

Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Jon Pascal Miklavčič

Mentor: doc. dr. Uroš Kuzman

23. maj 2025

Osnovni podatki in Plateaujev problem

To so ploskve, ki **lokalno minimizirajo ploščino** v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

Osnovni podatki in Plateaujev problem

To so ploskve, ki **lokalno minimizirajo ploščino** v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

Milni mehurček, ki ga napenja sklenjena krivulja v prostoru dobil obliko minimalne ploskve.

Kos raztegljivega blaga v obliki diska, napet kot zavesa na krivuljo v prostoru zavzame obliko minimalne ploskve. Predstavlja **konformno parametizacijo**.

Osnovni podatki in Plateaujev problem

To so ploskve, ki **lokalno minimizirajo ploščino** v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

Milni mehurček, ki ga napenja sklenjena krivulja v prostoru dobil obliko minimalne ploskve.

Kos raztegljivega blaga v obliki diska, napet kot zavesa na krivuljo v prostoru zavzame obliko minimalne ploskve. Predstavlja **konformno parametizacijo**.

Eksperimenti z milnimi mehurčki. **Joseph Plateau** - 1873.

Plateaujev problem - Ali vsaka sklenjena Jordanova krivulja (krivulja homemorfna S^1) v \mathbb{R}^3 razpenja minimalno ploskev? Odgovor je pritrdilen, kar sta neodvisno dokazala Tibor Radó (1930) in Jesse Douglas (1932).

Osnovni podatki in Plateaujev problem

To so ploskve, ki **lokalno minimizirajo ploščino** v smislu, da ima poljuben dovolj majhen del ploskve najmanjšo površino med vsemi ploskvami z istim robom.

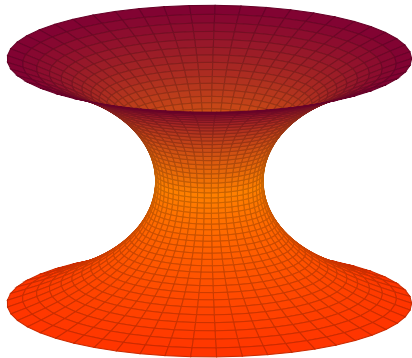
Milni mehurček, ki ga napenja sklenjena krivulja v prostoru dobil obliko minimalne ploskve.

Kos raztegljivega blaga v obliki diska, napet kot zavesa na krivuljo v prostoru zavzame obliko minimalne ploskve. Predstavlja **konformno parametizacijo**.

Eksperimenti z milnimi mehurčki. **Joseph Plateau** - 1873.

Plateaujev problem - Ali vsaka sklenjena Jordanova krivulja (krivulja homemorfna S^1) v \mathbb{R}^3 razpenja minimalno ploskev? Odgovor je pritrdilen, kar sta neodvisno dokazala Tibor Radó (1930) in Jesse Douglas (1932).

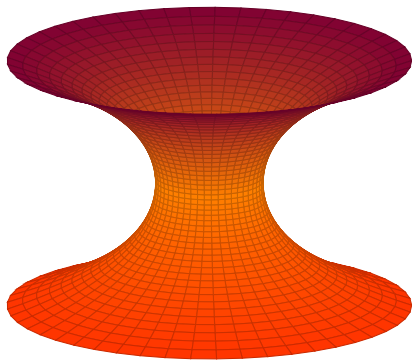
Minimalne ploskve si bomo ogledali v Evklidskih prostorih. Seveda se na njih lahko gleda v poljubni Riemannovi mnogoterosti dimenzije vsaj 3, ampak v tem primeru ne obstaja vedno povezava s kompleksno analizo.



Slika: Katenoida

Definicija

Minimalna ploskev v \mathbb{R}^3 je taka, ki **lokalno minimizira ploščino** med vsemi bližnjimi ploskvami z istim robom.



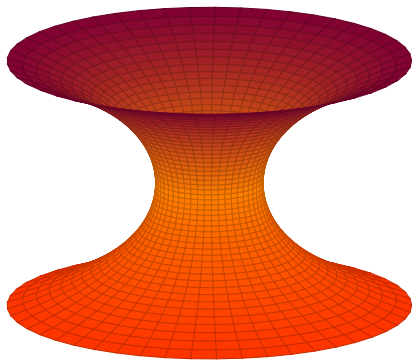
Slika: Katenoida

Definicija

Minimalna ploskev v \mathbb{R}^3 je taka, ki **lokalno minimizira ploščino** med vsemi bližnjimi ploskvami z istim robom.

Prva poznana netrivialna minimalna ploskev.

Leta 1744 je Euler dokazal, da je katenoida minimalna ploskev. Je edina netrivialna **rotacijska minimalna ploskev** v \mathbb{R}^3 .



Slika: Katenoida

Definicija

Minimalna ploskev v \mathbb{R}^3 je taka, ki **lokalno minimizira ploščino** med vsemi bližnjimi ploskvami z istim robom.

Prva poznana netrivialna minimalna ploskev.

Leta 1744 je Euler dokazal, da je katenoida minimalna ploskev. Je edina netrivialna **rotacijska minimalna ploskev** v \mathbb{R}^3 .

Dobimo jo z rotacijo grafa hiperboličnega kosinusa (t. i. “verižnice”) okoli izbrane osi v \mathbb{R}^3 . Torej

$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z$$

$$(\varphi, z) \mapsto (\cos \varphi \cdot \cosh z, \sin \varphi \cdot \cosh z, z).$$

J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena z odsekoma \mathcal{C}^1 robom ∂D . Naj bo funkcija $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ razreda \mathcal{C}^2 . Njen graf je množica točk

$$\mathcal{G}_f = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y) \}$$

in ima površino enako

$$\text{Area}(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy.$$

J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena z odsekoma \mathcal{C}^1 robom ∂D . Naj bo funkcija $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ razreda \mathcal{C}^2 . Njen graf je množica točk

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y)\}$$

in ima površino enako

$$\text{Area}(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy.$$

Iščemo funkcije f , ki bodo imele najmanjšo ploščino med vsemi bližnjimi grafi z enakimi robnimi vrednostmi.

J. L. Lagrange 1760 - grafi z minimalno ploščino

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena z odsekoma \mathcal{C}^1 robom ∂D . Naj bo funkcija $f : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ razreda \mathcal{C}^2 . Njen graf je množica točk

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \overline{D}, z = f(x, y)\}$$

in ima površino enako

$$\text{Area}(f) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + |\nabla f|^2} \, dx dy.$$

Iščemo funkcije f , ki bodo imele najmanjšo ploščino med vsemi bližnjimi grafi z enakimi robnimi vrednostmi.

