Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Jon Pascal Miklavčič

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

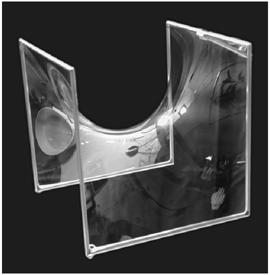
22. november 2024

Minimalne ploskve

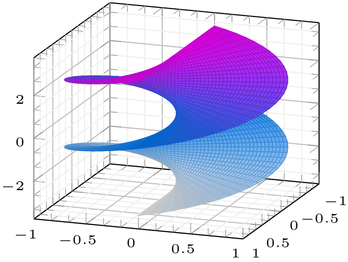
Definicija

Ploskev $M \subset \mathbb{R}^3$ je *minimalna* natanko tedaj, ko za vsako točko $p \in M$ obstaja okolica, omejena z enostavno povezano krivuljo, ki ima najmanjšo ploščino izmed vseh ploskev z isto robno krivuljo.

Geometrijska definicija je lokalna. Povezava z milnimi mehurčki.



Slika: Milni "mehurček"



Slika: Helikoid

Srednja ukrivljenost

Definicija

Naj bo $\boldsymbol{\gamma}$ regularna C^2 parametrizacija krivulje. Potem *ukrivljenost* krivulje definiramo kot:

$$\kappa = \frac{\|\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}''\|}{\|\boldsymbol{\gamma}'\|^3}.$$

Potem lahko definiramo tudi *predznačeno ukrivljenost* krivulje:

$$\kappa_s = \kappa \cdot \operatorname{sign}\left(\mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\gamma}' \times \boldsymbol{\gamma}'')\right).$$

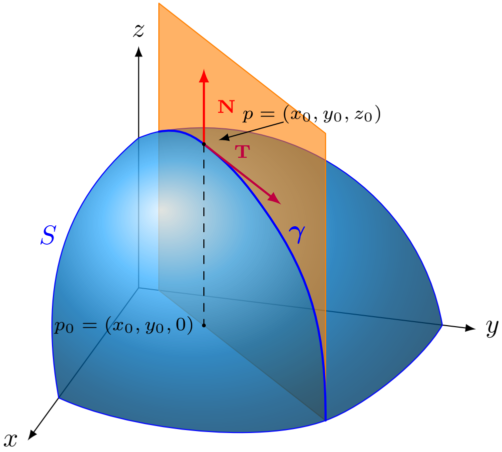
Naj bo S ploskev v $\mathbb{R}^3$ in p točka na S. Vsaka ravnina skozi p, ki vsebuje normalo na ploskev na S odreže krivuljo. Ko to ravnino vrtimo za kot θ okoli normale, se ukrivljenost krivulje spreminja.

Definicija

Za točko $p \in S$ definiramo *srednjo ukrivljenost* kot:

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa_s(\theta)\, d\theta.$$

Srednja ukrivljenost



Slika: Normalna ravnina v p

Srednja ukrivljenost

Izrek

Minimalne ploskve so natanko tiste, ki imajo srednjo ukrivljenost 0*, t.j.* $H = 0$.

Alternativna karakterizacija srednje ukrivljenosti:

$$H = \frac{1}{2}\left(\kappa_1 + \kappa_2\right), \quad \text{kjer sta } \kappa_1 \text{ in } \kappa_2 \text{ glavni ukrivljenosti.}$$

Kako pa izračunamo κ_1 in κ_2? κ_1 in κ_2 dobimo kot lastni vrednosti operatorja oblike P, ki je definiran kot:

$$P = \mathrm{I}^{-1}\mathrm{II} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}.$$

Tukaj sta I in II matriki prve in druge fundamentalne forme.

Prva in druga fundamentalna forma

Naj bo $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ regularna parametrizacija ploskve S.

