Verjetnost 1

Napisal: Jon Pascal Miklavčič

2024/02/22

Predgovor

Zapiski v tej skripti so bili osnovanih na rokopisih predavanj iz študijskih let pred letom 2023 in doknčno dopolnjeni z zapiski iz predavanj iz leta 2024.

Kazalo

Poglavje 1

Neformalni uvod v verjetnost

Začetki verjetnosti so v 17. stoletju, iz iger na srečo (kartanje, kockanje, ...):

- 17. stol.: Fermant, Pascal, Bernulli;
- 18./19. stol.: Laplace, Poisson, Čebišev, Markov;
- 20. stol.: Kolmogorov.

Izvajamo poskus in opazujemo določen pojav, ki ga imenujemo *dogodek*. Ta se lahko zgodi ali ne.

Zgled. Poskus je met kocke. Da pade šestica, da pade sodo število pik pa sta dogodka. $\Diamond$

Poskus ponovimo n-krat. Opazujemo dogodek A. S $k_n(A)$ označimo *frekvenco dogodka* A, t.j. število tistih ponovitev poskusa, pri katerih se je dogodek A zgodil. Naj bo $f_n(A) = \frac{k_n(A)}{n}$ *relativna frekvenca* dogodka A. Dokazati je mogoče, da zporedje $\{f_n(A)\}_n$ konvergira k nekemu številu $p \in [0,1]$; $f_n(A) \xrightarrow{n\to\infty} p$. Dobimo:

Statistično definicijo verjetnosti:

$$P(A) := p$$

Pogosto lahko verjetnost določimo vnaprej in sicer s:

Klasično definicijo verjetnosti:

$$P(A) := \frac{\#\text{ ugodnih izidov za dogodek } A}{\#\text{ vseh izidov}}$$

pri pogoju, da imajo vsi izidi *enake* možnosti.

Zgled. Met poštene kocke:

$$P(\text{sodo število pik}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$\Diamond$

Zgled. Kolikšna je verjetnost, da pri metu dveh poštenih kock znaša vsota pik 7? Možne vsote so: $2, 3, 4, \ldots, 12$. Opazimo, da je vseh vsot 11 in od tega 1 ugodna. Ali to pomeni, da $P(A) = \frac{1}{11}$. Ne! Izidi niso enkaoverjetni.

Na primer 2 lahko dobimo samo kot $2 = 1 + 1$, 5 pa kot $5 = 2 + 3 = 1 + 4 = 4 + 1 = 3 + 2$.

Torej vsi možni izidi, bodo urejeni pari (x, y), kjer $x, y \in [1, 6] \subset \mathbb{N}$

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & \cdots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \ddots & (2,6) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \cdots & (6,6) \end{matrix}$$

Vseh izidov je torej 36 in od tega je 6 ugodnih. Torej $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. $\Diamond$

Če je izidov neskončno, si lahko pomagamo s **Geometrijsko definicijo verjetnosti.**

Zgled. Osebi se dogovorita za srečanje med 10. in 11. uro. Čas prihoda je slučajen. Vsak od njiju po prihodu čaka največ 20 minut. Če v tem času drugega ni, odide. Najdlje čaka do 11. ure. Kolišna je vrejetnost srečanja?

Čas začnemo šteti ob 10. uri. Vsi izidi so urejeni pari $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Ugodni izidi so $|x - y| \leq \frac{1}{3}$. Torej:

$$\begin{aligned} &1)\ x \geq y : x - \frac{1}{3} \leq y \\ &2)\ x \leq y : y - x \leq \frac{1}{3} \iff y \leq x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Torej je

$$P(\text{srečanja}) = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{5}{9}$$

$\Diamond$

Teorija mere se ukvarja z splošnim zapisom geometrijske definicije.

Zgled. Vzamemo $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$. n krogljic slučajno razporedimo v m posod. Kolikšna je verjetnost dogodka, da so vse krogljice v prvih n posodah, v vsaki ena?

To je pomankljivo zastavljena naloga. Ne vemo namreč, ali med seboj krogljice razlikujemo, ali ne. Za dodatno predpostavko se ponujajo 3 možnosti:

1) **krogljice razlikujemo:**
Število vseh izidov v tem primeru je ravno število *variacij* m elementov na n mestih *s ponavljanjem.* Za vsako od n-tih kroglic imamo m možnosti, torej je vseh možnosti $m \cdot m \cdots m = m^n$.
Število ugodnih izidov pa je ravno število *permutacij* n krogljic v prvih n posodah. Torej je ugodnih možnosti $n(n-1)\dots 2 \cdot 1 = n!$.

