更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

考研包过
www.Freekao.com

目 录

第一讲 极限

一 极限定义.....3
二 极限性质.....4
三 函数极限基本计算.....8
四 综合计算.....11
五 数列极限计算.....14
六 函数连续与间断.....16

第二讲 一元函数微积分

一 概念.....17
1. 导数.....18
2. 微分.....20
3. 不定积分.....21
4. 定积分.....23
5. 变限积分.....28
6. 反常积分.....29
二 计算.....29
1. 求导.....29
2. 求积.....33
三 应用.....40
1. 微分应用.....40
2. 积分应用.....43
四 逻辑推理.....43
1. 中值定理.....49
2. 等式证明.....50
3. 不等式证明.....51

第三讲 多元函数的微分学（公共部分）

一 概念.....51
1. 极限的存在性.....51
2. 极限的连续性.....52
3. 偏导数的存在性.....52
4. 可微性.....53
5. 偏导数的连续性.....54
二 计算.....54
三 应用.....56

第四讲 二重积分（公共部分）

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

一　概念与性质.....59
二　计算.....60
1. 基础题.....60
2. 技术题.....61
三　综合计算.....62

www.Freekao.com

第五讲　微分方程

一　概念及其应用.....63
二　一阶方程的求解.....64
三　高阶方程的求解.....66

第六讲　无穷级数

一　数项级数的判敛.....67
二　幂级数求收敛域.....69
三　展开与求和.....69
四　傅里叶级数.....71

第七讲　多元函数微分学

一　基础知识.....73
二　应用.....75

第八讲　多元函数积分学

一　三重积分.....76
二　第一型曲线、曲面积分.....78
1. 一线.....78
2. 一面.....79
三　第二型曲线、曲面积分.....80
1. 二线.....81
2. 二面.....83

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

Date.
Page.

考研包过
www.Freekao.com

第1讲. 极限 (18讲 第2讲)

大纲: 一. 极限定义. $\begin{cases} \varepsilon-\delta \\ \varepsilon-N \end{cases}$

二. 极限性质.

三. 函数极限基本计算.

☆四. 综合计算.

五. 数列极限计算.

六. 函数连续与间断.

一. 极限定义.

1. 函数: $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\varepsilon$ 时, 恒有,

$$|f(x)-A|<\varepsilon \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

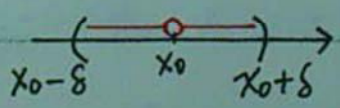
2. 数列: $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 恒有,

$$|x_n-a|<\varepsilon \iff \lim_{n\to\infty} x_n=a.$$

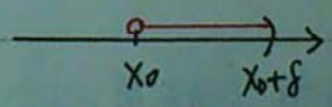
(专指 $+\infty$)

[注] ① $x\to$ "θ" 六种.

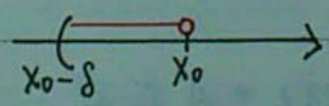
1° $x\to x_0$



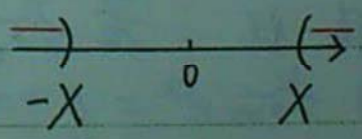
2° $x\to x_0^+$



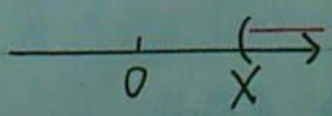
3° $x\to x_0^-$

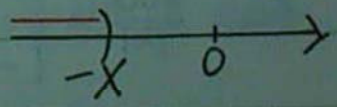


4° $x\to\infty$ $\quad |x|>X>0$



5° $x\to+\infty$

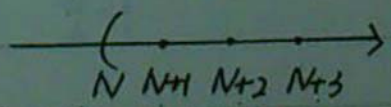




6° $x\to-\infty$

② $x\to$ "θ" 中的 5° 即 $n\to\infty$ 的情况

但表示离散点.



$n>N$.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

例：以下三种说法：

✗ (1) "$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{10}}$" $\Leftrightarrow$ "$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$"

✓ (2) "$\forall$ 正整数 N，$\exists$ 正整数 K，当 $0<|x-a|\le \frac{1}{K}$ 时，恒有 $|f(x)-A|\le \frac{1}{2N}$" $\Leftrightarrow$ "$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$"

✓ (3) "$\forall \varepsilon\in(0,1)$，$\exists$ 正整数 N，当 $n\ge N$ 时，恒有 $|x_n-a|\le 2\varepsilon$" $\Leftrightarrow$ "$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$"

正确个数为：(A) 0，(B) 1，(C) 2，(D) 3

[解] 关键有二：

1. $\forall \varepsilon>0$ 中 "ε" 形式可任意

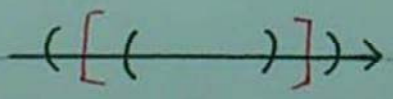
但必须满足 "可以任意小"

故 (1) 中 $|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{10}}$，$e^{\frac{\varepsilon}{10}}>e^{\frac{0}{10}}>1>0$

不满足任意小，不正确.

