Reporte: Control de un Péndulo con un Controlador P

Jonathan Eliasib Rosas Tlaczani

31/03/2024

1 Introducción

El control de sistemas físicos es fundamental en diversas áreas de la ingeniería y la ciencia. En este reporte, abordaremos el problema de controlar un péndulo simple con una longitud de 30 cm y una masa de 1 kg para mantenerlo en un ángulo de 45° utilizando un controlador proporcional (P).

2 Obtención de la Cinemática Directa

Para obtener la cinemática directa del péndulo, utilizamos la ley de conservación de la energía. La ecuación de posición en función del tiempo para un péndulo simple es:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + \phi\right)$$

Donde:

- $\theta(t)$ es el ángulo en función del tiempo.
- θ_0 es el ángulo inicial (en este caso, 45°).
- g es la aceleración debido a la gravedad (aproximadamente $9.81\,\mathrm{m/s^2}$).
- l es la longitud del péndulo (en este caso, $0.3\,\mathrm{m}$).
- ϕ es la fase inicial (asumida como cero en este caso).

Sustituyendo los valores conocidos, obtenemos:

$$\theta(t) = 45^\circ \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{9.81}{0.3}} \cdot t\right)$$

Ahora, esta ecuación nos permite calcular el ángulo del péndulo en cualquier instante de tiempo t. Podemos usar esta relación para entender cómo cambia la posición angular del péndulo con el tiempo.

3 Obtención del Modelo Dinámico

El modelo dinámico de un péndulo simple se puede obtener utilizando la dinámica de Lagrange. Para un péndulo simple, la energía cinética T y la energía potencial V se pueden expresar como:

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$V = mgl(1 - \cos(\theta))$$

Donde:

- m es la masa del péndulo.
- l es la longitud del péndulo.
- θ es el ángulo de desplazamiento del péndulo.
- $\dot{\theta}$ es la velocidad angular del péndulo.
- g es la aceleración debido a la gravedad.

El Lagrangiano L del sistema se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$L = T - V$$

Entonces, podemos escribir el Lagrangiano como:

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos(\theta))$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se utilizan para derivar las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Desarrollando estas ecuaciones, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(m l^2 \dot{\theta}\right) + mgl \sin(\theta) = 0$$

$$m l^2 \ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = 0$$

Dividiendo por ml^2, obtenemos la ecuación diferencial del modelo dinámico del péndulo simple:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0$$

Esta es la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo simple y su evolución temporal. Puede ser resuelta numéricamente para obtener la posición y la velocidad angular del péndulo en cualquier momento dado.

4 Diseño del Controlador P

El controlador proporcional (P) se define como:

$$u(t) = K_p \cdot (\theta_d - \theta(t))$$

Donde:

- $u(t)$ es la señal de control.
- K_p es la ganancia proporcional.
- θ_d es el ángulo deseado.
- $\theta(t)$ es el ángulo medido del péndulo en el tiempo t.

5 Simulación en Simulink

Utilizando el modelo dinámico y el controlador diseñado, simulamos el comportamiento del sistema en Simulink. Observamos cómo el sistema responde a diferentes entradas y ajustes en los parámetros del controlador.

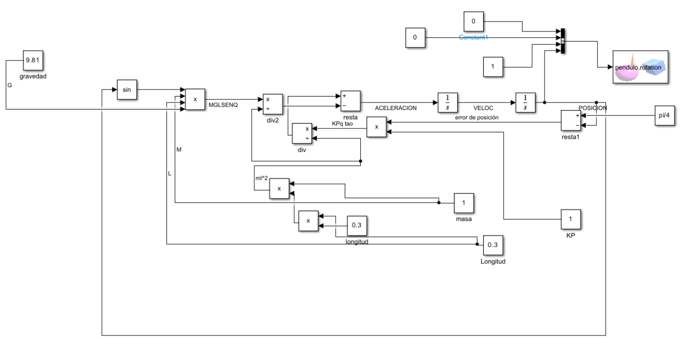

Figure 1: Simulación en Simulink

6 Integración de Todos los Sistemas

Finalmente, integramos todos los componentes anteriores en un único sistema que representa el péndulo controlado con el controlador P.

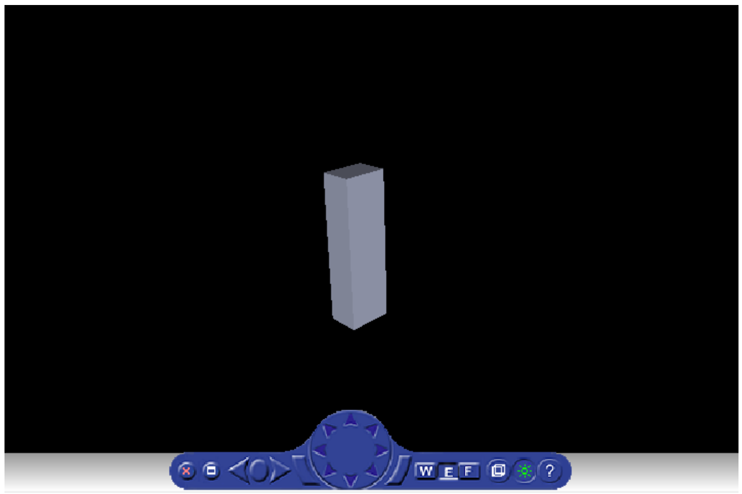

Figure 2: Integración de Todos los Sistemas

7 Conclusiones

En este reporte, hemos abordado el problema de controlar un péndulo simple utilizando un controlador proporcional (P). Hemos obtenido la cinemática directa, el modelo dinámico, diseñado el controlador y realizado simulaciones en Simulink. Este enfoque nos permite comprender mejor el comportamiento del sistema y diseñar estrategias de control efectivas.