Torej je

$$P(A) = \frac{n!}{m^n}$$

2) **krogljic ne razlikujemo:**
V vsaki posodi je lahko več krogljic. Število vseh izidov je ravno število *kombinacij s ponavljanjem.* Število kombinacij m elementov s ponavljanjem na n mestih je:

$$\binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1}$$

Postavimo n krogljic in med njih razporedimo $m-1$ črtic, ki predstavljajo stene posod:

$$|\underbrace{\circ|\circ|\circ\circ|\circ\circ\cdots|\circ|}_{n \text{ krogljic, } m-1 \text{ črtic}}|$$

Na $n+m-1$ mestih moramo določiti n krogljic. Ugoden izid je samo eden:

$$|\circ|\circ|\circ|\circ\cdots\circ||||\cdots|$$

Torej je

$$P(A) = \frac{1}{\binom{n+m-1}{n}}$$

3) **krogljic ne razlikujemo, v vsaki posodi je kvečjemu ena krogljica:**

Število vseh izidov je ravno število *kombinacij brez ponavljanja* $\binom{m}{n}$. Ugoden izid je eden.

Torej je

$$P(A) = \frac{1}{\binom{m}{n}}$$

$\Diamond$

Opomba. V fiziki so krogljice delici (atomi, molekule, ...), posode pa fazna stanja, v katerih so lahko delci. Glede na zgornje primere ločimo:

1. Maxwell-Boltzmannovo statistika, ki velja za molekule plina.
2. Bose-Einsteinovo statistika, ki velja za delce imenovane bozoni.
3. Fermi-Diracovo statistika, ki velja za fermione.

Diracovo izključitveno načelo.

Poglavje 2

Aksiomatična definicija verjetnosti

Imamo prostor vseh izidov oz. *vzorčni prostor* Ω (možna oznaka je tudi $\mathcal{G}$). Dogodki so nekatere (ne nujno vse) podmnozice Ω.

Zgled. Met kocke. Vzorčni prostor je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dogodki pa so poljubne podmnožice Ω, to je $\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\Omega}$. Na primer $A = \{2, 4, 6\}$ je dogodek, da pade sodo število pik. $\Diamond$

Računanje z dogodki:

1. *Vsota dogodkov* oz. *unija dogodkov* (zgodi se vsaj enden od dogodkov):

$$A + B = A \cup B$$

2. *Produkt dogodkov* oz. *presek dogodkov* (zgodita se oba dogodka hkrati):

$$A \cdot B = A \cap B$$

3. *Nasprotni dogodek* oz. *komplement dogodka* (dogodek se ne zgodi):

$$\bar{A} = A^c$$

Pravila za računanje z dogodki:

1. **idempotentnost**: $A \cup A = A = A \cap A$

2. **komutativnost**: $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

3. **asociativnost**:
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

4. **distributivnost**:
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

5. **de Morganova zakona**:
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

   Še več:
$$\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c, \quad \left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$$

V splošnem ni vsaka podnožica množice Ω dogodek. Neprazna družina podmnožic (dogodkov) $\mathcal{F}$ v Ω je *σ-algerba*, če zanjo velja:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Elementi v $\mathcal{F}$ so dogodki. Če v točki 3. zahtevamo manj:

3.* $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cup B \in \mathcal{F}$

   potem pravimo, da je $\mathcal{F}$ *algebra.*

V algebri imamo potem tudi zaprtost za končne unije: $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \implies A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$. Ker po de-Morganu velja $\bigcap_i A_i = (\bigcup_i A_i^c)^c$, je algebra zaprta za končne preseke, σ-algebra pa celo za števne preseke. Ker velja $A \setminus B = A \cap B^c$, je algebra zaprta za razlike.

Vsaka algebra vsebuje $\{\emptyset, \Omega\}$. Ker je $\mathcal{F}$ neprazna, obstaja $A \in \mathcal{F}$ in zato tudi $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{F}$ in $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$. Tako dobimo, da je $\{\emptyset, \Omega\}$ najmanšja možna (σ-)algebra, $\mathcal{P}(\Omega)$ pa največja možna (σ-)algebra.

