TEMA4: Implementación de Filtros Discretos

Contenidos del tema:

- El muestreo y sus consecuencias
- Relaciones entre señales y sus transformadas:
- Especificaciones de filtros continuos y discretos
  - Aproximaciones usuales
  - Ejemplos
- Técnicas de implementación de filtros IIR:
  - Respuesta impulsiva invariante
  - Transformación bilineal
- Implementación de filtros FIR

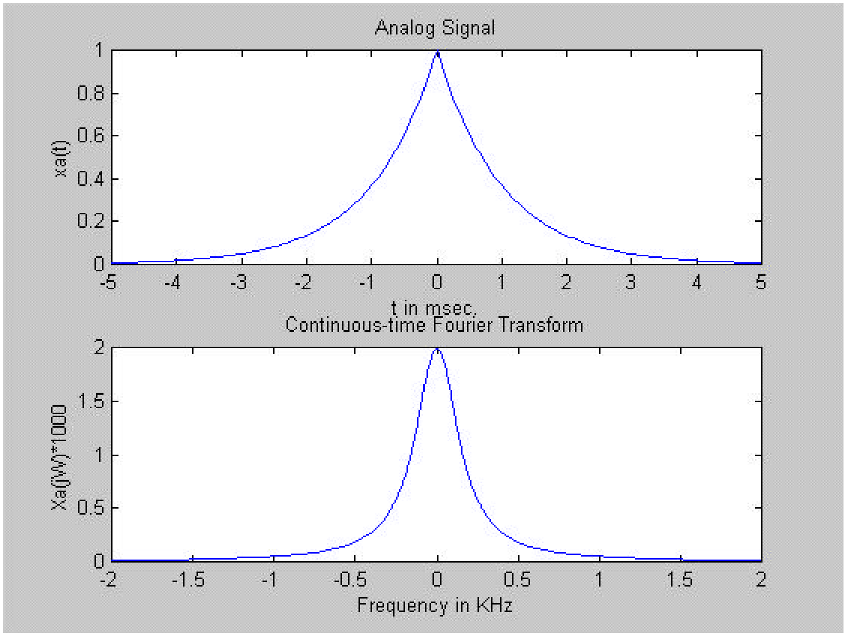
Algunas Consideraciones al Procesado Discreto

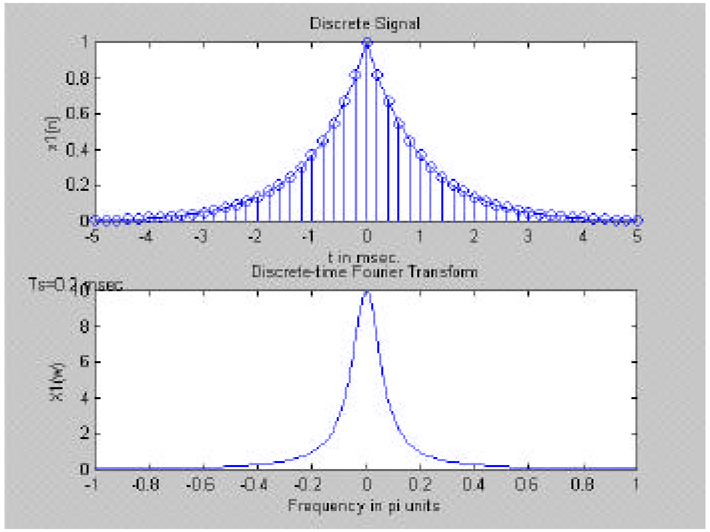
- **La frecuencia de muestreo (en relación con el contenido en frecuencia de la señal de entrada) condiciona la información disponible y la "convertibilidad" entre el dominio continuo y el discreto.**

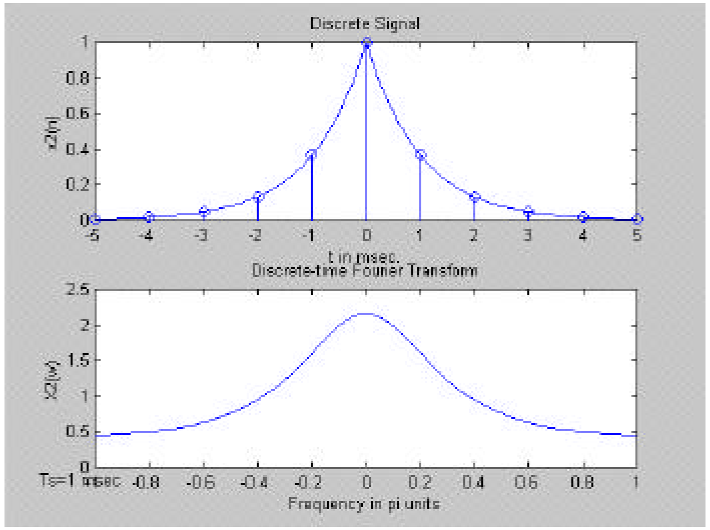
- **La frecuencia de muestreo (en relación con el contenido en frecuencia de la señal de entrada) condiciona la forma del espectro discreto.**

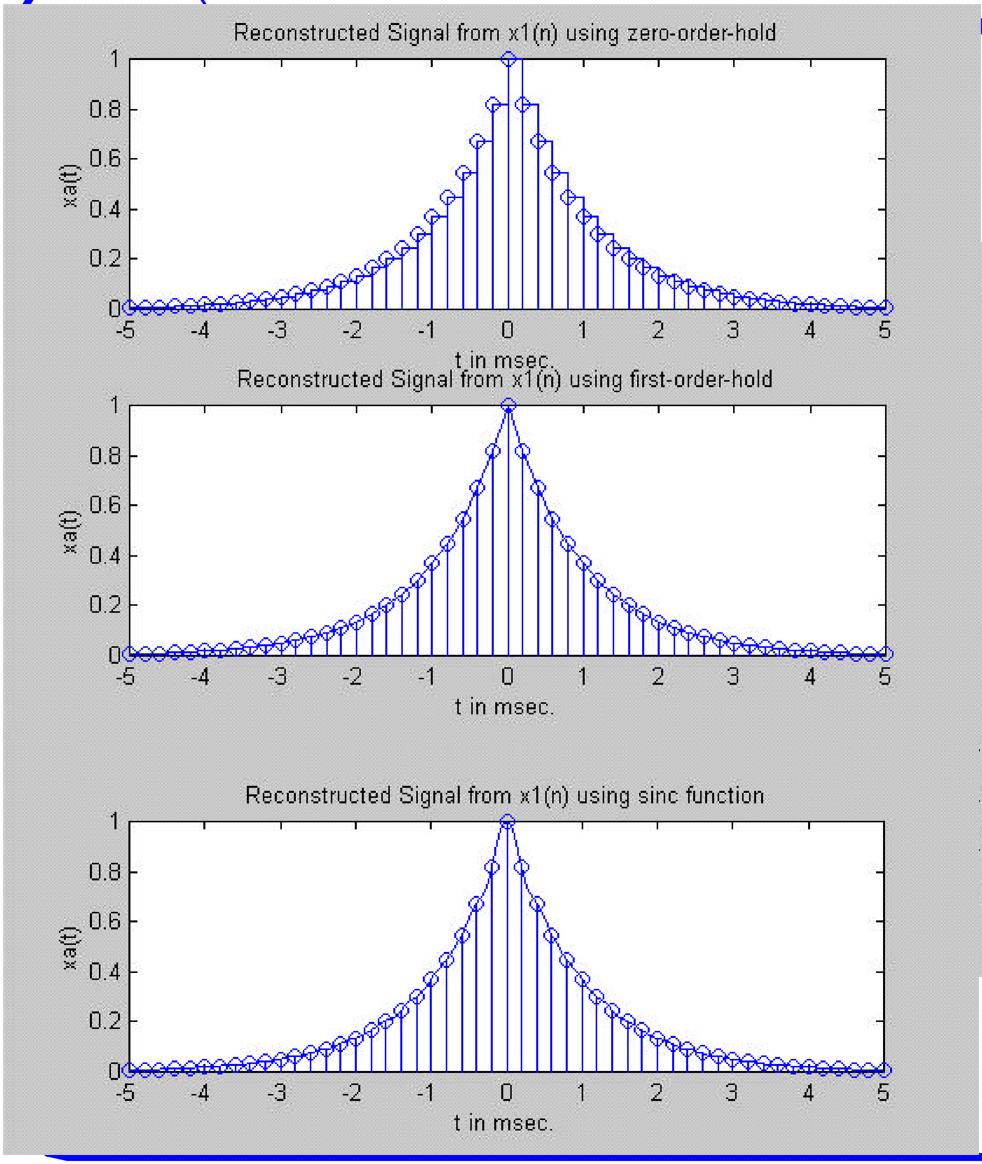
- **La precisión de la transformación discreta-continua depende de la calidad del algoritmo de interpolación y de la frecuencia de muestreo.**

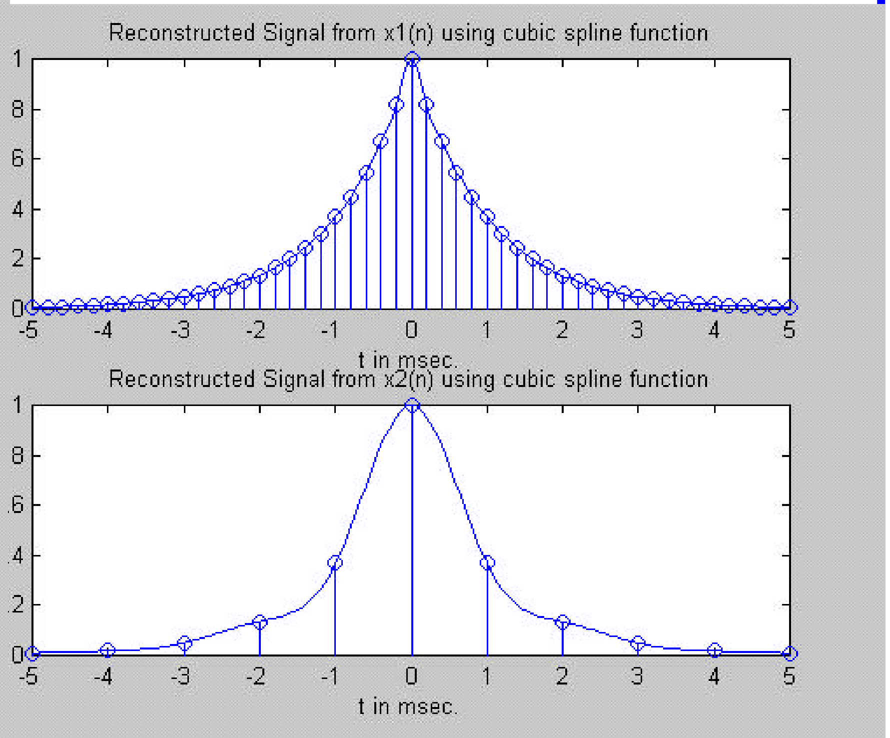
- **La frecuencia de muestreo (en relación con el contenido en frecuencia de la señal de entrada) condiciona la forma del espectro discreto.**

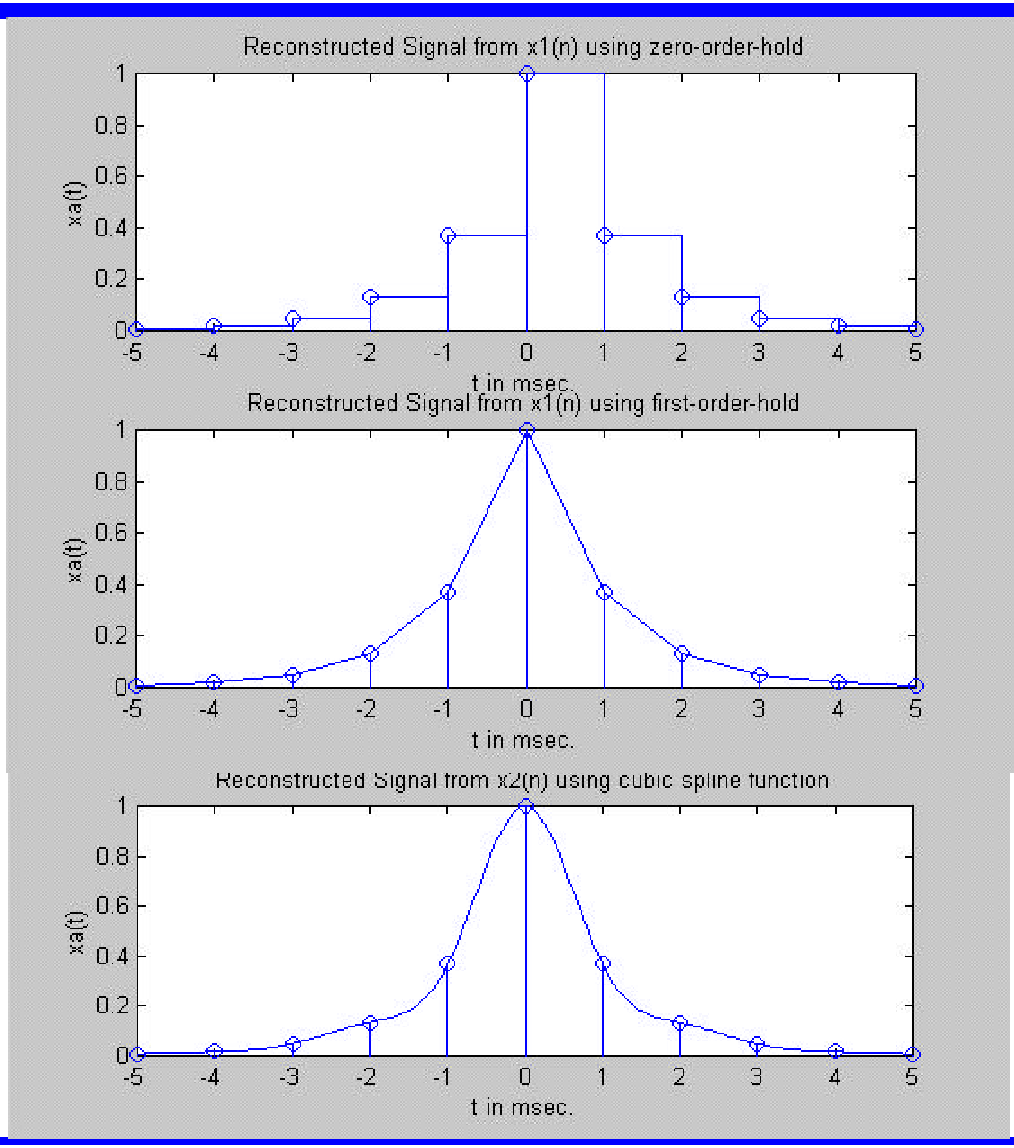







Reconstructed Signal from x1(n) using zero-order-hold
xa(t)
t in msec.
Reconstructed Signal from x1(n) using first-order-hold
xa(t)
t in msec.
Reconstructed Signal from x1(n) using sinc function
xa(t)
t in msec.


Reconstructed Signal from x1(n) using cubic spline function
t in msec.
Reconstructed Signal from x2(n) using cubic spline function
t in msec.


Reconstructed Signal from x1(n) using zero-order-hold
xa(t)
t in msec.
Reconstructed Signal from x1(n) using first-order-hold
xa(t)
t in msec.
Reconstructed Signal from x2(n) using cubic spline function
xa(t)
t in msec.

Restricciones al Procesado Discreto

- **Teorema de Nyquist:**

Para poder recuperar una señal muestrada debemos usar una frecuencia de muestreo por lo menos doble que la frecuencia significativa más alta de la señal de entrada.

Sea la banda de interés de la señal de entrada: $w < w_{max}$

Sea la frecuencia de muestreo: w_s

Teorema de Nyquist:

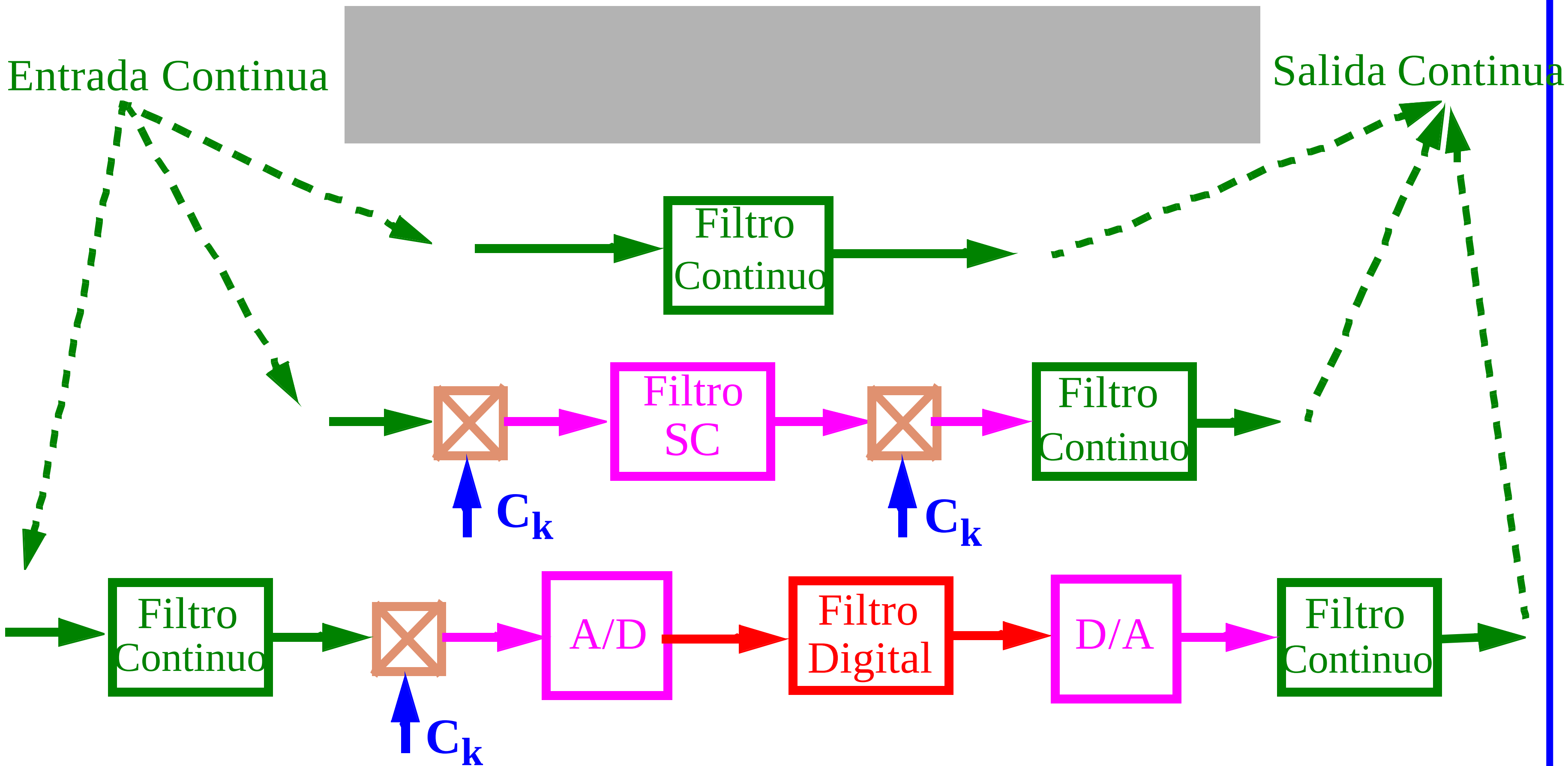
$$w_s > 2w_{max}$$

- **Interesa limitar la banda de la señal de entrada usando un filtro de paso de baja**

