Verjetnost in statistika

Zapiski po predavanjih izr. prof. dr. Jaka Smrekarja
Napisal: Jon Pascal Miklavčič

2024/09/25

Kazalo

Del I

Verjetnost

Poglavje 1

Slučajni vektorji

1.1 Slučajni vektorji

Spomnimo se:

Slučajna spremenljivka na je taka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$, na verejetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, za katero so množice (praslike):

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

v $\mathcal{F}$, se pravi dogodki za vsak $x \in \mathbb{R}$

Oznaka:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \equiv \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, x]\} \equiv X^{-1}\left((-\infty, x]\right)$$

Posledično je za slučajno spremenljivko X definirana *komulativna porazdelitvena funkcija* $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(X^{-1}((-\infty, x])\right)$$

Definicija 1. *Slučajni vektor* je taka preslikava $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ na verejetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, za katero so množice:

$$\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n\} := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \ldots, X_n(\omega) \leq x_n\}$$

v $\mathcal{F}$, se pravi dogodki za vse n-terice $x = (x_n, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Oznaka:

$$\begin{aligned}\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n\} &\equiv \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\} \\ &\equiv \{X_1 \in (-\infty, x_1], \dots, X_n \in (-\infty, x_n]\} \\ &\equiv \{X \in (-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]\} \\ &\equiv X^{-1}\left((-\infty, x_n] \times \dots \times (-\infty, x_n]\right)\end{aligned}$$

Definicija 2. *Komulativna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja* je funkcija $F_X : \mathbb{R}^n \to [0,1]$:

$$F_X(x) \equiv F_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

Lastnosti komulativne porazdelitvene funkcije:

1. $$\begin{aligned}\lim_{x_1 \to -\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{x_1 \to -\infty} P\Big(X \in (-\infty, x_1] \times \underbrace{\cdots \times (-\infty, x_n]}_{K}\Big) \\ &= \lim_{n \to \infty} P(X \in (-\infty, -n] \times K) \qquad (\star) \\ &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in (-\infty, -n] \times K\}\right) \\ &= P\Bigg(X \in \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, -n] \times K}_{=\emptyset}\Bigg) \\ &= 0\end{aligned}$$

   Kjer smo v $(\star)$ vrstici uporabili zveznost P oziroma:

   $$\lim_{n \to \infty} P(E_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \quad \text{za} \quad E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$$

   Ta limita velja, tudi če proti ∞ pošljemo poljuben x_i. Velja še:

   $$\begin{aligned}\lim_{(x_1,\dots,x_n) \to (\infty,\dots,\infty)} F_X(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{n \to \infty} P(X \in (-\infty, n] \times \cdots \times (-\infty, n]) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_1 \leq n, \dots, X_n \leq n\}\right) \\ &= P(X \in \mathbb{R}^n) \\ &= P(\Omega) \\ &= 1\end{aligned}$$

2. *Monotnost:* če je $x_i \leq y_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$, potem je:

$$F_X(x) \leq F_X(y)$$

Dokaz. Sledi iz monotonosti verjetnostne preslikave. $\square$

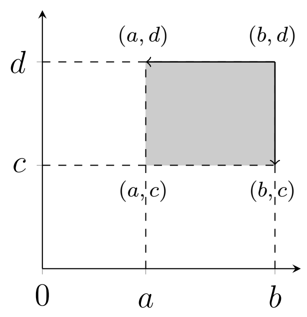
3. *Zveznost z desne:*

$$\lim_{y \downarrow x} F_X(y) = F_X(x)$$

Tukaj $y \downarrow x$ interpretiramo kot $y_i \downarrow x_i$ za vse $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Lastnosti 1., 2. in 3. karakterizirajo družino (abstraktnih) komulativnih porazdelitvenih funkcij v primeru slučajne spremenljivke t.j. $n = 1$. V večrazsežnem primeru to ne drži. Poglejmo si $n = 2$. Za $a < b$ in $c < d$ izračunajmo:

$$P((X,Y) \in (a,b] \times (c,d]) = F_{(X,Y)}(b,d) - F_{(X,Y)}(a,d) - F_{(X,Y)}(b,c) + F_{(X,Y)}(a,c)$$