Izberemo \mathcal{C}^1 funkcijo $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero velja $h(\partial D) \equiv 0$. Za $s \in \mathbb{R}$ si oglejmo funkcijo

$$s \mapsto \text{Area}(f + sh) \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Funkcija f bo stacionarna točka **ploščinskega funkcionala** natanko tedaj, ko bo pri $s = 0$

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(f + sh) = 0.$$

To lahko razpišemo na

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sqrt{1 + (f_x + sh_x)^2 + (f_y + sh_y)^2} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy\end{aligned}$$

To lahko razpišemo na

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sqrt{1 + (f_x + sh_x)^2 + (f_y + sh_y)^2} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy\end{aligned}$$

Ker poznamo robne vrednosti deformacije h in funkcije f uporabimo Gaussov izrek.

To lahko razpišemo na

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \sqrt{1 + (f_x + sh_x)^2 + (f_y + sh_y)^2} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{f_x h_x + f_y h_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \, dx dy \\ &= \iint_D \frac{\nabla f \cdot \nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy\end{aligned}$$

Ker poznamo robne vrednosti deformacije h in funkcije f uporabimo Gaussov izrek.

Če upoštevamo, da za funkcijo h in vektorsko polje \mathbf{F} velja $\text{div}(h\mathbf{F}) = \nabla h \cdot \mathbf{F} + h \cdot \text{div}(\mathbf{F})$ dobimo t. i. prvo Greenovo identiteto

$$\iint_D \nabla h \cdot \mathbf{F} \, dx dy = \oint_{\partial D} h \mathbf{F} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{s} - \iint_D h \cdot \text{div}(\mathbf{F}) \, dx dy,$$

kjer je \mathbf{n} normala na rob območja. V našem primeru izberemo $\mathbf{F} = \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$.

Torej

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \nabla h \cdot \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy \\ &= - \iint_D h \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \, dx dy,\end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \nabla h \cdot \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy \\ &= - \iint_D h \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \, dx dy,\end{aligned}$$

Zaradi zveznosti h , je izraz enak 0 za vse izbore h natanko takrat, ko je divergenca identično enaka 0 na D . To lahko zapišemo v naslednji obliki

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} = 0,$$

kar je pa dalje ekvivalentno

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

Torej

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \text{Area}(f + sh) &= \iint_D \nabla h \cdot \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \, dx dy \\ &= - \iint_D h \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right) \, dx dy,\end{aligned}$$

Zaradi zveznosti h , je izraz enak 0 za vse izbore h natanko takrat, ko je divergenca identično enaka 0 na D . To lahko zapišemo v naslednji obliki

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{f_y}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} = \frac{(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy}}{(1 + |\nabla f|^2)^{3/2}} = 0,$$

kar je pa dalje ekvivalentno

$$(1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0.$$

To je **Euler-Lagrangeova enačba** za ploščinski funkcional. Je eliptična PDE drugega reda, ki jo poznamo pod imenom **enačba za minimalne grafe**.

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na ∂D sploh obstaja in ali je enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó za omejena konveksna območja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev enačbe za minimalne grafe

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na ∂D sploh obstaja in ali je enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó za omejena konveksna območja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Enoličnost rešitve: Če je $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena in je ploskev definirana kot graf funkcije f nad \overline{D} , ki zadošča enačbi za minimalne grafe, potem f absolutno minimizira ploščino.

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na ∂D sploh obstaja in ali je enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó za omejena konveksna območja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Enoličnost rešitve: Če je $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena in je ploskev definirana kot graf funkcije f nad \overline{D} , ki zadošča enačbi za minimalne grafe, potem f absolutno minimizira ploščino.

Obstoj rešitve: Če je $D \subset \mathbb{R}^2$ konveksna, potem za zvezno določene robne vrednosti obstaja rešitev enačbe za minimalne grafe.

Rešitev enačbe za minimalne grafe

Na tej točki se naravno vprašamo, ali rešitev enačbe za minimalne grafe z zvezno določenimi robnimi vrednostmi na ∂D sploh obstaja in ali je enolična. Ta Dirichletov problem za enačbo minimalnega grafa je leta 1930 razrešil T. Radó za omejena konveksna območja $D \subset \mathbb{R}^2$.

Enoličnost rešitve: Če je $D \subset \mathbb{R}^2$ omejena in je ploskev definirana kot graf funkcije f nad \overline{D} , ki zadošča enačbi za minimalne grafe, potem f absolutno minimizira ploščino.

Obstoj rešitve: Če je $D \subset \mathbb{R}^2$ konveksna, potem za zvezno določene robne vrednosti obstaja rešitev enačbe za minimalne grafe.

Definicija

Gladka ploskev v \mathbb{R}^3 je minimalna natanko tedaj, ko je stacionarna točka plošlinskega funkcionala glede na deformacije na kompaktnih množicah.

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Oglejmo si koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n .

Ukrivljenost krivulj in ploskev

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Oglejmo si koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n .

Aksiom

Ukrivljenost krivulje ali ploskve je invariantna za afixne linearne preslikave $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oblike $x \mapsto Ax + b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$ in $A \in O_n(\mathbb{R})$ iz ortogonalne grupe na \mathbb{R}^n . Takim preslikavam pravimo **toge**.

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Oglejmo si koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n .

Aksiom

Ukrivljenost krivulje ali ploskve je invariantna za afine linearne preslikave $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oblike $x \mapsto Ax + b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$ in $A \in O_n(\mathbb{R})$ iz ortogonalne grupe na \mathbb{R}^n . Takim preslikavam pravimo **toge**.

Enostavna posledica izreka o implicitni funkciji je ta, da lahko vsako gladko krivuljo C okoli točke $p \in C$ predstavimo kot graf nad njeno tangento $T_p C$. Analogna trditev drži za ploskve.

Ukrivljenost krivulj in ploskev

Enačbo za minimalne grafe bi si radi interpretirali na bolj geometrijski način. Oglejmo si koncepta glavnih ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti ploskve v Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n .

Aksiom

Ukrivljenost krivulje ali ploskve je invariantna za affine linearne preslikave $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oblike $x \mapsto Ax + b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$ in $A \in O_n(\mathbb{R})$ iz ortogonalne grupe na \mathbb{R}^n . Takim preslikavam pravimo **toge**.

Enostavna posledica izreka o implicitni funkciji je ta, da lahko vsako gladko krivuljo C okoli točke $p \in C$ predstavimo kot graf nad njeno tangento $T_p C$. Analogna trditev drži za ploskve.

Najprej si oglejmo ukrivljenost gladke krivulje $C \subset \mathbb{R}^2$. Poljubno točko $p \in C$ lahko s togim premikom premaknemo v koordinatno izhodišče, njeno tangento $T_p C$ pa na x os. Lokalno je torej krivulja C graf gladke funkcije $y = f(x)$, definirane na intervalu okoli $0 \in \mathbb{R}$. Torej:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2),$$

kjer je $h(x) = o(g(x)) \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$.

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najbolj prilegala razvoju te funkcije v točki $(0, 0)$. Očitno je, da je krožnica oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, razen v primeru, ko je $f''(0) = 0$, kadar dobimo $r = \infty$.