- **Es imprescindible colocar un filtro de paso de baja al reconvertir la información como señal continua**

- **Ambos filtros son CONTINUOS!**

Maneras de Filtrar



Objetivo: Poder hacer un procesado “Similar” en todos los casos

Síntesis de Filtros Discretos

Tareas

- Encontrar funciones en z que sean “equivalentes” a filtros continuos
- Determinar procedimientos para construir esas funciones en z
- Elegir una estructura de sistema y determinar sus coeficientes
- Seleccionar las características necesarias para “soportar” la información (nº de bits, frecuencia de muestreo, código binario, tipo de representación, grado de paralelismo...)
- Escoger los componentes y diseñarlos
- Verificar los resultados

Necesidades

- Criterios para comparar entre opciones
- Estimación de la “calidad” de una solución

Síntesis de Filtros Discretos

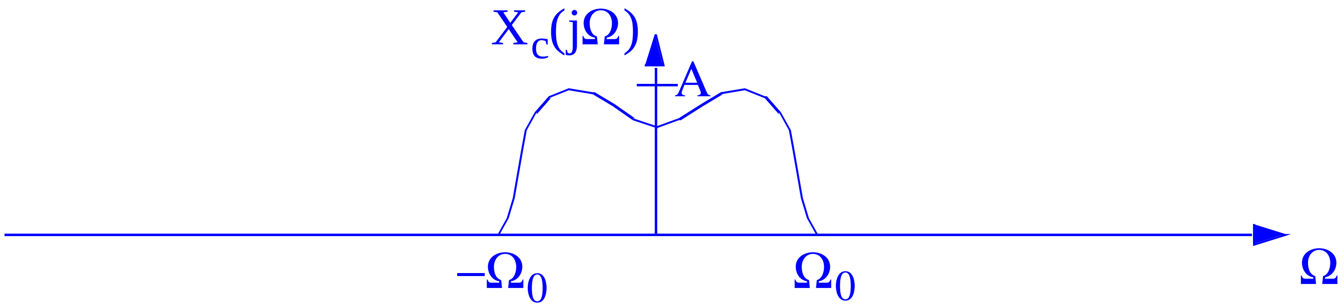
Diseñar Filtro Analógico (s ---> s) → Aplicar Transformación de Frecuencia (s ---> s) → Aplicar Transformación de Variable (s ---> z) → Filtro IIR

Diseñar Filtro Analógico (s ---> s) → Aplicar Transformación de Variable (s ---> z) → Aplicar Transformación de Frecuencia (z ---> z) → Filtro IIR

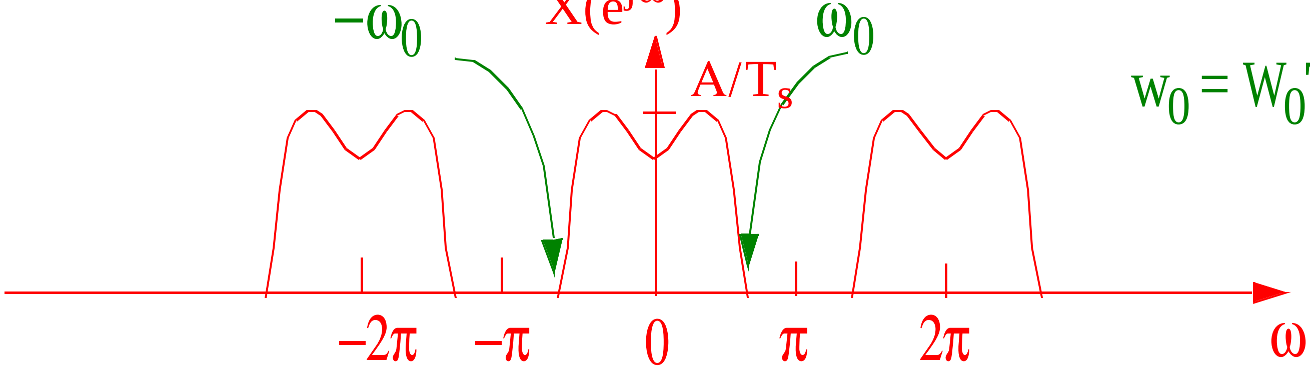
Relaciones entre Señales y sus Transformadas

Expresión Alternativa:

$$X^*(j\omega) = X_D\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega}{T_s} + jn\frac{2\pi}{T_s}\right)$$



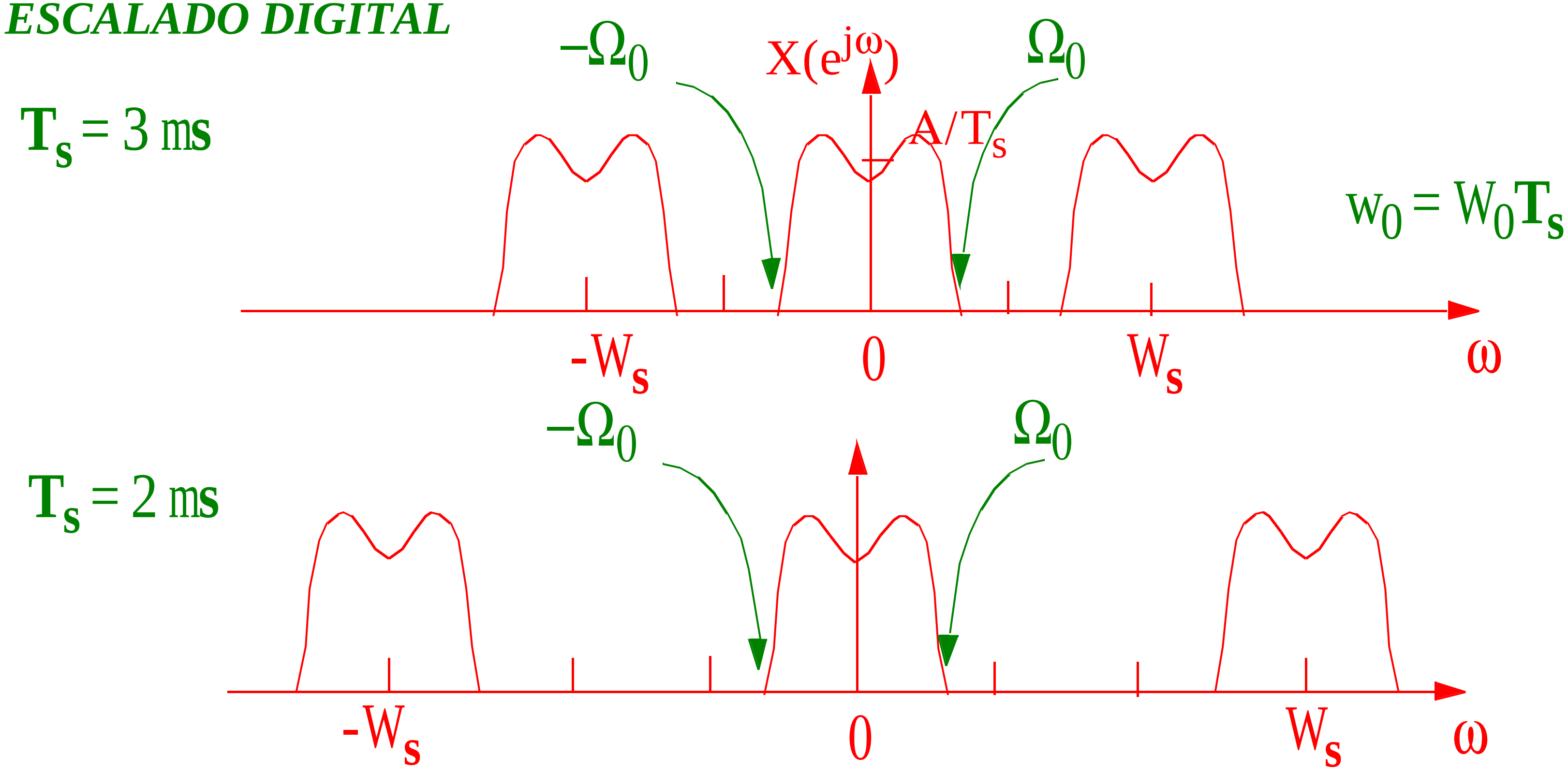
ESCALADO DIGITAL



$w_0 = W_0\mathbf{T_s}$

Relaciones entre Señales y sus Transformadas

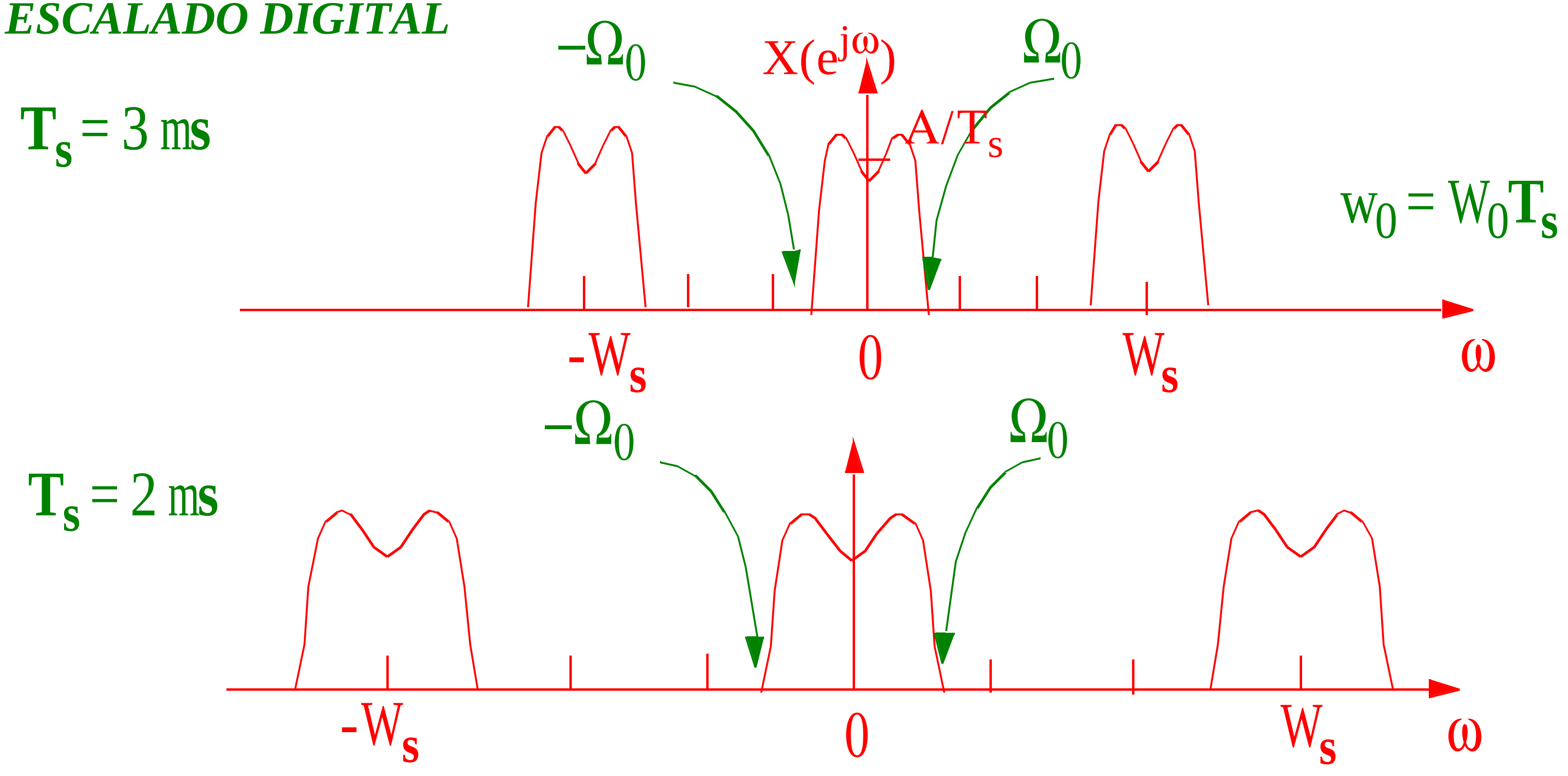
ESCALADO DIGITAL



- Importa **NO** el valor absoluto de W_0 sino su valor relativo respecto a T_s (o a W_s)
- Es necesario hacer una normalización, por ejemplo: $w_s = W_s T_s = 2p$

Relaciones entre Señales y sus Transformadas

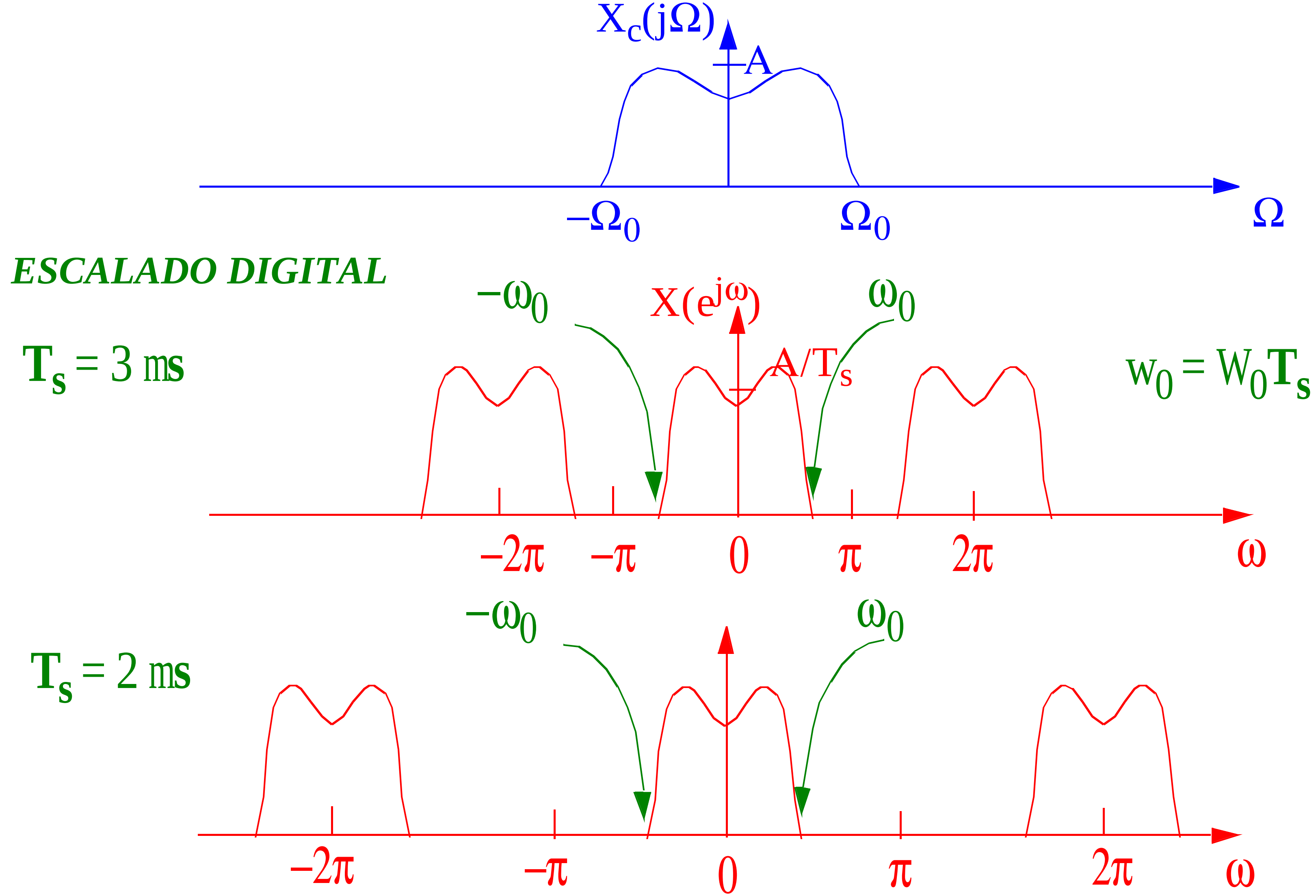
ESCALADO DIGITAL



- Importa **NO** el valor absoluto de W_0 sino su valor relativo respecto a T_s (o a W_s)
- Es necesario hacer una normalización, por ejemplo: $w_s = W_s T_s = 2p$

Relaciones entre Señales y sus Transformadas

ESCALADO DIGITAL



Relaciones entre Señales y sus Transformadas

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X^{*}(j\omega) = X_D\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(j\frac{\omega}{T_s} + jn\frac{2\pi}{T_s}\right)$$

$x_c(t)$ = señal continua $\xrightarrow{\text{F (CTFT)}}$ $X_c(j\Omega)$

$x^*(t) = x_s(t)$ = señal muestreada $\xrightarrow{\text{F (CTFT)}}$ $X_s(j\Omega)$

$x(n) = x_c(t)|_{t=nTs}$ = secuencia numérica $\xrightarrow{\text{Z}}$ $X(z)$

$\xrightarrow{\text{DTFT}}$ $X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$\omega = \Omega T_s$

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\Omega T_s})$$

$$X(e^{j\omega}) = X_s(j\omega/T_s)$$

Relaciones entre Señales y sus Transformadas

$x_c(t)$ = señal continua

$x_c(nT_s)$ = señal discreta

$x(n) = x_c(t)|_{t=nTs}$ = secuencia numérica

$x^*(t) = x_s(t)$ = señal muestreada

$$\mathbf{x_c(nT_s) = x_c(t)|_{t=nTs}}$$

$$\mathbf{x(n) = x_c(nT_s)}$$

$$x_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_c(nT_s)\delta(t-nT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(t-nT_s)$$

Secuencia $\longrightarrow$ **Transformada Z** $\longrightarrow$ **DTFT** $\longrightarrow$ $\mathbf{X(z)|_{z=e^{j\omega}}}$

Señal $\longrightarrow$ **Transf. Laplace** $\longrightarrow$ **CTFT** $\longrightarrow$ $\mathbf{X(s)|_{s=j\Omega}}$

ω **-----> “frecuencia” digital**

Ω **-----> “frecuencia” analógica**

CTFT: Continuous-time Fourier Transform

$$X_S(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_S(t)e^{-j\Omega t}dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n)e^{j\Omega n T_s}$$

DTFT: Discrete-time Fourier Transform

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_D\left(e^{j\omega}\right) = X(z)\Big|_{z = e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

sii --------------> $\omega = \Omega\, T_s$

$$X_S(j\Omega) = X\left(e^{j\Omega T_s}\right)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_S\left(j\frac{\omega}{T_s}\right)$$