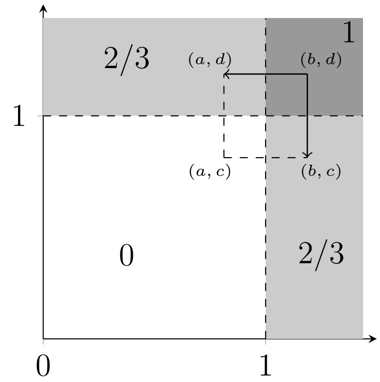
Slika 1.1: $P((X,Y) \in (a,b] \times (c,d])$

Ker je to verjetnost mora veljati:

$$F_{(X,Y)}(b,d) - F_{(X,Y)}(a,d) - F_{(X,Y)}(b,c) + F_{(X,Y)}(a,c) \geq 0 \qquad (4)$$

Zgled.

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 1, y \geq 1 \\ \frac{2}{3} & ; x \geq 1, y \in [0,1) \\ \frac{2}{3} & ; x \in [0,1), y \geq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$



Slika 1.2: Verjetnost $P((X, Y) \in (a, b] \times (c, d])$ za to k.p.f. [1]

Funkcija sicer zadošča lastnostim 1., 2. in 3., ampak za pravokotnik $(a, b] \times (c, d]$, kot na skici velja:

$$F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + 0 < 0$$

Torej ne more biti komulativna porazdelitvena funkcija. $\diamondsuit$

Izrek 1. *Če $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ zadošča lastnostim 1., 2., 3. in 4. (velja $F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c) \geq 0$, za vse četverice $a < b$ in $c < d$), potem je F komulativna porazdelitvena funkcija nekega slučajnega vektorja $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$.*

Očitna posplošitev velja tudi za $n \geq 3$.

Trditev 1. *Če je $X = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni vektor, so vsi podvektorji tudi slučajni vektorji.*

Dokaz. Na primer, za podvektor $(X_1, \ldots, X_{n-1})$:

$$\{X_1 \leq x_1, \ldots, X_{n-1} \leq x_{n-1}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_1 \leq x_1, \ldots, X_{n-1} \leq x_{n-1}, X_n \leq k\} \qquad (\star)$$

$\square$

Posebej sledi, da so komponente slučajnih vektorjev, funkcije $X_1, X_2, \ldots, X_n$, slučajne spremenljivke. Iz $(\star)$ je očitno tudi, da komulativne porazdelitvene funkcije podvektorjev dobimo tako, da ustrezne kooridante pošljemo proti ∞:

$$F_{(X_1,\ldots,X_{n-1})}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \lim_{x_n \to \infty} F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)$$

Komulativne porazdelitvene funkcije F_{X_i} imenujemo tudi *robne* ali *marginale* komulativne porazdelitvene funckije (glede na $F_{(X_1,\ldots,X_n)}$).

[1] k.p.f. je okrajšava za kumulativno porazdelitveno funkcijo. To se v skripti pojavi še večkrat.

Opomba. Naj bo $X : \Omega \to \mathbb{R}$ s.s.[2] Potem so naslednje množice dogodki:

- $$\begin{aligned}\{X \in (a,b]\} &= \{X \in (-\infty, b]\} \setminus \{X \in (-\infty, a]\} \\ &= \{X \in (-\infty, b]\} \cap \{X \in (-\infty, a]\}^c\end{aligned}$$
- $\{X \in (a,b)\}$, saj je to enako $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \in (a, c_n]\}$ za $c_n \uparrow b$
- $\{X \in [a,b]\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{X \in \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)\right\}$
- $\{X = x\} = \{X \in (x-1, x]\} \setminus \{X \in (x-1, x)\}$

Zgornje lahko "kombiniramo" (števne unije, komplementi, preseki). Izkaže se, da obstajajo verjetnosti $P(X \in \mathcal{B})$, kjer je $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ poljubna Borelova množica.

Opomba. Pripomnimo, da podobno velja za slučajni vektor X. Množice:

$$\{X \in \mathcal{B}\} = X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \Omega$$

so dogodki za Borelove množice $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$

Zgled (Borelove množice)**.**

1. $\subseteq \mathbb{R}$
   - $(a,b), (-\infty, b), \ldots$ vsi intervali;
   - $\{x\} = (x-1, x] \setminus (x-1, x)$ singeltoni;
   - Števne unije Borelovih množic;
   - Števni preseki Borelovih množic;
   - Komplementi Borelovih množic.
2. $\subseteq \mathbb{R}^2$
   - Krogle;
   - Pravokotniki;
   - Enoelementne množice;
   - Unije, preseki, komplemeti kot v $\mathbb{R}$;
   - Če je $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zvezno parcialno odvedljiva bijekcija, je $G(\mathcal{B})$ Borelova za vsako Borelovo množico $\mathcal{B}$.

