ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1. Ecuación de la Recta

ACTIVIDAD 1

Calculo Multivariado

UNIPANAMERICANA COMPENSAR

JONATHAN CASTILLO GRAJALES

SEMESTRE VII

MODULO I

FACULTAD DE INGENIERIA
TECNOLOGÍA EN ANÁLISIS Y DESARROLLO
DE SISTEMAS DE INFORMACIÓN

Febrero de 2020

Introducción

En la presente evidencia se hallan las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de los puntos y los vectores dados. Los ejercicios permiten el análisis de los vectores para determinar intercepciones de las coordenadas en el plano y su perpendicularidad sobre la recta.

ACTIVIDAD

Luego de revisar los pdf y videos sugeridos sobre rectas y planos y otras consultas realizadas en la web sobre esta temática solucione los siguientes ejercicios propuestos , muestre todos los procesos, si coloca sólo las respuestas no será tenido en cuenta, escanee y suba el documento a la plataforma en la fecha establecida

Ecuación de la recta

Resuelva los ejercicios impares de los numerales del 1 – 4.

1. Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

1. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{v} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$
2. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
3. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
4. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{v} = \langle 12, -5, -6 \rangle$

Solución

1. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{v} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \rangle$

$(x , y , z) = (4 , 6 , -7) + \lambda (3 , \frac{1}{2} , - \frac{3}{2})$

3. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$(x , y , z) = (0 , 0 , 0) + \lambda (5i , 9j , 4k)$

2. En los problemas 5 al 10 , encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos indicados

5. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$	**6.** $(0, 4, 5), (-2, 6, 3)$
7. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1), (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$	**8.** $(10, 2, -10), (5, -3, 5)$
9. $(1, 1, -1), (-4, 1, -1)$	**10.** $(3, 2, 1), (\frac{5}{2}, 1, -2)$

Solución

5. $(1, 2, 1), (3, 5, -2)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (1 , 2 , 1)$

$\vec{V} = \vec{AB} = (3 , 5 -2) - (1 , 2 , 1) = (2 , 3 , -3)$

$\vec{r} = (1 , 2 , 1) + t\,(2, 3, -3)$ *Ec. Vectorial*

7. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$\vec{V} = \vec{AB} = \left(\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = (-2 , 3 , -1.5)$

$\vec{r} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) + t\,(-2 , 3 , -1.5)$ *Ec. Vectorial*

9. $(1, 1, -1), (-4, 1, -1)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (1, 1, -1)$

$\vec{V} = \vec{AB} = (-4 , 1, -1) - (1 , 1, -1) = (-5 , 0 , 0)$

$\vec{r} = (1 , 1, -1) + t\,(-5 , 0 , 0)$ *Ec. Vectorial*

3. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos indicados

11. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$ **12.** $(2, 0, 0), (0, 4, 9)$

13. $(1, 0, 0), (3, -2, -7)$ **14.** $(0, 0, 5), (-2, 4, 0)$

15. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ **16.** $(-3, 7, 9), (4, -8, -1)$

Solución

11. $(2, 3, 5), (6, -1, 8)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (2, 3, 5)$

$\vec{V} = \vec{AB} = (6, -1, 8) - (2, 3, 5) = (4, -4, 3)$

$\vec{r} = (2, 3, 5) + t\,(4, -4, 3)$ Ec. Vectorial

X , Y , Z = (2, 3, 5) + t (4, -4, 3)

X , Y , Z = (2, 3, 5) + (4t, -4t, 3t)

X , Y , Z = (2+4t , 3-4t , 5+3t)

Ec. Paramétrica

X = 2 + 4t

Y = 3 – 4t

Z = 5 + 3T

13. (1, 0, 0), (3, −2, −7)

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P}$ = (1, 0, 0)

$\vec{V} = \vec{AB}$ = (3, -2, -7) – (1, 0, 0) = (2, -2, -7)

$\vec{r}$ = (1, 0, 0) + t (2, -2, -7) Ec. Vectorial

X , Y , Z = (1, 0, 0) + t (2, -2, -7)

X , Y , Z = (1, 0, 0) + (2t, -2t, -7t)

X , Y , Z = (1+2t , 0-2t , 0-7t)

Ec. Paramétrica

X = 1 + 2t

Y = 0 – 2t

Z = 0 - 7T

15. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$

$\vec{V} = \vec{AB} = (-6, \frac{-1}{4}, \frac{1}{6}) - (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = (-10, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{6})$

