Algebra Lineal

Jonathan Eliasib Rosas Tlaczani*
Depto. de Actuaría, Física y Matemáticas, Universidad de las Américas Puebla, Puebla, México 72810

Otoño 2020

Eigenvalores y Eigenvectores de Matrices Cuadradas

Si A es una matriz de n$\times n$

, hay vectores x diferentes de cero en R^n

tales que Ax

sea un múltiplo escalar de x? El escalar, denotado por la letra griega lambda (λ)

, se llama eigenvalor de la matriz A y el vector x diferente de cero se llama eigenvector de A correspondiente a (λ).

Los términos eigenvalor y eigenvector provienen del término alemán eigenwert, cuyo significado es "valor propio". Por tanto, se tiene

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

El escalar λ

se denomina eigenvalor de A si existe un vector diferente de 0 tal que

$$Ax = \lambda x \tag{2}$$

El vector x se llama eigenvector de A correspondiente de λ.

Ejemplo 1: Comprobación de los eigenvectores y eigenvalores Para la matriz compruebe que λ_i

es un eigenvalor de A y x$_i$

es un eigenvector correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\lambda_1 = 2, x_1 = (1,0) \tag{4}$$

$$\lambda_2 = -2, x_2 = (0,1) \tag{5}$$

Dejamos a A ser una matriz n

El escalar λ

es un eigenvalor de A cuando no hay un vector cero x donde A$_x = \lambda_x$

El vector x es un eigenvector de A correspondiente al eigenvector λ.

*168399

Dejamos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Ahora

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2x_1 \tag{9}$$

y

$$Ax_2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -2 \tag{10}$$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ =-2x$_2$

Por lo de arriba se ve que x$_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor 2 y x$_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor -2 Ejemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\lambda_1 = -1, x_1 = (1,1) \tag{12}$$

$$\lambda_2 = 2, x_2 = (5,2) \tag{13}$$

Dejamos

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Ahora

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1x_1 \tag{17}$$

y

$$Ax_2 = \begin{bmatrix}4 & -5\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix} 2x_2 \tag{18}$$

Por lo de arriba podemos ver que $x_1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor -1 y $x_2 = \begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix}$

es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor 2.

Eigenespacio

Si A es una matriz de n$\times n$

con un eigenvalor λ

, entonces el conjunto de todos los eigenvvectores de λ

, junto con el vector cero, (x:x es un eigenvector de $\lambda) \cup (0)$

es un subespacio de R^n.

Este subespacio se llama eigenespacio de λ.

Ejemplo 1: Encuentre los eigenvalores y eigenespacios de A.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \tag{19}$$

Dado la matriz de arriba para A. Multiplica un vector v=(x,y), geometricamente, en R^2

por la matriz A.

$$Av = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(x)+0(y)\\ 0(x)-1(y)\end{bmatrix} \tag{20}$$

$$Av\begin{bmatrix}x\\ -y\end{bmatrix} \tag{21}$$

El producto Av corresponde al reflejo en el eje x. La figura 1 ilustra el vector reflejado en el eje x. Entonces los unicos vectores que se reflejan en en los multiples escalares de si mismos son esos que estan en los ejes x y y. Para un vector en el eje x, (x,0)

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(x)+0(0)\\ 0(x)-1(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} \tag{22}$$

Entonces un eigenvalor es

$$\lambda = 1. \tag{23}$$

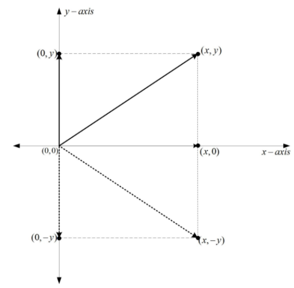

Figura 1: Gráfica

Para un vector en el eje y, (0,y). Entonces:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(0)+0(y)\\ 0(0)-1(y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -y\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}0\\ y\end{bmatrix} \tag{24}$$

Entonces, el otro eigenvalor es $\lambda_2 = -1$.

Entonces los vectores que no son cero en el eje x son los eigenvectores correspondientes al eigenvalor $\lambda_1 = 1$

, lo cual implica que el eigenespacio correspondiente a $\lambda_1 = 1$

es el eje x.

Los vectores que no son cero en en el eje y son los eigenvectores correspondientes al eigenvalor $\lambda_2 = -1$

, lo que implica que el eigenespacio correspondiente a $\lambda_1 = -1$

es el eje y.

Ejemplo 2: Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{25}$$

Multiplica un vector v = (x, y), geometricamente, en R^2

por la matriz A.

$$Av = \begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(x)+k(y)\\ 0(x)+1(y)\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$x + xyy \tag{27}$$

El producto, Av corresponde a cambiar en la dirección del eje x por unidades ky.

La figura ilustra a los vectores cambiados en el eje x.