Espectro original:

$$x_c(t) \longrightarrow X_c(j\Omega)$$

CTFT: $x_s(t)$ (otra visión):

$$X_S(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}[X_c(j\Omega) \otimes P(j\Omega)] = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - n\Omega_s)] \qquad \Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$$

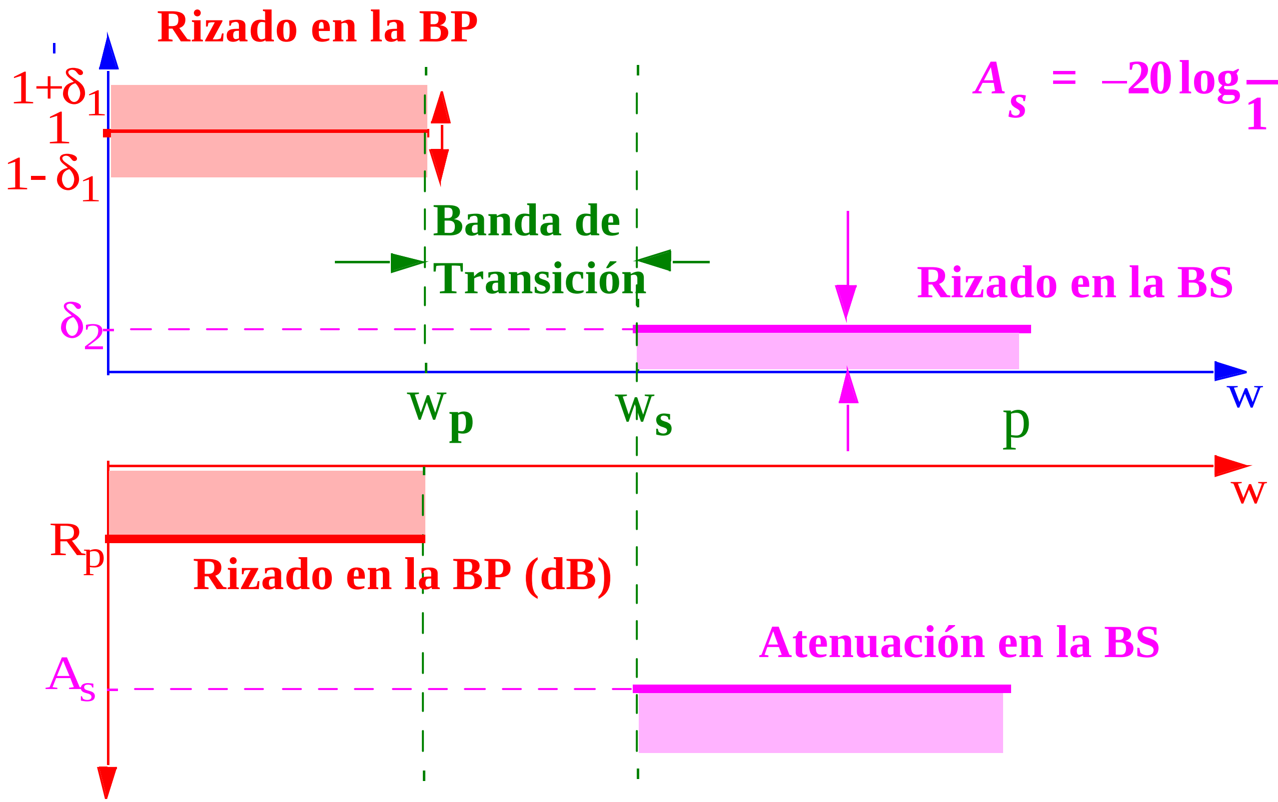
$$X\left(e^{j\Omega T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c[j(\Omega - n\Omega_s)]$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\frac{\omega - 2\pi n}{T_s}\right)$$

Especificaciones de Filtros Discretos

$$R_p = -20\log\frac{1-\delta_1}{1+\delta_1}$$

$$A_s = -20\log\frac{\delta_2}{1+\delta_1}$$



Filtros de Paso de Baja Discretos

Definición del Problema:

Obtener una función de sistema, H(z), (o su expresión en diferencias finitas) que tenga una banda pasante [0, w_p] con una tolerancia d_1 (ó R_p en dB), y una banda de rechazo [w_s, p] con tolerancia d_2 (ó A_s en dB)

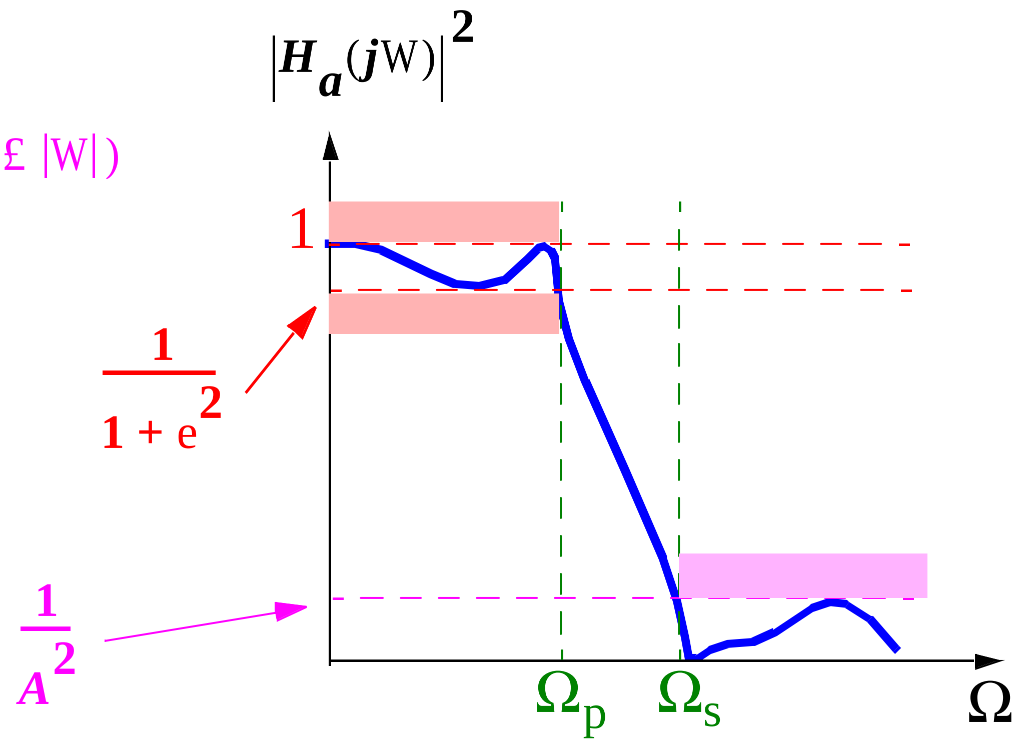
Especificación de Filtros Continuos

Escala Lineal Relativa:

Ω = frecuencia “analógica”

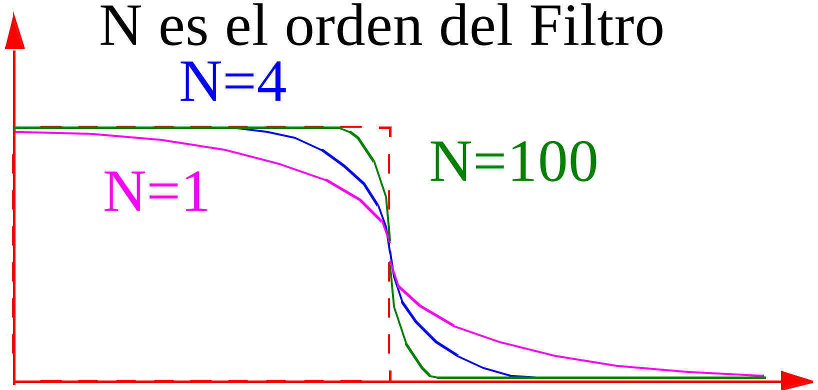
$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \le |H_a(j\Omega)|^2 \le 1, \qquad (|\Omega| \le \Omega_p)$$

$$0 \le |H_a(j\Omega)|^2 \le \frac{1}{A^2}, \qquad (\Omega_s \le |\Omega|)$$



Filtros de Butterworth: Prototipo P. Baja

N es el orden del Filtro



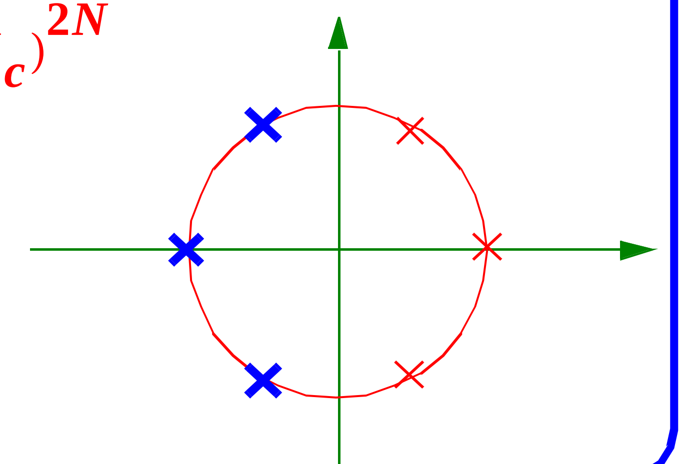
Módulo al cuadrado:

$$\left|H_a(jW)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{W}{W_c}\right)^{2N}}$$

Función de transferencia:

$$H_a(s)(H_a(-s)) = \left|H_a(jW)\right|^2\Big|_{W = s \cdot j} = \frac{(jW)^{2N}}{s^{2N}+(jW_c)^{2N}}$$

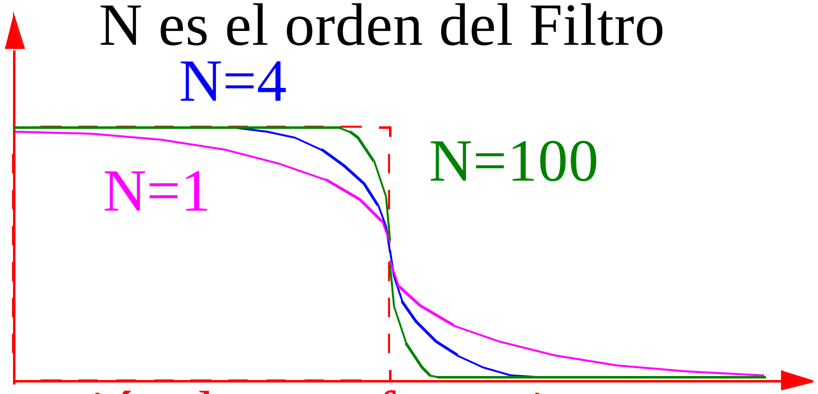
$$p_k = \Omega_c e^{j\pi(2k+N+1)/2N}$$



$$H_a(s) = \frac{(W_c)^N}{\prod_{LHP}(s-p_k)}$$

Filtros de Butterworth: Prototipo P. Baja

N es el orden del Filtro



Módulo al cuadrado:

$$|H_a(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}$$

Función de transferencia:

$$H_a(s)(H_a(-s)) = |H_a(j\omega)|^2\Big|_{\omega = s/j} = \frac{(j\omega)^{2N}}{s^{2N} + (j\omega_c)^{2N}}$$

$$H_a(s) = \frac{(\omega_c)^N}{\prod_{LHP} (s - p_k)}$$

Filtros de Butterworth: Ecuaciones de Diseño

Problema:

- **Dados** Ω_p, $\mathbf{R_p}$, Ω_s **y** $\mathbf{A_s}$
- **Obtener N y** Ω_c

En $\Omega = \Omega_p$:

$$-10\log\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \mathbf{R_p}$$

$$\boxed{-10\log\left[1 + (\Omega_p/\Omega_c)^{2N}\right]^{-1} = \mathbf{R_p}}$$

En $\Omega = \Omega_s$:

$$-10\log\left|H_a(j\Omega)\right|^2 = \mathbf{A_s}$$

$$\boxed{-10\log\left[1 + (\Omega_s/\Omega_c)^{2N}\right]^{-1} = \mathbf{A_s}}$$

Filtros de Butterworth: Ecuaciones de Diseño

$$N = \left\lceil \frac{\log\left[\left(10^{R_p/10}-1\right)/\left(10^{A_s/10}-1\right)\right]}{2\log\left(\Omega_p/\Omega_s\right)} \right\rceil$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\left(10^{R_p/10}-1\right)^{-2N}}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\left(10^{A_s/10}-1\right)^{-2N}}$$

Filtros de Butterworth: Ejemplo

- **Dados $\Omega_p = 0.2\pi$, $R_p = 7$ dB, $\Omega_s = 0.3\pi$, $A_s = 16$ dB**

$$N = \left\lceil \frac{\log\left[\left(10^{0,7}-1\right) / \left(10^{1,6}-1\right)\right]}{2\log\left((0,2\pi) / (0,3\pi)\right)} \right\rceil = \lceil 2,79 \rceil = 3$$