$\vec{r} = (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + t\,(-10, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{6})$ *Ec. Vectorial*

$X, Y, Z = (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + t\,(-10, \frac{-3}{4}, \frac{-1}{6})$

$X, Y, Z = (4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}) + (-10t, \frac{-3}{4}t, \frac{-1}{6}t)$

$X, Y, Z = (4 - 10t, \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t, \frac{1}{3} - \frac{1}{6}t)$

Ec. Paramétrica

$X = 4 - 10t$

$Y = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}t$

$Z = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}t$

4. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos indicados

17. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$ **18.** $\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}\right), \left(1, 3, \frac{1}{4}\right)$

19. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$ **20.** $(-5, -2, -4), (1, 1, 2)$

21. $(5, 10, -2), (5, 1, -14)$ **22.** $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10}\right)$

Solución

17. $(1, 4, -9), (10, 14, -2)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (1, 4, -9)$

$\vec{V} = \vec{AB}$ = (10, 14, -2) – (1, 4, -9) = (9, 10, 7)

$\vec{r}$ = (1, 4, -9) + t (9, 10, 7) Ec. Vectorial

X , Y , Z = (1, 4, -9) + t (9, 10, 7)

X , Y , Z = (1, 4, -9) + (9t, 10t, 7t)

X , Y , Z = (1 + 9t , 4 + 10t , -9 + 7t)

Ec. Paramétrica

X = 1 + 9t

Y = 4 + 10t

Z = -9 + 7t

$$\frac{x-1}{9} = \mathrm{t}$$

$$\frac{y-4}{10} = \mathrm{t}$$

$$\frac{z+9}{7} = \mathrm{t}$$

$\frac{x-1}{9} = \frac{y-4}{10} = \frac{z+9}{7}$ *Ec. Simétrica*

19. $(4, 2, 1), (-7, 2, 5)$

$\vec{r} = \vec{P} + t\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P} = (4, 2, 1)$

$\vec{V} = \vec{AB}$ = (-7, 2, 5) – (4, 2, 1) = (-11, 0, 4)

$\vec{r}$ = (4, 2, 1) + t (-11, 0, 4) Ec. Vectorial

X , Y , Z = (4, 2, 1) + t (-11, 0, 4)

X , Y , Z = (4, 2, 1) + (-11t, t, 4t)

X , Y , Z = (4 - 11t , 2 + t , 1 + 4t)

Ec. Paramétrica

X = 4 - 11t

Y = 2 + t

Z = 1 + 4t

$$\frac{x-4}{11} = \mathrm{t}$$

$$\mathrm{y} - 2 = \mathrm{t}$$

$$\frac{z-1}{4} = \mathrm{t}$$

$\frac{x-4}{11} = \mathrm{y} - 2 = \frac{z-1}{4}$ *Ec. Simétrica*

21. (5, 10, −2), (5, 1, −14)

$\vec{r}$ = $\vec{P}$ + t$\vec{V}$ *Ec. Vectorial*

$\vec{P}$ = (5, 10, −2)

$\vec{V}$ = $\vec{AB}$ = (5, 1, -14) – (5, 10, -2) = (0, 9, -12)

$\vec{r}$ = (5, 10, -2) + t (0, 9, -12) Ec. Vectorial

X , Y , Z = (5, 10, -2) + t (0, 9, -12)

X , Y , Z = (5, 10, -2) + (t, 9t, -12t)

X , Y , Z = (5+t, 10+9t, -2-12t)

Ec. Paramétrica

X = 5 + t

Y = 10 + 9t

Z = -2 - 12t

X - 5 = t

$\frac{y-10}{9} = \text{t}$

$$\frac{z+2}{-12} = t$$

$$\text{X} - 5 = \frac{y-10}{9} = \frac{z+2}{-12} \quad \textit{Ec. Simétrica}$$

Ecuación del plano

Resuelva los ejercicios pares de los numerales 5 , 6 y 8 , el punto 7 se resuelven todos los ítems.