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najboljše prilegala razvoju te funkcije v točki $(0, 0)$.

Očitno je, da je krožnica oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, razen v primeru, ko je $f''(0) = 0$, kadar dobimo $r = \infty$. Če to enačbo razrešimo na y v okolici $(0, 0)$ dobimo

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2r}x^2 + o(x^2).$$

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najbolj prilegala razvoju te funkcije v točki $(0, 0)$.

Očitno je, da je krožnica oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, razen v primeru, ko je $f''(0) = 0$, kadar dobimo $r = \infty$. Če to enačbo razrešimo na y v okolici $(0, 0)$ dobimo

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2r}x^2 + o(x^2).$$

Primerjava dobljene enačbe z enačbo razvojem f nam pokaže, da je za $f''(0) \neq 0$

$$r = 1/f''(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Najdimo zdaj radij krožnice, ki se bo najbolj prilegala razvoju te funkcije v točki $(0, 0)$.

Očitno je, da je krožnica oblike

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

za nek $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, razen v primeru, ko je $f''(0) = 0$, kadar dobimo $r = \infty$. Če to enačbo razrešimo na y v okolici $(0, 0)$ dobimo

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = r - r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = r - r\left(1 - \frac{x^2}{2r^2} + o(x^2)\right) = \frac{1}{2r}x^2 + o(x^2).$$

Primerjava dobljene enačbe z enačbo razvojem f nam pokaže, da je za $f''(0) \neq 0$

$$r = 1/f''(0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Taki krožnici pravimo **pritisnjena krožnica**, recipročni vrednosti radija

$$\kappa = f''(0) = 1/r$$

pa **predznačena ukrivljenost** krivulje v $(0, 0)$. $|\kappa| = |f''(0)| \geq 0$ imenujemo **ukrivljenost**, $|r| = 1/|\kappa| = 1/|f''(0)|$ pa **krivinski radij**.

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. Izberemo točko $p \in S$. S togo preslikavo premaknemo p v $(0, 0, 0)$ in $T_p S$ v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Okoli koordinatnega izhodišča lahko S izrazimo kot graf oblike

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} \left(f_{xx}(0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0)y^2 \right) + o\left(x^2 + y^2\right).$$

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. Izberemo točko $p \in S$. S tega preslikavo premaknemo p v $(0, 0, 0)$ in $T_p S \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Okoli koordinatnega izhodišča lahko S izrazimo kot graf oblike

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} \left(f_{xx}(0) x^2 + 2f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0) y^2 \right) + o(x^2 + y^2).$$

Označimo z A Hessjevo matriko funkcije f v točki $(0, 0)$:

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix}.$$

Izberemo enotski vektor $v = (v_1, v_2, 0)$. S Σ_v označimo ravnino z normalo $(0, 0, 1) \times v$, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. Presečišče $C_v := S \cap \Sigma_v$ je krivulja na S podana z

$$z = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{1}{2} (Av \cdot v) t^2 + o(t^2)$$

za $t \in \mathbb{R}$ blizu 0.

Naj bo $S \subset \mathbb{R}^3$ gladka ploskev. Izberemo točko $p \in S$. S tega preslikavo premaknemo p v $(0, 0, 0)$ in $T_p S$ v $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Okoli koordinatnega izhodišča lahko S izrazimo kot graf oblike

$$z = f(x, y) = \frac{1}{2} \left(f_{xx}(0) x^2 + 2f_{xy}(0, 0) xy + f_{yy}(0) y^2 \right) + o(x^2 + y^2).$$

Označimo z A Hessjevo matriko funkcije f v točki $(0, 0)$:

$$A = \begin{bmatrix} f_{xx}(0, 0) & f_{xy}(0, 0) \\ f_{xy}(0, 0) & f_{yy}(0, 0) \end{bmatrix}.$$

Izberemo enotski vektor $v = (v_1, v_2, 0)$. S Σ_v označimo ravnino z normalo $(0, 0, 1) \times v$, ki poteka skozi koordinatno izhodišče. Presečišče $C_v := S \cap \Sigma_v$ je krivulja na S podana z

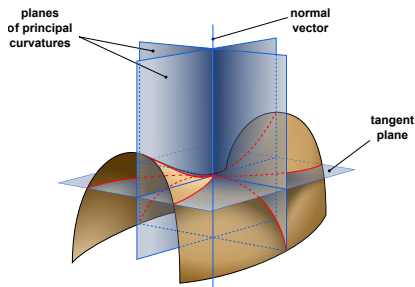
$$z = f(v_1 t, v_2 t) = \frac{1}{2} (Av \cdot v) t^2 + o(t^2)$$

za $t \in \mathbb{R}$ blizu 0. Iz prejšnje drsnice vemo, da je

$$\kappa_v = Av \cdot v = f_{xx}(0) v_1^2 + 2f_{xy}(0, 0) v_1 v_2 + f_{yy}(0) v_2^2$$

predznačena ukrivljenost krivulje C_v v točki $(0, 0)$.

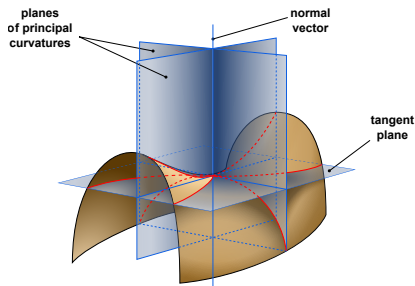
Ukrivljenost ploskev



Na enotski krožnici $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$ kvadratna forma $v \mapsto Av \cdot v$ doseže svoj maksimum κ_1 in minimum κ_2 ; ti dve vrednosti imenujemo **glavni ukrivljenosti** ploskve S v točki 0. Ker je matrika A simetrična sta κ_1 in κ_2 njeni lastni vrednosti. Vrednosti

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sl} A, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A$$

imenujemo **povprečna ukrivljenost** in **Gaussova ukrivljenost** ploskve S v točki 0.



Na enotski krožnici $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2 = 1$ kvadratna forma $v \mapsto Av \cdot v$ doseže svoj maksimum κ_1 in minimum κ_2 ; ti dve vrednosti imenujemo **glavni ukrivljenosti** ploskve S v točki 0. Ker je matrika A simetrična sta κ_1 in κ_2 njeni lastni vrednosti. Vrednosti

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2} \operatorname{sl} A, \quad K = \kappa_1 \kappa_2 = \det A$$

imenujemo **povprečna ukrivljenost** in **Gaussova ukrivljenost** ploskve S v točki 0.