$$\Omega_c = \frac{0,2\pi}{\left(10^{0,7}-1\right)^{-6}} = 0,4985$$

$$\Omega_c = \frac{0,3\pi}{\left(10^{1,6}-1\right)^{-6}} = 0,5122$$

$$\Omega_c = 0.5$$

$$H_a(s) = \frac{0,125}{(s+0,5)\left(s^2+0,5s+0,25\right)}$$

Filtros de Butterworth: Ejemplo

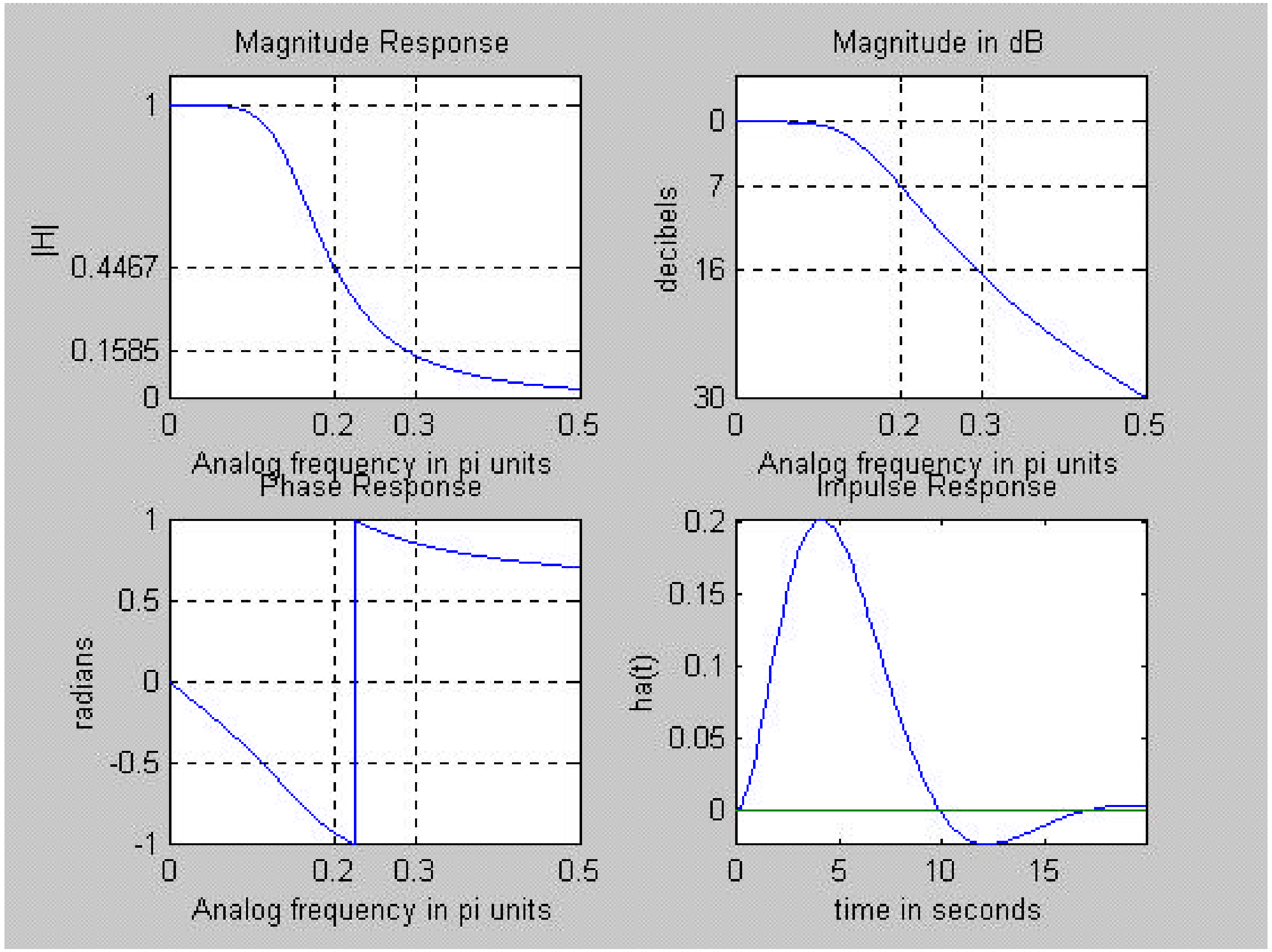
A =

1.0000 0.5000 0.2500
0 1.0000 0.5000

A =

1.0000 0.4985 0.2485
0 1.0000 0.4985

B=
0 0 0.1238



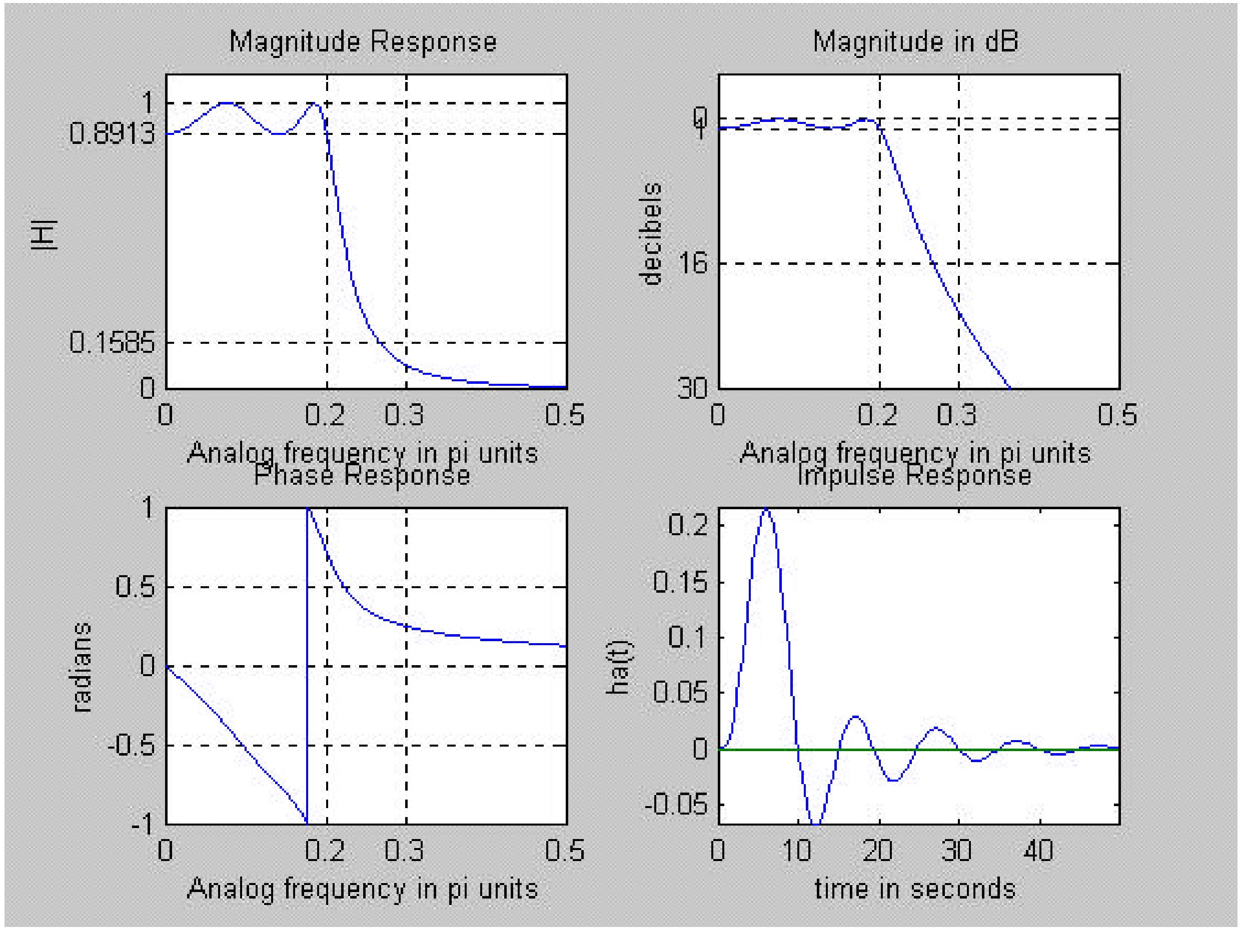
Filtros de Chebyshev-I: Ejemplo

A =

1.0000	**0.4233**	**0.1103**
1.0000	**0.1753**	**0.3895**

B =

0 0 0.0383

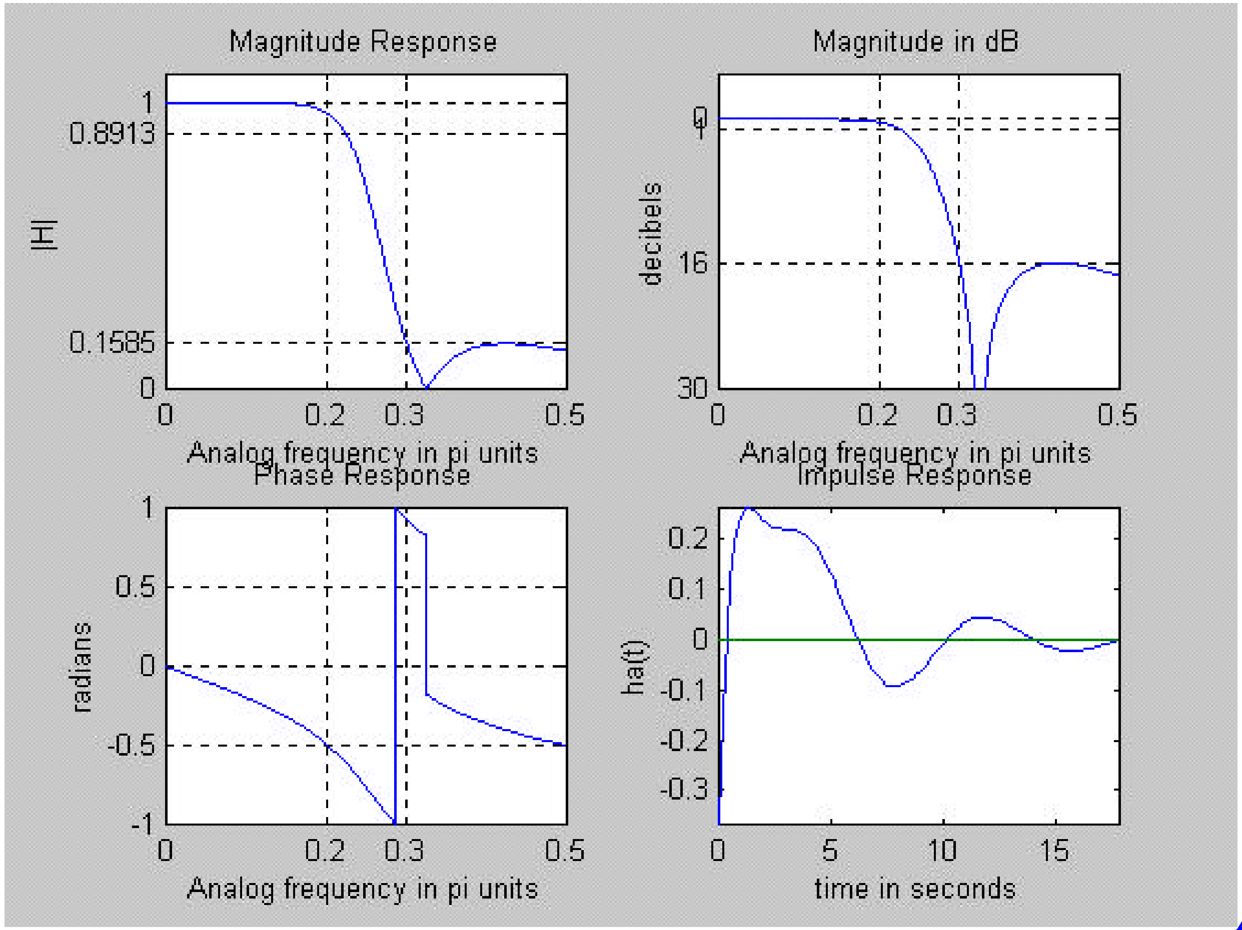


Filtros de Chebyshev-II: Ejemplo

A =

1.0000 1.9521 1.4747
1.0000 0.3719 0.6784

B =
0 0 0.1585
1.0000 0 6.0654
1.0000 0 1.0407



Filtros Elípticos: Ejemplo

A =

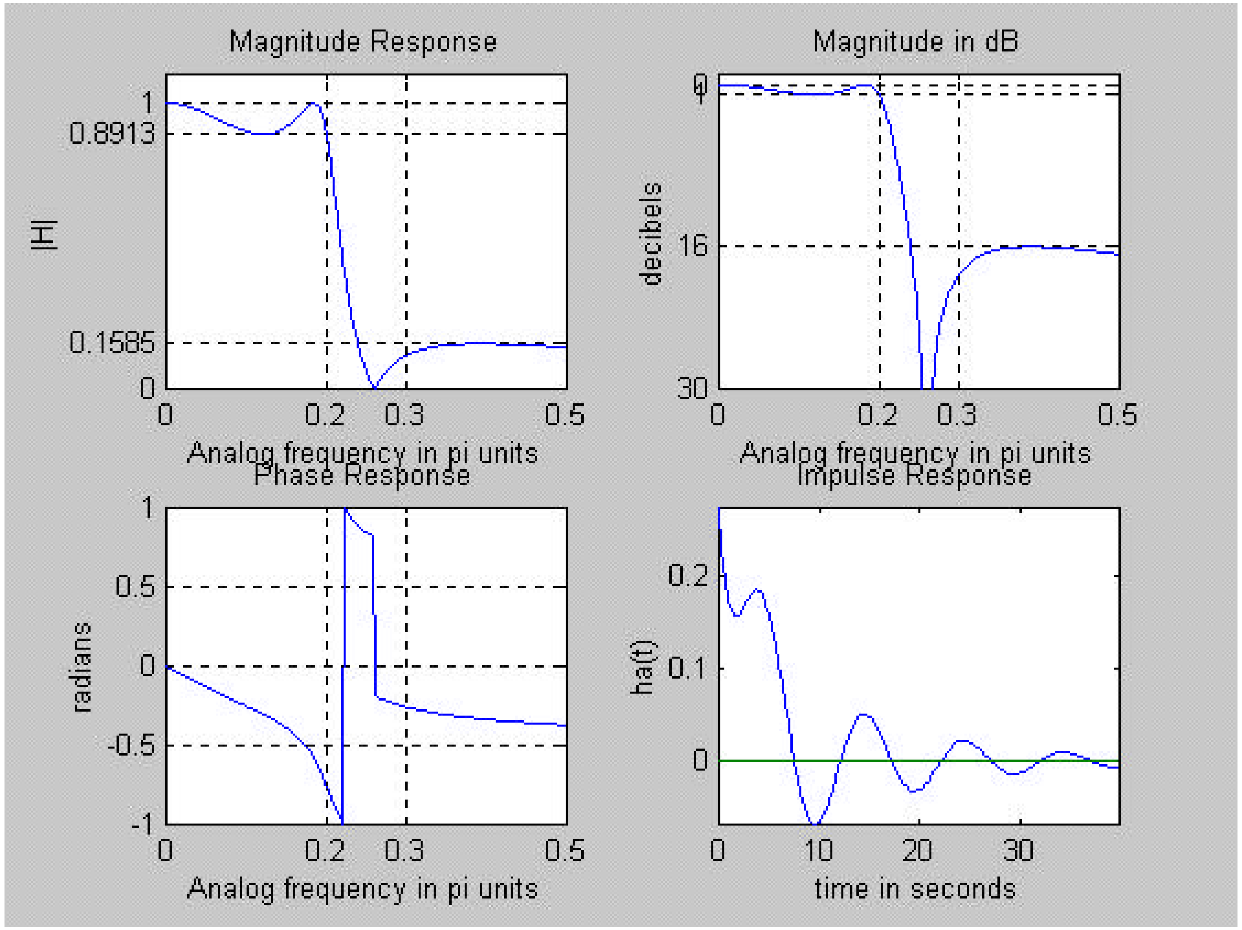
1.0000	**0.1696**	**0.4102**
0	**1.0000**	**0.4435**

B =

0 0 0.274

1.0000 0.1696 0.4102

0 1.0000 0.4435



Técnicas de Aproximación para Filtros Discretos

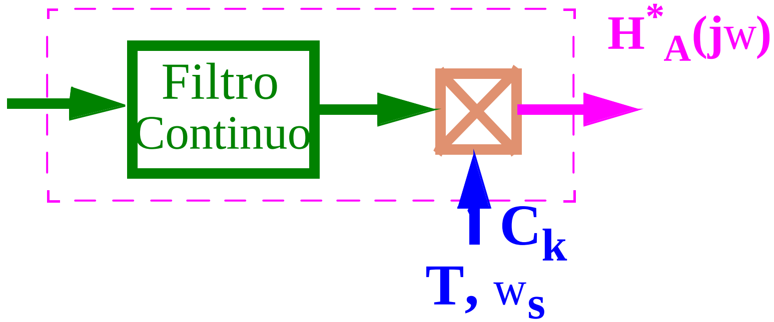
Filtros IIR ó Recursivos

- ❑ Método de la respuesta impulsiva invariante
- ❑ Modificación del método de la respuesta impulsiva invariante
- ❑ Transformación z apareada
- ❑ Transformación bilineal

Filtros FIR ó No-recursivos

- ❑ Series de Fourier
- ❑ Fórmulas de análisis numérico

Filtros IIR: Respuesta Impulsiva Invariante



Idea: Imitar $H_A(s)$ a través de la función continua del bloque filtro + muestreador

$$H^*_A(j\omega) = H_D\left(e^{j\omega T}\right) = \frac{h_A(0+)}{2} + \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega + jn\omega_s)$$

Procedimiento:

1.- Seleccionar un filtro analógico, $\mathbf{H_A(s)}$

2.- Determinar $\mathbf{h_A(t)}$

3.- Discretizar la función temporal, $\mathbf{h_A(nT)}$

4.- Calcular la transformada z, $\mathbf{Z[h_A(nT)]}$

Filtros IIR: Respuesta Impulsiva Invariante

Aplicación del Procedimiento (suposiciones):

- Para señales limitadas en banda, $\mathbf{H_A(jw)} \approx 0$, para $|w| \geq w_s/2$

  Se cumplirá: $\sum \mathbf{H_A(j}w + \mathbf{jk}w_s\mathbf{)} \approx 0$, para $|w| \leq w_s/2$

- Si además $\mathbf{h_A(0+) = 0}$

Se cumplirá: $H_A^*(j\omega) = H_D\left(e^{j\omega T}\right) \approx \frac{1}{T} H_A(j\omega)$; para $|w| \leq w_s/2$

Si grado [N(s)] < grado [D(s)] - 1----------> Se cumplen las hipótesis

Para polos simples:

$$H_A(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{s - p_i} \qquad h_A(t) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i t} \qquad h_A(nT) = \sum_{i=1}^{N} A_i e^{p_i nT}$$

$$H_D(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i z}{z - e^{p_i T}}$$

Filtros IIR: Respuesta Impulsiva Invariante

Utilidad para funciones “sólo-polos”
Si el filtro analógico es estable, lo es el digital

Ejemplo:

$$H_A(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

Descomposición: $H_A(s) = \frac{1}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+4}$

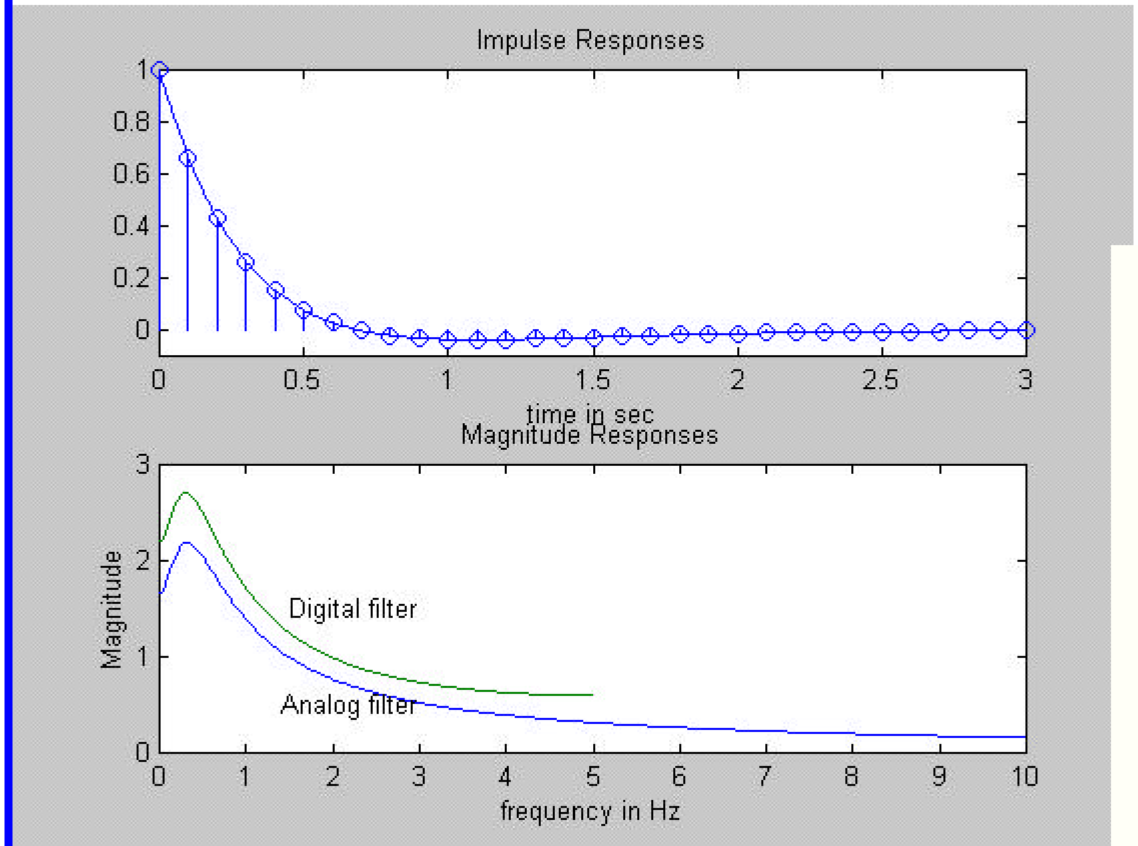
$$h_A(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$$

$$h_A(nT) = \frac{1}{3}e^{-nT} - \frac{1}{3}e^{-4nT}$$

Filtro Digital

$$H_D(z) = \frac{\frac{1}{3}z}{z - e^{-T}} - \frac{\frac{1}{3}z}{z - e^{-4T}} = \frac{e^{-T} - e^{-4T}}{3} \frac{z}{\left(z - e^{-T}\right)\left(z - e^{-4T}\right)}$$

Filtros IIR: Respuesta Impulsiva Invariante



$$H_A(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

$$H_D(z) = \frac{2}{1-e^{-3T}z^{-1}} - \frac{1}{z-e^{-2T}z^{-1}}$$

$$H_D(z) = \frac{1-0{,}8966z^{-1}}{1-1{,}5595z^{-1}+0{,}6065z^{-2}}$$

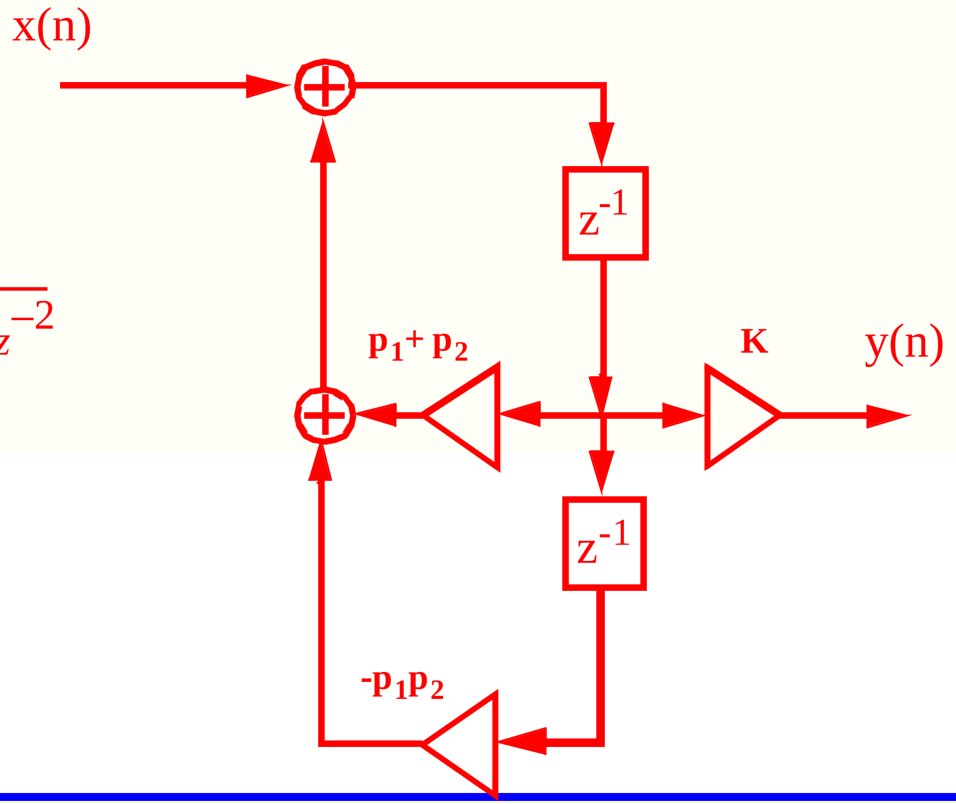
Filtros IIR: Respuesta Impulsiva Invariante

