

第三章 机械臂运动学和动力学

3.1 运动学简介

机械臂运动学最基本的目的是得到关节空间到末端操作件的位姿的映射关系。此由变换矩阵 0_nT 唯一确定。关节变量定义为 $\mathbf{q}=[q_1, \dots, q_n]^n$ 。因此，运动学问题即是研究 \mathbf{q} 与 0_nT 之间的关系。

运动学问题可分为两类。一个是正运动学问题，已知关节变量 \mathbf{q} 求相应的 ${}^0_nT(\mathbf{q})$ 。另一个是逆运动学问题，即已知 0_nT ，求出对应的 \mathbf{q} 。另外还有一些问题，如求工作空间、奇异点的位置，也可以算是运动学的衍生。

3.1.1 刚体位姿的表述

自由刚体在空间中有六个自由度，因此可以通过六个参数来确定刚体在空间中的位姿。刚体的指向可以通过其与参考坐标系的相对位置来描述。记刚体坐标系 $O_1\xi\eta\zeta$ （以下简称系 1）中的三个单位向量 \mathbf{n} 、 \mathbf{o} 、 \mathbf{a} 在参考坐标系 $OXYZ$ （以下简称系 0）中的表达式是

$${}^0\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{o} = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix}, \quad {}^0\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$$

则可以用 3X3 的矩阵来表示刚体相对参考坐标系的指向：

$${}^0\mathbf{R}_1 \triangleq \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{n} & {}^0\mathbf{o} & {}^0\mathbf{a} \end{bmatrix}$$

3.1.2 旋转变换

如果标记旋转前的坐标系为系 0，旋转后的坐标系为系 1，称 ${}^0\mathbf{R}_1$ 为从系 0 到系 1 的旋转矩阵。如有一个矢量 \mathbf{b} ， \mathbf{b} 在系 0 中的表示为 ${}^0\mathbf{b}$ ，在系 1 中的表示为 ${}^1\mathbf{b}$ ，则

$${}^1\mathbf{b} = {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^0\mathbf{b}$$

3.1.2.1 基本旋转矩阵

绕坐标轴 X、Y、Z 旋转称为基本旋转。对应的旋转矩阵为

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3.1.2.2 欧拉角

对于每个任意的指向，都可以通过 3 个连续绕坐标轴的转动来实现。这三个转角称为欧拉角 $\{\varphi, \theta, \psi\}$ 。ZYZ 欧拉角的旋转矩阵表示为：

$${}^0\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_z(\varphi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} c\varphi & -s\varphi & 0 \\ s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

其中， $c\varphi \triangleq \cos \varphi$, $s\varphi \triangleq \sin \varphi$ ，其他类推。

3.1.2.3 齐次变换矩阵

不同坐标系中的平移和旋转变换，可以表示成：

$${}^0\mathbf{r} = {}^0\mathbf{p}_1 + {}^0\mathbf{R}_1 \cdot {}^1\mathbf{r}$$

这个不是一个齐次的表达式，为了简化多个坐标系时的表示，定义以下形式：

$$\begin{bmatrix} {}^0\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_1 & {}^0\mathbf{p}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{n} & {}^0\mathbf{o} & {}^0\mathbf{a} & {}^0\mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{r} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

这样，多个坐标系的变换，可以统一表示为：

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdots {}^{n-1}_n\mathbf{T}$$

3.2 D-H 方法

六自由度机械臂采用的是串联结构，可看做由若干刚性杆首尾相连而成。常用的建立与各杆固连坐标系的方法式 Danevit, Hartenberg 提出的 D-H 法。

3.2.1 D-H 参数

如图3.1所示，由于我们设计的机械臂均采用旋转关节，机械臂中的关节决定两相邻构建之间的连接关系，成为运动副。杆的近端关节为 i ，远端关节是 $i+1$ 。驱动力 i 的力（或者力矩）通过关节 i 的轴线施加到杆 i 上。定义下面的参数：

1. 杆件长度 a_i : 从 Z_i 到 Z_{i+1} 的距离，沿 X_i 轴指向为正。
2. 杆件扭角 α_i : 从 Z_i 到 Z_{i+1} 的转角，绕 X_i 轴正向转动为正。
3. 关节距离 d_i : 从 X_{i-1} 到 X_i 的距离，沿 Z_i 轴指向为正。
4. 关节转角 θ_i : 从 X_{i-1} 到 X_i 的转角，绕 Z_i 轴正向转动为正。

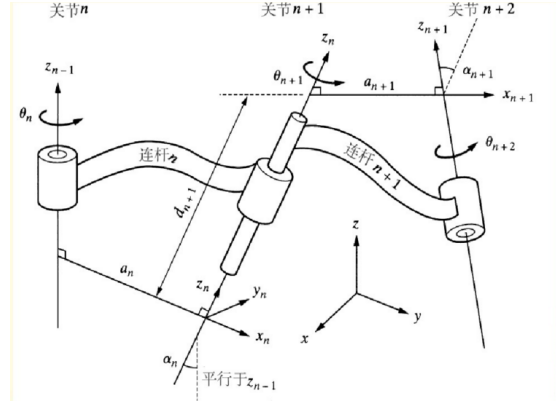


图 3.1 D-H 法

3.2.2 驱动轴坐标系的建立

第一步：确定 Z_i 轴，基本原则是： Z_i 轴沿关节 i 的轴向。

第二步：确定原点 O_i 。 O_i 在过 Z_i 和 Z_{i+1} 轴的公法线上。

第三步：确定 X_i ， X_i 轴沿过 Z_i 和 Z_{i+1} 的公法线方向，从 Z_i 指向 Z_{i+1} 。

第四步：确定 Y_i 轴， $Y_i = Z_i \times X_i$ ，使得坐标系为右手坐标系。

则从坐标系 $\{i\}$ 到坐标系 $\{i+1\}$ 的变换矩阵为：

$${}^i_{i+1}T = \text{Trans}_x(a_i) \cdot \text{Rot}_x(\alpha_i) \cdot \text{Trans}_z(d_i) \cdot \text{Rot}_z(\theta_i) \quad (3.3)$$

3.2.3 六自由度机械臂运动学模型

六自由度机械臂的机构运动简图如下图所示3.2, 第一关节和机架的为 L_1 , 第二和第三关节的距离为 L_2 , 第三关节距离腕关节为 L_3 , 图中的距离 0 表示三个关节正交于腕关节一点上。腕关节距离手爪为 L_4 。