$\diamondsuit$

[2]s.s. je okrajšava za slučajno spremenljivko. To se v skripti pojavi še večkrat.

1.2 Zvezni slučajni vektorji

Definicija 3. Slučajni vektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ima zvezno gostoto, če obstaja taka "zvezna" funkcija $f_X : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, da zanjo velja:

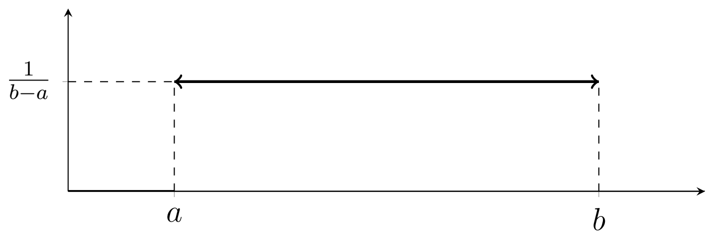
$$P(X \in \mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} f_X\left(x_1, \ldots, x_n\right) \, dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{B}} f_X(x) \, dx$$

za vsako Borelovo množico $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Mislimo si, da gre za posplošeni Reimannov integral. Zvezna funkcija $f_X : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ je taka, pri kateri je množica točk nezveznosti zanemarljiva za n-terni integral. Če ima slučajni vektor X "zvezno" gostoto, pravimo, da je zvezen. V tem primeru je $F_X : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *zvezna* funkcija.

Zgled. $X \sim \mathrm{U}(a, b)$ (enakomerna zvezna porazdelitev na (a, b)). Vse točke so "enako verjetne". Natančneje za $a \le c < d \le b$:

$$P\left(X \in (c, d)\right) = \int_c^d f_{\mathrm{U}(a,b)}(x) \, dx, \quad \text{kjer je} \quad f_{\mathrm{U}(a,b)}(x) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathbb{1}_{(a,b)}(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; x \in (a, b) \\ 0 & ; x \notin (a, b) \end{cases}$$



Slika 1.3: $f_X(x)$ za enakomerno porazdelitev

$\lozenge$

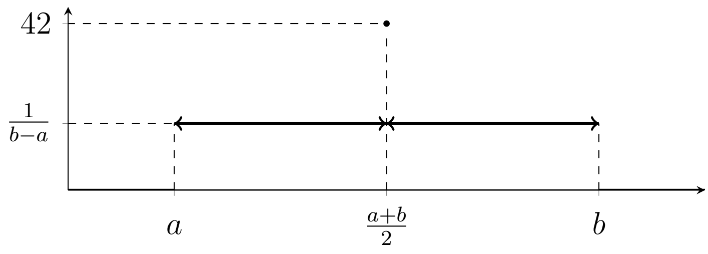
Definicija 4. Za abstraktno množico M in $A \subseteq M$ je $\mathbb{1}_A : M \to \{0, 1\}$ *indikator množice* A funkcija:

$$\mathbb{1}_A(m) = \begin{cases} 1 & ; m \in A \\ 0 & ; m \notin A \end{cases}$$

Opomba. Velja: $P(X \in A) = E\left(\mathbb{1}_A(X)\right)$

Zgled. V primeru $X \sim \mathrm{U}(a,b)$ je gostota X tudi:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & ; x \in (a,b) \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\} \\ 42 & ; x = \frac{a+b}{2} \\ 0 & ; x \notin (a,b) \end{cases}$$



Slika 1.4: $f_X(x)$ za enakomerno porazdelitev

$\Diamond$

Zgled. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ odprt enotski krog. Pravimo, da $(X,Y) \sim \mathrm{U}(D)$, če ima gostoto:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot \mathbb{1}_D(x,y)$$

Množica točk nezveznosti zgornje gostote je enotska krožnica. To je zanemarljiva množica za $\int_{\mathbb{R}^2}$. $\Diamond$

Oglejmo si dvorazsežen primer ($n = 2$):

Za $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ z gostoto $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ velja:

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= P((X,Y) \in (-\infty,x] \times (-\infty,y]) \\ &= \int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_{(X,Y)}(u,v)\, dudv \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\, dvdu \qquad (\star) \\ &= \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\, dudv \end{aligned}$$

Kjer smo v ($\star$) vrstici uporabili Fubinijev izrek (integral mora biti absolutno konvergenten).