Sled matrike A je enaka $\Delta f(0, 0) = f_{xx}(0, 0) + f_{yy}(0, 0)$. Po drugi strani, pa je sled matrike enaka vsoti njenih lastnih vrednosti. To implicira

$$\Delta f(0, 0) = \kappa_1 + \kappa_2 = 2H.$$

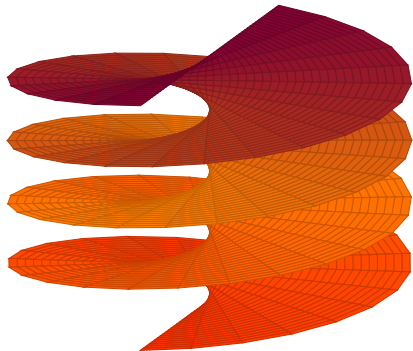
Naslednjo trditev je leta 1776 dokazal Meusnier in s tem karakteriziral minimalne grafe s srednjo ukrivljenostjo.

Izrek

Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ razreda \mathcal{C}^2 , definirana na domeni $D \subset \mathbb{R}^2$ reši enačbo za minimalne grafe

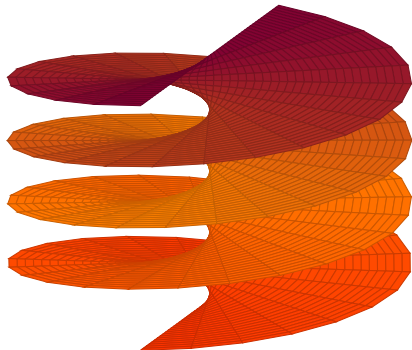
$$\mathcal{G}(f) := (1 + f_y^2) f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2) f_{yy} = 0$$

natanko tedaj, ko ima njen graf $S = \mathcal{G}_f$ v vsaki točki ničelno srednjo ukrivljenost.



Slika: Helikoid

Meusnier je leta 1776 dokazal, da je helikoid minimalna ploskev.



Slika: Helikoid

Meusnier je leta 1776 dokazal, da je helikoid minimalna ploskev.

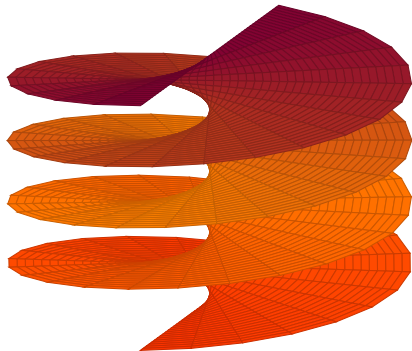
Dobimo ga tako, da premico v \mathbb{R}^2 vrtimo in jo hkrati dvigujemo v smeri osi vrtenja. Torej:

$$x = \rho \cos(\theta),$$

$$y = \rho \sin(\theta),$$

$$z = \theta,$$

za ρ in θ od $-\infty$ do ∞ .



Slika: Helikoid

Meusnier je leta 1776 dokazal, da je helikoid minimalna ploskev.

Dobimo ga tako, da premico v \mathbb{R}^2 vrtimo in jo hkrati dvigujemo v smeri osi vrtenja. Torej:

$$x = \rho \cos(\theta),$$

$$y = \rho \sin(\theta),$$

$$z = \theta,$$

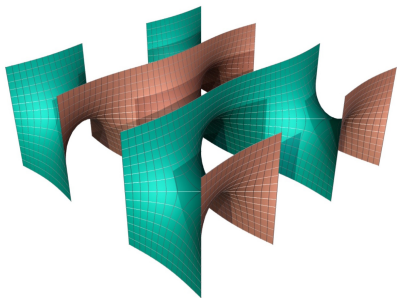
za ρ in θ od $-\infty$ do ∞ .

Poleg ravnine je to edina minimalna ploskev, ki jo lahko predstavimo kot unijo premic. Take ploskve imenujemo **premonosne plovke**.

Heinrich Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prve nove odkrite minimalne ploskve po helikoidu.

Scherkova ploskev - 1835

Heinrich Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prve nove odkrite minimalne ploskve po helikoidu.

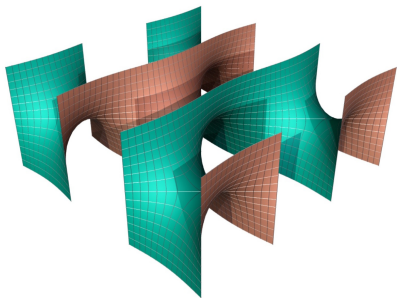


Prva Scherkova ploskev je dvojno preiodična. Njena glavna veja je podana kot graf nad kvadratom $P = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)^2$:

$$z = \ln \cos y - \ln \cos x.$$

Scherkova ploskev - 1835

Heinrich Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prve nove odkrite minimalne ploskve po helikoidu.



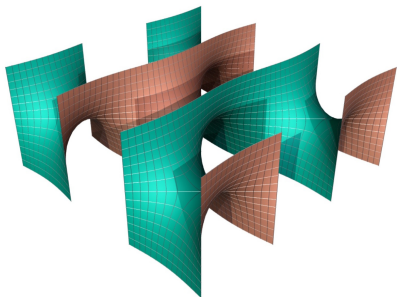
Prva Scherkova ploskev je dvojno preiodična. Njena glavna veja je podana kot graf nad kvadratom $P = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)^2$:

$$z = \ln \cos y - \ln \cos x.$$

Ta Scherkova ploskev ima največjo Gaussovo ukrivljenost v $0 \in \mathbb{R}^3$ izmed vseh minimalnih grafov, ki ležijo nad kvadratom P , in sicer -1 .

Scherkova ploskev - 1835

Heinrich Scherk leta 1835 odkrije 2 novi minimalni ploskvi. Prve nove odkrite minimalne ploskve po helikoidu.



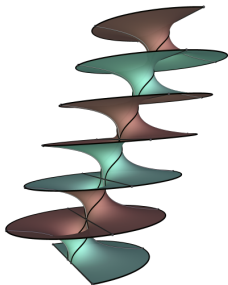
Prva Scherkova ploskev je dvojno preiodična. Njena glavna veja je podana kot graf nad kvadratom $P = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)^2$:

$$z = \ln \cos y - \ln \cos x.$$

Ta Scherkova ploskev ima največjo Gaussovo ukrivljenost v $0 \in \mathbb{R}^3$ izmed vseh minimalnih grafov, ki ležijo nad kvadratom P , in sicer -1 .

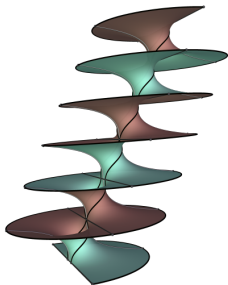
Torej, če hočemo, da graf minimalne ploskve obstaja nad določeno domeno, potem ne mora biti poljubno ukrivljen.

Minimalen graf v \mathbb{R}^3 nad celotno ravnino je ravnina.



Bernhard Riemann odkrije družino enoparametričnih minimalnih ploskev R_λ za $\lambda \in (0, \infty)$. Parametrizirane so s periodičnimi ravninskimi domenami. Horizontalne ravnine se s ploskvijo sekajo v premici ali pa krožnici.