在此运动结构上，建立 D-H 坐标系3.3。D-H 参数表如下图。

表 3.1 D-H 参数表

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i	初始角	范围
1	0	0	$-L_1$	θ_1	0	$[-90^\circ, 90^\circ]$
2	-90°	0	0	θ_2	90°	$[0, 90^\circ]$
3	0	L_2	0	θ_3	-90°	$[-180^\circ, -90^\circ]$
4	-90°	0	L_3	θ_4	180°	$(90^\circ, 270^\circ]$
5	-90°	0	0	θ_5	90°	$[60^\circ, 120^\circ]$
6	-90°	$-L_4$	0	θ_6	0	$[-30^\circ, 30^\circ]$

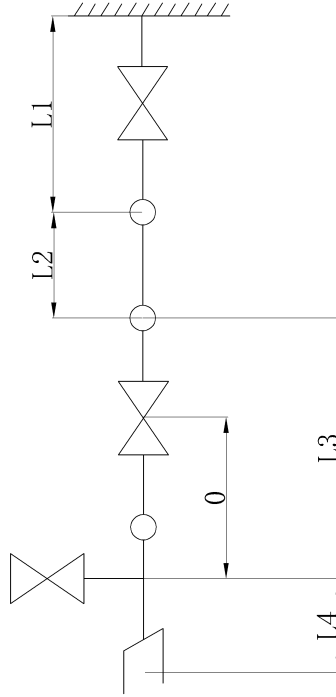


图 3.2 机械臂运动简图和参数

3.2.4 机械臂正运动学

正运动学已知 $\mathbf{q}=[q_1, \dots, q_n]$, 确定 ${}^n_{n-1}\mathbf{T}(\mathbf{q})$, 由齐次变换矩阵可知正运动学解:

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(q_1){}_2^1\mathbf{T}(q_2) \cdots {}^{n-1}_n\mathbf{T}(q_n) \quad (3.4)$$

由 D-H 法可得,

$${}^{i-1}_i\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & a_{i-1} \\ S_i C_{\alpha_{i-1}} & C_{\alpha_{i-1}} \cdot C_i & -S_{\alpha_{i-1}} & -d_i S_{\alpha_{i-1}} \\ S_{\alpha_{i-1}} \cdot S_i & S_{\alpha_{i-1}} \cdot C_i & C_{\alpha_{i-1}} & d_i \cdot C_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

因此, 机械臂各个齐次变换矩阵为:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_1} & -S_{\theta_1} & 0 & 0 \\ S_{\theta_1} & C_{\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_2} & -S_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_{\theta_2} & -C_{\theta_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^2_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_3} & -S_{\theta_3} & 0 & L_2 \\ S_{\theta_3} & C_{\theta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_4\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_4} & -S_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -L_3 \\ -S_{\theta_4} & -C_{\theta_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^4_5\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_5} & -S_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_{\theta_5} & -C_{\theta_5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} {}^5_6\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C_{\theta_6} & -S_{\theta_6} & 0 & -L_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -S_{\theta_6} & -C_{\theta_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

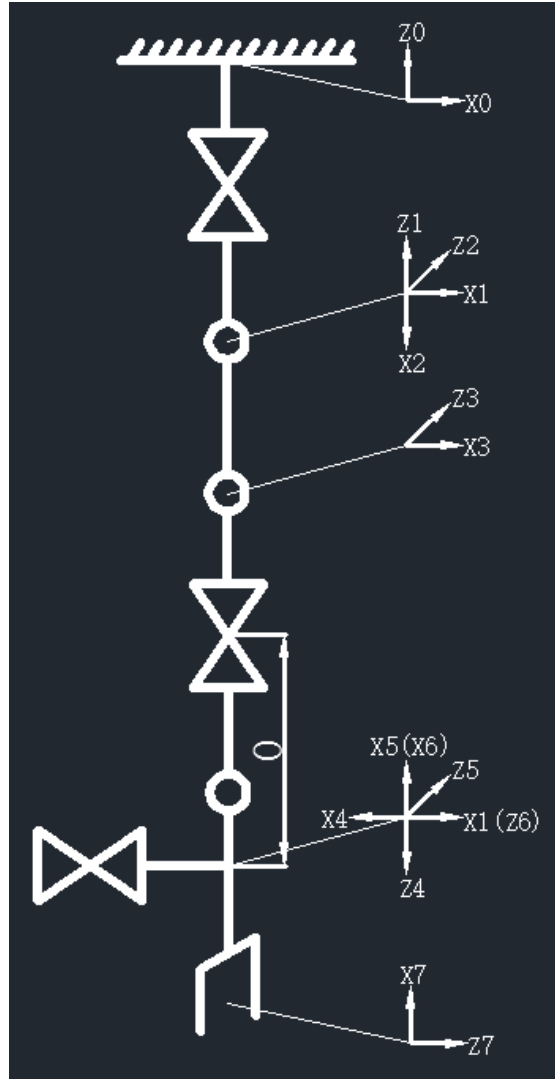


图 3.3 机械臂固连坐标系

3.2.5 机械臂逆运动学解

逆运动学即为已知 ${}^0_n\mathbf{T}$ ，求对应的 \mathbf{q} 。其中， ${}^0_n\mathbf{T}$ 通过传感器如 GDR-D 相机、双目相机或者激光测距仪等测得。可佳上用 kinect 和高清工业相机结合实现对物体的识别定位和抓取。

3.2.5.1 逆运动学解法

前文提及，六自由度机械臂后三个关节轴线交于一点，逆运动学问题必有解析解。这里，通过对前后三个关节解耦来求解。[8] 设坐标系 4 原点为 O_4 ，矢径 $\mathbf{p}_4 \triangleq \overrightarrow{O_0 O_4}$ ， \mathbf{X}_6 是坐标系 6 的 X 轴单位矢量。

定义：

$$\mathbf{p}_4 + (-L_4)\mathbf{X}_6 = \mathbf{p}_6$$

在 0 坐标系下的表示为：

$${}^0\mathbf{p}_4 + (-L_4){}^0\mathbf{X}_6 = {}^0\mathbf{p}_6 \quad (3.6)$$

已知

$${}^0\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{R}_6 & {}^0\mathbf{P}_6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0\mathbf{X}_6 & {}^0\mathbf{Y}_6 & {}^0\mathbf{Z}_6 & {}^0\mathbf{p}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从齐次变换矩阵的定义可知, ${}^0\mathbf{p}_4 = {}^0\mathbf{p}_6 + \mathbf{L}_4^0\mathbf{X}_6$ 是 ${}^0_3\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} \cdot {}^1_2\mathbf{T} \cdot {}^2_3\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_{34}$ 的最后一列三个元素。其中:

$$\mathbf{T}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{p}_3 \triangleq [p_x, p_y, p_z]$$

$${}^0_3\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}_{34} = \begin{bmatrix} \text{value}_{11} & \text{value}_{12} & \text{value}_{13} & L_2C_1C_2 - L_3(C_1C_2C_3 + C_1S_2C_3) \\ \text{value}_{21} & \text{value}_{22} & \text{value}_{23} & L_2S_1C_2 - L_3(S_1C_2S_3 + S_1S_2C_3) \\ \text{value}_{31} & \text{value}_{32} & \text{value}_{33} & -L_1 - L_3(C_2C_3 - S_2S_3) - L_2S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