2. "$0<|x-x_0|<\delta$" $\Leftrightarrow$ "$0<|x-x_0|\le\delta$"

可用开区间内套闭区间，再内套开区间解释.



二. 极限的性质

1. 唯一性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，则 A 唯一.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\begin{cases}+\infty\\0\end{cases}$ $\Rightarrow$ 不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}=\begin{cases}1\\-1\end{cases}$ $\Rightarrow$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\\-\frac{\pi}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow$ 不存在.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

(4) $\lim\limits_{x\to 0}[x] = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}$ ⇒ 不存在.

考研包过 www.Freekao.com

[注] $[x]$ — 不超过 x 的最大整数.

注例: $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{2013}{x}\right]$

[解] 由于 $x-1<[x]\le x$，故，

$\frac{2013}{x}-1 < \left[\frac{2013}{x}\right] \le \frac{2013}{x}$，则，

$2013-x < x\cdot\left[\frac{2013}{x}\right] \le 2013$，而 $\lim\limits_{x\to 0} 2013-x = 2013$

根据夹逼准则，$\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{2013}{x}\right] = 2013$ #

[注] 夹逼准则不验证等号。

(5) 分段函数.

$$f(x)=\begin{cases} \varphi_1(x), & x>x_0 \\ a, & x=x_0 \\ \varphi_2(x), & x<x_0 \end{cases}$$

注例: 设 $f(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x>0 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

[解] $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2}{x^2}(1-\cos x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\cdot\frac{x^2}{2}}{x^2} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} \overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ # （与 $f(0)$ 无关）

2. (局部)有界性: 若 $\lim\limits_{x\to \odot} f(x) = A$ 存在，则，

在"$x\to\odot$"时（局部），$\exists M>0$，使 $|f(x)|\le M$。

(1) 会证明

$|f(x)-A|<\varepsilon$，$|f(x)| = |f(A)-A+A|$

则 $|f(x)| \le |f(x)-A| + |A|$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

(2) 会使用.

例：$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界：

A. $(-1,0)$　B. $(0,1)$　C. $(1,2)$　D. $(2,3)$

考研包过 www.Freekao.com

[分析] 有界（无界）的判别

① 理论型判别法：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，

$\Rightarrow$ $f(x)$ 有界，（在 $[a,b]$ 内）

☆ ② 计算型判别法：若 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，

且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 有界，（在 (a,b) 内）

③ 有界 $\pm$ 有界 $=$ 有界

有界 $\times$ 有界 $=$ 有界.

④ 无界：若 $\exists x_0$，使 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称无界。

[解] $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\frac{1\cdot\sin(-3)}{(-1)(-2)\,9}$ $\Rightarrow$ 存在

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1\cdot\frac{\sin(-2)}{-1\times 4}$ $\Rightarrow$ 存在.

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 有界 #

3. 保号性：若 $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x)\gtrless 0$，则在 $x\to\sigma$ 时，

必有 $f(x)\gtrless 0$

(1) 会证明：$|f(x)-A|<\varepsilon$，$\forall\varepsilon>0$

$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$，只要保证 $A-\varepsilon>0$

即 $\varepsilon<A$，取 $\varepsilon=\frac{A}{2}$，则.

$f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0$ #

注例1：设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$

（等价于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$）讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极值性.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[分析] "A/B 存在，$B\to 0$" $\not\Leftrightarrow$ "$A\to 0$"

"A/B 存在且 $\neq 0$，$B\to 0$" $\Leftrightarrow$ "$A\to 0$"

[解] $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0 \Rightarrow f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x)}{1-\cos x}>0$，而 $1-\cos x>0 \Rightarrow f(x)>0$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 极小值点。#

注例2：设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)=1$，则 $\exists\,\delta>0$，使：

$\left(\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\right)$

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内 ↑

B. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内 ↓

✓ C. $\forall x\in(0,\delta)$，$f(x)>f(0)$

D. $\forall x\in(-\delta,0)$，$f(x)>f(0)$

[分析] $f'(0)=1>0$

一点导数的正负 $\not\Rightarrow$ 任何区间（无论多小）函数的单调性

故 A. B 错.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}>0 \Rightarrow \dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$