Slika: Eden Riemannovih minimalnih primerov

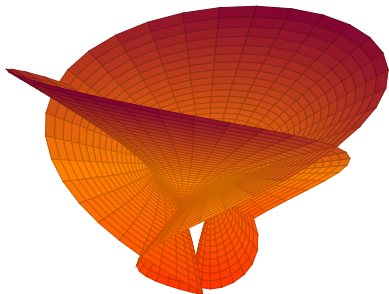


Slika: Eden Riemannovih minimalnih primerov

Bernhard Riemann odkrije družino enoparametričnih minimalnih ploskev R_λ za $\lambda \in (0, \infty)$. Parametrizirane so s periodičnimi ravninskimi domenami. Horizontalne ravnine se s ploskvijo sekajo v premici ali pa krožnici.

Ko pošljemo $\lambda \rightarrow 0$ te ploskve konvergirajo h katenoidi, če pa pošljemo $\lambda \rightarrow \infty$ konvergirajo h helikoidu.

Hennebergova ploskev - 1875



Slika: Hennebergova ploskev

Do 1981 edina poznana **neorientabilna minimalna ploskev**. Podana je kot

$$x = 2 \cos(v) \sinh(u) - \frac{2}{3} \cos(3v) \sinh(3u),$$

$$y = 2 \sin(v) \sinh(u) + \frac{2}{3} \sin(3v) \sinh(3u),$$

$$z = 2 \cos(2v) \cosh(2u)$$

za $u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi)$.

Analitičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberimo koordinate (u, v) na \mathbb{R}^2 . Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z gladkim robom.

Definicija (Imerzija)

Preslikava $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) razreda \mathcal{C}^1 je **imerzija**, če sta parcialna odvoda $F_u = \partial F / \partial u$ in $F_v = \partial F / \partial v$ linearno neodvisna v vsaki točki D .

Analitičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberimo koordinate (u, v) na \mathbb{R}^2 . Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z gladkim robom.

Definicija (Imerzija)

Preslikava $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) razreda \mathcal{C}^1 je **imerzija**, če sta parcialna odvoda $F_u = \partial F / \partial u$ in $F_v = \partial F / \partial v$ linearno neodvisna v vsaki točki D .

Naj bo $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija. Predpostavimo, da lahko koordinate (u, v) izberemo tako, da je F **konformna preslikava** $\Leftrightarrow |F_u| = |F_v|, F_u \cdot F_v = 0$. Ta predpostavka sledi iz obstoja izotermalnih koordinat, kar bomo utemeljili kasneje.

Analičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberimo koordinate (u, v) na \mathbb{R}^2 . Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z gladkim robom.

Definicija (Imerzija)

Preslikava $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) razreda \mathcal{C}^1 je **imerzija**, če sta parcialna odvoda $F_u = \partial F / \partial u$ in $F_v = \partial F / \partial v$ linearno neodvisna v vsaki točki D .

Naj bo $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija. Predpostavimo, da lahko koordinate (u, v) izberemo tako, da je F **konformna preslikava** $\Leftrightarrow |F_u| = |F_v|$, $F_u \cdot F_v = 0$. Ta predpostavka sledi iz obstoja izotermalnih koordinat, kar bomo utemeljili kasneje.

Gradient imerzije $\nabla F = (F_u, F_v)$ predstavlja $n \times 2$ matrika. Velja $|\nabla F|^2 = |F_u|^2 + |F_v|^2$. Poglejmo si spet **ploščinski funkcional**, ki ga lahko zapišemo kot

$$\text{Area}(F) = \iint_D |F_u \times F_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{|F_u|^2 |F_v|^2 - |F_u \cdot F_v|^2} \, dudv$$

in **Dirichletov energetski funkcional**

$$\mathcal{D}(F) = \frac{1}{2} \iint_D |\nabla F|^2 \, dudv = \frac{1}{2} \iint_D (|F_u|^2 + |F_v|^2) \, dudv$$

Analičen opis konformnih minimalnih ploskev

Izberimo koordinate (u, v) na \mathbb{R}^2 . Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje z gladkim robom.

Definicija (Imerzija)

Preslikava $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) razreda \mathcal{C}^1 je **imerzija**, če sta parcialna odvoda $F_u = \partial F / \partial u$ in $F_v = \partial F / \partial v$ linearno neodvisna v vsaki točki D .

Naj bo $F : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija. Predpostavimo, da lahko koordinate (u, v) izberemo tako, da je F **konformna preslikava** $\Leftrightarrow |F_u| = |F_v|, F_u \cdot F_v = 0$. Ta predpostavka sledi iz obstoja izotermalnih koordinat, kar bomo utemeljili kasneje.

Gradient imerzije $\nabla F = (F_u, F_v)$ predstavlja $n \times 2$ matrika. Velja $|\nabla F|^2 = |F_u|^2 + |F_v|^2$. Poglejmo si spet **ploščinski funkcional**, ki ga lahko zapišemo kot

$$\text{Area}(F) = \iint_D |F_u \times F_v| \, dudv = \iint_D \sqrt{|F_u|^2 |F_v|^2 - |F_u \cdot F_v|^2} \, dudv$$

in **Dirichletov energetski funkcional**

$$\mathcal{D}(F) = \frac{1}{2} \iint_D |\nabla F|^2 \, dudv = \frac{1}{2} \iint_D (|F_u|^2 + |F_v|^2) \, dudv$$

Iz neenakosti

$$|x|^2 |y|^2 - |x \cdot y|^2 \leq |x|^2 |y|^2 \leq \frac{1}{4} (|x|^2 + |y|^2)^2, \quad \text{za } x, y \in \mathbb{R}^n$$

vidimo, da velja $\text{Area}(F) \leq \mathcal{D}(F)$, kjer velja enakost natanko tedaj, ko je F konformna.

Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Torej imata funkcionala Area in \mathcal{D} iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Torej imata funkcionala Area in \mathcal{D} iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

Izračunajmo prvo variacijo funkcionala \mathcal{D} . Če je $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, za katero velja $h(bD) \equiv 0$, potem po uporabi prve Greenove identitete v zadnjem enačaju dobimo

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{D}(F) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{D}(F + th) = \iint_D (F_u \cdot h_u + F_v \cdot h_v) \, dudv \\ &= \iint_D \nabla F \cdot \nabla h \, dudv \\ &= - \iint_D \operatorname{div}(\nabla F) \cdot h \, dudv.\end{aligned}$$

Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Torej imata funkcionala Area in \mathcal{D} iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

Izračunajmo prvo variacijo funkcionala \mathcal{D} . Če je $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, za katero velja $h(bD) \equiv 0$, potem po uporabi prve Greenove identitete v zadnjem enačaju dobimo

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{D}(F) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{D}(F + th) = \iint_D (F_u \cdot h_u + F_v \cdot h_v) \, dudv \\ &= \iint_D \nabla F \cdot \nabla h \, dudv \\ &= - \iint_D \operatorname{div}(\nabla F) \cdot h \, dudv.\end{aligned}$$

Ta izraz je enak 0 za poljuben h natanko tedaj, ko je $\operatorname{div}(\nabla F) \equiv 0$. Pravimo, da je imerzija $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ **harmonična** če velja $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n) = (0, 0, \dots, 0)$. S tem smo dokazali naslednji izrek.