联立方程组3.7, 得

$$\begin{cases} L_2C_1C_2 - L_3(C_1C_2C_3 + C_1S_2C_3) = p_x \\ L_2S_1C_2 - L_3(S_1C_2S_3 + S_1S_2C_3) = p_y \\ -L_1 - L_3(C_2C_3 - S_2S_3) - L_2S_2 = p_z \end{cases} \quad (3.8)$$

因为计算机存在舍入误差, 在求解机器人逆运动学时, 需要避免求解一些计算精度不高的函数。

一般不采用反三角函数 \arccos 或者 \arcsin 。因为它们不能在 $[-\pi, \pi]$ 范围内唯一确定出角度, 而且误差较大。 $\forall y = f(x)$, 误差 $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, 对于 $y = \arccos x$, $\Delta y \approx -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x$, 当 x 在定义域 $(-1, 1)$ 中变化时, $(\arccos x)'$ 值在 $(-\infty, -1)$ 之间变化。如果用反正切函数, $y = \text{atan}(x)$, 则 $\Delta y \approx \frac{1}{1+x^2}\Delta x$, 当 x 在 $(-\infty, \infty)$ 变化时, $\arctan x$ 仅在 $(0, 1]$ 之间变化。因此, 用反正切 (反余切) 函数比用反正弦 (反余弦) 函数更精确。一般采用双变量反正切函数 atan2_{xy}^x 在 $[-\pi, \pi]$ 内唯一确定角度。

3.2.5.2 求前三个关节变量

下面解方程3.8, 得到前三个关节变量 $q_1 q_2 q_3$ 。

1. 求 θ_3

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{P}_4 &= {}^0\mathbf{P}_6 + {}^0\mathbf{X}_6\mathbf{L}_4 = [p_x, p_y, p_z]^T \\ {}^0\mathbf{P}_1 &= [0, 0, 0]^T - L_1[0, 0, 1]^T = [0, 0, -L_1]^T \end{aligned}$$

可以得到三角形 $O_1O_3O_4$ 中的勾股关系。

$$L_2^2 + L_3^2 - 2 \cdot \cos(270^\circ + \theta_3) = p_x^2 + p_y^2 + (p_z + L_1)^2 \quad (3.9)$$

由方程3.9可以解出 θ_3

2. 求 θ_2

整理方程组3.8, 可以得到:

$$p_z + L_1 = (S_3L_3 - L_2)S_2 - (L_3C_3)C_2 \quad (3.10)$$

得到:

$$\theta_2 = \text{atan2}\left[S_3L_3 - L_2, -L_3C_3\right] \pm \text{atan2}\left(\sqrt{(S_3L_3 - L_2)^2 + (L_3C_3)^2 - (p_z + L_1)^2}, p_z + L_1\right) \quad (3.11)$$

3. 求 θ_3

$$p_y = S_1 \left[L_2C_2 - L_3(C_2S_3 + S_2C_3) \right] p_x = C_1 \left[L_2C_2 - L_3(C_2C_3 + S_2C_3) \right]$$

$$\theta_1 = \text{atan2}(S_1, C_1) \quad (3.12)$$

3.2.5.3 求解后三个关节变量

$${}^3_6T = ({}^0_3T)^{-1} \cdot {}^0_6T \triangleq \begin{bmatrix} {}^3X_6 & {}^3Y_6 & {}^3Z_6 & {}^3P_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 & \hat{z}_1 & p_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 & \hat{z}_2 & p_2 \\ \hat{x}_3 & \hat{y}_3 & \hat{z}_3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_6T = {}^3_4T \cdot {}^4_5T \cdot {}^5_6T = \begin{bmatrix} S_4S_6 + C_4C_5C_6 & C_6S_4 - C_4C_5S_6 & -C_4S_5 & -L_4C_4C_5 \\ -C_6S_5 & S_5S_6 & -C_5 & L_4S_5 - L_3 \\ C_4S_6 - C_5C_6S_4 & C_4C_6 + C_5S_4S_6 & S_4S_5 & L_4C_5S_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} {}^3R_6 & {}^3P_{36} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

分以下情况讨论:

1. 若 \hat{z}_1, \hat{z}_3 不全为零, 则 $S_5 \neq 0$

$$\begin{cases} -C_4 S_5 = \hat{z}_1 \\ S_4 S_5 = \hat{z}_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

得:

$$\theta_4 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_3 S_5}{-\hat{z}_1 S_5}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_1 S_5}{\hat{z}_3 S_5}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_3}\right) & \text{if } S_5 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_3}\right) & \text{if } S_5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_6 S_5 = \hat{x}_2 \\ S_6 S_5 = \hat{y}_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

得:

$$\theta_6 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{y}_2 S_5}{-\hat{x}_2 S_5}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{atan2}\left(\frac{\hat{x}_2 S_5}{\hat{y}_2 S_5}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{atan2}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{y}_2}\right) & \text{if } S_5 > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \text{atan2}\left(\frac{\hat{x}_2}{\hat{y}_2}\right) & \text{if } S_5 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_4 S_5 = \hat{z}_1 \\ S_4 S_5 = \hat{z}_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_4^2 \cdot S_5 = \hat{z}_1 C_4 \\ S_4^2 \cdot S_5 = \hat{z}_3 S_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_5 = \hat{z}_3 S_4 - \hat{z}_1 C_4 \\ C_5 = -\hat{z}_2 \end{cases}$$

$$\theta_5 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{z}_3 S_4 - \hat{z}_1 C_4}{-\hat{z}_2}\right)$$