Robni komulativni porazdelitveni funkciji se glasita:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv \\
&= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u,v)\,dvdu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \lim_{x\to\infty} F_{(X,Y)}(x,y) \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv \\
&= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u,v)\,dvdu
\end{aligned}$$

Od tod sledita robni gostoti:

$$f_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,v)\,dv$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(u,y)\,du$$

V točkah odevljivosti k.p.f. F, oz. za skoraj vse x oz. y.

1.3 Dvofazna normalna porazdelitev

Naj bo $\mu = \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in naj bo $\Sigma = \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$, kjer je $\sigma_1, \sigma_2 \in (0,\infty)$ in $\sigma_{12} \in \mathbb{R}$, simetična pozitivno definitna 2×2 matirka ($\iff$ $\det(\Sigma) > 0$). Tedaj ima slučajni vektor (X,Y) dvorazsežno normalno porazdelitev s parametroma μ in Σ, če ima gostoto:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\det\Sigma}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}\left(\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix}\right\rangle\right)$$

Gostota $f_{X,Y}$ je zvezna povsod na $\mathbb{R}^2$.

Opomba. Pišemo $(X,Y) \sim \mathrm{N}(\mu,\Sigma) = N\left(\begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\right)$.

Seveda je:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2 - \sigma_{12}^2}\begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}$$

Tako dobimo: $\left\langle \Sigma^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right), \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}\right\rangle = (\star)$ prepišemo v:

$$\begin{aligned}
\left\langle \Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}\right\rangle &= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\left\langle \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}\left\langle \begin{bmatrix} \sigma_2^2\left(x-\mu_1\right) - \sigma_{12}\left(y-\mu_2\right) \\ \sigma_1^2\left(y-\mu_2\right) - \sigma_{12}\left(x\mu_1\right) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}\right\rangle \\
&= \frac{\sigma_2^2\left(x-\mu_1\right)^2 - 2\sigma_{12}\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right) + \sigma_1^2\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}
\end{aligned}$$

Vpeljemo $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$. Ker je $\det\Sigma = {\sigma_1}^2{\sigma_2}^2\left(1-\rho^2\right)$ je $\det\Sigma > 0 \iff \rho^2 < 1$, oz. $\rho \in (-1,1)$. S parametrom ρ lahko nadomestimo σ_{12}. Dobimo:

$$\left\langle \Sigma^{-1}\begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix}\right\rangle = \tfrac{1}{1-\rho^2}\left(\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)$$

Ekvivalentno lahko torej normalno porazdelitev parametriziramo s parametri:

$$\mu_1 \in \mathbb{R}, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma_1 \in (0,\infty), \sigma_2 \in (0,\infty), \rho \in (-1,1)$$

Dobimo:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \tfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\tfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\tfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\tfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right)$$

Vidimo, da so nivojnice funkcije $f_{(X,Y)}$ krivulje, ki so elipse s središčem v (μ_1, μ_2).

Oglejmo si poseben primer $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ (ekvivalentno, obravnavamo gostoto transformacije $U = \frac{X-\mu_1}{\sigma_1}, V = \frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$). Nivojnice se krivulje:

$$u^2 - 2\rho uv + v^2 = C\left(1-\rho^2\right)$$

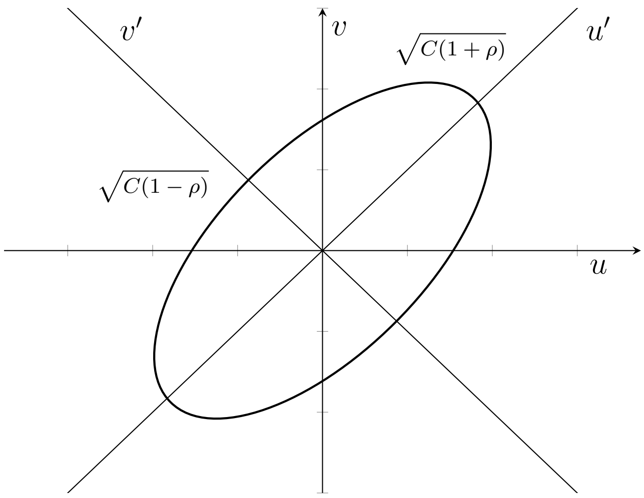
$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right\rangle = C\left(1-\rho^2\right)$$