5. **Encuentre una ecuación del plano que contenga el punto dado y sea perpendicular al vector que se indica**

Solución

2. (1, 2, 5); $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

A (X_1, Y_1, Z_1)

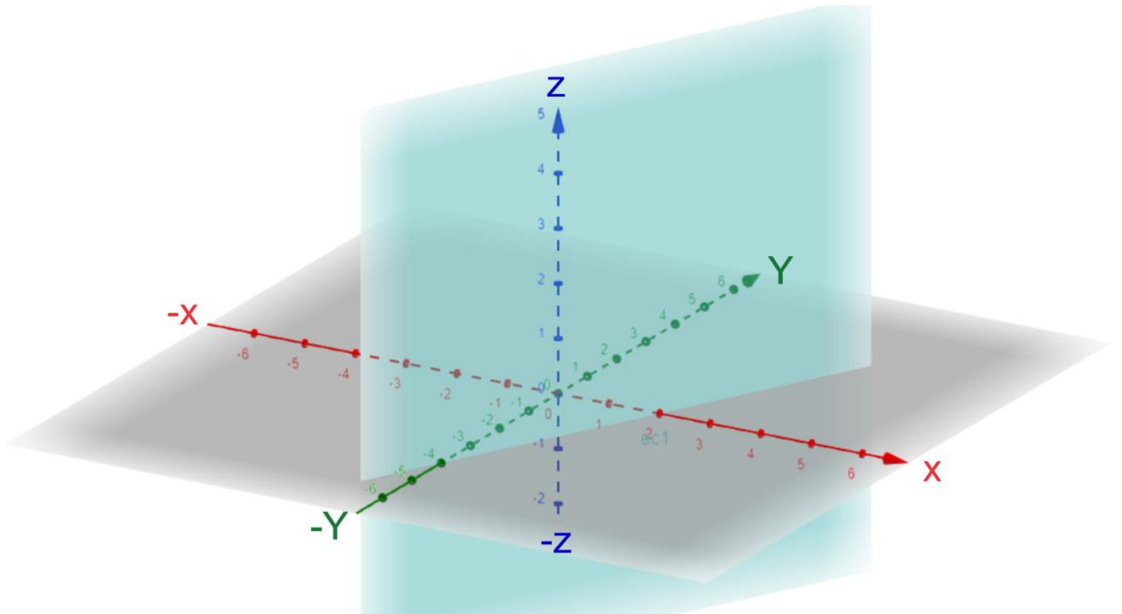
$\vec{N}$ = (a, b, c) = ai + bj + ck

4 (x – 1) + (- 2) (y - (- 2) + 0 (z – 5) = 0

4 x – 4 – 2 y - = 0

4 x – 2y – 8 = 0

4 x – 2 y = 8



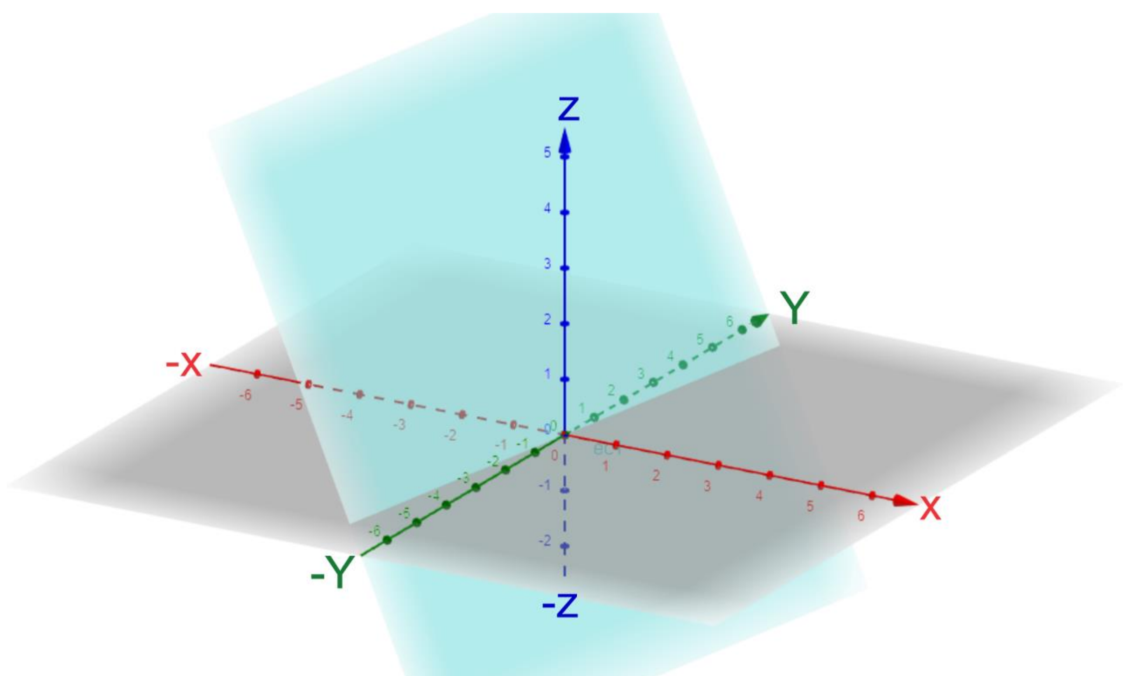
4. (0, 0, 0);   **6i − j + 3k**

A (X_1, Y_1, Z_1)