故 $\forall x\in(0,\delta) \Rightarrow f(x)-f(0)>0 \Rightarrow f(x)>f(0)$

$\forall x\in(-\delta,0) \Rightarrow f(x)-f(0)<0 \Rightarrow f(x)<f(0)$

故 C 正确. #

[注] ① 反过来说：

在 "$x\to 0$" 时，$f(x)\begin{matrix}\geq 0\\ \leq 0\end{matrix}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\underset{\text{若}\exists}{=}A\begin{matrix}\geq 0\\ \leq 0\end{matrix}$

② "脱极限号法" 有两个：

不等式：$\lim f>0 \Rightarrow f>0$

等式：$\lim f=A \Rightarrow f(x)=A+\alpha(x)$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

三、函数极限的基本计算.

1. 化简先行

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+\sin x}\,(\sin x-x)}{\tan^3 x}=\sqrt{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\tan^3 x}$

考研包过 www.Freekao.com

提出极限 $\neq 0$ 的因式.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+5x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1-(\sqrt[3]{1+5x}-1)}{x}$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x\quad(x\to 0)$

$(1+\square)^\alpha-1\sim\alpha\square\quad(\square\to 0)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+5x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{3}=-\dfrac{1}{6}$

创造条件，使用等价无穷小替换.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

[错误做法] 原 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{[(1+\frac{1}{x})^x]^x}=\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^x}}=1$

$\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^y}{[(1+\frac{1}{x})^x]^y}=1$

不能人为创造"$x\to\square$"的先后顺序，即

在同一极限号后，"$x\to\square$"必须同时.

[正解] 原 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]}=e^{\frac{1}{2}}$ #

$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$

2. 基本计算. 7种.

第一组：$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty\cdot 0$

第二组：$\infty-\infty$

第三组：∞^0，0^0，1^∞

[注] 此处"0"$\neq 0$

"1"$\neq 1$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

第一组.

[例1] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

[解] 原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2-2\cos x}\left(e^{x^2-2+2\cos x}-1\right)}{x^4}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2+2\cos x}{x^4}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+2(-\sin x)}{4x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(x-x+\frac{1}{6}x^3\right)}{4x^3}=\dfrac{1}{12}$ #

考研包过
www.Freekao.com

[例2] 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdot\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

[解] 原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sqrt{\cos 2x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$

$=I_1+I_2+I_3$.

$I_1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

$I_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\left(1-\sqrt{\cos 2x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{(2x)^2}{2}}{x^2\cdot 2}=1$

I_3

解法① 利用 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$I_3=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2\left[1+(\cos 3x)^{\frac{1}{3}}+(\cos 3x)^{\frac{2}{3}}\right]}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 9x^2}{x^2}=\dfrac{3}{2}$

解法② $1-\sqrt[3]{\cos 3x}=-\left[(1+\cos 3x-1)^{\frac{1}{3}}-1\right]\sim-\frac{1}{3}(\cos 3x-1)$

$I=I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3$ #

[例3] $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

[分析] $0\cdot\infty=\begin{cases}\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}\\ \frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}\end{cases}$ "简单的"向下作分母.

简单: x^α, $e^{\beta x}$, ...

复杂: $\arcsin x$, $\ln x$, etc.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注例] $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha \ln x = (\ 0\ )$ $(\alpha>0)$

$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} \overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to0^+} x^{\alpha+1-1}$

$= -\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0$

$(\ \ln x \to (x-1) \quad (x\to1)\ )$

[解] $\lim\limits_{x\to1^-} \ln x\cdot\ln(1-x)$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \ln(1+x-1)\cdot\ln(1-x)$

$= \lim\limits_{x\to1^-} (x-1)\ln(1-x) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\ln(1-x)}{\frac{1}{x-1}}$

$\overset{令1-x=t}{\underset{x=1-t}{=}} -\lim\limits_{t\to0^+} t\cdot\ln t = 0$ #

第二组 $\infty-\infty$

1) 有分母，则通分.