Konformna imerzija je minimalna natanko tedaj, ko je harmonična

Torej imata funkcionala Area in \mathcal{D} iste stacionarne točke na množici konformnih imerzij.

Izračunajmo prvo variacijo funkcionala \mathcal{D} . Če je $h : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka preslikava, za katero velja $h(bD) \equiv 0$, potem po uporabi prve Greenove identitete v zadnjem enačaju dobimo

$$\begin{aligned}\delta_h \mathcal{D}(F) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{D}(F + th) = \iint_D (F_u \cdot h_u + F_v \cdot h_v) \, du dv \\ &= \iint_D \nabla F \cdot \nabla h \, du dv \\ &= - \iint_D \operatorname{div}(\nabla F) \cdot h \, du dv.\end{aligned}$$

Ta izraz je enak 0 za poljuben h natanko tedaj, ko je $\operatorname{div}(\nabla F) \equiv 0$. Pravimo, da je imerzija $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ **harmonična** če velja $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \dots, \Delta F_n) = (0, 0, \dots, 0)$. S tem smo dokazali naslednji izrek.

Izrek

Konformna imerzija $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) razreda \mathcal{C}^2 je stacionarna točka ploščinskega funkcionala natanko tedaj, ko je F harmonična.

Naj bo $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija in naj bo $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ Evklidska metrika na \mathbb{R}^n . F na D določi **Riemannovo metriko**

$$g = |F_u|^2 du^2 + (F_u \cdot F_v) (dudv + dvdu) + |F_v|^2 dv^2.$$

Naj bo $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija in naj bo $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ Evklidska metrika na \mathbb{R}^n . F na D določi **Riemannovo metriko**

$$g = |F_u|^2 du^2 + (F_u \cdot F_v) (dudv + dvdu) + |F_v|^2 dv^2.$$

Za vsako točko $p \in D$ obstaja okolica $U \subset D$ s koordinatami (\tilde{u}, \tilde{v}) , da velja

$$g = \lambda(u, v) (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) \quad \text{za } \lambda(u, v) > 0.$$

Vsakim takim koordinatam (\tilde{u}, \tilde{v}) pravimo **izotermalne koordinate**.

Naj bo $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija in naj bo $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ Evklidska metrika na \mathbb{R}^n . F na D določi **Riemannovo metriko**

$$g = |F_u|^2 du^2 + (F_u \cdot F_v) (dudv + dvdu) + |F_v|^2 dv^2.$$

Za vsako točko $p \in D$ obstaja okolica $U \subset D$ s koordinatami (\tilde{u}, \tilde{v}) , da velja

$$g = \lambda(u, v) (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) \quad \text{za } \lambda(u, v) > 0.$$

Vsakim takim koordinatam (\tilde{u}, \tilde{v}) pravimo **izotermalne koordinate**. Naj bo $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v})$ imerzija $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ki jo dobimo iz F , če (u, v) izrazimo z (\tilde{u}, \tilde{v}) . Velja

$$|\tilde{F}_{\tilde{u}}|^2 = |\tilde{F}_{\tilde{v}}|^2 = \lambda, \quad \tilde{F}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{F}_{\tilde{v}} = 0,$$

kar pomeni, da je $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformna imerzija. Obstoj izotermalnih koordinat je odkril C. F. Gauss za rotacijske ploskve. Splošnega dokaza ne bomo navajali.

Naj bo $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ gladka imerzija in naj bo $ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$ Evklidska metrika na \mathbb{R}^n . F na D določi **Riemannovo metriko**

$$g = |F_u|^2 du^2 + (F_u \cdot F_v) (dudv + dvdu) + |F_v|^2 dv^2.$$

Za vsako točko $p \in D$ obstaja okolica $U \subset D$ s koordinatami (\tilde{u}, \tilde{v}) , da velja

$$g = \lambda(u, v) (d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) \quad \text{za } \lambda(u, v) > 0.$$

Vsakim takim koordinatam (\tilde{u}, \tilde{v}) pravimo **izotermalne koordinate**. Naj bo $\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{u}, \tilde{v})$ imerzija $U \rightarrow \mathbb{R}^n$, ki jo dobimo iz F , če (u, v) izrazimo z (\tilde{u}, \tilde{v}) . Velja

$$|\tilde{F}_{\tilde{u}}|^2 = |\tilde{F}_{\tilde{v}}|^2 = \lambda, \quad \tilde{F}_{\tilde{u}} \cdot \tilde{F}_{\tilde{v}} = 0,$$

kar pomeni, da je $\tilde{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformna imerzija. Obstoje izotermalnih koordinat je odkril C. F. Gauss za rotacijske ploskve. Splošnega dokaza ne bomo navajali.

Lokalne izotermalne koordinate vedno obstajajo. **Globalna situacija** je bolj zapletena.

Naj bo $z = u + iv$ kompleksna spremenljivka na \mathbb{C} . **Wirtingerjeva odvoda** definiramo kot:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Jedro $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sestavljajo holomorfne funkcije, jedro $\frac{\partial}{\partial z}$ pa antiholomorfne funkcije.

Naj bo $z = u + iv$ kompleksna spremenljivka na \mathbb{C} . **Wirtingerjeva odvoda** definiramo kot:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Jedro $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sestavljajo holomorfne funkcije, jedro $\frac{\partial}{\partial z}$ pa antiholomorfne funkcije. Laplaceov operator se izrazi kot

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Naj bo $z = u + iv$ kompleksna spremenljivka na \mathbb{C} . **Wirtingerjeva odvoda** definiramo kot:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Jedro $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sestavljajo holomorfne funkcije, jedro $\frac{\partial}{\partial z}$ pa antiholomorfne funkcije. Laplaceov operator se izrazi kot

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}.$$

Preslikava $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ je harmonična natanko tedaj, ko je preslikava $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ s komponentami $x_j = \partial X_j / \partial z$ za $j = 1, 2, \dots, n$ holomorfna in funkcije x_j nimajo skupne ničle. Poleg tega je konformnost X ekvivalentna naslednjemu pogoju

$$|X_u|^2 = |X_v|^2, \quad X_u \cdot X_v = 0 \iff \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0 \quad \text{na } D.$$

Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Izrek (Weierstrass-Enneperjev reprezentacijski izrek)

Naj bo D povezano območje v \mathbb{C} . Imerzija $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ razreda \mathcal{C}^2 parametrizira konformno minimalno ploskev $X(D) \subset \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \text{holomorfna in velja} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0.$$

Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija minimalnih ploskev

Izrek (Weierstrass-Enneperjev reprezentacijski izrek)

Naj bo D povezano območje v \mathbb{C} . Imerzija $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ razreda \mathcal{C}^2 parametrizira konformno minimalno ploskev $X(D) \subset \mathbb{R}^n$ natanko tedaj, ko je

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \quad \text{holomorfna in velja} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = 0.$$

Po drugi strani pa holomorfna preslikava $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : D \rightarrow \mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, ki zadošča pogoju $\sum_{k=1}^n x_k^2 = 0$ in ima ničelno periodo, t. j.

$$\Re \oint_C x \, dz = 0 \quad \text{za vsako sklenjeno krivuljo } C \subset D$$

določi konformno minimalno imerzijo $X : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, podano z

$$X(z) = c + \Re \int_{z_0}^z x(\zeta) \, d\zeta, \quad z \in D$$

za poljubno začetno točko $z_0 \in D$ in vektor $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$.