Ejemplo:

$$H_A(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4} \qquad H_D(z) = \frac{\frac{1}{3}z}{z - e^{-T}} - \frac{\frac{1}{3}z}{z - e^{-4T}} = \frac{e^{-T} - e^{-4T}}{3}\,\frac{z}{\left(z - e^{-T}\right)\left(z - e^{-4T}\right)}$$

$$H_D(z) = K\frac{z}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

$$H_D(z) = \frac{Kz^{-1}}{1 - (p_1 + p_2)z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}}$$



Filtros IIR: Diseño

Especificaciones del filtro digital:

$$w_p,\ \mathbf{R_p},\ w_s\ \mathbf{y}\ \mathbf{A_s}$$

Procedimiento (Filtro):

1.- Elegir T y determinar las frecuencias analógicas de interés:

$W_p = w_p/\mathbf{T},\qquad W_s = w_s/\mathbf{T}$

2.- Diseñar un filtro analógico, **$H_a(s)$, usando 1.-**

3.- Desarrollar **$H_a(s)$ en fracciones simples**

4.- Transformar los polos analógicos, p_k, en digitales, $e^{p_k T}$

Filtros IIR: Butterworth, Ejemplo

$w_p = 0.2p$, $w_s = 0.3p$

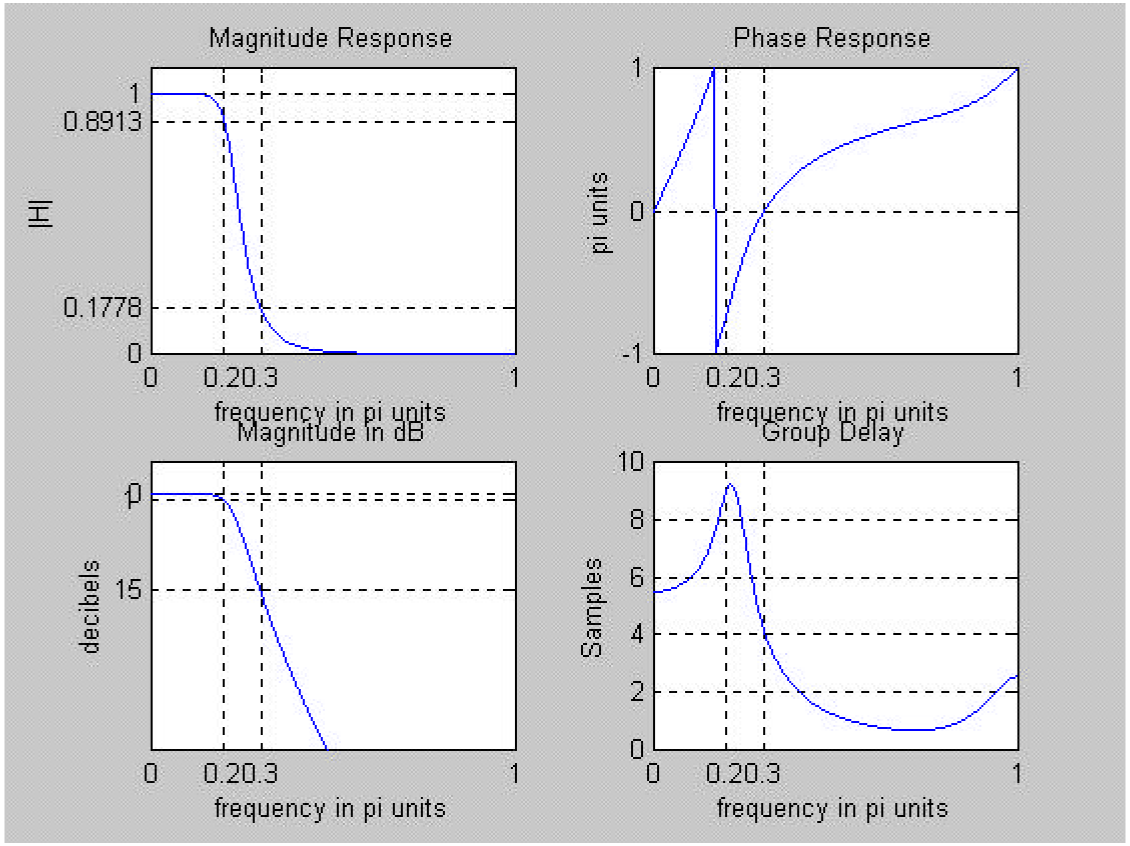
$R_p = 1\text{dB}$, $A_s = 15\text{dB}$

A =

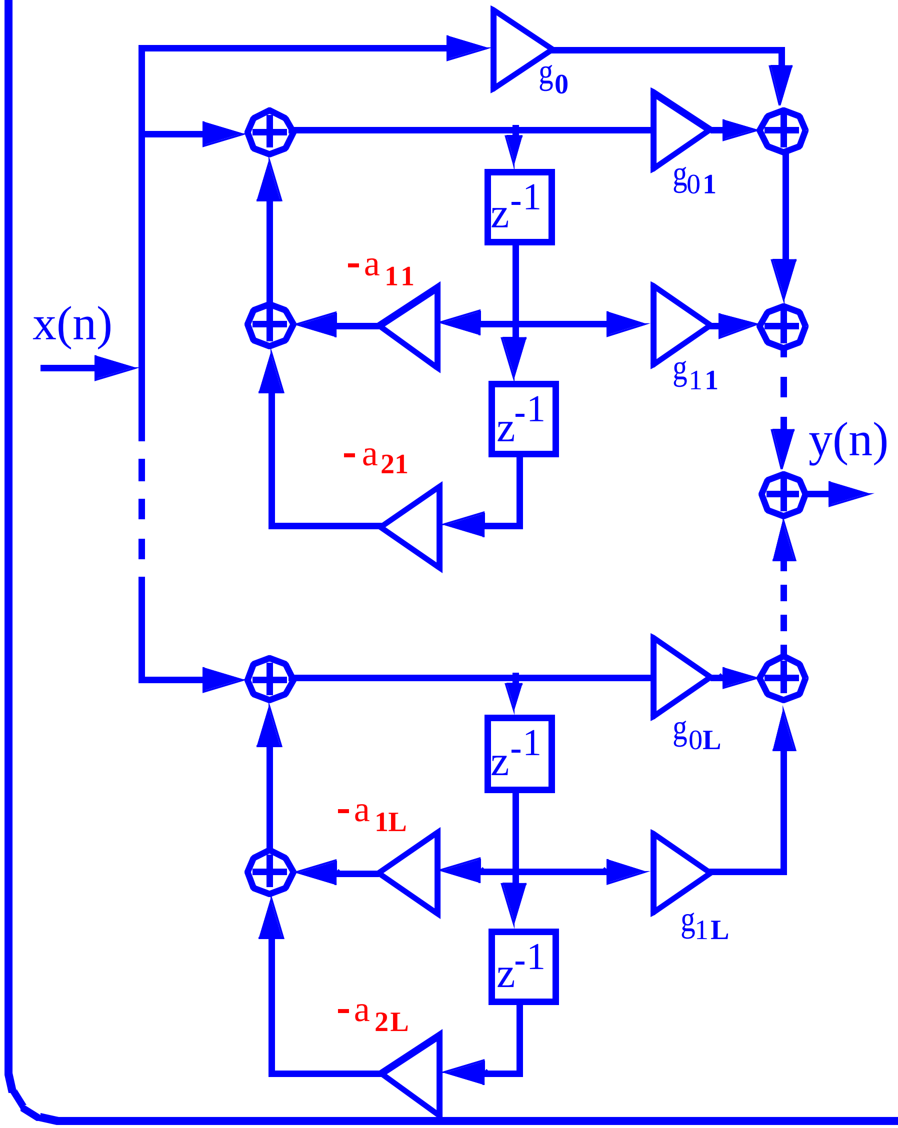
$$\begin{matrix} 1.0000 & -0.9973 & 0.2570 \\ 1.0000 & -1.0691 & 0.3699 \\ 1.0000 & -1.2972 & 0.6949 \end{matrix}$$

B =

$$\begin{matrix} 1.8557 & -0.6304 \\ -2.1428 & 1.1454 \\ 0.2871 & -0.4466 \end{matrix}$$



Filtros IIR: Butterworth, Ejemplo



A =

1.0000	-0.9973	0.2570
1.0000	-1.0691	0.3699
1.0000	-1.2972	0.6949

B =

1.8557	-0.6304
-2.1428	1.1454
0.2871	-0.4466

Filtros IIR: Transformación bilineal

Técnicas anteriores: Emular la respuesta al impulso del filtro analógico

Transformación bilineal: Emular la respuesta temporal del filtro analógico para cualquier excitación

Alternativa:

Sea: $H_I(s) = \frac{1}{s}$; $h_I(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0+ \\ 0, t \leq 0- \end{cases}$

- Respuesta a una señal arbitraria: $y(t) = \int_0^t x(\tau) h_I(t-\tau) d\tau$

- Para **0+ < t_1 < t_2**

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau) h_I(t-\tau)\, d\tau = \int_0^{t_2} x(\tau) h_I(t_2-\tau) d\tau - \int_0^{t_1} x(\tau) h_I(t_1-\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, d\tau$$

Aproximando cuando **t_1 -> t_2**

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2}[x(t_1) + x(t_2)]$$

Filtros IIR: Transformación bilineal

Si $\mathbf{t_1 = nT - T, t_2 = nT}$:

$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2}[x(t_1) + x(t_2)] \qquad y(nT) - y(nT - T) \approx \frac{T}{2}[x(nT - T) + x(nT)]$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}\left[z^{-1}X(z) + X(z)\right]$$

La Función de Transferencia del integrador digital será: $H_I(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$

Esto equivale a sustituir s por: $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}$

Filtros IIR: Transformación bilineal

Significado de la transformación en el dominio s:

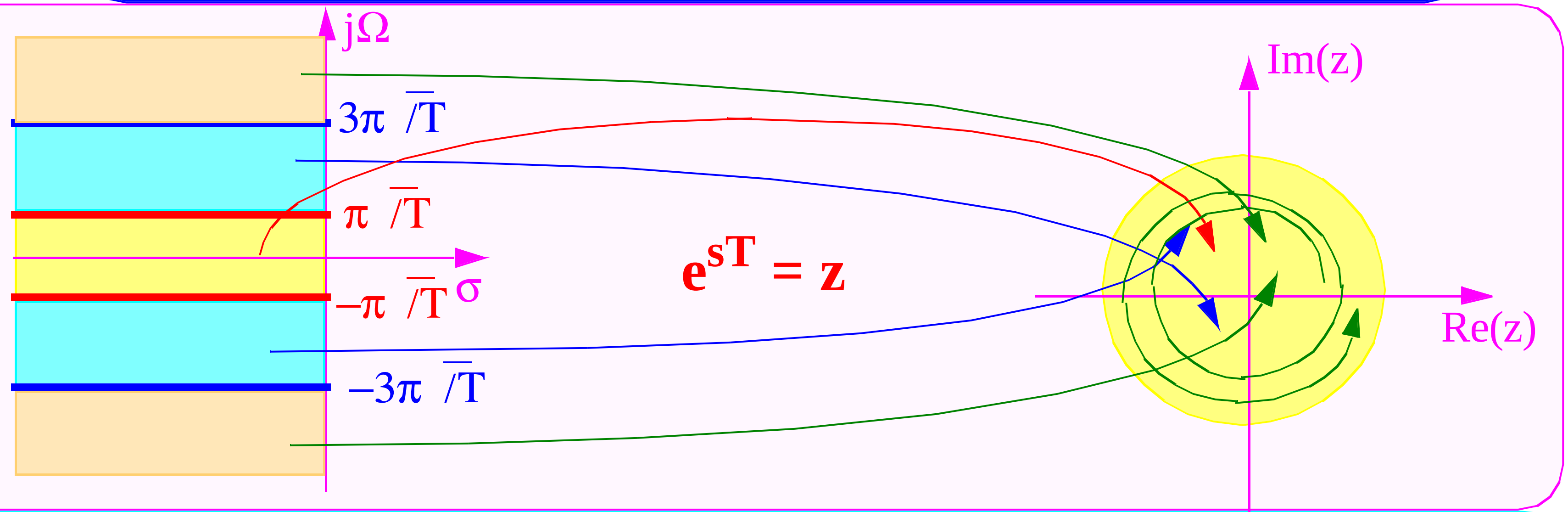
$$y(t_2) - y(t_1) \approx \frac{t_2 - t_1}{2}[x(t_1) + x(t_2)] \qquad y(nT) - y(nT-T) \approx \frac{T}{2}[x(nT-T) + x(nT)]$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) = \frac{T}{2}\left[z^{-1}X(z) + X(z)\right]$$

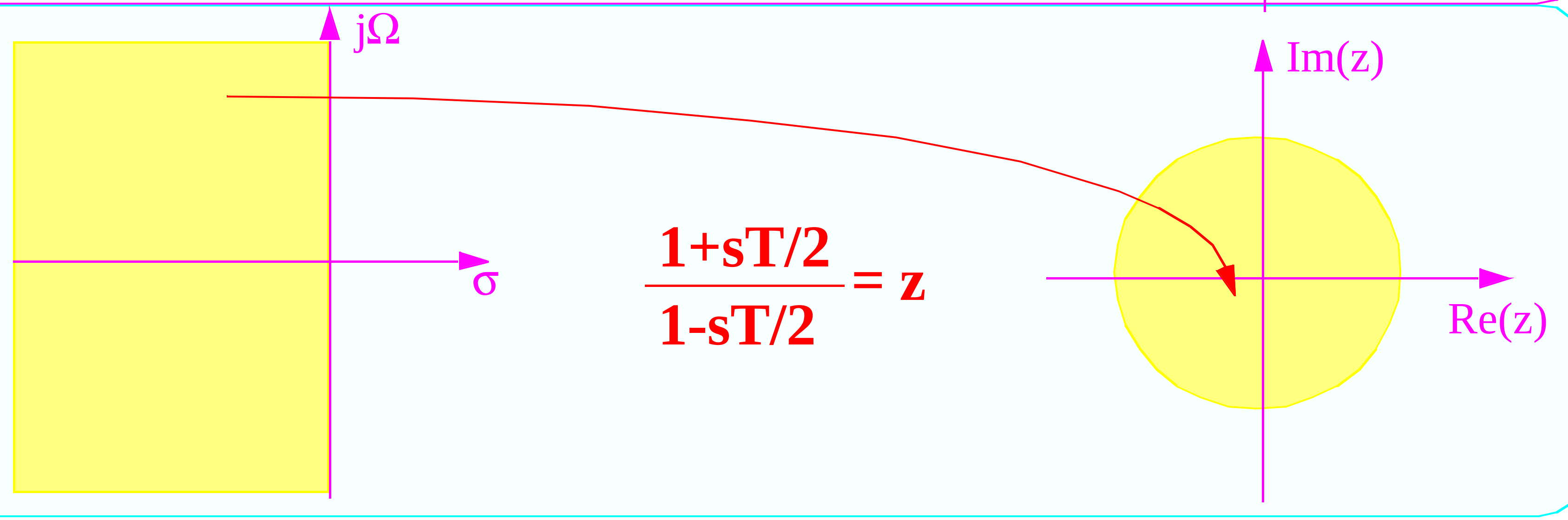
La Función de Transferencia del integrador digital será: $H_I(z) = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}$

Esto equivale a sustituir s por: $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}$

Comparando Transformaciones

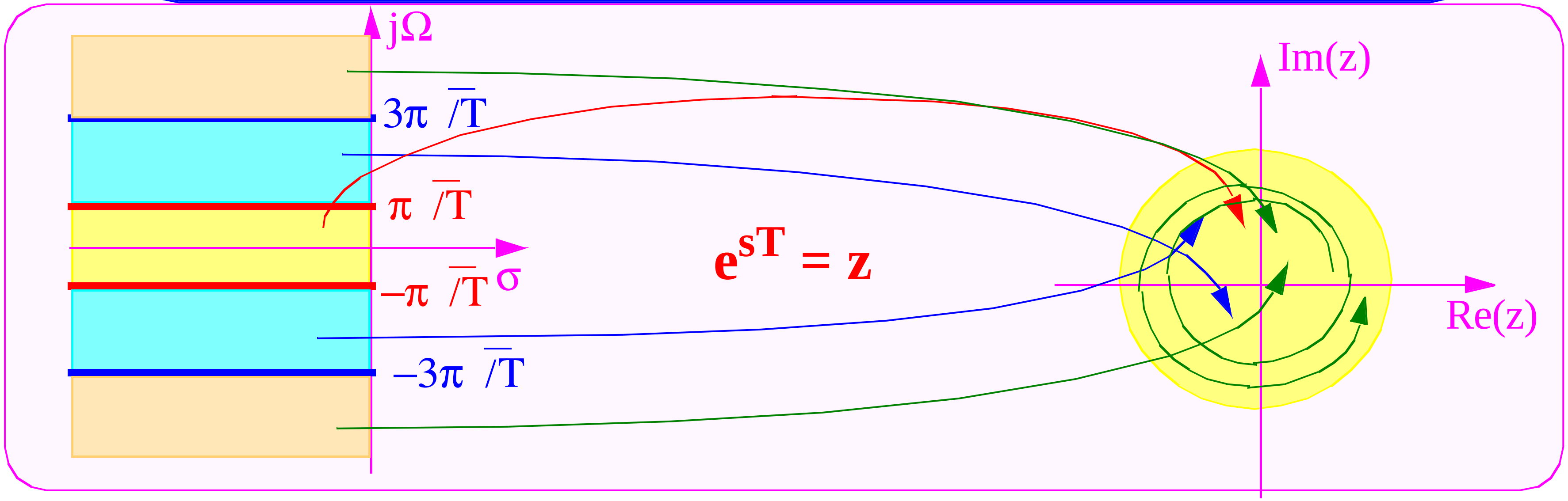


$$e^{sT} = z$$



$$\frac{1+sT/2}{1-sT/2} = z$$

Comparando Transformaciones



Re(s) = σ < 0 -----------------> |z| < 1 [interior del círculo unidad]

Re(s) = σ = 0 -----------------> |z| = 1 [circunferencia unidad]

Re(s) = σ > 0 -----------------> |z| > 1 [exterior del círculo unidad]

Todas las “tiras” semi-infinitas de anchura 2π/T se transforman en el círculo unidad

Todo filtro analógico causal y estable se transforma en uno digital causal y estable

Si $H_a(j\Omega) = H_a(j\omega/T) = 0$ para $|\Omega| > \pi/T$ -----------------> $H(e^{j\omega}) = (1/T)H_a(j\omega/T)$ para $|\omega|<\pi$

Filtros IIR: Transformación bilineal

Procedimiento:

1.- Seleccionar un filtro analógico, $\mathbf{H_A(s)}$

2.- Sustituir s en $\mathbf{H_A(s)}$**, según:** $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}$

3.- La función resultante, $\mathbf{H_D(z)}$, es el filtro digital buscado

En resumen: $\mathbf{H_D(z) = H_A(s)}|$ para $s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}$

Ejemplo:

$$H_A(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 4} \quad \text{----->} \quad H_D(z) = \frac{\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}}{\frac{4}{T^2}\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{10}{T}\frac{(z-1)}{z+1} + 4} \quad ;$$

Filtros IIR: Transformación bilineal

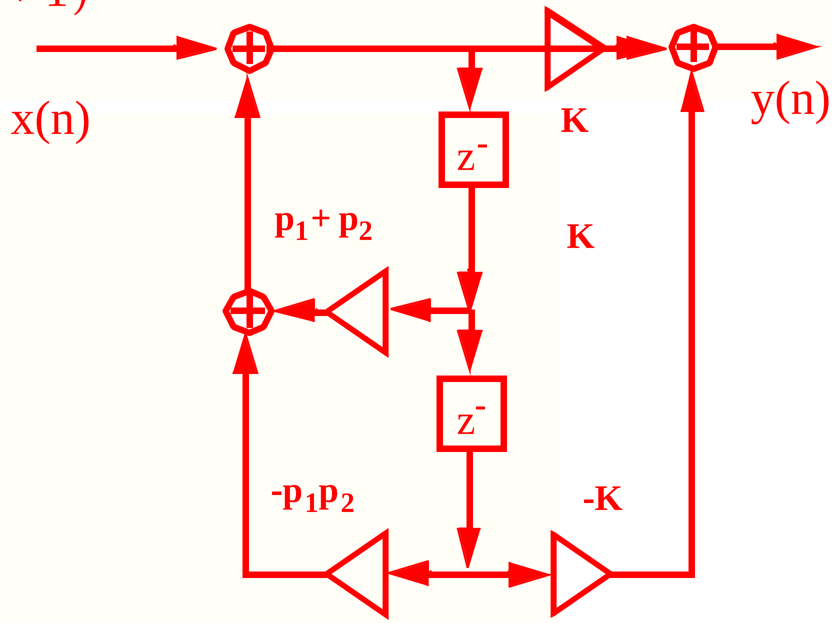
Ejemplo:

$$H_A(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 4} \quad \text{----->} \quad H_D(z) = \frac{\frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1}}{\frac{4}{T^2}\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} + \frac{10}{T}\frac{(z-1)}{z+1} + 4} \quad ;$$

Ejemplo:

Filtro Digital:

$$H_D(z) = \frac{\alpha\left(1 - z^{-2}\right)}{a_1 + a_2 z^{-1} + a_3 z^{-2}}$$



$$\alpha = \frac{4}{T^2} + \frac{10}{T} + 4$$

$$a_1 = (\alpha + 4)(\alpha + 1) \;\; ; \quad a_2 = (2 - \alpha)(2 + \alpha) \;\; ; \quad a_1 = (\alpha - 4)(\alpha - 1)$$

Filtros IIR: Diseño usando la trans. bilineal

Especificaciones del filtro digital:

$$w_p,\ \mathbf{R_p},\ w_s\ \mathbf{y}\ \mathbf{A_s}$$

Procedimiento (Filtro):

1.- Elegir T y determinar las frecuencias analógicas de interés:

$$W_p = F_1(w_p, 1/T), \qquad W_s = F_2(w_s, 1/T)$$

2.- Diseñar un filtro analógico, **$H_a(s)$, usando 1.-**

3.- Sustituir s en $H_a(s)$ usando la transformación bi-lineal

Filtros IIR: Butterworth, Ejemplo

$w_p = \mathbf{0.2}p$, $w_s = \mathbf{0.3}p$

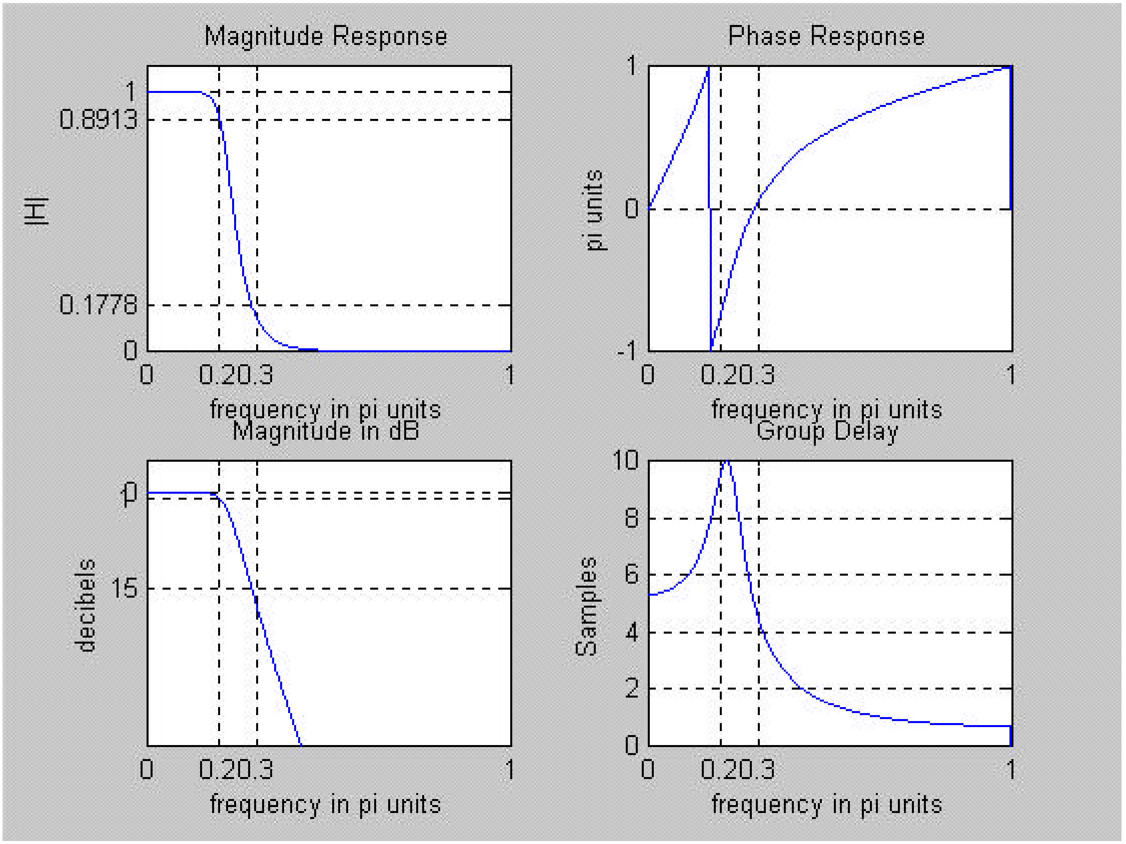
$R_p = 1dB$, $A_s = 15dB$

B =

1.0000	2.0327	1.0331
1.0000	1.9996	1.0000
1.0000	1.9676	0.9680

A =

1.0000	-0.9459	0.2342
1.0000	-1.0541	0.3753
1.0000	-1.3143	0.7149



Filtros IIR: Butterworth, Comparación

A =

1.0000	-0.9973	0.2570
1.0000	-1.0691	0.3699
1.0000	-1.2972	0.6949

B =

1.8557	-0.6304
-2.1428	1.1454
0.2871	-0.4466

C =

5.7969e-004

A =

1.0000	-0.9459	0.2342
1.0000	-1.0541	0.3753
1.0000	-1.3143	0.7149

B =

1.0000	2.0327	1.0331
1.0000	1.9996	1.0000
1.0000	1.9676	0.9680

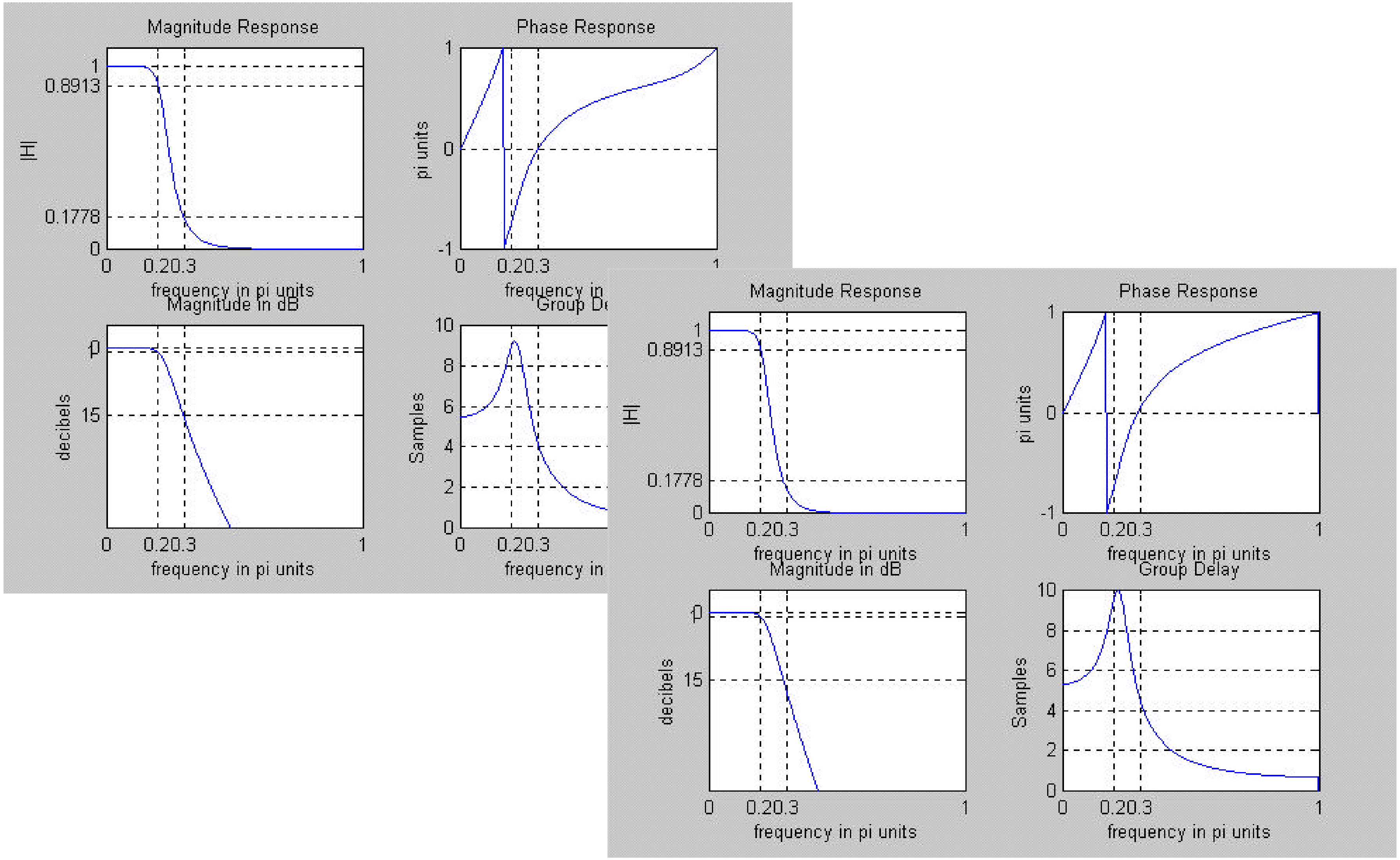
B =

1.0000	**2.0000**	**1.0000**
1.0000	**2.0000**	**1.0000**
1.0000	**2.0000**	**1.0000**

B =

1.0000	2.0183	1.0186
1.0000	1.9814	0.9817
1.0000	2.0004	1.0000

Filtros IIR: Butterworth, Comparación



Filtros IIR: Transformación bilineal

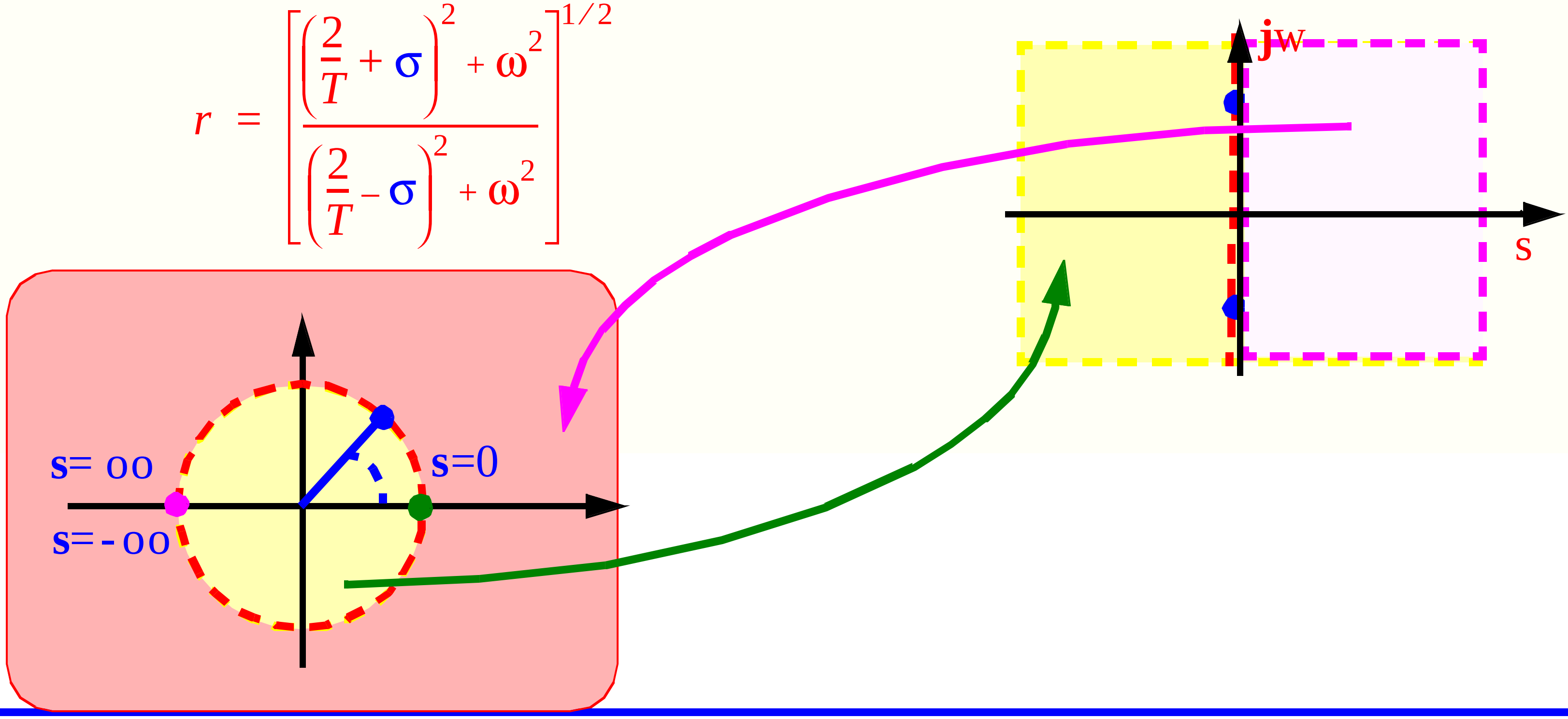
Relaciones:

;

$$s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1} = \sigma + j\omega$$

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} = r\exp(j\omega)$$

$$r = \left[\frac{\left(\frac{2}{T} + \sigma\right)^2 + \omega^2}{\left(\frac{2}{T} - \sigma\right)^2 + \omega^2}\right]^{1/2}$$

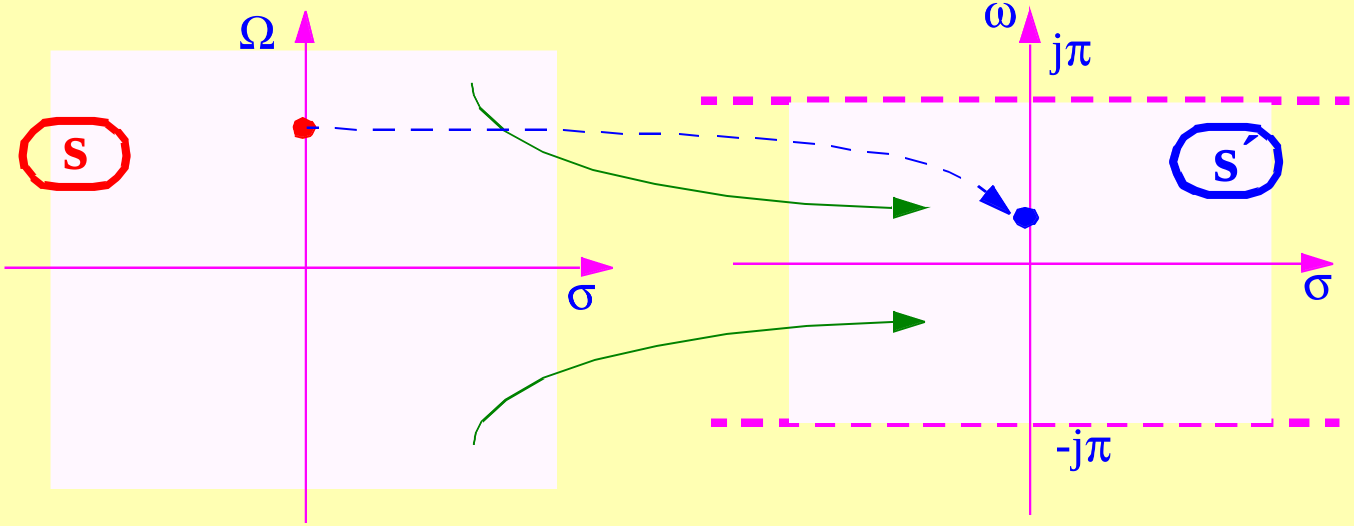


Filtros IIR: Transformación bilineal

WARPING:

$\mathbf{H_D(z) = H_A(s)|}$ para $s = \dfrac{2}{T}\dfrac{(z-1)}{z+1}$ -----> $\mathbf{H_D(z) = H_D(e^{jw}) = H_D(e^{s'})}$

$$s = \frac{2}{T}\frac{e^{s'}-1}{e^{s'}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{\frac{s'}{2}}-e^{-\frac{s'}{2}}}{e^{\frac{s'}{2}}+e^{\frac{s'}{2}}} = \frac{2}{T}\frac{\sinh\frac{s'}{2}}{\cosh\frac{s'}{2}}$$



Filtros IIR: Transformación bilineal

WARPING:

2.- Sustituir s en $\mathbf{H_A(s)}$, **según:**

$$\mathbf{H_D(z) = H_A(s)|} \text{ para } \quad s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{z+1} \quad \text{----->} \; \mathbf{H_D(e^{jW}) = H_A(jW)}$$

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}+1} = \frac{2}{T}\frac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}+e^{-j\frac{\omega}{2}}} = \frac{2}{T}\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}$$

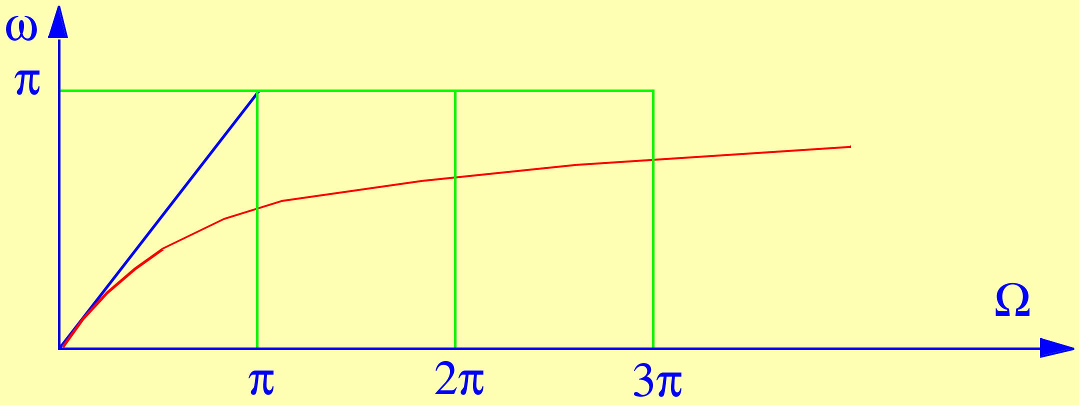
$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \quad \text{---------->} \; W < 0.3/T \; \text{- - - ->} \qquad \omega \approx \Omega$$

Hay una evidente falta de linealidad!!!