$\vec{N}$ = (a, b, c) = ai + bj + ck

6 (x – 0) + (-1) (y - 0) + 3 (z - 0) = 0

6 x – y + 3 z = 0



6. $(-1, 1, 0)$; $\quad -\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

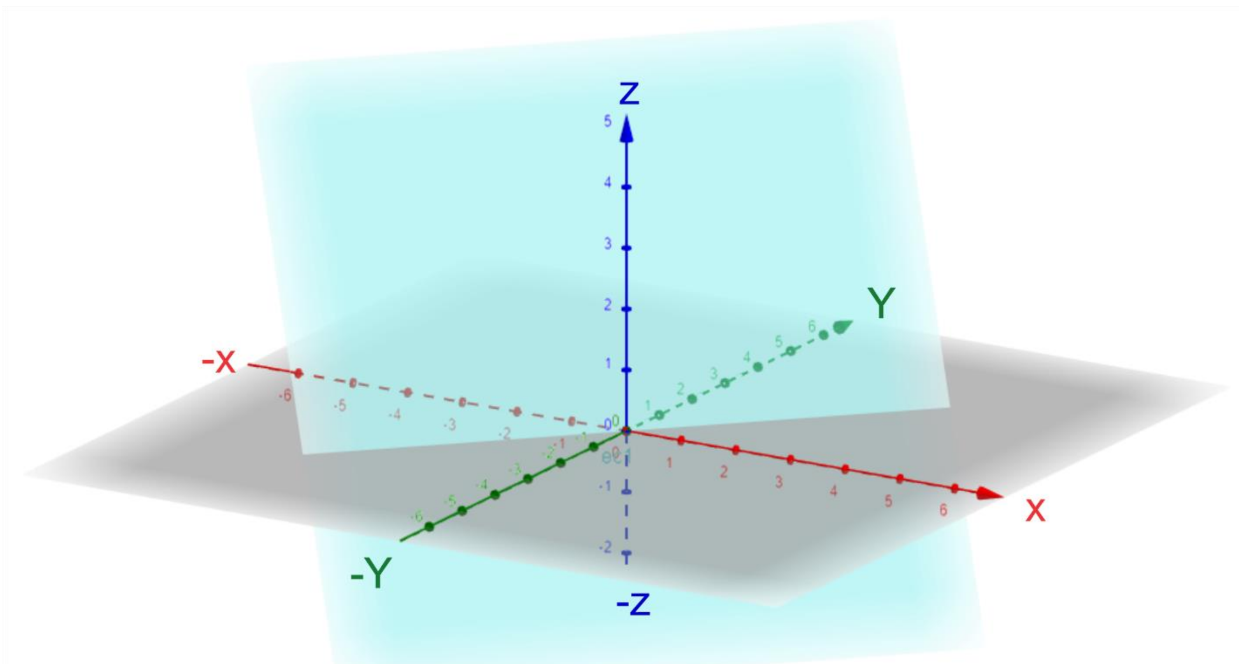
A (X_1, Y_1, Z_1)