Pogoj za ničelnost periode zagotovi, da je integral dobro definiran, t. j. neodvisen od poti integriranja.

Definirajmo **ničelno kvadriko**

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^{n-1} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0 \right\}.$$

Očitno je, da ničelna kvadrika igra ključno vlogo v teoriji minimalnih ploskev. Če ji odstarnimo izhodišče dobimo **punktriano ničelno kvadriko** $\mathbb{A}_* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Definirajmo **ničelno kvadriko**

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^{n-1} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0 \right\}.$$

Očitno je, da ničelna kvadrika igra ključno vlogo v teoriji minimalnih ploskev. Če ji odstarnimo izhodišče dobimo **punktriano ničelno kvadriko** $\mathbb{A}_* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Vse konformne minimalne ploskve $D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dobimo kot integrale holomorfnih preslikav $f : D \rightarrow \mathbb{A}_* \subset \mathbb{C}^n$, ki zadostujejo pogoju za ničelno periodnost. Ker je f holomorfná, je dovolj da pogoj za ničelno periodnost preverimo na homološki bazi $H_1(D, \mathbb{Z})$. Če je D enostavno povezano območje je pogoj izpolnjen na prazno.

Definirajmo **ničelno kvadriko**

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^{n-1} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 = 0 \right\}.$$

Očitno je, da ničelna kvadrika igra ključno vlogo v teoriji minimalnih ploskev. Če ji odstarnimo izhodišče dobimo **punktriano ničelno kvadriko** $\mathbb{A}_* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$.

Vse konformne minimalne ploskve $D \rightarrow \mathbb{R}^n$ dobimo kot integrale holomorfnih preslikav $f : D \rightarrow \mathbb{A}_* \subset \mathbb{C}^n$, ki zadostujejo pogoju za ničelno periodnost. Ker je f holomorfná, je dovolj da pogoj za ničelno periodnost preverimo na homološki bazi $H_1(D, \mathbb{Z})$. Če je D enostavno povezano območje je pogoj izpolnjen na prazno.

V dimenziji $n = 3$ ničelna kvadrika premore dvojno holomorfnó pokritje $\phi : \mathbb{C}_*^2 \rightarrow \mathbb{A}_*^2$

$$\phi(z, w) = \left(z^2 - w^2, i(z^2 + w^2), 2zw \right)$$

Weierstrass-Enneperjeva formula v dimenziji $n = 3$

Označimo $\partial X = \frac{\partial X}{\partial z} dz$. Weierstrass-Enneperjeva formula za konformno minimalno imerzijo $X = (X_1, X_2, X_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dobi bolj konkretno obliko:

$$X(z) = z_0 + \Re \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \partial X_3,$$

kjer je

$$g = \frac{\partial X_3}{\partial X_1 - i \partial X_2} : D \longrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

holomorfna preslikava na Riemannovo sfero (torej meromorfna funkcija na D), ki ji pravimo **kompleksna Gaussova preslikava**.

Weierstrass-Enneperjeva formula v dimenziji $n = 3$

Označimo $\partial X = \frac{\partial X}{\partial z} dz$. Weierstrass-Enneperjeva formula za konformno minimalno imerzijo $X = (X_1, X_2, X_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dobi bolj konkretno obliko:

$$X(z) = z_0 + \Re \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \partial X_3,$$

kjer je

$$g = \frac{\partial X_3}{\partial X_1 - i \partial X_2} : D \longrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

holomorfná preslikava na Riemannovo sfero (torej meromorfná funkcija na D), ki ji pravimo **kompleksna Gaussova preslikava**. Določa veliko pomembnih lastnosti minimalne ploskve. Kompleksno Gaussovo preslikavo dobimo, če standardno Gaussovo preslikavo

$$\mathbf{N} = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

komponiramo s stereografsko projekcijo $S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

Weierstrass-Enneperjeva formula v dimenziji $n = 3$

Označimo $\partial X = \frac{\partial X}{\partial z} dz$. Weierstrass-Enneperjeva formula za konformno minimalno imerzijo $X = (X_1, X_2, X_3) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dobi bolj konkretno obliko:

$$X(z) = z_0 + \Re \int_{z_0}^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g} + g \right), 1 \right) \partial X_3,$$

kjer je

$$g = \frac{\partial X_3}{\partial X_1 - i \partial X_2} : D \longrightarrow \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

holomorfná preslikava na Riemannovo sfero (torej meromorfná funkcija na D), ki ji pravimo **kompleksna Gaussova preslikava**. Določa veliko pomembnih lastnosti minimalne ploskve. Kompleksno Gaussovo preslikavo dobimo, če standardno Gaussovo preslikavo

$$\mathbf{N} = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} : M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

komponiramo s stereografsko projekcijo $S^2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$.

Torej za konstrukcijo minimalne ploskve s pomočjo Weierstrass-Enneperjeve formule izberemo poljubno meromorfnó funkcijo g diferencial $\partial X_3 = f(z) dz$, kjer dodatno velja, da sta $f g$ in f/g holomorfni funkciji, ki nimata skupne ničle. Integral mora zadoščati pogoju za ničelnost realne periode.