Para un vector en el eje x, (x,0). Entonces:

$$\begin{bmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1(x)+k(0)\\ 0(x)+1(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}x\\ 0\end{bmatrix} \tag{28}$$

Entonces un eigenvalor es

$$\lambda = 1 \tag{29}$$

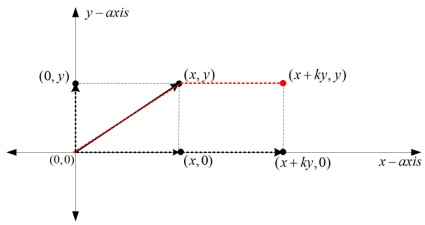

Figura 2: Gráfica2

Para un vector en el eje y, (0,y). Entonces:

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(0) + k(y) \\ 0(0) + 1(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ky \\ y \end{bmatrix} \tag{30}$$

Para el resultado de arriba y por la figura, esta claro que el vector (0, y), donde y$\neq 0$

, no va a resultar ningún cambio literal en las coordenadas (x, y). Entonces los unicos vectores que se reflejan en los multiplos escalares de si mismo estan en el eje x. Entonces $\lambda_1 = 1$

es el eigenvalor repetido. Entonces, los valores que son diferentes de cero en el eje x son los eigenvectores correspondientes al eigenvalor $\lambda_1 = 1$

, lo cual significa que el eigenespacio correspondiente a $\lambda_1 = 1$

es el eje x.

Polinomio Característico y Ecuación Característica

Sea T una aplicación o transformación lineal endomórfica de orden N sobre K^n

se llama polinomio característico al resultante de la expresión.

$$P(x) = |A - xl_N| \tag{31}$$

Donde A es la matriz cuadrada asociada a T, l$_N$

es la matriz identidad de orden N. Mientras se conoce a la ecuación característica a la expresión de álgebra matricial

$$(A - xl_N) = 0 \tag{32}$$

Sea un polinomio característico P(x) de la aplicación lineal T sobre K^N

para el mismo se verifican las siguientes propiedades: 1. Los valores propios de T son raíces de P(x)=0 2. Si todas las N raíces de P(x) pertenecen a K entonces son valores propios de T ésta es diagonalizable. 3. Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Ejemplo 1: Determine la ecuación característica y los eigenvalores (y los correspondientes eigenvectores) de la matriz.

Dejamos a

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{33}$$

El polinomio característico de A es x$^2 - 7x$.

Así que los eigenvalores de A son los las raíces de x$^2 - 7x = 0$

que son 0 y 7. Para encontrar los eigenvectores de de A que corresponden al eigenvalor 0 tenemos que resolver el sistema

$$(A - 0l^2)x = Ax = 0 \tag{34}$$

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 6 & -3|0 \\ -2 & 1|0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Ahora

$$\begin{bmatrix} 6 & -3|0 \\ -2 & 1|0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

$$R_1 = \frac{1}{6}R_1 \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}|0 \\ -2 & 1|0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$R_2 = R_2 + 2R_1 \tag{39}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2}|0 \\ 0 & 0|0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Así que el sistema se transforma en x$_1 - \frac{1}{2} = 0$

con x$_2$

como la variable libre.

Así que una base para la solución espacio de (A-0l$_2$)$x = 0$

es la consistencia del eigenvector

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Para encontrar los eigenvectores de A que corresponden al valor 7 tenemos que resolver el sistema (A-7l$_2$)$x = 0$

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} -1 & -3|0 \\ -2 & -6|0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Ahora

$$\begin{bmatrix} -1 & -3|0 \\ -2 & -6|0 \end{bmatrix} \tag{43}$$

$[R_1 = -R_1]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3|0 \\ -2 & -6|0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$R_2 = R_2 + 2R_1 \tag{45}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3|0 \\ 0 & 0|0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

Así que el sistema lo transforma en $\mathrm{x}_1 + 3x_2 = 0$

con x_2

como la variable libre. Así que una base para la solución espacio de (A-7l_2)$x = 0$

es la consistencia del vector

$$u_2 = \begin{bmatrix} -3|0 \\ 1|0 \end{bmatrix} \tag{47}$$

Ejemplo 2: Dejamos a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \tag{48}$$

El polinomio característico de A es $\mathrm{x}^2 - 9x$.

Así que los eigenvalores de A son las raíces de $\mathrm{x}^2 - 9x = 0$

que son los valores 0 y 9.

Para encontrar los eigenvectores de A que corresponden al eigenvalor 0 tenemos que resolver el sistema (A-0l_2)$x = 0$.

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -4|0 \\ -2 & 8|0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

Ahora

$$\begin{bmatrix} 1 & -4|0 \\ -2 & 8|0 \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$R_2 = R_2 + 2R_1 \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4|0 \\ 0 & 0|0 \end{bmatrix} \tag{52}$$

De tal modo que el sistema se transforma en $\mathrm{x}_1 - ax_2 = 0$

con x_2

como la variable libre. Así que una base para la solución espacio de (A-0l_2)$x = 0$

es la consistencia del eigenvector

$$u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Para encontrar los eigenvectores de A correspondientes al eigenvalor 9 tenemos que resolver el sistema (A-9l_2)$x = 0$.

La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} -8 & -4|0 \\ -2 & -1|0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Ahora

$$\begin{bmatrix} -8 & -4|0 \\ -2 & -1|0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$R_1 = -\frac{1}{8}R_1 \tag{56}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}|0 \\ -2 & -1|0 \end{bmatrix} \tag{57}$$

$$R_2 = R_2 + 2R_1 \tag{58}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}|0 \\ 0 & 0|0 \end{bmatrix} \tag{59}$$

De tal manera que el sistema transforma en $\mathrm{x}_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0$

con x_2

como la variable libre. Así que una base para la solución espacio de (A-9l_2)$x = 0$

es la consistencia del eigenvector

$$u_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{60}$$