Zgled. Za $A \neq \emptyset \neq \Omega$ je najmanjša (σ-)algebra, ki vsebuje A enaka $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Za $\Omega = \{1,2,3\}$ in $A = \{1,2\}$, je potem taka σ-algebra $\{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$. $\diamondsuit$

Dogodka A in B sta *disjunkta* oz. *nezdružljiva* če je $A \cap B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i$ (končno ali števno mnogo) je *popoln sistem dogodkov*, če velja:

$$\bigcup_i A_i = \Omega \quad \text{in} \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{za} \quad i \neq j.$$

Naj bo $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω. **Verjetnost** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

1. Za vsak $A \in \mathcal{F}$: $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Za poljubne paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ velja števna aditivnost:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Lastnosti verjetnosti P:

(a) $P(\emptyset) = 0$.

Dokaz. V lastnosti 3. vzamamo $A_i = \emptyset$ za vsak i:

$$P\left(\bigcup_i \emptyset\right) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

$\square$

(b) P je *končno aditivna*, t.j. za končno mnogo paroma nezdružljivih dogodkov $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ velja:

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Dokaz. V lastnosti 3. vzamemo $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$ in upoštevamo lastnost (a). $\square$

(c) P je *monotona*, t.j. velja:

$$A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$$

Še več: iz $A \subseteq B$ sledi $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Dokaz. Ker je $B = A \cup (B \setminus A)$ in $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ je $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ zaradi lastnosti (b). □

(d) $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dokaz. V (c) vzamemo $B = \Omega$. □

(e) P je *zvezna*, t.j.:

(i)

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \cdots \implies P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$$

(ii)

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots \implies P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right)$$

Dokaz. (i) Definiramo $C_1 = A$ in $C_i = A_i \setminus A_{i-1}$ za $i = 2, 3, \ldots$. Potem je $A_n = C_1 \cup \ldots \cup C_n$, kjer velja $C_i \cap C_j = \emptyset$ za $i \neq j$ in $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Torej je:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}$$

(ii) Ker $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$, je potem $B_1^c \subseteq B_2^c \subseteq B_3^c \subseteq \cdots$. Po (i) potem velja

$$P\left(\bigcup_{i=1} B_i^c\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(B_i^c\right)$$

Toda

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right)^c \implies 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty}(1 - P(B_i))$$

Od koder sledi željena enakost.

□

Verjetnostni prostor je trojica $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Zgled (Končni ali števni verjetnostni prostor)**.** $\Omega = \{\omega_2, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ končno ali števno mnogo izidov. $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \{\omega_3\}, \ldots$ je popoln sistem dogodkov, neka podmnožica v Ω je končna ali števna unija teh dogodkov. Torej $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Vzamemo:

$$A = \bigcup_{i:\omega_i \in A} \{\omega_0\}$$

Če označimo $P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0$ je $\sum_i p_i = 1$ in $P(A) = \sum_{i:\omega_i\in A} p_i$, $A \subseteq \Omega$.

Če ima Ω n elementov in $p_i = \frac{1}{n}$ za $i = 1, 2, \ldots, n$. Potem je $P(A) = \frac{|A|}{n} = \frac{\text{moč}(A)}{n}$. To je klasična definicija verjetnosti. ◊

Zgled (Neskončni neštevni verjetnostni prostor)**.** Primer srečanja dveh oseb, kjer $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Za σ-algebro $\mathcal{F}$ ne moremo vzeti vseh podmnožic, radi pa bi jih vzeli čim več.

$\mathcal{F}$ naj bo najmanjša σ-algebra, ki vsebje vse odprte pravokotnike $(a,b) \times (c,d)$ (izkaže se, da je isto, če vzamemo zaprte pravokotnike). $\mathcal{F}$ imenujemo *Borelova σ-algebra.*

Verjetnost definiram na pravokotnikih kot:

$$P((a,b) \times (c,d)) = (b-a)(d-c)$$

Ni lahko videti, da lahko P razširimo do verjetnosti na $\mathcal{F}$. P pa ne moremo razširiti na $\mathcal{P}(\Omega)$. Problem je števna aditivnost.

To je geometrijska definicija verjetnosti. ◊

Poglavje 3

Pogojna verjetnost