Primer: Helikoid

Izberimo $g = e^{iz}$ in diferencial $\partial X_3 = dz$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + iv \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Primer: Helikoid

Izberimo $g = e^{iz}$ in diferencial $\partial X_3 = dz$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + iv \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Prva komponenta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Re \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) + e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= \sin u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= \sin u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Primer: Helikoid

Izberimo $g = e^{iz}$ in diferencial $\partial X_3 = dz$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + iv \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Prva komponenta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Re \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) + e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= \sin u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= \sin u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Druga komponenta:

$$\begin{aligned} X_2 &= \Re \int_0^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (ie^{-iz} - ie^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) - e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= -\cos u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= -\cos u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Primer: Helikoid

Izberimo $g = e^{iz}$ in diferencial $\partial X_3 = dz$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + iv \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Prva komponenta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Re \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) + e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= \sin u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= \sin u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Druga komponenta:

$$\begin{aligned} X_2 &= \Re \int_0^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (ie^{-iz} - ie^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) - e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= -\cos u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= -\cos u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Tretja komponenta: $X_3 = \Re \int_0^z 1 d\zeta = \Re (u + iv) = u.$

Primer: Helikoid

Izberimo $g = e^{iz}$ in diferencial $\partial X_3 = dz$. Weierstrass-Enneperjeva reprezentacija v kompleksni koordinati $z = u + iv \in \mathbb{C}$ je

$$X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right), 1 \right) d\zeta.$$

Prva komponenta:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Re \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} - e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (e^{-iz} + e^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) + e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= \sin u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= \sin u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

Druga komponenta:

$$\begin{aligned} X_2 &= \Re \int_0^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{e^{i\zeta}} + e^{i\zeta} \right) d\zeta \\ &= \Re \left(\frac{i}{2} (ie^{-iz} - ie^{iz}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re (e^{-v} (\cos u + i \sin u) - e^v (\cos u - i \sin u)) \\ &= -\cos u \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2} \right) \\ &= -\cos u \cdot \sinh v. \end{aligned}$$

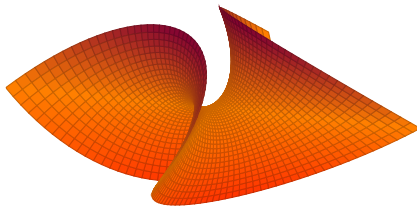
$$\text{Tretja komponenta: } X_3 = \Re \int_0^z 1 d\zeta = \Re (u + iv) = u.$$

Vidimo, da je to ravno reparametrizacija helikoida, ki smo ga videli na začetku.

$$X(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u).$$

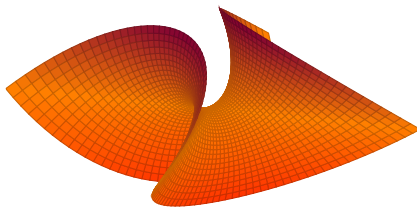
Enneperjeva ploskev - 1886

Poznamo tudi primere minimalnih ploskev, ki si deljo isto Gaussovo preslikavo.



Slika: Enneperjeva ploskev

Poznamo tudi primere minimalnih ploskev, ki si deljo isto Gaussovo preslikavo.



Slika: Enneperjeva ploskev

Za Gaussovo preslikavo izberemo $g(z) = z$. Če vzamemo $\partial X_3 = 2zdz$ dobimo Enneperjevo ploskev, če pa vzamemo $\partial X_3 = \frac{dz}{z}$ pa dobimo katenoid. Eksplicitno povedano:

$$\text{Enneperjeva ploskev} \quad X(z) = \Re \int_0^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right), 1 \right) 2\zeta d\zeta,$$

$$\text{Katenoida} \quad X(z) = (1, 0, 0) - \Re \int_1^z \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta \right), \frac{i}{2} \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta \right), 1 \right) \frac{dz}{\zeta}.$$

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 + \dots + (F_n')^2 = 0$$

je holomorfna ničelna krivulja.

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$(F'_1)^2 + (F'_2)^2 + \dots + (F'_n)^2 = 0$$

je **holomorfna ničelna krivulja**. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

kjer je $z_0 \in D$, $c \in \mathbb{C}^n$ in $f : D \rightarrow \mathbb{A}_*$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f dz = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$(F'_1)^2 + (F'_2)^2 + \dots + (F'_n)^2 = 0$$

je **holomorfna ničelna krivulja**. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

kjer je $z_0 \in D$, $c \in \mathbb{C}^n$ in $f : D \rightarrow \mathbb{A}_*$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f dz = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Torej, vsaka holomorfna funkcija, ki slika iz enostavnega povezanega območja v punktirano ničelno kvadriko določa holomorfno ničelno krivuljo po zgornji formuli.

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 + \dots + (F_n')^2 = 0$$

je **holomorfna ničelna krivulja**. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

kjer je $z_0 \in D$, $c \in \mathbb{C}^n$ in $f : D \rightarrow \mathbb{A}_*$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f dz = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Torej, vsaka holomorfna funkcija, ki slika iz enostavnega povezanega območja v punktirano ničelno kvadriko določa holomorfno ničelno krivuljo po zgornji formuli.

Če je $F = X + iY : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja, potem sta $X = \Re F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $Y = \Im F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformni minimalni ploskvi.

Holomorfne ničelne krivulje

Holomorfna imerzija $F = (F_1, \dots, F_n) : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ za $n \geq 3$ in $D \subset \mathbb{C}$, ki zadošča

$$(F_1')^2 + (F_2')^2 + \dots + (F_n')^2 = 0$$

je **holomorfna ničelna krivulja**. Vsaka taka je oblike

$$F(z) = c + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta, \quad z \in D,$$

kjer je $z_0 \in D$, $c \in \mathbb{C}^n$ in $f : D \rightarrow \mathbb{A}_*$ holomorfna preslikava, za katero velja

$$\oint_C f dz = 0 \quad \text{za vsako krivuljo } [C] \in H_1(D, \mathbb{Z}).$$

Torej, vsaka holomorfna funkcija, ki slika iz enostavnega povezanega območja v punktirano ničelno kvadriko določa holomorfno ničelno krivuljo po zgornji formuli.

Če je $F = X + iY : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja, potem sta $X = \Re F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ in $Y = \Im F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformni minimalni ploskvi. Ker sta X in Y harmonični konjugiranki, pravimo, da sta **konjugirani minimalni ploskvi**.

Konformnim minimalnim ploskvam iz 1-parametrične družine

$$G_t = \Re(e^{it} F) : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \text{za } t \in \mathbb{R}$$

pravimo **pridružene minimalne ploskve** holomorfne ničelne krivulje F .

Primer: katenoid in helikoid

Katenoid in helikoid sta konjugirani minimalni ploskvi - realen in imaginaren del ničelne krivulje

$$F(\zeta) = (\cos \zeta, \sin \zeta, -i\zeta), \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Primer: katenoid in helikoid

Katenoid in helikoid sta konjugirani minimalni ploskvi - realen in imaginaren del ničelne krivulje

$$F(\zeta) = (\cos \zeta, \sin \zeta, -i\zeta), \quad \zeta = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Pridružene minimalne ploskve te ničelne krivulje:

$$\begin{aligned} G_t(\zeta) &= \Re \left(e^{it} F(\zeta) \right) \\ &= \cos t \begin{pmatrix} \cos x \cdot \cosh y \\ \sin x \cdot \cosh y \\ y \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \sin x \cdot \sinh y \\ -\cos x \cdot \sinh y \\ x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pri $t = 0$ imamo katenoid in pri $t = \pm\pi/2$ pa helikoid.

Slika: Helikatenoid

HVALA ZA POZORNOST!