2. 若 \hat{z}_1, \hat{z}_3 全为零

$$C_5 = -\hat{z}_2 \Rightarrow \theta_5 = (1 + \hat{z}_2) \frac{\pi}{2}$$

为 0 或者 π , 此时其实已经不再范围内。

$${}^3_6R = \begin{bmatrix} S_4 S_6 - C_4 C_6 \hat{z}_2 & S_4 C_6 + C_4 S_6 \hat{z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_2 \\ C_4 S_6 + C_6 S_4 \hat{z}_2 & C_4 C_6 - S_4 S_6 \hat{z}_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{z}_2 \cos(\theta_4 + \theta_6 \hat{z}_2) & \hat{z}_2 \sin(\theta_4 + \hat{z}_2 \theta_6) & 0 \\ 0 & 0 & \hat{z}_2 \\ \sin(\theta_4 + \hat{z}_2 \theta_6) & \cos(\theta_4 + \theta_6 \hat{z}_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{z}_2 \tan(\theta_4 + \hat{z}_2 \theta_6) = \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_3} \Rightarrow \theta_4 + \hat{z}_2 \theta_6 = \text{atan2}\left(\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_3 \cdot \hat{z}_2}\right)$$

有无穷多组解

3.3 机械臂动力学

机械装置的运动需要建立动力学方程。即, 只要知道所受的力和力矩就能确定机械装置的运动状态。通常可用 newton 力学等方法来确定机器人动力学方程。然而由于机械臂是一个耦合的、多自由度的复杂机械机构, 求其动力学方程很困难。本文采用拉格朗日力学建立机械臂的动力学方程。

3.3.1 Lagrange 力学方程

Lagrange 力学的基础是系统能量对系统变量及时间的微分。以两个基本方程为基础：一个针对直线运动，另一个针对旋转运动。定义 Lagrange 函数为：

$$L = K - P \quad (3.15)$$

其中 L 是 Lagrange 函数， K 是系统动能， P 是系统势能。经过推导 [7]，给出力和力矩的表示式：

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} \quad (3.16)$$

$$T_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} \quad (3.17)$$

其中 F_i 是产生直线运动的所有外力的和， T_i 是产生所有转动的所有外力的和。 θ_i 和 x_i 是系统变量。

3.3.1.1 刚体动能

由理论力学的知识可知，刚体三维运动的动能为：

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h}_G \quad (3.18)$$

其中 \mathbf{h}_G 是刚体关于 G 点的角动量。

刚体做平面运动时，动能则可以简化为：

$$K = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (3.19)$$

6 自由度机械臂，坐标系变换为：

$${}^0T = {}^0T_1 T_2 \cdots T_6 \triangleq A_1 A_2 \cdots A_6 \quad (3.20)$$

对于旋转关节的齐次变换矩阵，

$$\frac{\partial A_i}{\partial \theta_i} = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \begin{bmatrix} C_i & -S_i C_{\alpha_i} & S_i S_{\alpha_i} & a_i C_i \\ S_i & C_{\alpha_i} \cdot C_i & -S_{\alpha_i} C_i & a_i S_i \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_i & -C_i C_{\alpha_i} & C_i C_{\alpha_i} & a_i S_i \\ C_i & C_{\alpha_i} \cdot S_i & S_{\alpha_i} \cdot S_i & a_i C_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

该矩阵可以分解为一个常数矩阵 Q_i 和矩阵 A_i 的乘积：

$$\begin{bmatrix} -S_i & -C_i C_{\alpha_i} & C_i C_{\alpha_i} & a_i S_i \\ C_i & C_{\alpha_i} \cdot S_i & S_{\alpha_i} \cdot S_i & a_i C_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_i & -S_i C_{\alpha_i} & S_i S_{\alpha_i} & a_i C_i \\ S_i & C_{\alpha_i} \cdot C_i & -S_{\alpha_i} C_i & a_i S_i \\ 0 & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

可表示为:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \theta_i} = Q_i A_i \quad (3.23)$$

以此类推, 定义:

$$U_{ij} = \frac{\partial_i^0 T}{\partial q_j} = \frac{\partial(A_1 A_2 \cdots A_j \cdots A_i)}{\partial q_j} = A_1 A_2 \cdots Q_j A_j \cdots A_i \quad (3.24)$$

$$U_{ijk} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial q_k} \quad (3.25)$$

设 r_i 表示相对于机械臂第 i 连杆坐标系的点。则该点的速度:

$$v_i = \frac{d}{dt} ({}^0_i T \cdot r_i) = \sum_{j=1}^i \left(\frac{\partial ({}^0_i T)}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} \right) \cdot r_i \quad (3.26)$$

$$\text{Trace}(v_i \cdot v_i^T) = \text{Trace} \begin{bmatrix} \dot{x}_i^2 & \dot{x}_i \dot{y}_i & \dot{x}_i \dot{z}_i \\ \dot{y}_i \dot{x}_i & \dot{y}_i^2 & \dot{y}_i \dot{z}_i \\ \dot{z}_i \dot{x}_i & \dot{z}_i \dot{y}_i & \dot{z}_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

可以得到质量元的动能方程为:

$$dK_i = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\left(\sum_{p=1}^i \left(U_{ip} \frac{dq_p}{dt} \cdot r_i \right) \right) \left(U_{ip} \frac{dq_p}{dt} \cdot r_i \right)^T \right] \quad (3.28)$$

最终得到总的动能:

$$K_i = \int dK_i = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i U_{ip} \left(\int r_i r_i^T dm_i \right) U_{ir}^T \dot{q}_p \dot{q}_r \right] \quad (3.29)$$

经过推导, 有:

$$\int r_i r_i^T dm_i = \begin{bmatrix} \int x_i^2 dm_i & \int x_i y_i dm_i & \int x_i z_i dm_i & \int x_i dm_i \\ \int x_i y_i dm_i & \int y_i^2 dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int y_i dm_i \\ \int x_i z_i dm_i & \int y_i z_i dm_i & \int z_i^2 dm_i & \int z_i dm_i \\ \int x_i dm_i & \int y_i dm_i & \int z_i dm_i & \int dm_i \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

定义3.30为以下形式:

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})_i & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i \bar{x}_i \\ I_{ixy} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})_i & I_{iyz} & m_i \bar{y}_i \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{1}{2}(I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})_i & m_i \bar{z}_i \\ m_i \bar{x}_i & m_i \bar{y}_i & m_i \bar{z}_i & m_i \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

于是动能方程3.29的最终形式:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^i \sum_{r=1}^i \text{Trace}(U_{ip} J_i U_{ir}^T) \dot{q}_p \dot{q}_r + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{i(\text{act})} \dot{q}_i^2 \quad (3.32)$$

其中, $I_{i(\text{act})}$ 是电机和谐波减速器的转动惯量。

3.3.1.2 势能

$$P = \sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n [-m_i g^T \cdot ({}^0T \cdot \bar{r}_i)] \quad (3.33)$$

3.3.1.3 机器人运动方程

由参考文献 [9] 得到机械臂最终运动方程为：

$$T_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{i(\text{act})} + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (3.34)$$