To je kvadratna forma oblike $q_A(x) = \langle Ax, x\rangle$. Izračunajmo lastni vrednosti matrike $A = \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -\rho \\ -\rho & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - \rho^2 \\ &= (1-\lambda-\rho)(1-\lambda+\rho) \end{aligned}$$

Lastni vrednosti sta $1 \pm \rho$.

$$\lambda_1 = 1-\rho : \begin{bmatrix} \rho & -\rho \\ -\rho & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \text{lastni vektor je} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_1 = 1+\rho : \begin{bmatrix} -\rho & -\rho \\ -\rho & -\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \text{lastni vektor je} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Slika 1.5: Nivojnica $N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$

V koordinatah $\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ dobimo enačbo:

$$(1-\rho)u'^2 + (1+\rho)v'^2 = C\left(1-\rho^2\right) \iff \frac{u'^2}{C(1+\rho)} + \frac{v'^2}{C(1-\rho)} = 1$$

Naj bo $(X,Y) \sim N\left(\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\right)$. Izkaže se, da za robni porazdelitvi velja:

$$X \sim N\left(\mu_1, {\sigma_1}^2\right) \quad \text{in} \quad Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

Nadalje se izkaže, da je $\sigma_{12} = K(X,Y)$. Posledično je ρ t.i. Pearsonov korelacijski koeficient.

Opomba. Pripomnimo, da sledi, da porazdelitev vektorja (X,Y) ni določena z robnima porazdelitvama.

Zgled. Oglejmo si primer $(X,Y) \sim N\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}\right)$. Tedaj se gostota (X,Y) glasi:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)}$$

$\rho = 0 \implies$ standardna dvorazsežna normalna porazdelitev. $\Diamond$

Posplošitev:

Pravimo, da ima vektor $X = (X_1, \ldots, X_n)$ n-razsežno normalno porazdelitev s parametroma $\mu \in \mathbb{R}^n$ in $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (simetrična in poz. definitna), če ima gostoto:

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}(x-\mu), x-\mu\right\rangle\right)$$

Poglavje 2

Neodvisnost

Definicija 5. Slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_n$, so neodvisne, če velja:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n) \tag{$\star$}$$

za vse realne n-terice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Enakost ($\star$) lahko prepišemo v:

$$P(X \in (-\infty, x_1] \times \ldots \times (-\infty, x_n]) = P(X_1 \in (-\infty, x_1]) \cdots P(X_n \in (-\infty, x_n])$$

Izkaže se, da so komponente vektorja X neodvisne natanko tedaj, ko velja:

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2) \cdots P(X_n \in B_n)$$

za vse n-terice Borelovih množic $B_i \subseteq \mathbb{R}$.

Torej za slučajni spremenljivki X, Y velja, da sta neodvisni natanko tedaj, ko:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

za vse intervale $A, B \subseteq \mathbb{R}$

Spomnimo se, da so dogodki $E_1, E_2, \ldots, E_n$ neodvisni:

$$P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1}) \cdots P(E_{i_k})$$

za $\forall k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ in vsako k-terico $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

Opomba. Če so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne, so tudi paroma neodvisne, t.j. neodvisni sta X_i in X_j za vsak par $i \neq j$. Obratno ne velja v splošnem.

Trditev 2. *Naj ima slučajni vektor (X,Y) "zvezno" gostoto $f_{(X,Y)}:\mathbb{R}^2\to[0,\infty)$. X in Y sta neodvisni $\iff$*

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

za skoraj vse realne pare $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Dokaz. Definicija neodvisnosti pravi:

$$P((X,Y)\in(-\infty,x]\times(-\infty,y])=P(X\in(-\infty,x])P(Y\in(-\infty,y])$$

Oziroma:

$$\int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv=\int_{(-\infty,x]} f_X(u)\,du\int_{(-\infty,y]} f_Y(v)\,dv$$
$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dvdu=\int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$

($\implies$) Uporabimo osnovni izrek analize in odvajamo najprej po x:

$$\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(x,y)\,dv=f_X(x)\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\,dv$$

