# Verjetnost 1

Napisal: Jon Pascal Miklavčič

2024/02/23

# Predgovor

Zapiski v tej skripti so bili osnovanih na rokopisih predavanj iz študijskih let pred letom 2023 in doknčno dopolnjeni z zapiski iz predavanj iz leta 2024.

# Kazalo

# Poglavje 1

# Neformalni uvod v verjetnost

Začetki verjetnosti so v 17. stoletju, iz iger na srečo (kartanje, kockanje, ...):

- 17. stol.: Fermant, Pascal, Bernulli;
- 18./19. stol.: Laplace, Poisson, Čebišev, Markov;
- 20. stol.: Kolmogorov.

Izvajamo poskus in opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Ta se lahko zgodi ali ne.

**Zgled.** Poskus je met kocke. Da pade šestica, da pade sodo število pik pa sta dogodka. $\Diamond$

Poskus ponovimo $n$-krat. Opazujemo dogodek $A$. S $k_n(A)$ označimo *frekvenco dogodka* $A$, t.j. število tistih ponovitev poskusa, pri katerih se je dogodek $A$ zgodil. Naj bo $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ *relativna frekvenca* dogodka $A$. Dokazati je mogoče, da zporedje $\{f_n(A)\}_n$ konvergira k nekemu številu $p \in [0,1]$; $f_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} p$. Dobimo:

**Statistično definicijo verjetnosti:**

$$P(A) := p$$

Pogosto lahko verjetnost določimo vnaprej in sicer s:

**Klasično definicijo verjetnosti:**

$$P(A) := \frac{\#\text{ ugodnih izidov za dogodek } A}{\#\text{ vseh izidov}}$$

pri pogoju, da imajo vsi izidi *enake* možnosti.

**Zgled.** Met poštene kocke:

$$P(\text{sodo število pik}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Diamond$

**Zgled.** Kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh poštenih kock znaša vsota pik 7? Možne vsote so: $2, 3, 4, \ldots, 12$. Opazimo, da je vseh vsot 11 in od tega 1 ugodna. Ali to pomeni, da $P(A) = \frac{1}{11}$. Ne! Izidi niso enkaoverjetni.

Na primer 2 lahko dobimo samo kot $2 = 1 + 1$, 5 pa kot $5 = 2 + 3 = 1 + 4 = 4 + 1 = 3 + 2$.

Torej vsi možni izidi, bodo urejeni pari $(x, y)$, kjer $x, y \in [1, 6] \subset \mathbb{N}$

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \ddots & (2,6) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{matrix}$$

Vseh izidov je torej 36 in od tega je 6 ugodnih. Torej $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $\Diamond$

Če je izidov neskončno, si lahko pomagamo s **Geometrijsko definicijo verjetnosti.**

**Zgled.** Osebi se dogovorita za srečanje med 10. in 11. uro. Čas prihoda je slučajen. Vsak od njiju po prihodu čaka največ 20 minut. Če v tem času drugega ni, odide. Najdlje čaka do 11. ure. Kolišna je vrejetnost srečanja?

Čas začnemo šteti ob 10. uri. Vsi izidi so urejeni pari $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Ugodni izidi so $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Torej:

$$1)\ x \geq y : x - \frac{1}{3} \leq y$$
$$2)\ x \leq y : y - x \leq \frac{1}{3} \iff y \leq x + \frac{1}{3}$$

Torej je

$$P(\text{srečanja}) = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{5}{9}$$

$\Diamond$

Teorija mere se ukvarja z splošnim zapisom geometrijske definicije.

**Zgled.** Vzamemo $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. $n$ krogljic slučajno razporedimo v $m$ posod. Kolikšna je verjetnost dogodka, da so vse krogljice v prvih $n$ posodah, v vsaki ena?

To je pomankljivo zastavljena naloga. Ne vemo namreč, ali med seboj krogljice razlikujemo, ali ne. Za dodatno predpostavko se ponujajo 3 možnosti:

1) **krogljice razlikujemo:**
Število vseh izidov v tem primeru je ravno število *variacij* $m$ elementov na $n$ mestih *s ponavljanjem.* Za vsako od $n$-tih kroglic imamo $m$ možnosti, torej je vseh možnosti $m \cdot m \cdots m = m^n$.
Število ugodnih izidov pa je ravno število *permutacij* $n$ krogljic v prvih $n$ posodah. Torej je ugodnih možnosti $n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$.