其中，

$$D_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^n \text{Trace} (U_{pj} J_p U_{pi}^T) \quad (3.35)$$

$$D_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^n \text{Trace} (U_{pjk} J_p U_{pi}^T) \quad (3.36)$$

$$D_i = \sum_{p=i}^n -m_p g^T U_{pi} \bar{r}_p \quad (3.37)$$

3.3.2 一般六自由度机械臂动力学解

对于一个六自由度转动关节机械臂，3.34方程可展开为：

$$\begin{aligned} T_i = & D_{i1} \ddot{\theta}_1 + D_{i2} \ddot{\theta}_2 + D_{i3} \ddot{\theta}_3 + D_{i4} \ddot{\theta}_4 + D_{i5} \ddot{\theta}_5 + D_{i6} \ddot{\theta}_6 + I_{i(\text{act})} \ddot{\theta}_i \\ & + D_{i11} \dot{\theta}_1^2 + D_{i22} \dot{\theta}_2^2 + D_{i33} \dot{\theta}_3^2 + D_{i44} \dot{\theta}_4^2 + D_{i55} \dot{\theta}_5^2 + D_{i66} \dot{\theta}_6^2 \\ & + D_{i12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + D_{i13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + D_{i14} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_4 + D_{i15} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_5 + D_{i16} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_6 \\ & + D_{i21} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + D_{i23} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + D_{i24} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + D_{i25} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_5 + D_{i26} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_6 \\ & + D_{i31} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + D_{i32} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 + D_{i34} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 + D_{i35} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_5 + D_{i36} \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_6 \\ & + D_{i41} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_1 + D_{i42} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_2 + D_{i43} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_3 + D_{i45} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_5 + D_{i46} \dot{\theta}_4 \dot{\theta}_6 \\ & + D_{i51} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_1 + D_{i52} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_2 + D_{i53} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_3 + D_{i54} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_4 + D_{i56} \dot{\theta}_5 \dot{\theta}_6 \\ & + D_{i61} \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_1 + D_{i62} \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_2 + D_{i63} \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_3 + D_{i64} \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_4 + D_{i65} \dot{\theta}_6 \dot{\theta}_5 + D_i \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.3.3 六自由度机械臂简化动力学解

以上的动力学解包括了重力项、离心力项、科氏力、耦合力等，计算较为复杂，一般会忽略次要作用力 [10]。考虑到设计的腕部正交结构，机构可以简化成如图3.4：

其中，腕部是球铰结构。 $J_{mi}, i = 1 \cdots 6$ 是第 i 个电机和谐波减速器折合在输出轴上的转动惯量， $m_{rk}, k = 1 \cdots 6$ 是第 i 个电机和谐波减速器的质量。 $I_{mi}, i = 1 \cdots 6$ 是第 i 个连杆的转动惯量， $m_{ik}, k = 1 \cdots 6$ 是第 i 个连杆的质量。 d_i 是杆端到连杆质心的长度。

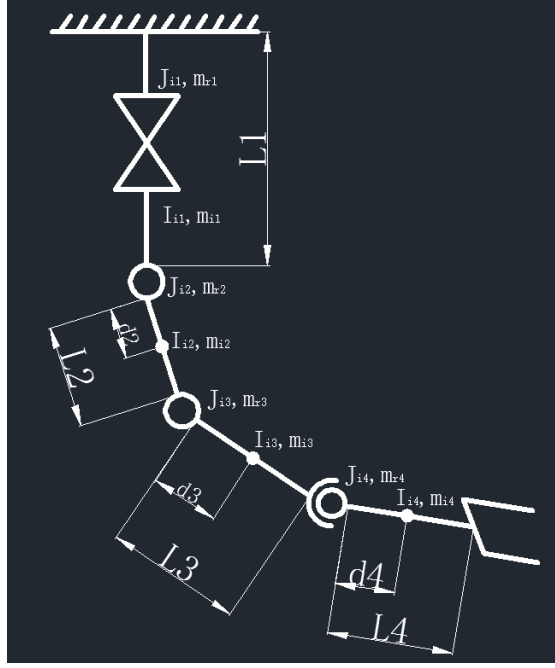


图 3.4 六自由度机械臂动力学简图

电机和减速器一（下面简称成驱动装置）等效转子的动能为：

$$K_{m1} = \frac{1}{2} J_{m1} \dot{\theta}_1^2 \quad (3.39)$$

连杆一的动能为：

$$K_{l1} = \frac{1}{2} I_{l1} \dot{\theta}_1^2 \quad (3.40)$$

驱动装置二的动能为 (假设忽略转子在非转轴方向上的惯量)：

$$K_{m2} = \frac{1}{2} J_{m2} \dot{\theta}_2^2 \quad (3.41)$$

连杆二的动能为：

$$K_{l2} = \frac{1}{2} m_{l2} [(d_2 \dot{\theta}_2)^2 + (\dot{\theta}_1 d_2 \sin \theta_2)^2] + \frac{1}{2} I_{l2} \dot{\theta}_2^2 \quad (3.42)$$

驱动装置三的动能为：

$$K_{m3} = \frac{1}{2} m_{r3} [(\dot{q}_2 L_2)^2 + (\dot{\theta}_1 L_2 \sin \theta_2)^2] + \frac{1}{2} J_{m3} (\theta_3 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (3.43)$$

连杆三的动能：

$$K_{l3} = \frac{1}{2} m_{l3} \left[((\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) d_3 + \dot{\theta}_2 L_2 C_3)^2 + (\dot{\theta}_2 L_2 S_3)^2 + ((L_2 S_2 + d_3 S_{23}) \dot{\theta}_1)^2 \right] + \frac{1}{2} I_{l3} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 \quad (3.44)$$

驱动装置四的动能为：

$$K_{m4} = \frac{1}{2}m_{r4} \left[\left[(L_2 S_2 + L_3 S_{23}) \dot{\theta}_1 \right]^2 + \left(\dot{\theta}_2 L_2 C_3 + (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) L_3 \right)^2 + (\dot{\theta}_2 L_2 S_3)^2 \right] + \frac{1}{2}J_{m4} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \quad (3.45)$$

连杆四的动能：

$$K_{l4} = \frac{1}{2}m_{l4} \left[\left(L_2 S_2 + L_3 S_{23} + d_4 S_{234} \right)^2 \dot{\theta}_1^2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + L_3^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)^2 + d_4^2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 + 2L_2 L_3 C_3 \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) + 2L_2 d_4 C_{34} \dot{\theta}_2 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) + 2L_3 d_4 C_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \right] + \frac{1}{2}I_{l4} (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4)^2 \quad (3.46)$$