$\vec{N} = (a, b, c) = ai + bj + ck$

$-1\,(x - (-1)) + 1\,(y - (1) + (-1)\,(z - 0) = 0$

$-x + 1y - 1 - z = 0$

$-x + y - z = 0$

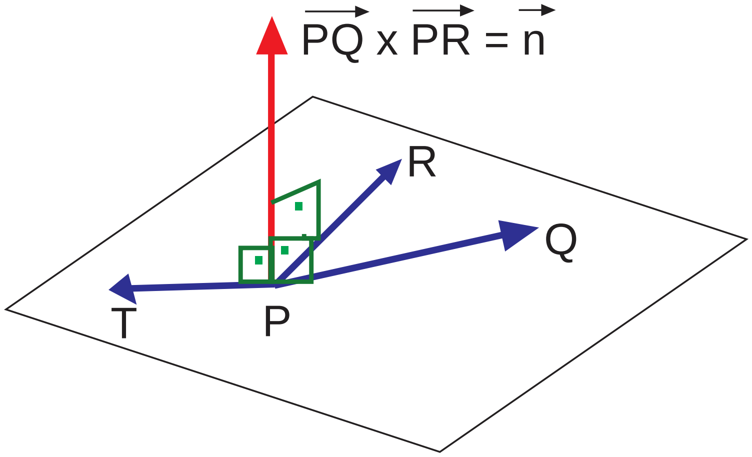


6. Determine, si es posible, una ecuación de un plano que contenga a los puntos dados

Solución

8. $(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, -1)$

P (0, 1, 0) Q (0, 1, 1) R (1, 3, -1)



$\vec{PQ}$ = Q (0, 1, 1) – P (0, 1, 0)

$\vec{PQ} = \langle 0, 0, 1 \rangle$

$\vec{PR}$ = R (1, 3, -1) - P (0, 1, 0)

$\vec{PR} = \langle 1, 2, -1 \rangle$

$\vec{PQ} = \langle 0, 0, 1 \rangle \; \vec{PR} \; \langle 1, 2, -1 \rangle$

$$\vec{PQ} \,.\, \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{PQ} \,.\, \vec{PR} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$\vec{PQ} \,.\, \vec{PR}$ = [0 – (+ 2)] i – [0 – (+1)] j+ [0 – 0 (- 0)] k

$\vec{PQ} \,.\, \vec{PR}$ = -2i + 1j

$\vec{n} = \langle -2, 1, 0 \rangle$

T (X, Y, Z)

$\vec{PT}$ = T (X, Y, Z) – P (0, 1, 0)

$\overrightarrow{PT} = \langle X - 0,\ Y-1,\ Z-0 \rangle$

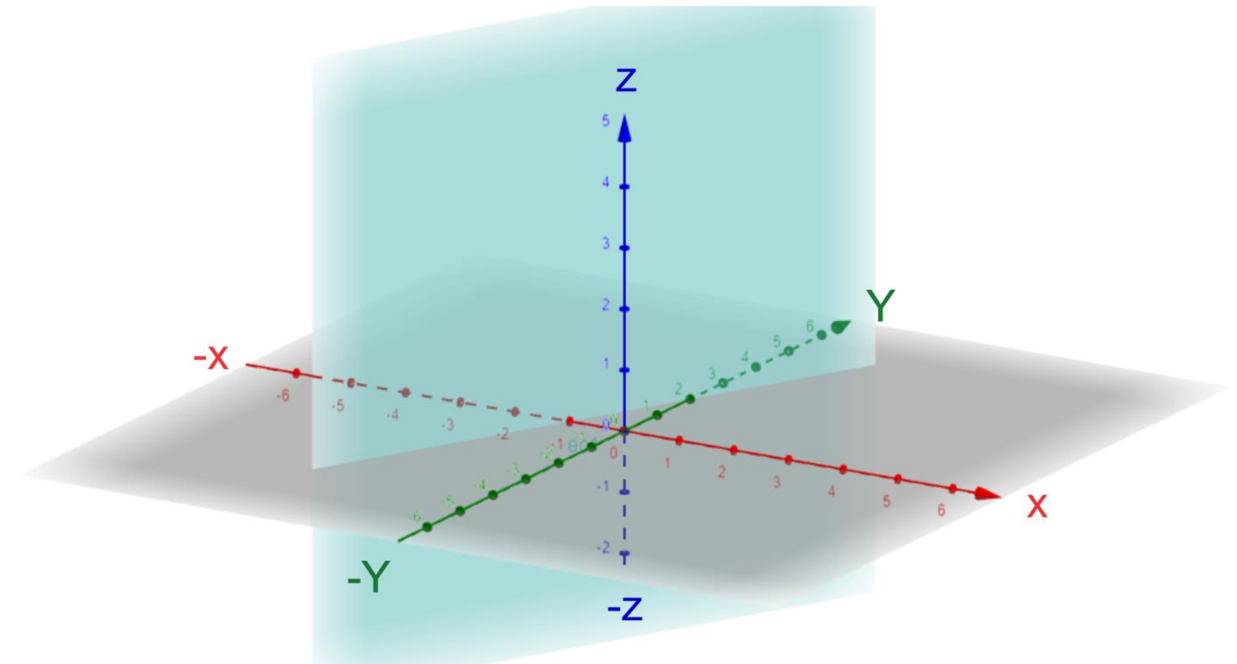
$\overrightarrow{PT} \cdot \vec{n} = 0$

$\langle X - 0, Y - 1, Z-0 \rangle \cdot \langle -2, 1, 0 \rangle = 0$

$X \cdot (-2) + Y \cdot 1 + Z \cdot 0 = 0$

$-2X - 2 + Y = 0$

$-2X + Y = 2$ Ecuación del plano que contiene los 3 puntos



10. (0, 0, 3), (0, −1, 0), (0, 0, 6)