Filtros IIR: Transformación bilineal

WARPING: No-linealidad:

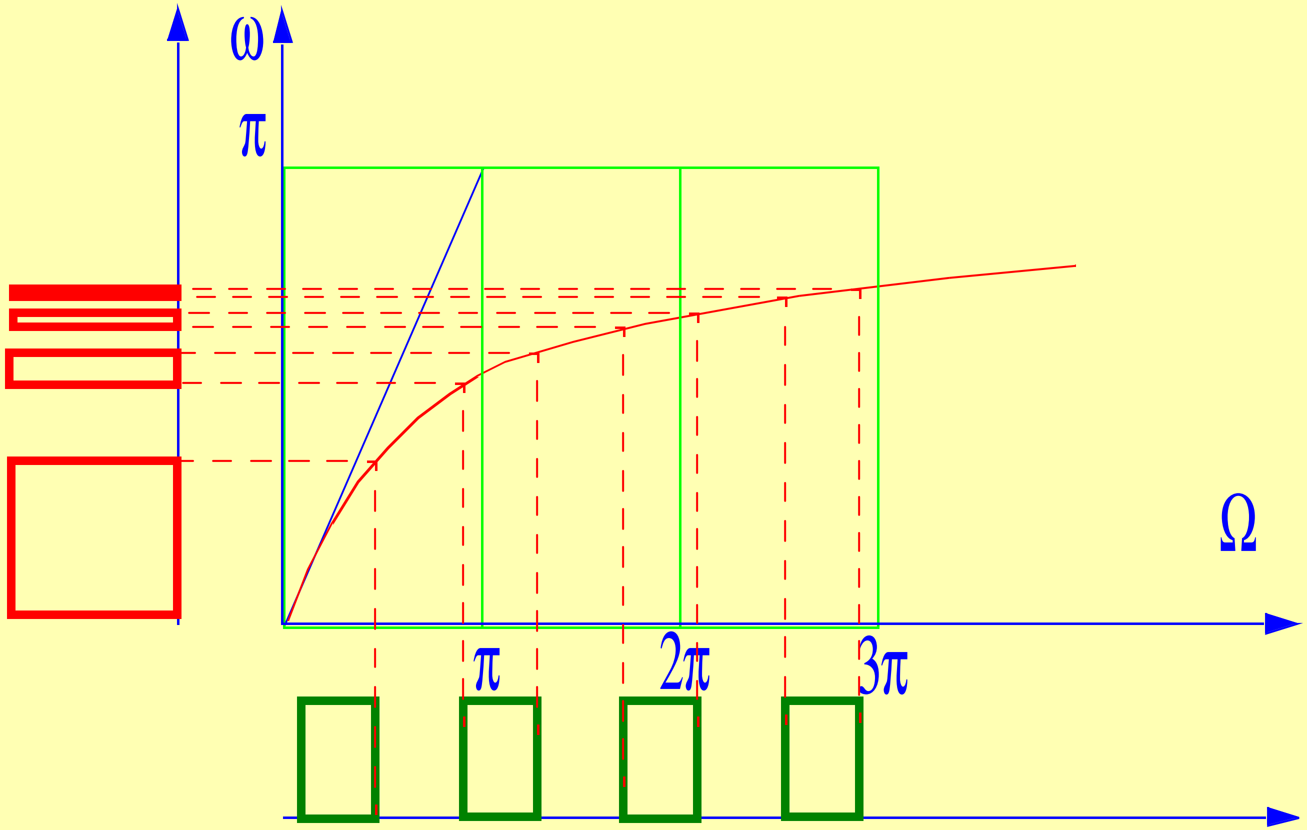
$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \quad \text{---------->}\ W < 0.3/T\ \text{---->} \quad \omega \approx \Omega$$



Filtros IIR: Transformación bilineal

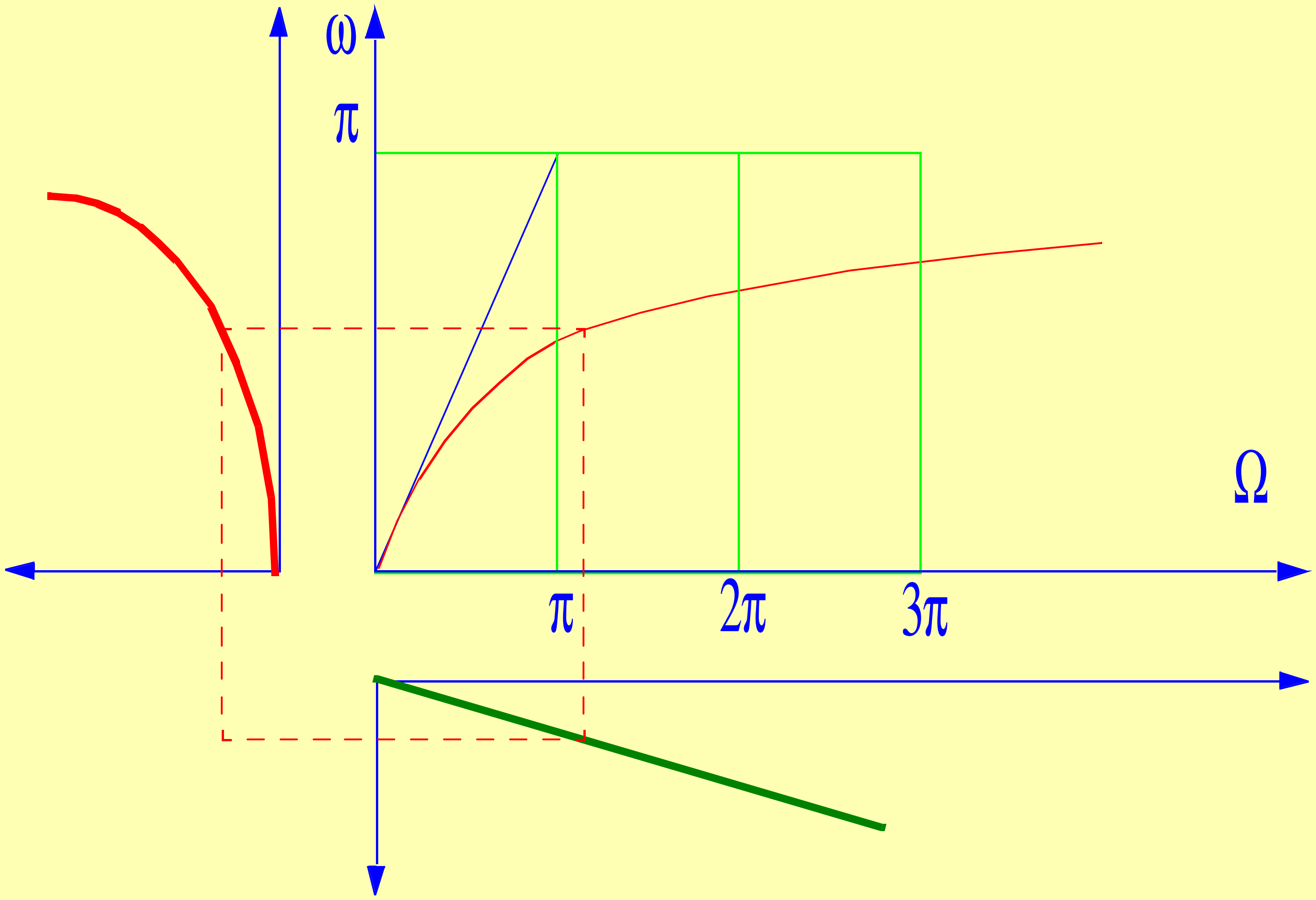
WARPING: No-linealidad:

$$\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$ ----------> W < 0.3/T - - - -> $\omega \approx \Omega$



Filtros IIR: Transformación bilineal

WARPING: No-linealidad de Fase:



Filtros IIR: Transformación bilineal

Pre-warping:

Seleccionar las frecuencias de interés:

ej. Paso-baja: límite de la banda pasante, (W$_p$)

y límite de la de corte, (W$_c$)

Transformar esas frecuencias de interés **según:**

$$\omega_p = 2\,\mathrm{atan}\frac{\Omega_p T}{2}$$

$$\omega_c = 2\,\mathrm{atan}\frac{\Omega_c T}{2}$$

ó Corregir la posición de los polos y ceros:

$$z_m = \frac{\frac{2}{T} + \sigma_m}{\frac{2}{T} - \sigma_m} \qquad p_k = \frac{\frac{2}{T} + s_k}{\frac{2}{T} - s_k}$$

Ejemplo: (T=1)

$$H_A(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} \text{ -----> } H_D(z) = \frac{2\left(\frac{(z-1)}{z+1}\right)+1}{4\frac{(z-1)^2}{(z+1)^2}+10\frac{(z-1)}{z+1}+6};$$

$$H_D(z) = \frac{\left(0{,}15+0{,}1z^{-1}-0{,}05z^{-2}\right)}{1+0{,}2z^{-1}}$$

$$z_m = \frac{\frac{2}{T}+\sigma_m}{\frac{2}{T}-\sigma_m}$$

σ_1= -2, σ_2= -3; s_3= -1

z_1= 0, z_2= -0.02; p_3= 0.333; p_4= 1

Filtros FIR: Propiedades

Filtro no recursivo:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)z^{-n} = z^{-(N-1)} \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)z^{N-1-n}$$

N-1 polos en el origen

Respuesta en frecuencia:

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = M(\omega)e^{j\theta(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(nT)e^{-j\omega nT}$$

$$M(\omega) = \left|H\left(e^{j\omega T}\right)\right|$$

$$\theta(\omega) = \arg H\left(e^{j\omega T}\right)$$

Fase: $\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$; Retraso de grupo: $\tau_g = -\frac{d}{d\omega}\theta(\omega)$

Filtros FIR: Propiedades

Filtros de Retraso Constante:

Para que t_p y t_g sean constantes:

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

$$\theta(\omega) = -\tau\omega = \operatorname{atan}\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\sin\omega nT}{\sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\cos\omega nT}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(nT)\sin(\tau\omega - \omega nT) = 0$$

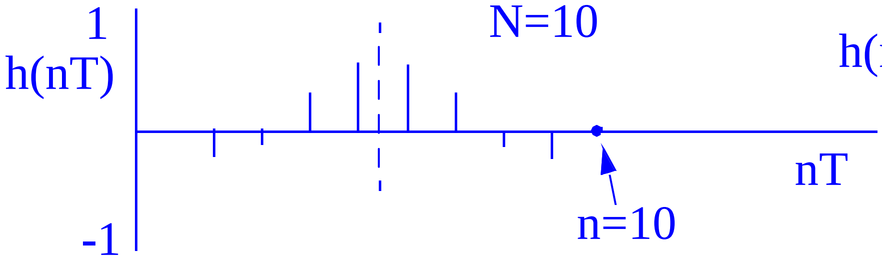
Soluciones: $\tau = \frac{(N-1)T}{2}$; $h(nT) = h[(N-1-n)T]$; para $0 \le n \le N-1$

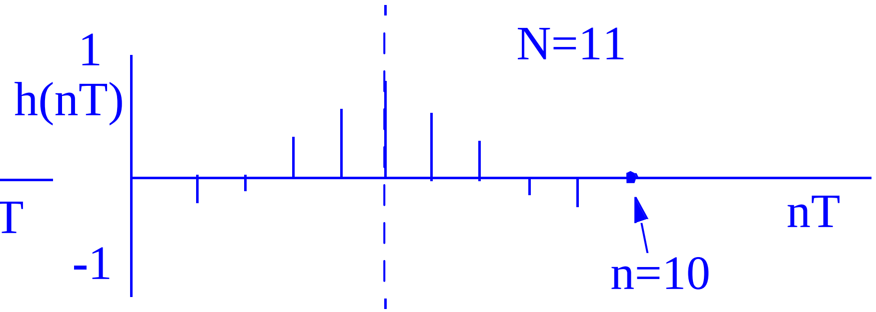
Es posible mantener la fase y el retraso de grupo constantes en toda la banda pasante!!

Filtros FIR: Propiedades

Filtros de Retraso Constante:

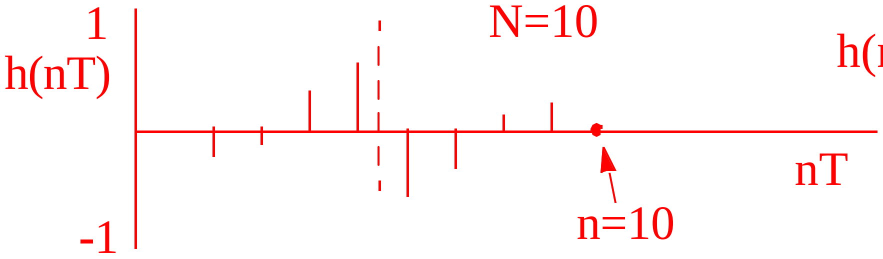
Para que t_p y t_g sean constantes:

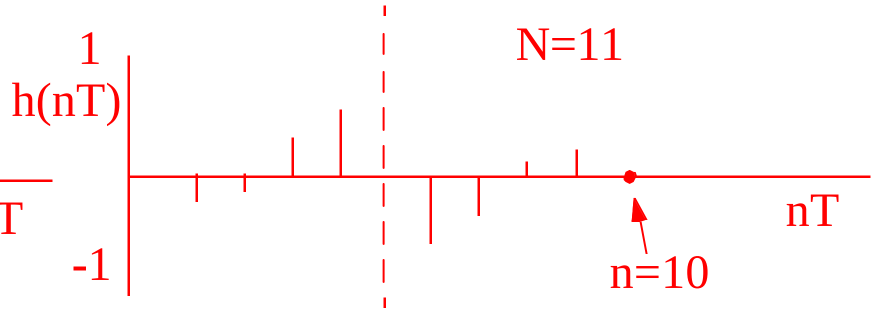




Si sólo el retraso de grupo debe ser constante:

$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega$ ----->> $\tau = \frac{(N-1)T}{2}$ y $h(nT) = -h[(N-1-n)T]$





Filtros FIR: Ejemplo

Sea la respuesta al impulso: h(n) = {1, 1, 1}

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{2} h(n)e^{-j\omega n} = 1 + e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} = \left\{e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}\right\}e^{-j\omega} = \{1 + 2\cos\omega\}e^{-j\omega}$$

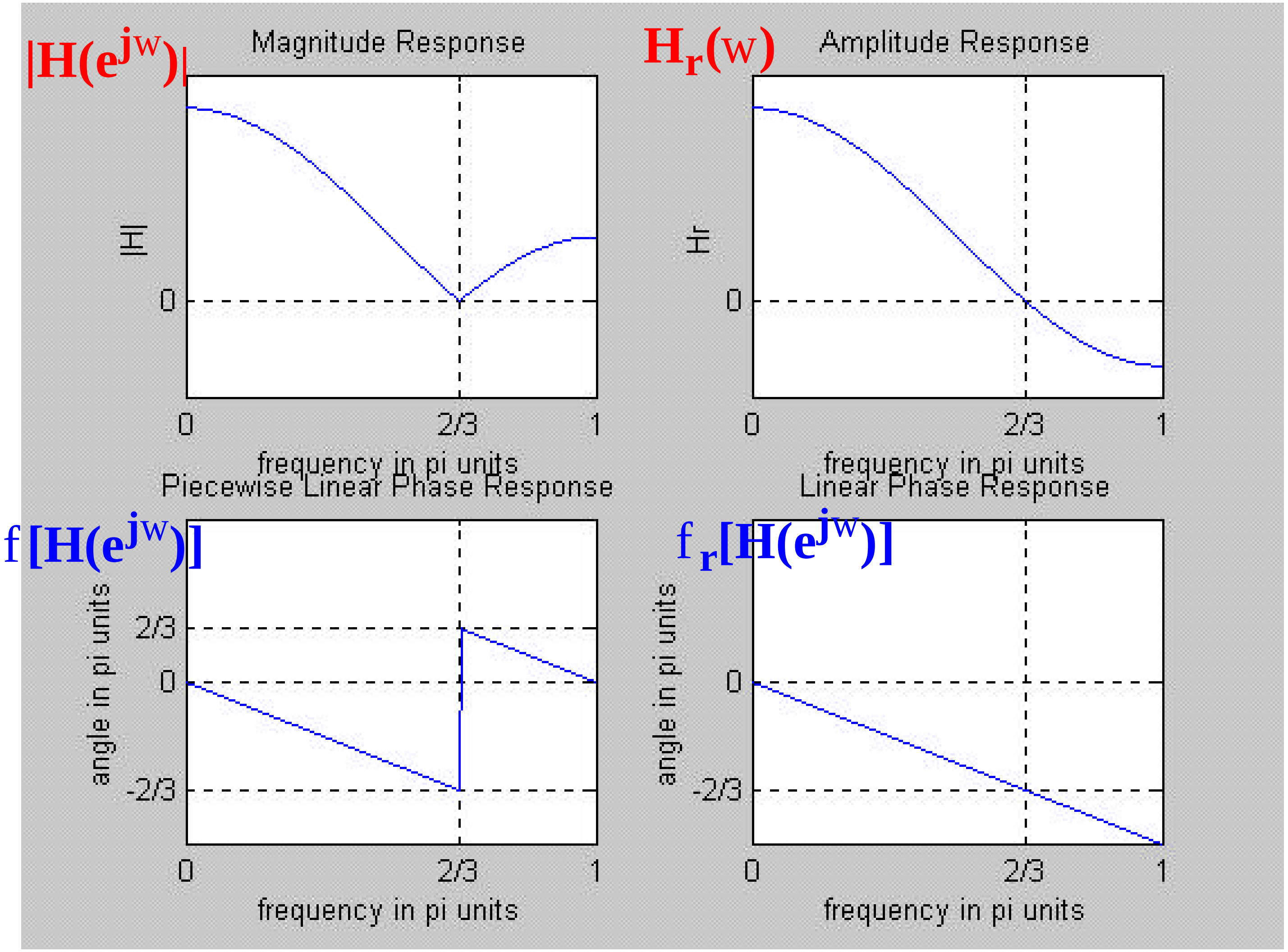
En este caso: $|H(e^{j\omega})| = |1 + 2\cos\omega|,\ 0 < \omega < \pi$

$$\phi[H(e^{j\omega})] = \begin{cases} -\omega, & \text{si } 0 < \omega < 2\pi/3 \\ \pi - \omega, & \text{si } 2\pi/3 < \omega < \pi \end{cases}$$