机械臂的总动能为：

$$K(\theta, \dot{\theta}) = K_{m1} + K_{l1} + K_{m2} + K_{l2} + K_{m3} + K_{l3} + K_{m4} + K_{l4} \quad (3.47)$$

忽略机械臂的弹性势能，机械臂的总势能是：

$$P = -g \left[m_{l2} d_2 C_2 + m_{r3} L_2 C_2 + m_{l3} (L_2 C_2 + d_2 C_{23}) + m_{r4} (L_2 C_2 + L_3 C_{23}) + m_{l4} (L_2 C_2 + L_3 C_{23} + d_4 C_{234}) \right] \quad (3.48)$$

机械臂的运动模型是：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = T \quad (3.49)$$

其中， T 是主动力系对应的广义力，这里对应每个关节等效输出轴扭矩。而 Lagrange 函数，

$$L = K - P$$

3.4 轨迹规划

由运动学可以得到机械臂末端的起始和终止位置，或者已知机械臂的期望位姿确定相应的关节变量。轨迹规划则主要涉及到从开始位置到终点的轨迹序列。其间要考虑机械臂的完成时间、运动平稳性和避障等要求。

3.4.1 关节空间和直角坐标空间

查阅资料 [11] 可知：描述机器人运动轨迹有关节空间描述和直角空间描述两种方法。采用关节变量描述机器人的运动称为关节空间描述。这种方法使关节变量连续，最终将机器人移动到期望的位置，但是机器人在首尾两点的运动是不可预知的。直角坐标空间描述首先将运动序列在现实中三维直角坐标系中进行

描述，然后通过逆运动学方法转化成关节空间描述，驱动关节运动。这种方法得到的是一条可控的运动轨迹，但是其计算量远远大于关节空间，实时控制的话对硬件的计算要求很高，并且有奇异点问题。

3.4.2 关节空间轨迹规划

可佳机器人的实时性要求较高，因此采用关节空间的轨迹规划。

轨迹规划问题一般将轨迹规划器看成黑箱，接受路径约束条件为输入变量，输出起点和终点之间按照时间排列的中间形态序列，这里用关节空间表述。如下图所示：3.5

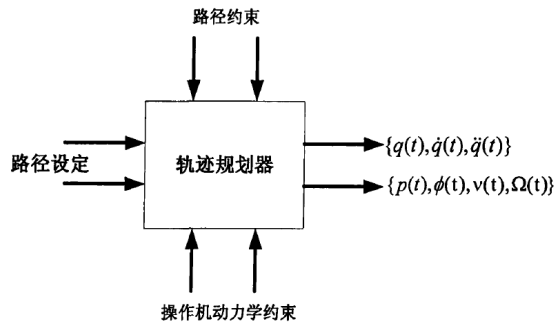


图 3.5 轨迹规划方框图

生成关节轨迹点的算法比较简单，流程图如图：3.6

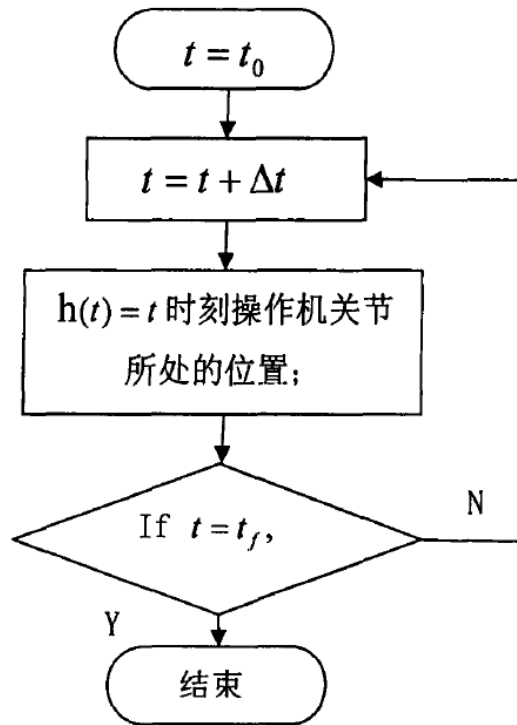


图 3.6 轨迹规划算法流程图

参考文献 [12] 对关节空间轨迹规划提出以下要求：

1. 方便迭代方法计算轨迹设定点。
2. 必须求出明确给定的中间位置。
3. 保证关节变量和前二阶时间导数的连续性，使得轨迹平滑。
4. 减少额外的运动。

3.4.3 多项式轨迹解法

可以采用多项式序列作为关节空间的时间函数，能满足上述要求。但如果对路径上每一点都求解高次多项式，需要大量的计算。一种代替的方法是采用分段的低次多项式，通过边界条件平滑连接。例如使用 4-3-4 轨迹、3-5-3 轨迹或者五段三次多项式轨迹等来代替高次多项式。这里用 4-3-4 轨迹。

$$\begin{aligned}
 \theta(t)_1 &= a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4 \\
 \theta(t)_2 &= b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3 \\
 \theta(t)_3 &= a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

将整个运动的标准化全局时间变量表示为 t ，将第 j 个运动段的本地时间变量表示成 τ_j ，假设每一运动段的初始时间 τ_{ji} 为 0，且给定每一运动段的终点本地时间为 τ_{jf} 。

设 θ_1 为第一段四次多项式初值位置， θ_2 为第一中间点位置， θ_3 为第二中间点位置， θ_4 为最后一段四次多项式终值位置。由各个约束条件列出方程组：

$$\theta_1 = a_0 \quad (3.51)$$

$$\dot{\theta}_1 = a_1 \quad (3.52)$$

$$\ddot{\theta}_1 = 2a_2 \quad (3.53)$$

$$\theta_2 = a_0 + a_1\tau_{1f} + a_2(\tau_{1f})^2 + a_3(\tau_{1f})^3 + a_4(\tau_{1f})^4 \quad (3.54)$$

$$\theta_2 = b_0 \quad (3.55)$$

$$a_1 + 2a_2(\tau_{1f}) + 3a_3(\tau_{1f})^2 + 4a_4(\tau_{1f})^3 = b_1 \quad (3.56)$$

$$2a_2 + 6a_3(\tau_{1f}) + 12a_4(\tau_{1f})^2 = 2b_2 \quad (3.57)$$

$$\theta_3 = b_0 + b_1(\tau_{2f}) + b_2(\tau_{2f})^2 + b_3(\tau_{2f})^3 \quad (3.58)$$