[例] $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x} - \dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-\sin^2x\cdot\cos^2x}{x^4} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-\frac{1}{4}\cdot2\cdot2\cdot\cos2x\cdot\sin2x}{4x^3} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x-\frac{1}{2}\sin4x}{4x^3}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-\frac{1}{2}\cdot4\cdot\cos4x}{12x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2(1-\cos4x)}{12x^2}$

$= \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\cdot\frac{(4x)^2}{2}}{12x^2} = \dfrac{4}{3}$ #

2) 没有分母，创造分母，再通分（倒代换）

[例] $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) - 2\ln2\cdot x\right]$

$\overset{令x=\frac{1}{t}}{=} \lim\limits_{t\to0^+}\left[\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t}}\ln(2+t) - 2\ln2\cdot\frac{1}{t}\right]$

$= \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sqrt{4+t}\ln(2+t) - 2\ln2}{t}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{4+t}}\ln(2+t)+\sqrt{4+t}\,\frac{1}{2+t}}{1}$

$= \frac{1}{4}\ln2 + 2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln2+1$ #

[练] $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right] \overset{令t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$

$= \lim\limits_{t\to0} \dfrac{t-\ln(1-t)}{t^2} = \lim\limits_{t\to0} \dfrac{\frac{1}{2}t^2}{t^2} = \frac{1}{2}$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

第三组 0^0，∞^0，1^∞

[例1] $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$

[分析] $\lim u^v \overset{120\%}{=} e^{\lim v\ln u}$. （非常重要！）$\overset{\text{当}u\to1}{=} e^{\lim v(u-1)}$

考研包过 www.Freekao.com

[解] 原 $= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln(x-\sqrt{1+x^2})}$

$\overset{洛}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}} = e^0 = 1$ #

* $[\ln(x-\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ （记住！）

[例2] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}\cdot\ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}$

$\overset{洛}{=} e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 x}{-\sin x-\cos x}} = e^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = e^{\sqrt{2}}$. #

四. 函数极限的综合计算 ☆

1. 用好泰勒公式.

1) 熟悉于心，当 $x\to0$：

① $\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

② $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

③ $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

④ $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$

⑤ $\cos x = 1 + x^2/2 + x^4/4! + o(x^4) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

⑥ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

⑦ $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)$

⑧ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$

2) $o(x^m)$：任何一个 x^m 的高阶无穷小.

① $o(x^m) + o(x^n) = o(x^l)$ 其中 $l = \min(m, n)$

② $o(x^m)\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

③ $x^m\cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

④ $o(k\cdot x^m) = k\,o(x^m) = o(x^m)$ $(k\neq 0)$

考研包过
www.Freekao.com

☆ 3) 用泰勒公式应展开到 x 的几次方？

① $\frac{A}{B}$型：适用"上下同所原则"，即：

若分母（分子）是 x 的 k 次方，

则应将分子（分母）展开到 x 的 k 次。

[例] $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-(x+\frac{1}{3}x^3)+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{2}.\#$$

☆ ② A-B型：适用"幂次最低原则"，即：

将 A. B 分别展开到系数不相等的

x 的最低次幂为止。

[例1] 当 $x\to 0$ 时，$(\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}})$ 与 ax^b 为等价无穷小，求 a, b.

[解] 当 $x\to 0$：

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow \cos x-e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$$

$$\Rightarrow a=-\frac{1}{12},\ b=4.\#$$

[例2] $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x^2)}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

[解] $\ln(1+x^2) = x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$

$$(\sin x)^2 = [x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)]^2$$

$$= x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$$

$$= x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)$$

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\ln(1+x^2)}{\ln(1+x^2)\cdot(\sin x)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4))-(x^2-\frac{1}{2}x^4)}{x^4}$$

$$= \frac{1}{6}.\#$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例3] 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2\sin^2 x}=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+f(x)}{x^2\sin^2 x}$

[解] 原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\frac{1}{3}x^4+f(x)+o(x^4)}{x^2\sin^2 x}=\dfrac{2}{3}$. #

考研包过
www.Freekao.com

2. 已知某一极限，求另一极限，

见上例.

3. 已知极限，反求参数.

[例] 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求 a, b.

[解] 原 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a)x-(\frac{1}{2}+b)x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-a}{x}-(\frac{1}{2}+b)=2$.

$\Rightarrow a=1,\ b=-\frac{5}{2}$ #

4. 无穷小比阶. ☆

[例1] 当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim x^m$，且 $f(x)\neq 0$，证明 $\int_a^x f(t)dt\sim\frac{1}{m+1}x^{m+1}$

[解] $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_a^x f(t)dt}{\frac{1}{m+1}x^{m+1}}\ \dfrac{0}{0}\ \text{洛}\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^m}=1$ #

$\left(f(t)\sim t^m,\ \int_0^x f(t)dt\sim\int_0^x t^m dt=\frac{1}{m+1}t^{m+1}\Big|_0^x\right)$

[例2] 当 $x\to 0$ 时，$f(x)\sim ax^m$，$g(x)\sim bx^n$，其中 $f, g, a, b\neq 0$，

证 $f[g(x)]\sim ab^m x^{m\cdot n}$

[解] $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[g(x)]}{ab^m x^{m\cdot n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f[g(x)]}{a[g(x)]^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\cdot[g(x)]^m}{a[g(x)]^m}=1$

