi, če pa pošlejmo $\lambda \to \infty$ konvergirajo h helikoidu.

Hennebergova ploskev - 1875



Slika: Hennebergova ploskev

Neorientabilna minimalna ploskev. Do 1981 edina poznana neorientabilna minimlana ploskev. Podana je kot

$$x = 2\cos(v)\sinh(u) - \frac{2}{3}\cos(3v)\sinh(3u),$$
$$y = 2\sin(v)\sinh(u) + \frac{2}{3}\sin(3v)\sinh(3u),$$
$$z = 2\cos(2v)\cosh(2u)$$

za $u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi)$.

Analitičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberimo koordinate (u, v) na $\mathbb{R}^2$. Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z gladkim robom.

Definicija (Imerzija)

Preslikava $F : D \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ razreda $\mathscr{C}^1$ je imerzija, če sta parcialna odvoda $F_u = \partial F/\partial u$ in $F_v = \partial F/\partial v$ linearno neodvisna v vsaki točki D.

Naj bo $F : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka imerzija. Predpostavimo, da lahko koordinate (u, v) izberemo tako, da je F konformna preslikava. To pomeni, da bo zanjo veljalo

$$|F_u| = |F_v|, \quad F_u \cdot F_v = 0.$$

Ta predpostavka sledi iz obstoja izotermalnih koordinat, kar bomo utemeljili kasneje. Poglejmo si spet ploščinski funkcional, ki ga lahko zapišemo kot

$$\mathrm{Area}(F) = \iint_D |F_u \times F_v| \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_D \sqrt{|F_u|^2 \, |F_v|^2 - |F_u \cdot F_v|^2} \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

in Dirichletov energetski funkcional

$$\mathscr{D}(F) = \frac{1}{2} \iint_D |\nabla F|^2 \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2} \iint_D \left(|F_u|^2 + |F_v|^2\right) \, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Iz neenakosti

$$|x|^2|y|^2 - |x \cdot y|^2 \leq |x|^2|y|^2 \leq \frac{1}{4} \left(|x|^2 + |y|^2\right)^2, \quad \text{za } x, y \in \mathbb{R}^n$$

vidimo, da velja $\mathrm{Area}(F) \leq \mathscr{D}(F)$, kjer velja enakost natanko tedaj, ko je F konformna.

Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Torej imata funkcionala Area in $\mathscr{D}$ iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

Izračunajmo prvo variacijo funkcionala $\mathscr{D}$. Če je $h : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, za katero velja $h(bD) \equiv 0$, potem po uporabi prve Greenove identitete v zadnjem enačaju dobimo

$$\begin{aligned}\delta_h \mathscr{D}(F) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathscr{D}(F+th) &= \iint_D (F_u \cdot h_u + F_v \cdot h_v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \iint_D \nabla F \cdot \nabla h \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= -\iint_D \mathrm{div}(\nabla F) \cdot h \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Ta izraz je enak 0 za poljuben h natanko tedaj, ko je $\mathrm{div}(\nabla F) = \triangle X \equiv 0$. S tem smo dokazali naslednji izrek.

Izrek

Konformna imerzija $F : D \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ razreda $\mathscr{C}^2$ je stacionarna točka ploščinskega funkcionala natanko tedaj, ko je F harmonična.

Izotermalne koordinate

Naj bo M gladka ploskev in $F : M \to \mathbb{R}^n$ gladka imerzija. F na M določi Riemannovo metriko $g = |F_u|^2 \, \mathrm{d}u^2 + (F_u \cdot F_v)\,(\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \mathrm{d}v\mathrm{d}u) + |F_v|^2 \, \mathrm{d}v^2$. Za vsako točko $p \in M$ obstaja okolica $U \subset M$ s koordinatami $(\tilde{u}, \tilde{v})$ v katerih Riemannova metrika g dobi enostavnejšo obliko

$$g = \lambda(u,v) \left(\mathrm{d}\tilde{u}^2 + \mathrm{d}\tilde{v}^2\right) \quad \text{za } \lambda(u,v) > 0.$$