$$\theta_3 = c_0 \quad (3.59)$$

$$b_1 + 2b_2(\tau_{2f}) + 3b_3(\tau_{2f})^2 = c_1 \quad (3.60)$$

$$2b_2 + 6b_3(\tau_{2f}) = 2c_2 \quad (3.61)$$

$$\theta_4 = c_0 + c_1(\tau_{3f}) + c_2(\tau_{3f})^2 + c_3(\tau_{3f})^3 + c_4(\tau_{3f})^4 \quad (3.62)$$

$$\dot{\theta}_4 = c_1 + 2c_2(\tau_{3f}) + 3c_3(\tau_{3f})^2 + 4c_4(\tau_{3f})^3 \quad (3.63)$$

$$\ddot{\theta}_4 = 2c_2 + 6c_3(\tau_{3f}) + 12c_4(\tau_{3f})^2 \quad (3.64)$$

可以写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_4 \\ \dot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \tau_{1f} & \tau_{1f}^2 & \tau_{1f}^3 & \tau_{1f}^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\tau_{1f} & 3\tau_{1f}^2 & 4\tau_{1f}^3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6\tau_{1f} & 12\tau_{1f}^2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{2f} & \tau_{2f}^2 & \tau_{2f}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_{2f} & 3\tau_{2f}^2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{2f} & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tau_{3f} & \tau_{3f}^2 & \tau_{3f}^3 & \tau_{3f}^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\tau_{3f} & 3\tau_{3f}^2 & 4\tau_{3f}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\tau_{3f} & 12\tau_{3f}^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}.$$

或者表示成:

$$[\theta] = [M] \cdot [C] \quad (3.65)$$

从方程组3.66解得各个参数。

$$[C] = [M]^{-1} \cdot [\theta] \quad (3.66)$$

3.5 本章小结

本章在六自由度机械臂的结构基础上，分析了其运动学和动力学。通过运动学可以控制机械臂运动到指定的控制位置，动力学则涉及到电机和驱动器实时提供的力矩，来确定机械臂的受力状态。在确定机械臂起始、终止状态后，通过轨迹规划和插补来控制机械臂运动过程的平滑性。这样，机械臂就能实现预期的运动形式。本章也为后续的误差分析建立了基础。

第四章 机械臂误差分析

4.1 简介

在机械臂制造、装配过程中，不可避免存在误差。一些零部件在工作时也会有偏差，从而对机械臂产生不利影响。运动学误差模型一般是通过分析机械臂各个连杆之间的位姿误差与其运动学参数误差之间的关系，通过坐标系变化来得到。对由于杆长公差和运动副内的间隙引起的机构运动误差常用有两种处理方法：一是在每一个杆件上引进两个坐标系来考虑运动副间隙，二是将间隙折算为机构结构误差的简化法 [13]。此外，可以通过矩阵法来确定连杆结构的运动误差。

4.2 传动零部件误差

4.2.1 编码器测量误差

机械臂采用的是增量式光电编码器结合霍尔元件传感器。光电传感器利用光电效应将电机的旋转转化成数字脉冲。通常采用莫尔条纹细分的方法来提高编码器的分辨率。[14]

如果两路理想正弦莫尔条纹信号为： $u_{a0} = A \sin \theta_0$, $u_{b0} = A \cos \theta_0$, θ_0 是理论转角。

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{u_{a0}}{u_{b0}}\right) = \arctan\left(\frac{A \sin \theta_0}{A \cos \theta_0}\right)$$

实际中，收到环境影响，可以表示成：

$$u_a = u_{a0} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{ak} \sin(\theta + \theta_a) \quad u_b = u_{b0} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{bk} \cos(\theta + \theta_b)$$

其中 u_{ak} 和 u_{bk} 为各次谐波振幅， θ_a 和 θ_b 为各次谐波相位。

实际的转角：

$$\theta_R = \arctan\left(\frac{u_a}{u_b}\right)$$

产生的误差：

$$\Delta\theta = \theta_R - \theta_0 \quad (4.1)$$

4.2.2 谐波减速器误差

谐波减速器虽然是很精密的零部件，但是仍然存在钢轮和柔轮之间的啮合误差。其误差公式为：

$$\Delta\varphi = \pm k \cdot 3 \cdot \frac{\sigma_0}{\sqrt{N/2}} \quad (4.2)$$

其中， σ_0 N k 分别是传动误差的均方根值、啮合区内工作齿数、影响系数。

4.2.3 同步带传动误差

同步带在张紧时多边形效应对传动有较大影响。设同步带轮的转角为 θ ，则同步带直线移动的位移理论上是：

$$S_i = R_c \theta$$

同步带轮实际上并不是做圆周运动，而是做弦运动。查阅文献 [15] 可知，多边形效应引起的直线移动误差是：

$$\Delta X = 2 \left[R_c \varphi - R_r \sin \varphi - (R_p + c) \varphi \right] \quad (4.3)$$

其中 c 是同步带节线和同步带槽宽之间的距离， R_p 是顶圆半径， R_r 是齿顶圆角圆心圆的半径。

4.2.4 锥齿轮空回误差

由于加工精度原因，锥齿轮空回误差对机械臂的传动影响较为严重。产生空回误差的因素有以下几种 [16]：

1. 齿轮本身的误差

中心距增大导致：

$$j_{t1} = 2\Delta a \tan \alpha$$

其中 a 是齿轮的中心距。

原始齿廓位移：

$$j_{t2} = E_{si1} + E_{si2}$$

E_{si} 是齿厚极限偏差。

基圆偏心、齿形误差：

$$j_{t3} = (\Delta F''_{i1} + \Delta F''_{i2}) \tan \alpha$$

$\Delta F''_i$ 是径向综合误差。

2. 齿轮与轴的配合间隙

$$j_{t4} = 2(e_1 + e_2) \tan \alpha$$

3. 轴承的误差

$$j_{t5} = \left[(E'_{D1} + E'_{D2}) + (E''_{D1} + E''_{D2}) \right] \tan \alpha$$

$$j_{t6} = (\Delta_1 + \Delta_2) \tan \alpha$$

$E'_{D1} E'_{D2}$ 是固定座圈的径向跳动， $E''_{D1} E''_{D2}$ 是转动座圈的径向跳动。

齿轮总的侧隙公式为：

$$j_{t\Sigma} = \sqrt{j_{t1}^2 + j_{t2}^2 + j_{t3}^2 + j_{t4}^2 + j_{t5}^2 + j_{t6}^2} \quad (4.4)$$

4.3 运动学误差模型

4.3.1 改进的 D-H 参数法

本文设计的六自由度机械臂关节 2 和 3 轴线相互平行, 对于这种情况, Hayati 提出增加一个绕动系 $\sum_i y$ 轴转动的角度 β 来解决 [17]。需要用到改进的 D-H 法。

