Weierstrass-Enneperjeva konstrukcija minimalnih ploskev

Jon Pascal Miklavčič

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

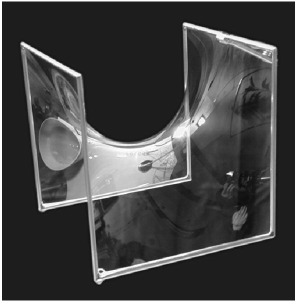
31. oktober 2024

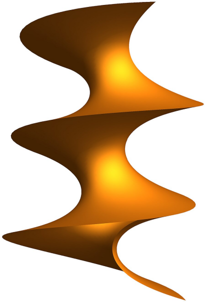
Minimalne ploskve

Definicija

Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ je *minimalna* natanko tedaj, ko za vsako točko $p \in M$ obstaja okolica, omejena z enostavno povezano krivuljo, ki ima najmanjšo ploščino izmed vseh ploskev z isto robno krivuljo.

Geometrijska definicija je lokalna. Povezava z milnimi mehurčki.





Srednja ukrivljenost

Definicija

Naj bo $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ regularna C^2 parametrizacija krivulje. Potem polarni kot $\phi(t) := \arg(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ obstaja za vse t. *Predznačeno ukrivljenost* definiramo kot:

$$\kappa := \frac{d\phi}{ds} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \ddot{x}\dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}$$

Naj bo S ploskev v $\mathbb{R}^3$ in p točka na S. Vsaka ravnina skozi p, ki vsebuje normalo na ploskev na S odreže krivuljo. Ko to ravnino vrtimo za kot θ, se ukrivljenost krivulje spreminja.

Definicija

Za točko $p \in S$ definiramo srednjo ukrivljenost kot:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa(\theta) \, d\theta$$

Srednja ukrivljenost

Alternativne karakterizacije srednje ukrivljenosti:

- $H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2)$, kjer sta κ_1 in κ_2 glavni ukrivljenosti;
- $2H = \mathrm{sl}\left((\mathrm{II})\left(\mathrm{I}^{-1}\right)\right)$, kjer sta I in II prva in druga fundamentalna forma.

Trditev

Minimalne ploskve so tiste, ki imajo srednjo ukrivljenost 0, *t.j.* $H = 0$.

Naj bo $r = r(u, v)$ regularna parametrizacija ploskve S.

Definicija

Prvo fundamentalno formo definiramo kot:

$$\mathrm{I} = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Koeficienti E, F in G so definirani kot:

$$E(u, v) = r_u \cdot r_u, \quad F(u, v) = r_u \cdot r_v, \quad G(u, v) = r_v \cdot r_v$$

Srednja ukrivljenost

Definicija

Drugo fundamentalno formo definiramo kot:

$$\mathrm{II} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$

Koeficiente L, M in N dobimo kot projekcije drugih parcialnih odvodov r na enostki normalni vektor $n = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$. Torej:

$$L = \langle r_{uu}, n \rangle, \quad M = \langle r_{uv}, n \rangle, \quad N = \langle r_{vv}, n \rangle$$

Matrika prve fundamentalne forme je $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$.

Matrika druge fundamentalne forme v bazi $\{r_u, r_v\}$ je $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$.

Srednjo ukrivljenost lahko tako izrazimo kot:

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}$$

Weierstrass-Enneperjeva parametrizacija

Izrek

Naj bosta f in g funkciji enotskem disku ali kompleksni ravnini taki, da je f holomorfna, g meromorfna in fg^2 holomorfna. Naj bodo c_1, c_2, c_3 kompleksne konstante. Potem je ploskev, podana s spodnjo parametrizacijo minimalna:

$$r_k(\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\zeta \varphi_k(z)\,dz\right\} + c_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1 = f\left(1 - g^2\right)/2$$

$$\varphi_2 = if\left(1 + g^2\right)/2$$

$$\varphi_3 = fg$$

Še več, vsaka minimalna ploskev, ki ima parametrizacijo, se da lokalno predstaviti na tak način.