Vsakim takim koordinatam $(\tilde{u}, \tilde{v})$ pravimo izotermalne koordinate za Riemannovo metriko g. Naj bo $\widetilde{F} = \widetilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v})$ imerzija $U \to \mathbb{R}^n$, ki jo dobimo iz F, če (u,v) izrazimo z $(\tilde{u}, \tilde{v})$. Velja

$$\left|\widetilde{F}_{\tilde{u}}\right|^2 = \left|\widetilde{F}_{\tilde{v}}\right|^2 = \lambda, \quad \widetilde{F}_{\tilde{u}} \cdot \widetilde{F}_{\tilde{v}} = 0,$$

kar pomeni, da je $\widetilde{F} : U \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija. Obstoj izotermalnih koordinat je odkril C. F. Gauss za rotacijske ploskve. Splošnega dokaza ne bomo navajli.

Izotermalne koordinate vedno obstajajo, vendar le lokalno. Kaj pa globalna situacija? Po tem, kar smo povedali zgoraj vemo, da obstaja odprta povezana okolica $U_i \subset M$ točke p, ki jo lahko parametriziramo z gladkim difeomorfizmom $\phi_i^{-1} : V_i \subset \mathbb{R}^2 \to U_i$, tako da je $F \circ \phi_i^{-1} : V_i \to \mathbb{R}^n$ konformna vložitev. Če je $\phi_j^{-1} : V_j \subset \mathbb{R}^2 \to U_j$, $i \neq j$, še ena taka lokalna parametrizacija dela ploskve $U_j \subset M$, kjer velja $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, potem je prehodna preslikava $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i\left(U_{ij}\right) \to \phi_j\left(U_{ij}\right)$ konformni difeomorfizem med ravninskima domenama. Če $\mathbb{R}^2$ identificiramo s kompleksno ravnino $\mathbb{C}$, vemo, da so konformni difeomorfizmi med pari povezanih odprtih domen v $\mathbb{C}$ ali biholomorfni ali pa antibiholomorfni, glede na to, če ohranijo orientacijo.

Konformne parametrizacije z Riemannovimi ploskvami

Paru (U_i, ϕ_i), kjer je $U_i \subset M$ in ϕ_i lokalna parametrizacija pravimo lokalna karta na M. Zbirki vseh lokalnih kart, ki pokrijejo M, t. j. $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$, kjer je $\{U_i\}_{i \in I}$ odprto pokritje M, pravimo atlas. Če so prehodne preslikave ϕ_{ij} konfromne atlasu $\mathcal{U}$ pravimo konformna struktura na M. Ploskev M, opremljena s konformno strukturo je konformna ploskev. Če je M orientabilna in v konformnem atlasu izberemo za prehodne preslikave ϕ_i biholomorfne funkcije, dobimo Riemannovo ploskev $(M, \mathcal{U})$.

Za konformno ploskev M je princip konformne imerzije $M \to \mathbb{R}^n$ dobro definiran, če nanjo gledamo v lokalnih koordinatah, določenih s konformnim atlasom. Tudi definicija harmonične funkcije je dobra v lokalnih koordinatah.

Posledica

Vsako minimalno ploskev v $\mathbb{R}^n$ lahko parametriziramo s konformno harmonično preslikavo iz Riemannove oz. konformne ploskve. Natančneje, konformna imerzija $M \to \mathbb{R}^n$ parametrizira minimalno ploskev natanko tedaj, ko je harmonična preslikava.

Glavna ugotovitev je, da so naravne izvorne ploskve, ki jih je smiselno upoštevati (pri parametrizaciji minimalnih ploskev) Riemannove ploskve v orientabilnem primeru in konformne ploskve v neorientabilnem primeru.

Povezava s kompleksno analizo

Naj bo $z = u + \mathrm{i}v$ kompleksna spremenljivka na $\mathbb{C}$. Iz kompleksne analize se spomnimo dveh operatorjev, imenovanih Wirtingerjeva odvoda, ki sta definirana kot

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Jedro $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sestavljajo holomorfne funkcije, jedro $\frac{\partial}{\partial z}$ pa antiholomorfne funkcije. Glede na tedva operatorja, se Laplaceov opertor izrazi kot

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Vidimo, da je preslikava $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : D \to \mathbb{R}^n$ harmonična natanko tedaj, ko je preslikava $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : D \to \mathbb{C}^n$ s komponentami $x_j = \partial X_j / \partial z$ za $j = 1, 2, \ldots, n$ holomorfna in fukcije x_j nimajo skupne ničle. Poleg tega je konformnost X ekvivalentna naslednjemu pogoju

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \, X_u \cdot X_v = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0 \quad \text{na } D.$$

Analogen rezultat velja tudi, če D poljubna odprta Riemannova ploskev. Videli smo že, da vsaka imerzija orientabilne ploskve v $\mathbb{R}^n$ premore konformno parametrizacijo z Riemannove ploskve.

Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Izrek (Weierstrass-Enneperjev reprezentacijski izrek)

Naj bo D povezano območje v $\mathbb{C}$. Preslikava $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : D \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^2$ parametrizira konformno minimalno ploskev $X(D) \subset \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \textit{holomorfna in velja} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0.$$

Po drugi strani pa preslikava $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \to \mathbb{C}^n_* = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, ki zadošča pogoju $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 0$ in ima ničelno periodo

$$\Re \oint_C x \, \mathrm{d}z = 0 \quad \textit{za vsako sklenjeno krivuljo } C \subset D$$

določi konformno minimalno imerzijo $X : D \to \mathbb{R}^n$, podano s

$$X(z) = c + \Re \int_{z_0}^{z} x(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

za poljubno začetno točko $z_0 \in D$ in vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pogoj za ničelnost periode zagotovi, da je integral dobro definiran, t. j. neodvisen od poti integriranja.

Prva homološka grupa in homološki razred

Definirajmo še en topološki pojem. Naj bo M Riemannova ploskev in $x_0 \in M$. Gledamo sklenjene krivulje na M, ki gredo skozi izbrano točko, natančneje, zvezne preslikave

$$\gamma : [0,1] \to M, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x_0.$$

Označimo množico vseh takih krivulj z $\Gamma(x_0)$ in na njej vpeljimo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na naslednji način: $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow$ obstaja zvezna preslikava $H : [0,1] \times [0,1] \to M$, ki zadošča:

- $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ za vse $s \in [0,1]$,
- $H(t,0) = \gamma_1(t)$ in $H(t,1) = \gamma_2(t)$ za vse $t \in [0,1]$.

Preslikavo H imenujemo homotopija, krivulji, ki premoreta homotopijo pa homotopsko ekvivalentni. Kvocientno množico $\Gamma(x_0)/_\sim = \pi_1(M, x_0)$ opremimo z operacijo lepljenja $\gamma_1 * \gamma_2 : [0,1] \to M$:

$$(\gamma_0 * \gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & ; 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & ; \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}.$$

Dobljeno grupo $\pi_1(M, x_0)$ imenujemo prva fundamentalna grupa M glede na x_0, njeno abelacijo $H_1(M, \mathbb{Z})$ pa prva homološka grupa M s celimi koeficienti.

Naj bo $D \subset \mathbb{C}$ omejena povezana domena. Homološki razred v $H_1(D, \mathbb{Z})$ predstavlja ekvivalenčni razred sklenjenih zank v domeni D, kjer sta dve zanki homologni, če *skupaj* tvorita rob neke ploskve, ki leži znotraj D. Intuitivno to pomeni, da zanemarimo lokalne deformacije in nas zanima le, kolikokrat in v katero smer se zanka ovije okoli posameznih lukenj v domeni, kjer luknje definiramo kot omejene povezane komponente komplementa $\mathbb{C} \setminus D$.

Generatorji, homološka baza in ničelna kvadrika

Če je $D \subset \mathbb{C}$, tako kot prej, omejena povezana domena, katere rob bD je sestavljen iz l_1 Jordanovih krivulj ter l_2 izoliranih točk, potem je prva homološka grupa $H_1(D, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\ell$, kjer $\ell = l_1 + l_2 - 1$. Generatorji te proste abelove grupe so homološki razredi zank, ki obkrožajo posamezne luknje v D. Vsaka taka luknja prispeva po en generator. Če ima D eno luknjo, potem je $H_1(D, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, homološki razred zanke pa je določen z enim celim številom - številom ovitij okoli luknje. Homološka baza je množica krivulj $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_\ell\} \subset D$, kjer velja, da so homološki razredi $[\gamma_1], \ldots, [\gamma_\ell]$ medseboj linearno neodvisni ter da lahko vsak drug homološki razred zapišemo kot $[\gamma] = n_1 [\gamma_1] * \cdots * n_\ell [\gamma_\ell]$, za $n_i \in \mathbb{Z}$.