Torej je

$$P(A) = \frac{n!}{m^n}$$

2) **krogljic ne razlikujemo:**
V vsaki posodi je lahko več krogljic. Število vseh izidov je ravno število *kombinacij s ponavljanjem.* Število kombinacij $m$ elementov s ponavljanjem na $n$ mestih je:

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1}$$

Postavimo $n$ krogljic in med njih razporedimo $m-1$ črtic, ki predstavljajo stene posod:

$$|\underbrace{\circ|\circ|\circ\circ|\circ\circ\cdots|\circ|}_{n \text{ krogljic, } m-1 \text{ črtic}}|$$

Na $n+m-1$ mestih moramo določiti $n$ krogljic. Ugoden izid je samo eden:

$$|\circ|\circ|\circ|\circ\cdots\circ||||\cdots|$$

Torej je

$$P(A) = \frac{1}{\binom{n+m-1}{n}}$$

3) **krogljic ne razlikujemo, v vsaki posodi je kvečjemu ena krogljica:**

Število vseh izidov je ravno število *kombinacij brez ponavljanja* $\binom{m}{n}$. Ugoden izid je eden.

Torej je

$$P(A) = \frac{1}{\binom{m}{n}}$$

$\diamondsuit$

*Opomba.* V fiziki so krogljice delici (atomi, molekule, ...), posode pa fazna stanja, v katerih so lahko delci. Glede na zgornje primere ločimo:

1. Maxwell-Boltzmannovo statistika, ki velja za molekule plina.
2. Bose-Einsteinovo statistika, ki velja za delce imenovane bozoni.
3. Fermi-Diracovo statistika, ki velja za fermione.

Diracovo izključitveno načelo.

# Poglavje 2

# Aksiomatična definicija verjetnosti

Imamo prostor vseh izidov oz. *vzorčni prostor* $\Omega$ (možna oznaka je tudi $\mathcal{G}$). Dogodki so nekatere (ne nujno vse) podmnozice $\Omega$.

**Zgled.** Met kocke. Vzorčni prostor je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dogodki pa so poljubne podmnožice $\Omega$, to je $\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$. Na primer $A = \{2, 4, 6\}$ je dogodek, da pade sodo število pik. $\Diamond$

Računanje z dogodki:

1. *Vsota dogodkov* oz. *unija dogodkov* (zgodi se vsaj enden od dogodkov):

$$A + B = A \cup B$$

2. *Produkt dogodkov* oz. *presek dogodkov* (zgodita se oba dogodka hkrati):

$$A \cdot B = A \cap B$$

3. *Nasprotni dogodek* oz. *komplement dogodka* (dogodek se ne zgodi):

$$\bar{A} = A^c$$

Pravila za računanje z dogodki:

1. **idempotentnost**: $A \cup A = A = A \cap A$

2. **komutativnost**: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

3. **asociativnost**:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. **distributivnost**:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. **de Morganova zakona**:
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Še več:
$$\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c, \quad \left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$$

V splošnem ni vsaka podnožica množice $\Omega$ dogodek. Neprazna družina podmnožic (dogodkov) $\mathcal{F}$ v $\Omega$ je *$\sigma$-algerba*, če zanjo velja:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Elementi v $\mathcal{F}$ so dogodki. Če v točki 3. zahtevamo manj:

3.* $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$

potem pravimo, da je $\mathcal{F}$ *algebra*.

V algebri imamo potem tudi zaprtost za končne unije: $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \implies A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Ker po de-Morganu velja $\bigcap_i A_i = (\bigcup_i A_i^c)^c$, je algebra zaprta za končne preseke, $\sigma$-algebra pa celo za števne preseke. Ker velja $A \setminus B = A \cap B^c$, je algebra zaprta za razlike.

Vsaka algebra vsebuje $\{\emptyset, \Omega\}$. Ker je $\mathcal{F}$ neprazna, obstaja $A \in \mathcal{F}$ in zato tudi $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$ in $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$. Tako dobimo, da je $\{\emptyset, \Omega\}$ najmanšja možna ($\sigma$-)algebra, $\mathcal{P}(\Omega)$ pa največja možna ($\sigma$-)algebra.

**Zgled.** Za $A \neq \emptyset \neq \Omega$ je najmanjša ($\sigma$-)algebra, ki vsebuje $A$ enaka $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Za $\Omega = \{1,2,3\}$ in $A = \{1,2\}$, je potem taka $\sigma$-algebra $\{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. $\diamond$

Dogodka $A$ in $B$ sta *disjunkta* oz. *nezdružljiva* če je $A \cap B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i$ (končno ali števno mnogo) je *popoln sistem dogodkov*, če velja:

$$\bigcup_i A_i = \Omega \quad \text{in} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j.$$

Naj bo $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra na $\Omega$. **Verjetnost** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

1. Za vsak $A \in \mathcal{F}$: $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja števna aditivnost:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti verjetnosti $P$:

(a) $P(\emptyset) = 0$.