P(0,0,3), Q(0,-1,0), R(0,0,6)

$\vec{PQ}$ = Q (0, -1, 0) – P (0, 0, 3)

$\vec{PQ} = \langle 0, -1, 3 \rangle$

$\vec{PR}$ = R (0, 0, 6) - P (0, 0, 3)

$\vec{PR} = \langle 0, 0, 3 \rangle$

$\vec{PQ} = \langle 0, -1, 3 \rangle$ $\vec{PR}$ $\langle 0, 0, 3 \rangle$

$$\vec{PQ} . \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{PQ} . \vec{PR} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$\vec{PQ} . \vec{PR}$ = [-3 - 0] i – [0 – 0] j+ [0 – 0] k

$\vec{PQ} . \vec{PR}$ = -3i – 0j + 0k

$\vec{n} = \langle -3, 0, 0 \rangle$

T (X, Y, Z)

$\vec{PT}$ = T (X, Y, Z) – P (0, 0, 3)

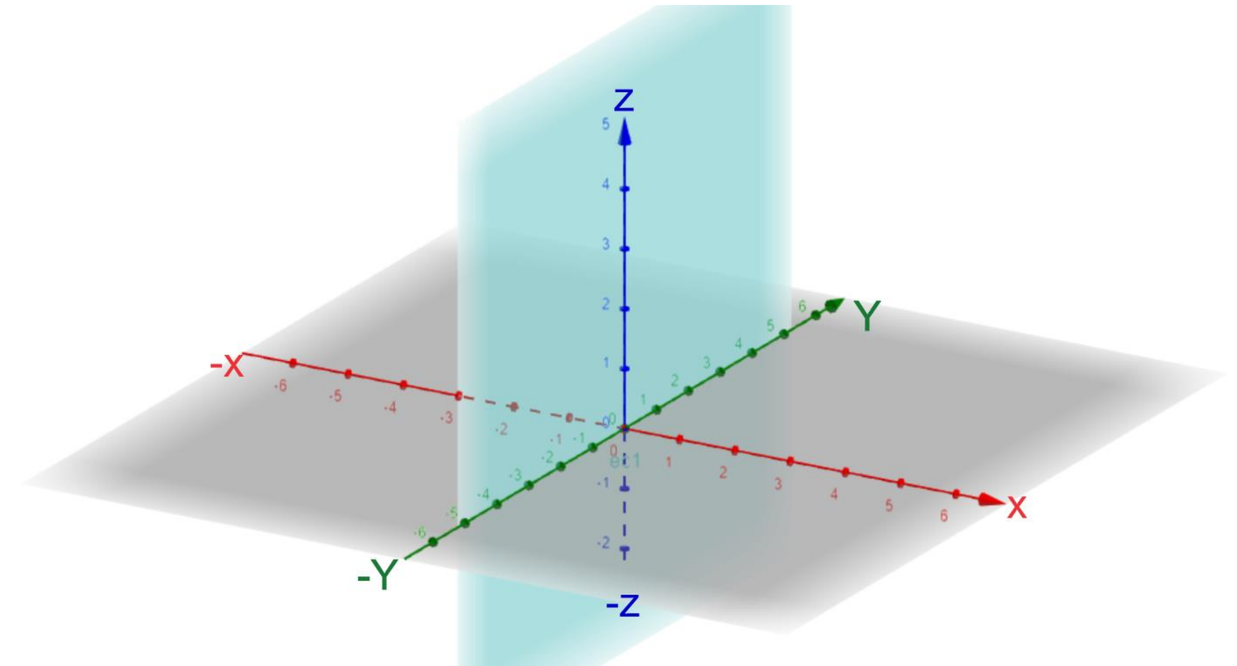
$\vec{PT} = \langle X, Y, Z-3 \rangle$

$\vec{PT} . \vec{n} = 0$

$\langle X, Y, Z-3 \rangle . \langle -3, 0, 0 \rangle = 0$

X . (-3) + Y . 0 + (Z -3).0 = 0

-3X = 0



12. (2, 1, 2), (4, 1, 0), (5, 0, −5)