Odvajati smemo skoraj v vseh točka $x\in\mathbb{R}$, saj gostote niso vedno povsod zvezne. Odvjamo še po y:

$$f_{(X,Y)}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

Velja za skoraj vse x in y.[3]

($\impliedby$) Če veja $f_{(X,Y)}(u,v)=f_X(u)f_Y(v)$ za skoraj vse u,v veja tudi:

$$\int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_{(X,Y)}(u,v)\,dudv=\int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,dudv$$

za vse[4] x in y. Leva starn je $F_{(X,Y)}(x,y)$, na desni strani pa dvojni integral spremeninmo v dvakratnega:

$$\begin{aligned}\int_{(-\infty,x]\times(-\infty,y]} f_X(u)\cdot f_Y(v)\,dudv&=\int_{(-\infty,x]} f_X(u)\int_{(-\infty,y]} f_Y(v)\,dvdu\\&=\int_{(-\infty,x]} f_X(u)\,du\int_{(-\infty,y]} f_Y(v)\,dv\\&=F_X(x)\cdot F_Y(y)\end{aligned}$$

□

[3]Enakost za skoraj vse x in y pomeni enakost za vse integrale po Borelovih množicah.

[4]Če sta funkciji skoraj povsod enaki je integral funkcij enak povsod.

Posledica 1. *Če je* $(X,Y) \sim N\left(\begin{bmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\right)$ *potem sta* X *in* Y *neodvisni* $\iff \sigma_{12} \iff \rho = 0$.

Dokaz. ($\implies$) Spomnimo se, da ima (X,Y) gostoto:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}), \vec{x}-\vec{\mu}\right\rangle}$$

Če za f_X f_Y izberemo "standardne" funkcije zaradi njihove zveznosti, dobimo neodvisnost natanko tedaj, ko velja:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

za vse pare x, y, kjer sta:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \qquad \text{in} \qquad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

To pomeni:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \Sigma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu}), \vec{x}-\vec{\mu}\right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

Če privzamemo veljavnost zgornjega razcepa in vstavimo $(x,y) = (\mu_1, \mu_2)$ dobimo:

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \implies 1 - \rho^2 = 1 \implies \rho = 0$$

($\impliedby$) Očitno. Vstavimo $\rho = 0$. □

Opomba. Za $\mu \in \mathbb{R}^n$ in simetrično pozitivno definitno matriko $\Sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je slučajni vektor $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ porazdeljen normalno s parametroma μ in Σ ($X \sim N(\mu, \Sigma)$), če ima gostoto:

$$f_X(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\det \Sigma)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left\langle \Sigma^{-1}(x-\mu), x-\mu\right\rangle}$$

Izkaže se, da sledi:

$$X_i \sim N(\mu_i, \Sigma_{ii}) \quad \text{in da je} \quad \Sigma_{ij} = K(X_i, X_j) \quad \text{za} \quad i \neq j.$$

Dalje sledi, da so $X_1, \ldots, X_n$ neodvisne $\iff$ Σ diagonalna. Posledično so komponente večrazsežno normalno porazdeljenega slučajnega vektorja neodvisne natanko tedaj, ko so paroma neodvisne.

Posledica 2. *Naj ima slučajni vektor (X, Y) "zvezno" gostoto $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$. X in Y neodvisni $\iff$*

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \phi(x) \cdot \psi(y)$$

za skoraj vse pare x in y in neki nenegativni integrabilni funkciji ϕ in ψ.

Dokaz. ($\implies$) Že vemo.

($\impliedby$) Iz razcepa $f_{(X,Y)}(x, y) = \phi(x) \cdot \psi(y)$ sledi:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du \int_{-\infty}^{y} \psi(v)\, dv$$

Zato:

$$\lim_{y\to\infty} F_{(X,Y)}(x, y) = \lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du \int_{-\infty}^{y} \psi(v)\, dv$$
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v)\, dv$$

Posledično je po osnovnem izreku analize:

$$f_X(x) = \phi(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v)\, dv$$

Simetrično je:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v)\, dv \cdot \psi(y)$$

Ker je $\int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(u, v)\, dudv = 1$ sledi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v)\, dv = 1$$

Sledi:

$$\phi(x) \cdot \psi(y) = \phi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(v)\, dv \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\, du\, \psi(y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$\square$