Definirajmo ničelno kvadriko

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^{n-1} = \left\{ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = 0 \right\}.$$

Iz formulacije Weierstrass-Enneperjevega reprezentacijskega izreka je očitno, da ničelna kvadrika igra ključno vlogo v teoriji minimalnih ploskev. Če ji odstarnimo izhodišče dobimo punktriano ničelno kvadriko $\mathbb{A}_* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Vse konformne minimalne ploskve $D \to \mathbb{R}^n$ dobimo kot integrale holomorfnih preslikav $f : D \to \mathbb{A}_* \subset \mathbb{C}^n$, ki zadostujejo pogoju za ničelno periodnost. Ker je f holomorfna, je dovolj da pogoj za ničelno periodnost preverimo na homološki bazi $H_1(D, \mathbb{Z})$. Če je D enostavno povezano območje je pogoj izpolnjen na prazno.

Weierstrass-Enneperjeva formula v dimenziji $n = 3$

V dimenziji $n = 3$ ničelna kvadrika premore dvojno holomorfno pokritje $\phi : \mathbb{C}^2_* \to \mathbb{A}^2_*$

$$\phi(z, w) = \left(z^2 - w^2, \mathfrak{i}\left(z^2 + w^2\right), 2zw\right)$$

Označimo $\partial X = \frac{\partial X}{\partial z}\mathrm{d}z$. Weierstrass-Enneperjeva furmula za konformno minimalno imerzijo $X = (X_1, X_2, X_3) : D \to \mathbb{R}^3$ dobi bolj konkretno obliko:

$$X(z) = z_0 + \Re \int_{z_0}^{z} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{g}} - \mathfrak{g}\right), \frac{\mathfrak{i}}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{g}} + \mathfrak{g}\right), 1\right) \partial X_3,$$

kjer je

$$\mathfrak{g} = \frac{\partial X_3}{\partial X_1 - \mathfrak{i}\partial X_2} : D \longrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

holomorfna preslikava na Riemannovo sfero (torej meromorfna funkcija na D), ki ji pravimo kompleksna Gaussova preslikava. Določa veliko pomembnih lastnosti minimalne ploskve. Kompleksno Gaussovo preslikavo dobimo, če standardno Gaussovo preslikavo

$$\mathbf{N} = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} : M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

komponiramo s stereografsko projekcijo $S^2 \to \mathbb{CP}^1$.

Torej za konstrukcijo minimalne ploskve s pomočjo Weierstrass-Enneperjeve formule izberemo poljubno meromorfno funkcijo $\mathfrak{g}$ diferencial $\partial X_3 = f(z)\mathrm{d}z$, kjer dodatno velja, da sta $f\mathfrak{g}$ in $f/\mathfrak{g}$ holomorfni funkciji, ki nimata skupne ničle. Integral mora zadošča pogoju za ničelnost realne periode.

Primer: Helikoid

Izberimo $\mathfrak{g} = e^{\mathrm{i}z}$ in diferencial $\partial X_3 = \mathrm{d}z$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} \right), \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Prva komponenta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Re \int_0^z \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{i}\zeta}} - e^{\mathrm{i}\zeta} \right) \mathrm{d}\zeta \\ &= \Re \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(e^{-\mathrm{i}z} + e^{\mathrm{i}z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}\Re \left(e^{-v}\left(\cos u + \mathrm{i}\sin u\right) + e^{v}\left(\cos u - \mathrm{i}\sin u\right) \right) \\ &= \sin u \left(\frac{e^{v} - e^{-v}}{2} \right) \\ &= \sin u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Druga komponenta:

$$\begin{aligned} X_2 &= \Re \int_0^z \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{e^{\mathrm{i}\zeta}} + e^{\mathrm{i}\zeta} \right) \mathrm{d}\zeta \\ &= \Re \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}z} - \mathrm{i}e^{\mathrm{i}z} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}\Re \left(e^{-v}\left(\cos u + \mathrm{i}\sin u\right) - e^{v}\left(\cos u - \mathrm{i}\sin u\right) \right) \\ &= -\cos u \left(\frac{e^{v} - e^{-v}}{2} \right) \\ &= -\cos u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