Podemos definir: $H(e^{jw}) = H_r(w)e^{j(b - aw)}$ **, con** $|\beta| = \pi/2,\ \alpha = (N-1)/2$

En este caso: $H_r(w) = 1 + 2\cos\omega,\ -\pi < \omega < \pi$

$\phi_r[H(e^{j\omega})] = -\omega$


$|H(e^{jw})|$
Magnitude Response
$H_r(w)$
Amplitude Response
|H|
Hr
0
2/3
1
frequency in pi units
Piecewise Linear Phase Response
Linear Phase Response
$f[H(e^{jw})]$
$f_r[H(e^{jw})]$
angle in pi units
-2/3

Filtros FIR: Propiedades

Respuesta en Frecuencia (caso simétrico con N impar):

$$H\left(e^{j\omega T}\right) = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(nT)e^{-j\omega nT} + h\left[\frac{(N-1)T}{2}\right]e^{-j\omega\frac{(N-1)T}{2}} + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(nT)e^{-j\omega nT}$$

Pero:

$$\sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h(nT)e^{-j\omega nT} = \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(nT)e^{-j\omega(N-1-n)T} = \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} h[(N-1-n)T]e^{-j\omega nT}$$

Filtros FIR: Respuesta en Frecuencia

h(nT)	N	$H(e^{j\omega T})$	Coeficientes
Simétrica	Impar	$e^{-j\omega\frac{(N-1)T}{2}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{(N-1)}{2}} a_k \cos\omega kT\right]$	$a_0 = h\left[\left(\frac{N-1}{2}\right)T\right]$
	Par	$e^{-j\omega\frac{(N-1)T}{2}}\left[\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \cos\left[\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)T\right]\right]$	$a_k = 2h\left[\left(\frac{N-1}{2}-k\right)T\right]$
Antisimétrica	Impar	$e^{-j\omega\left[\frac{(N-1)T}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}\left[\sum_{k=0}^{\frac{(N-1)}{2}} a_k \sin[\omega kT]\right]$	$b_k = 2h\left[\left(\frac{N}{2}-k\right)T\right]$
	Par	$e^{-j\omega\left[\frac{(N-1)T}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}\left[\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} b_k \sin\left[\omega\left(k-\frac{1}{2}\right)T\right]\right]$	

Filtros FIR: Posición de los ceros

Las restricciones exigen:

$$H(z) = \frac{1}{z^{\frac{(N-1)}{2}}} \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} h(nT)\left(z^{\frac{(N-1)}{2}-n} \pm z^{-\frac{(N-1)}{2}-n}\right) + \frac{1}{2} h\left(\frac{(N-1)}{2}T\right)(z^0 \pm z^0)$$

Haciendo k = (N-1)/2 -n:

$$H(z) = \frac{1}{z^{\frac{(N-1)}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{a_k}{2}\left(z^k \pm z^{-k}\right) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Los ceros de N(z) son los de H(z).
Para esta expresión (sea N par o impar):

$$N\left(z^{-1}\right) = \pm N(z)$$

Se trata de polinomios de imagen especular

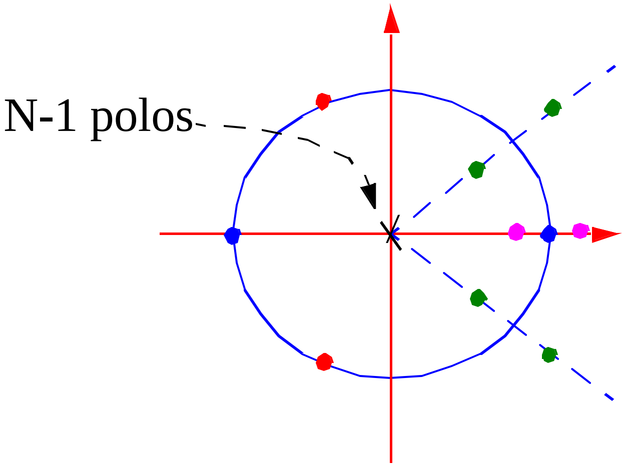
Filtros FIR: Posición de los ceros

Polinomios de imagen especular:

Si $z_i = r_i e^{j\phi_i}$ es un cero, $z_k = z_i^{-1} = e^{-j\phi_i}/r_i$ también es un cero.

Implicaciones:

- ❑ Puede haber un número arbitrario de ceros en z_i = 1 ó -1.
- ❑ Puede haber un número arbitrario de pares de ceros complejos conjugados sobre dicha circunferencia.
- ❑ Los ceros fuera de esa circunferencia aparecen en pares recíprocos.
- ❑ Los ceros complejos fuera de la circunferencia unidad aparecerán en grupos de 4.



Filtros FIR: Ejemplo 2

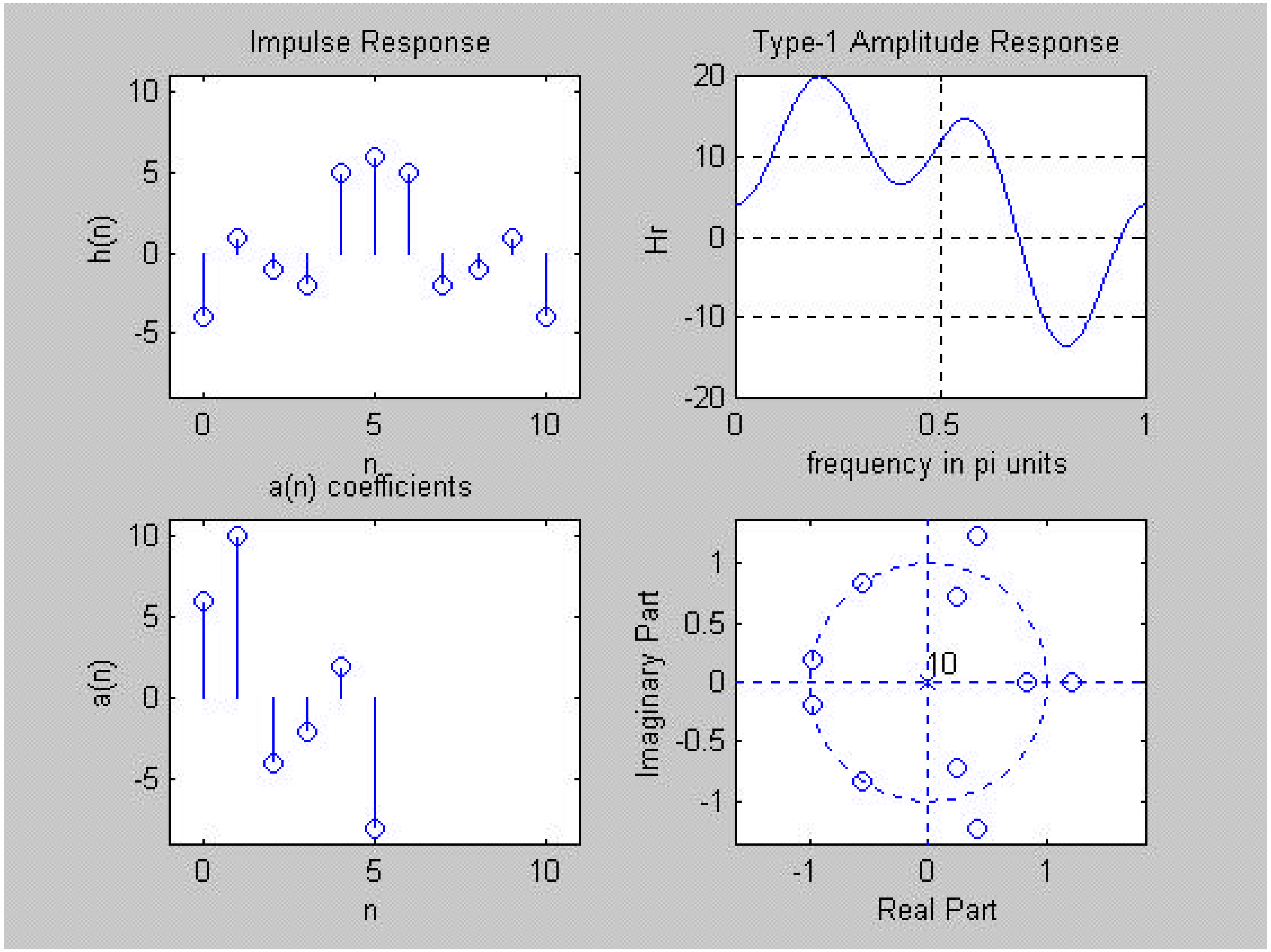
Sea: $h(n) = \{-4, 1, -1, -2, 5, 6, 5, -2, -1, 1, -4\}$ ----> $N = 11$, $\alpha = (N-1)/2 = 5$

$a(0) = h(\alpha) = h(5) = 6;$
$a(1) = 2h(5-1) = 10;$
$a(2) = 2h(5-2) = -4;$
$a(3) = 2h(5-3) = -2;$
$a(4) = 2h(5-4) = 2;$
$a(5) = 2h(5-5) = -8;$

Ahora: $\mathbf{H_r(w)} = a(0) + a(1)\cos\omega + a(2)\cos 2\omega + a(3)\cos 3\omega + \ldots =$

$= 6 + 10\cos\omega - 4\cos 2\omega - 2\cos 3\omega + 2\cos 4\omega - 8\cos 5\omega$

Filtros FIR: Ejemplo 2



Filtros FIR: Ejemplo 3

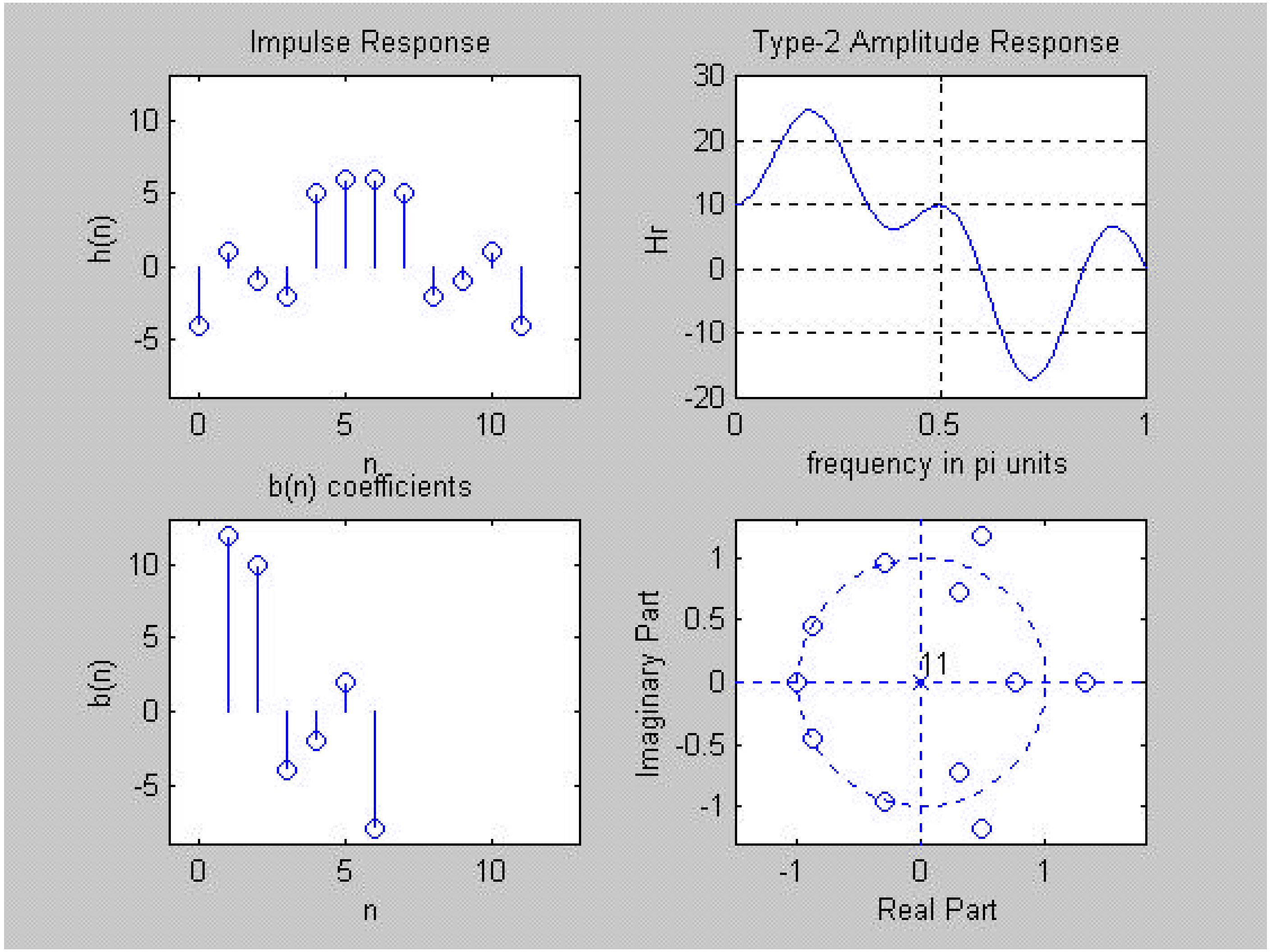
Sea: $h(n) = \{-4, 1, -1, -2, 5, 6, 6, 5, -2, -1, 1, -4\}$ ----> $N = 12$, $\alpha = (N-1)/2 = 5.5$

$b(1) = 2h(6-1) = 12;$
$b(2) = 2h(6-2) = 10;$
$b(3) = 2h(6-3) = -4;$
$b(4) = 2h(6-4) = -2;$
$b(5) = 2h(6-5) = 2;$
$b(6) = 2h(6-6) = -8;$

Ahora:

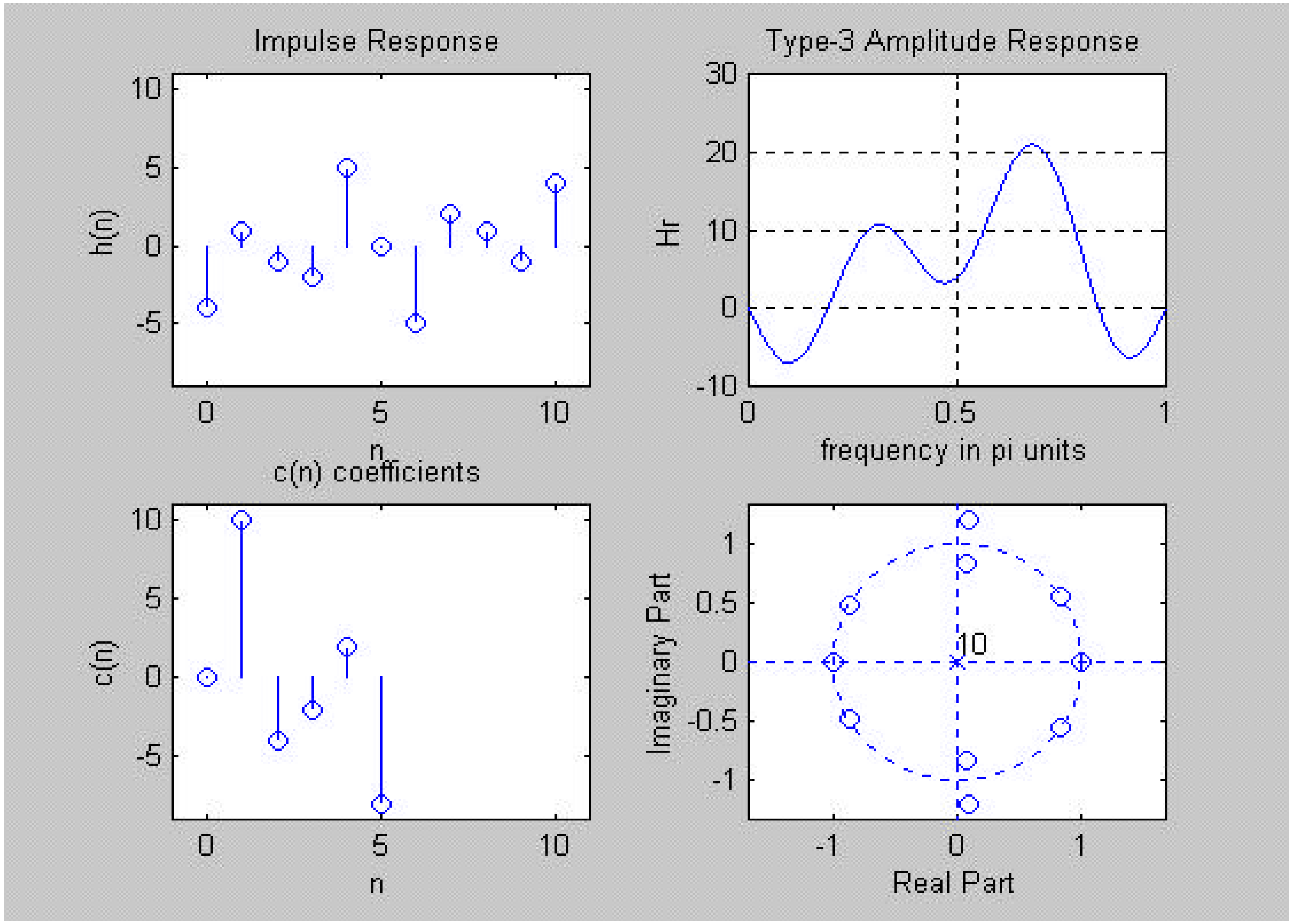
$$\mathbf{H_r(w)} = b(1)\cos\omega(1-1/2) + b(2)\cos\omega(2-1/2) + b(3)\cos\omega(3-1/2) + \ldots =$$
$$= 12\cos(\omega/2) + 10\cos(3\omega/2) - 4\cos(5\omega/2) - 2\cos(7\omega/2) + 2\cos(9\omega/2) - 8\cos(11\omega/2)$$

Filtros FIR: Ejemplo 3



Filtros FIR: Ejemplo 4

Sea: h(n) = {-4, 1, -1, -2, 5, 0, -5, 2, 1, -1, 4} ----> N = 11, α = (N-1)/2 = 5



Filtros FIR: Ejemplo 5

Sea: h(n) = {-4, 1, -1, -2, 5, 6, -6, -5, 2, 1, -1, 4} ----> N = 12, α = (N-1)/2 = 5.5