P (2,1,2), Q (4,1,0), R (5,0,-5)

$\overrightarrow{PQ}$ = Q (4, 1, 0) – P (2, 1, 2)

$\overrightarrow{PQ}$ = <2, 0, -2>

$\overrightarrow{PR}$ = R (5, 0, -5) - P (2, 1, 2)

$\overrightarrow{PR}$ = <3, -1, -7>

$\overrightarrow{PQ}$ = <2, 0, -2> $\overrightarrow{PR}$ <3, -1, -7>

$$\overrightarrow{PQ} . \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} . \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{k}$$

$\overrightarrow{PQ} . \overrightarrow{PR} = [0-(+2)]\ i – [\ -14 – (-6)]\ j + [-2 – 0\ ]\ k$

$\overrightarrow{PQ} . \overrightarrow{PR} = -2i – 8j – 2k$

$\overrightarrow{n} = <-2, 8, -2>$

T (X, Y, Z)

$\overrightarrow{PT} = T\ (X, Y, Z) – P\ (2, 1, 2)$

$\overrightarrow{PT} = <\ x – 2, y – 1, z - 2\ >$

$X-2. (-2) + Y – 1 . (8) + Z – 2 . (-2) = 0$

$\overrightarrow{PT} = <X-2, Y-1,Z-2>$

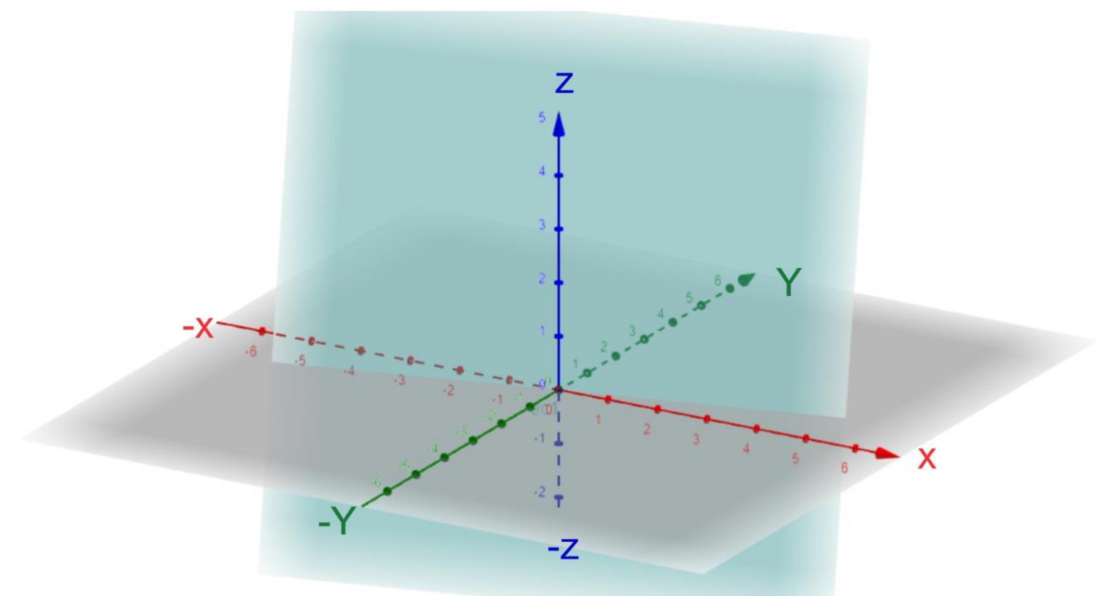
$\overrightarrow{PT} . \overrightarrow{n} = 0$

$<X-2, Y-1, Z-2> . <-2 + 8 – 2 > = 0$

$X-2 . (-2) + Y -1 . (8) + Z – 2 . (-2) = 0$

$-2X + 4 + 8Y -8 + (-2Z) +4 = 0$

$-2X + 8Y -2Z + 0 = 0$



7. **Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la recta** $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.

a) $4x + y + 2z = 1$ *b)* $2x - 3y + z = 4$
c) $10x - 15y - 5z = 2$ *d)* $-4x + 6y + 2z = 9$

Solución

El resultado debe dar igual a 0 para que la recta este perpendicular al plano según la teoría

a)