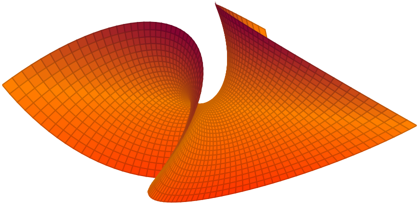
Tretja komponenta: $X_3 = \Re \int_0^z 1\,\mathrm{d}\zeta = \Re\left(u + \mathrm{i}v\right) = u.$

Vidimo, da je to ravno reparametrizacija helikoida, ki smo ga videli na začetku.

$$X(u,v) = \left(\sin u \cdot \sinh v,\ -\cos u \cdot \sinh v,\ u\right).$$

Enneperjeva ploskev - 1886

Poznamo tudi primere minimalnih ploskev, ki si deljo isto Gaussovo preslikavo.



Slika: Enneperjeva ploskev

Za Gaussovo preslikavo izberemo $\mathfrak{g}(z) = z$. Če vzamemo $\partial X_3 = 2z\mathrm{d}z$ dobimo Enneperjevo ploskev, če pa vzamemo $\partial X_3 = \frac{\mathrm{d}z}{z}$ pa dobimo katenoid. Eksplicitno povedano:

$$\text{Enneperjeva ploskev} \quad X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right), \frac{\mathfrak{i}}{2}\left(\frac{1}{\zeta} + \zeta\right), 1 \right) 2\zeta \, \mathrm{d}\zeta,$$

$$\text{Katenoida} \quad X(z) = (1,0,0) - \Re \int_1^z \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} - \zeta\right), \frac{\mathfrak{i}}{2}\left(\frac{1}{\zeta} + \zeta\right), 1 \right) \frac{\mathrm{d}z}{\zeta}.$$

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \ldots, F_n) : D \to \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$\left(F_1'\right)^2 + \left(F_2'\right)^2 + \cdots + \left(F_n'\right)^2 = 0$$

je holomorfna ničelna krivulja. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D,$$

kjer je $z_0 \in D$, $c \in \mathbb{C}^n$ in $f : D \to \mathbb{A}_*$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Torej, vsaka holomorfna funkcija, ki slika iz enostavnega povezanega območja v punktirano ničelno kvadriko določa holomorfno ničelno krivuljo po zgornji formuli.

Če je $F = X + \mathrm{i}Y : D \to \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja, potem sta njen realni del $X = \Re F : D \to \mathbb{R}^n$ in njen imaginarni del $Y = \Im F : D \to \mathbb{R}^n$ konformni minimalni ploskvi. Ker sta X in Y harmonični konjugiranki, pravimo, da sta konjugirani minimalni ploskvi.

Konformnim minimalnim ploskvam iz 1-parametrične družine

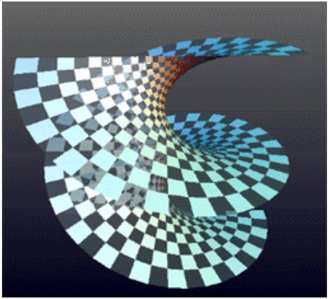
$$G_t = \Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} F\right) : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{za } t \in \mathbb{R}$$

pravimo pridružene minimalne ploskve holomorfne ničelne krivulje F.

Primer: katenoid in helikoid

Katenoid in helikoid sta konjugirani minimalni ploskvi - realen in imaginaren del ničelne krivulje

$$F(\zeta) = (\cos\zeta, \sin\zeta, -i\zeta), \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C}.$$



Slika: Helikatenoid

Oglejmo si pridružene minimalne ploskve te ničelne krivulje:

$$\begin{aligned} G_t(\zeta) &= \Re\left(e^{it}F(\zeta)\right) \\ &= \cos t \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cosh y \\ \sin x \cdot \cosh y \\ y \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \sin x \cdot \sinh y \\ -\cos x \cdot \sinh y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pri $t = 0$ imamo katenoid in pri $t = \pm\pi/2$ pa helikoid.

HVALA ZA POZORNOST!