*Dokaz.* V lastnosti 3. vzamamo $A_i = \emptyset$ za vsak $i$:

$$P\left(\bigcup_i \emptyset\right) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$\square$

(b) $P$ je *končno aditivna*, t.j. za končno mnogo paroma nezdružljivih dogodkov $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ velja:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

*Dokaz.* V lastnosti 3. vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ in upoštevamo lastnost (a). $\square$

(c) $P$ je *monotona*, t.j. velja:

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

Še več: iz $A \subseteq B$ sledi $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

*Dokaz.* Ker je $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ je $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ zaradi lastnosti (b). □

(d) $P(A^c) = 1 - P(A)$

*Dokaz.* V (c) vzamemo $B = \Omega$. □

(e) $P$ je *zvezna*, t.j.:

(i)

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

(ii)

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right)$$

*Dokaz.* (i) Definiramo $C_1 = A$ in $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots$. Potem je $A_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, kjer velja $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Torej je:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

(ii) Ker $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$, je potem $B_1^c \subseteq B_2^c \subseteq B_3^c \subseteq \cdots$. Po (i) potem velja

$$P\left(\bigcup_{i=1} B_i^c\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(B_i^c\right)$$

Toda

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c \implies 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty}(1 - P(B_i))$$

Od koder sledi željena enakost.

□

**Verjetnostni prostor** je trojica $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

**Zgled** (Končni ali števni verjetnostni prostor)**.** $\Omega = \{\omega_2, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ končno ali števno mnogo izidov. $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \dots$ je popoln sistem dogodkov, neka podmnožica v $\Omega$ je končna ali števna unija teh dogodkov. Torej $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Vzamemo:

$$A = \bigcup_{i:\omega_i \in A} \{\omega_0\}$$

Če označimo $P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0$ je $\sum_i p_i = 1$ in $P(A) = \sum_{i:\omega_i\in A} p_i$, $A \subseteq \Omega$.

Če ima $\Omega$ $n$ elementov in $p_i = \frac{1}{n}$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Potem je $P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{moč}(A)}{n}$. To je klasična definicija verjetnosti. ◊

**Zgled** (Neskončni neštevni verjetnostni prostor)**.** Primer srečanja dveh oseb, kjer $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Za $\sigma$-algebro $\mathcal{F}$ ne moremo vzeti vseh podmnožic, radi pa bi jih vzeli čim več.

$\mathcal{F}$ naj bo najmanjša $\sigma$-algebra, ki vsebje vse odprte pravokotnike $(a, b) \times (c, d)$ (izkaže se, da je isto, če vzamemo zaprte pravokotnike). $\mathcal{F}$ imenujemo *Borelova $\sigma$-algebra.*

Verjetnost definiramo na pravokotnikih kot:

$$P((a, b) \times (c, d)) = (b - a)(d - c)$$

Ni lahko videti, da lahko $P$ razširimo do verjetnosti na $\mathcal{F}$. $P$ pa ne moremo razširiti na $\mathcal{P}(\Omega)$. Problem je števna aditivnost.

To je geometrijska definicija verjetnosti. ◊

# Poglavje 3

# Pogojna verjetnost

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P))$ verjetnostni prostor. Fiksirajmo dogodek $B$ s $P(B) > 0$. *Pogojna verjetnost* dogodka $A$ glede na dogodek $B$ je:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**Zgled.** V posodi sta dve beli in ena črna krogljica. Dvakrat zaporedoma izvlečemo krogljico. Kolikšna je verjetnost, da smo drugič izbrali belo krogljico, če smo prvič izbrali belo?

(a) Krogljice vrečamo.

Vseh izidov je 9:

$$\begin{matrix} B_1B_1 & B_1B_2 & B_1\check{C} \\ B_2B_1 & B_2B_2 & B_2\check{C} \\ \check{C}B_1 & \check{C}B_2 & \check{C}\check{C} \end{matrix}$$

$$P(\text{prvič belo}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{prvič in drugič belo}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{drugič belo} \mid \text{prvič belo}) = \frac{4/9}{6/9} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{drugič belo}) = \frac{6}{5} = \frac{2}{3}$$

(b) Krogljic ne vračamo.