Definicija

Koeficienti prve fundamentalne forme E, F in G so definirani kot:

$$E = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u \rangle, \quad F = \langle \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v \rangle, \quad G = \langle \mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v \rangle.$$

Definicija

Koeficiente druge fundamentalne forme L, M in N dobimo kot projekcije drugih parcialnih odvodov $\mathbf{r}$ na enostki normalni vektor $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|}$. Torej:

$$L = \langle \mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n} \rangle, \quad M = \langle \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n} \rangle, \quad N = \langle \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n} \rangle.$$

Srednjo ukrivljenost lahko tako izrazimo kot:

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}.$$

Enneperjeva ploskev

To je ploskev, ki jo lahko parametriziramo kot:

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= \frac{1}{3}u\left(1-\frac{1}{3}u^2+v^2\right),\\
y(u,v) &= \frac{1}{3}v\left(1-\frac{1}{3}v^2+u^2\right),\\
z(u,v) &= \frac{1}{3}\left(u^2-v^2\right).
\end{aligned}
$$

Če poračunamo njene koeficiente prve fundamentalne forme dobimo:

$$E=(1+u^2+v^2)^2,\quad F=0,\quad G=E=(1+u^2+v^2)^2.$$

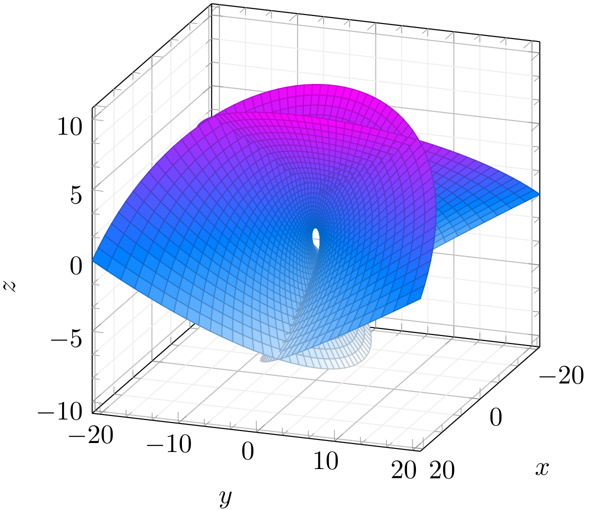
Če poračunamo še njene koeficiente druge fundamentalne forme dobimo:

$$L=\frac{(u^2+v^2)(4+2u^2+2v^2)+2}{\|\mathbf{n}\|},\quad M=0,\quad N=-L=\frac{-(u^2+v^2)(4+2u^2+2v^2)+2}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Torej za srednjo ukrivljenost po formuli dobimo:

$$H=\frac{1}{2}\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}=\frac{1}{2}\frac{EN-0-EN}{EG-F^2}=0.$$

Enneperjeva ploskev



Slika: Enneperjeva ploskev

Weierstrass-Enneperjeva parametrizacija

Izrek

Naj bosta f in g funkciji na enotskem disku ali kompleksni ravnini taki, da je f holomorfna, g meromorfna in fg^2 holomorfna. Naj bodo c_1, c_2, c_3 kompleksne konstante. Potem je ploskev, podana s spodnjo parametrizacijo minimalna:

$$x_k(\zeta) = \mathrm{Re}\left\{\int_0^\zeta \varphi_k(z)\,dz\right\} + c_k, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\varphi_1 = f\left(1 - g^2\right)/2$$

$$\varphi_2 = if\left(1 + g^2\right)/2$$

$$\varphi_3 = fg$$

Še več, vsaka minimalna ploskev, ki ima parametrizacijo, se da lokalno predstaviti na tak način.

Enneperjeva ploskev

Parametrizirajmo zadaj Enneperjevo ploskev še z Weierstrass-Enneperjevo parametrizacijo. Izberemo $f(z) = 1$, $g(z) = z$ in $c_k = 0$. Poračunamo:

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{Re}\left(\int \left(1 - z^2\right) dz\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(z - \frac{1}{3}z^3\right) \\ &= u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \operatorname{Re}\left(\int i\left(1 + z^2\right) dz\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(i\left(z + \frac{1}{3}z^3\right)\right) \\ &= -v - u^2v + \frac{1}{3}v^3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_3 &= \operatorname{Re}\left(\int 2z dz\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(z^2\right) \\ &= \operatorname{Re}\left((u+iv)^2\right) \\ &= u^2 - v^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da dobimo prav parametrizacijo Enneperjeve ploskve.