$\pi: 4x + y + 2z = \ 1$ r:$\begin{cases} x = 4 - 6\,t \\ y = 1 + 9\,t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

$\vec{n}$ = (4 + 1 + 2)

$\vec{v}$ = (-6 + 9 + 3)

$\vec{n}.\vec{vr}$ = (4+1+2) (-6+9+3) = -24 + 9 + 6 = -9

La recta y el punto son secantes se cortan en un punto

b)

$\pi: 2x - 3y + z = \ 4$ r:$\begin{cases} x = 4 - 6\,t \\ y = 1 + 9\,t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

$\vec{n}$ = (2 – 3 + 1)

$\vec{v}$ = (-6 + 9 + 3)

$\vec{n}.\vec{vr}$ = (2-3+1) (-6+9+3) = -12 – 18 + 3 = -27

La recta y el punto son secantes se cortan en un punto c)

$\pi: 10x - 15y - 5z = 2$ r: $\begin{cases} x = 4 - 6\,t \\ y = 1 + 9\,t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

$\vec{n}$ = (10 – 15 – 5)

$\vec{v}$ = (-6 + 9 + 3)

$\vec{n}.\vec{v}$ = (10 – 15 – 5) (-6 + 9 + 3) = -60 – 135 + 15 = -180

d)

$\pi: -4x + 6y + 2z = 9$ r: $\begin{cases} x = 4 - 6\,t \\ y = 1 + 9\,t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$

$\vec{n}$ = (-4 + 6 + 2)

$\vec{v}$ = (-6 + 9 + 3)

$\vec{n}.\vec{vr}$= (-4+6+2) (-6+9+3) = 24 + 54 +6 =84

8. Encuentre el punto de intersección del plano y la recta dados (resuelva numerales a y c)

a. 2x-3y +2z=-7 ; x=1+2t , y=2-t ; z=-3t

$\pi: 2x - 3y + 2z = -7$ r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -3t \end{cases}$

2 (1+2t) -3 (2-t) + 2 (-3t) = 0

2 + 4t -6 +3t -6t = 0

t – 4 = 0

t = 4 Parámetro de la recta

Sustituyendo en X, Y, Z el valor del parámetro

X = 1 + 2 (4) = 9

Y = 2 – (4) = -8

Z = -3 (4) = -12

Intersección (9, -8, -12)

c. x+y-z =8 ; x=1, y=2, z=1+t

$\pi: x + y - z = 8$ x = 1 y= 2 r: z = 1 + t

1 + 2 – 1 + t = 8

t + 2 = 8

t = 8 – 2

t = 6 Parámetro

x = 1

y = 2

z = 1 + 6 = 7

Intersección (1, 2, 7)

Conclusión

Con la actividad de aprendizaje 1 de Calculo Multivariado pude entender la ubicación de los puntos dados en los ejercicios sobre el plano cartesiano y la dirección de los vectores para hallar el punto de intersección. A través de las ecuaciones paramétricas y el valor del escalar es posible determinar la intercepción de los puntos en el plano.

Referencias

Academia Santa Teresa. (17 de julio de 2016). *Ecuación del plano que pasa por un punto y es perpendicular a un vector*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=YiFzjpH80yk

Alvarez, H. (03 de mayo de 2014). *Graficas de Vectores en R3*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=J7c0g_IoIKE

IFC, I. (04 de agosto de 2014). *Ecuación de una recta que pasa por un punto y paralela a un vector*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=kXz3AGwG98s

julioprofe. (08 de octubre de 2017). *ECUACIÓN DEL PLANO QUE CONTIENE TRES PUNTOS*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=Muaub7Lm2Lk

La Prof Lina M3. (09 de abril de 2016). *Ecuación del plano con un punto y un vector normal* . Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=MLj5_YWKsrE&list=PLQ5bstzAkMCMgHcOIXMamxIP032rVg4sX&index=2&t=0s

MateFacil. (08 de marzo de 2018). *74. Ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos, en el espacio tres dimensiones*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=aMCO3sgbOD8

profesor10demates. (25 de abril de 2015). *Punto de corte intersección recta y plano 01 ejercicios*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=N8nXJ32mX6A

Seletube. (19 de mayo de 2019). *Ecuaciones de la Recta en el Espacio Ejercicios Resueltos Vectorial, Paramétrica, Continua, General*. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=gw5jrCO-QUU

UTN.BA. (s.f.). *Introducción a vectores en R3*. Obtenido de https://aga.frba.utn.edu.ar/vectores-en-r3/