Vseh izidov je 6:

$$B_1B_2 \quad B_1\check{C} \quad B_2B_1 \quad B_2\check{C} \quad \check{C}B_1 \quad \check{C}B_2$$

$$P(\text{prvič belo}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$P(\text{prvič in drugič belo}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$P(\text{drugič belo} \mid \text{prvič belo}) = \frac{2/6}{4/6} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$
$$P(\text{drugič belo}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

◊

Iz definicije pogojne verjetnosti dobimo:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Za 3 dogodke $A, B, C$, kjer velja $P(B \cap C) > 0$ dobimo:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \cap C) = P(A \mid B \cap C) \cdot P(B \mid C) \cdot P(C)$$

Če to posplošimo na $n$ dogodkov dobimo:

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdots P\left(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)$$

Če desno stran razpišemo, res dobimo:

$$\begin{aligned} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) &= P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdots P\left(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right) \\ &= P\left(A_1\right) \cdot \frac{P\left(A_1 \cap A_2\right)}{P\left(A_1\right)} \cdots \frac{P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_n\right)}{P\left(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}\right)} \\ &= P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) \end{aligned}$$

**Zgled.** V posodi imamo 6 modrih, 5 rdečih in 4 zelene krogljice. Brez vračanja izberemo 3 krogljice. Kolikšna je verjetnost, da so vse rdeče?

Označimo s $A_k$ dogodek, da je $k$-ta krogljica rdeče za $k = 1, 2, 3$. Nalogo laho rešimo na dva načina:

1. $$\begin{aligned} P\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right) &= P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2 \mid A_1\right) \cdot P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \\ &= \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{2}{7 \cdot 13} = \frac{2}{91} \end{aligned}$$

2. $$P(\text{vse rdeče}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!}}{\frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}} = \frac{2}{91}$$

◊

Imejmo poskus, ki ga opravimo v 2 korakih (fazah).

1. V prvem koraku se zgodi natanko enden izmed paroma nezdružljivih dogodkov $H_1, H_2, H_3, \ldots$ (končno ali števno mnogo).

2. V drugem koraku pa nas zanima dogodek $A$. Izrazimo $P(A)$ z verjetnostmi:

$$P\left(H_i\right) \quad \text{in} \quad P\left(A \mid H_i\right) \quad \text{za } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Ker je $\{H_i\}_i$ popoln sistem dogodkov, je:

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_i H_i\right) = \bigcup_i A \cap H_i$$

in zato

$$P(A) = \sum_i P\left(A \cap H_i\right) = \sum_i P\left(H_i\right) \cdot P(A \mid H_i)$$

To je **formula za popolno verjetnost**.

**Zgled.** Pri srečolovu je $n$ srečk, od tega je $m$ dobitnih ($m < n$). Ali imamo večje možnosti za dobitek, če izbiramo prvi ali drugi?

Če izbiramo prvi je:

$$P(\text{dobitka}) = \frac{m}{n}$$

Če izbiramo drugi je:

$$\begin{aligned} P(\text{dobitka}) &= P(\text{prvi dobi}) \cdot P(\text{dobitka} \mid \text{prvi dobi}) \\ &\qquad + P(\text{prvi ne dobi}) \cdot P(\text{dobitka} \mid \text{prvi ne dobi}) \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n-1} + \frac{n-m}{n} \cdot \frac{m}{n-1} = \frac{m}{n} \end{aligned}$$

◊

Pogosto nas v dvofaznem poskusu zanima:

$$P\left(H_k \mid A\right) = \frac{P\left(H_k \cap A\right)}{P(A)} = \frac{P\left(H_k\right) \cdot P\left(A \mid H_k\right)}{\sum_i P\left(H_i\right) \cdot P\left(A \mid H_i\right)}$$

To je **Bayesova formula**.

**Zgled.** Test s poligrafom (detektorjem laži). Resnicoljub opravi test s poligrafom z verjetnostjo 0.95. Z enako verjetnostjo poligraf prepozna lažnivca. Izmed 1000 oseb, med kateremi je natanko en lažnivec, slučajno izberemo eno osebo za katero poligraf pravi, da je lažnivec. Kolikšna je pogojna verjetnost, da je oseba zares lažnivec?

Označimo s $L$ dogodek, da je izbrana oseba lažnivec, $L_p$ pa dogodek, da poligraf za osebo pravi, da je lažnivec. Potem:

$$P\left(L_p \mid L\right) = 0.95, \quad P\left(L_p \mid L^c\right) = 0.05 \quad \text{in} \quad P(L) = 0.001$$

Zanima nas $P\left(L \mid L_p\right)$. Po Bayesovi formuli je:

$$\begin{aligned} P\left(L \mid L_p\right) &= \frac{P(L) \cdot P\left(L_p \mid L\right)}{P(L) \cdot P\left(L_p \mid L\right) + P\left(L^c\right) \cdot P\left(L_p \mid L^c\right)} \\ &= \frac{0.55 \cdot 0.001}{0.55 \cdot 0.001 + 0.05 \cdot 0.999} \\ &= \frac{95}{5090} = \frac{1}{50} = 0.02 \end{aligned}$$

$\Diamond$

Dogodka $A$ in $B$ sta *neodvisna*, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Če je $P(B) > 0$, to enakost lahko zapišemo kot:

$$P(A) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(B)} = P(A \mid B)$$