定义 D-H 矩阵:

$$A_i = \text{Rot}_{z_i, \theta_i} \text{Tran}_{z_i, d_i} \text{Tran}_{x_i, a_i} \text{Rot}_{z_i, \alpha_i} \text{Rot}_{y_i, \beta_i}$$

$$= \begin{bmatrix} C_{\theta_i} C_{\beta_i} - S_{\theta_i} S_{\alpha_i} S_{\beta_i} & -C_{\alpha_i} S_{\theta_i} & C_{\theta_i} S_{\beta_i} + S_{\theta_i} S_{\alpha_i} C_{\beta_i} & a_i C_{\theta_i} \\ S_{\theta_i} C_{\beta_i} + C_{\theta_i} S_{\alpha_i} S_{\beta_i} & C_{\alpha_i} C_{\theta_i} & S_{\theta_i} S_{\beta_i} - C_{\theta_i} S_{\alpha_i} C_{\beta_i} & a_i S_{\theta_i} \\ -C_{\alpha_i} S_{\beta_i} & S_{\alpha_i} & C_{\alpha_i} C_{\beta_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2 相邻连杆之间的位姿误差

设理想齐次变换矩阵为 A_i^N , 实际齐次变换矩阵为 A_i^R , 由误差分析理论可知,

$$A_i^R = A_i^N + dA_i \quad (4.5)$$

$$dA_i = \frac{\partial A_i^N}{\partial \theta_i} \Delta \theta_i + \frac{\partial A_i^N}{\partial d_i} \Delta d_i + \frac{\partial A_i^N}{\partial a_i} \Delta a_i + \frac{\partial A_i^N}{\partial \alpha_i} \Delta \alpha_i + \frac{\partial A_i^N}{\partial \beta_i} \Delta \beta_i \quad (4.6)$$

由文献 [17] 可知, 偏导数可以表示成以下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_i^N}{\partial \theta_i} = D_{\theta_i} A_i^N \\ \frac{\partial A_i^N}{\partial d_i} = D_{d_i} A_i^N \\ \frac{\partial A_i^N}{\partial a_i} = D_{a_i} A_i^N \\ \frac{\partial A_i^N}{\partial \alpha_i} = D_{\alpha_i} A_i^N \\ \frac{\partial A_i^N}{\partial \beta_i} = D_{\beta_i} A_i^N \end{cases} \quad (4.7)$$

易得 D_{ki} 是常数矩阵。如:

$$D_{\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此, 方程4.7等价于:

$$\begin{aligned} dA_i &= (D_{\theta_i} d\theta_i + D_{d_i} dd_i + D_{a_i} da_i + D_{\alpha_i} d\alpha_i + D_{\beta_i} d\beta_i) A_i^N \\ &= \delta A_i A_i^N \end{aligned}$$

误差矩阵则是：

$$\delta A_i = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\theta_i - S_{\alpha_i}\Delta\beta_i & S_{\theta_i}\Delta\alpha_i + C_{\theta_i}C_{\alpha_i}\Delta\beta_i & dx_i \\ \Delta\theta_i + S_{\alpha_i}\Delta\beta_i & 0 & -C_{\theta_i}\Delta\alpha_i + S_{\theta_i}C_{\alpha_i}\Delta\beta_i & dy_i \\ -S_{\theta_i}\Delta\alpha_i - C_{\theta_i}C_{\alpha_i}\Delta\beta_i & C_{\theta_i}\Delta\alpha_i - S_{\theta_i}C_{\alpha_i}\Delta\beta_i & 0 & dz_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

其中， dx_i, dy_i, dz_i 是 \sum_i 相对坐标系 \sum_{i-1} 的 xyz 方向的位置误差。

$$dx_i = C_{\theta_i}\Delta a_i - d_i S_{\theta_i}\Delta\alpha_i - (d_i C_{\theta_i}C_{\alpha_i} - a_i S_{\theta_i}S_{\alpha_i})\Delta\beta_i$$

$$dy_i = S_{\theta_i}\Delta a_i + d_i C_{\theta_i}\Delta\alpha_i - (d_i S_{\theta_i}C_{\alpha_i} + a_i C_{\theta_i}S_{\alpha_i})\Delta\beta_i$$

$$dz_i = \Delta d_i + a_i C_{\alpha_i}\Delta\beta_i$$

4.4 六自由度机械臂的误差

4.4.1 主导误差影响因素

在实际操作过程中发现，腕关节的加工装配难度很大，其他零件通过线切割和精铣，精度较高。所以腕关节占了机械臂误差的主要部分。其主导误差包括：

1. 关节 4 和关节 5 的 x、y 偏置误差。
2. 关节 5 和关节 6 的 x 偏置误差。
3. 关节 6 由于锥齿轮间隙造成的空回误差。

齐次变换矩阵为：

$${}^0T = {}^0T_1 \cdots {}^3T_4 [{}^4T_6 + d_6^4T]$$

d_6^4T 是误差矩阵，表达式见前节 4.8。

经测试，加工误差的实际参数为：

$$\Delta d_4 \approx 1\text{mm}$$

$$\Delta\alpha_5 \approx 0.07\text{rad}$$

这样，可以通过实时计算对末端位姿误差进行补偿，在加工精度不高的情况下仍能保持定位精度。

4.4.2 高阶误差

实际上每个连杆之间都有一定的偏差，准确的机械臂模型应该表示为：

$${}^0T_R = \prod_{i=0}^5 ({}^i_{i+1}T + d_{i+1}^i T) \quad (4.9)$$

整理得4.9:

$${}^0_6T_R - {}^0_6T = \sum_{i=1}^{\infty} \text{error}_i \quad (4.10)$$

其中, error_i 为 i 阶误差, 一阶误差为:

$$\text{error}_1 = \sum_{i=0}^5 \prod_{j=0, j \neq i}^5 {}^j_{j+1}T \cdot d_{i+1}^i T$$

高阶误差同理。本文不再分析高阶的影响。

4.5 本章小结

本章主要介绍了根据改进 D-H 方法来对机械臂误差建模。分析了核心零部件的影响, 通过误差原理计算总的定位误差。这对以后指导机械臂标定、误差矫正, 乃至分配机械零件加工精度都有重要意义。这里需要指出的是, 本章分析仅针对加工装配误差较大的腕关节部位, 属于一阶误差的主要部分。如果需得到准确的误差模型, 还要分析二阶误差等以及提高检测标定精度。例如可以通过运动捕捉系统 [18] 来确定连杆结构的参数和误差。