故 $f[g(x)]\sim ab^m x^{m\cdot n}$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例3] 设当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x-\ln(1+x)} \frac{\sin t^2}{t}dt \sim ax^b$，求 a,b

[解] $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt$，$g(x)=x-\ln(1+x)$

$f'(x)=\frac{\sin x^2}{x}\sim x$，故 $f(x)\sim \frac{1}{2}x^2$，而 $g(x)\sim\frac{1}{2}x^2$.

www.Freekao.com

$\Rightarrow f[g(x)]=\int_0^{x-\ln(1+x)}\frac{\sin t^2}{t}dt \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2=\frac{1}{8}x^4=ax^b$

$\Rightarrow a=\frac{1}{8}$，$b=4$. #

[例4] 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt$.

[解] $f(x)=\int_0^x \tan\sqrt{t}\,dt \sim \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$g(x)=x^2$

$\Rightarrow \int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,dt \sim \frac{2}{3}(x^2)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x^3$ #

[例5] 当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt$

[解] $f(x)=\int_0^x \sin t^3 dt \sim \frac{1}{4}x^4$

$g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3 dt \sim \frac{1}{4}\cdot(x^{\frac{1}{2}})^4=\frac{1}{4}x^2$. #

五. 数列极限的计算 "做懂基本问题即可"

1. 通项已知 $\{x_n\}$

1) 夹逼准则

2) 定积分定义

3) 幂级数求和

4) 级数收敛的必要条件.

[例1] $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

[解] 夹动分母

$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1)/(n^2+n+1)=\frac{1}{2}$.

$\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}n(n+1)/n^2+n+n=\frac{1}{2}$ 由夹逼准则

$\Rightarrow$ 原式 $=\frac{1}{2}$ #（n 为无限项时）

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例2] 设 $a>b>c>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}}$

[解] 项数为有项限时：

$1\cdot u_{max} \le u_1+u_2+\cdots+u_n \le n\cdot u_{max}$ $(u_i \ge 0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c^{-n}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}+c^{-n}} \le \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3c^{-n}}$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\frac{1}{c}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{c^{-n}} = \frac{1}{c}$

$\Rightarrow$ 原式 $= \frac{1}{c}$. #

[例3] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，是 $[a,b]$ 上一个点列

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}}$.

[解] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故有：

$0 < m \le e^{f(x_k)} \le M$.

$\Rightarrow n\cdot m \le \sum\limits_{k=1}^{n} e^{f(x_k)} \le n\cdot M$.

$\Rightarrow \sqrt[n]{m} \le \sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}e^{f(x_k)}} \le \sqrt[n]{M}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m} = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M} = 1$

$\Rightarrow$ 由夹逼准则，原式 $= 1$ #

2. 通项由递推式给出，$\{x_n\}$，$x_n = f(x_{n-1})$

1) $\{x_n\}$ 单调增，有上界，则必有极限.

2) $\{x_n\}$ 单调减，有下界，则必有极限.

[例1] 设 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$，$(n=1,2,\cdots)$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在并求其极限值.

[解] $a_n + \frac{1}{a_n} \ge 2$，$a_{n+1} \ge 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})}{a_n} \le 1 \Rightarrow$ 单调减，有下界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在

$A = \frac{1}{2}(A + \frac{1}{A}) \Rightarrow A = 1$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ #

考研包过 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例2] 设 $\{x_n\}$ 满足：$0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$n=1,2,\cdots$

I) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. II) 求极限.

考研包过 www.Freekao.com

[解] $x_2=\sin x_1 \Rightarrow 0<x_2<x_1<\pi$

于是假设 $0<x_n<\pi$，$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi$

I) $x_{n+1}<x_n$ $\{x_n\}$ 单调递减，且 $x_n>0$，有下界，

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

II) $A=\sin A \Rightarrow A=0$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ #

六. 连续与间断.

1. 初等函数在其定义区间内必连续，故.

只讨论两类特殊的点：

1) 无定义点（必间断）

2) 分段函数分段点（不一定间断）

2. 所谓连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 计算用.

或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ 证明用.

3. 所谓间断：$\underset{①}{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)}$，$\underset{②}{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)}$，$\underset{③}{f(x_0)}$

1) ①、② 均存在：

① ≠ ② ：跳跃间断点

① = ② ≠ ③ ：可去间断点

即：第一类间断点

2) ①、② 至少1个不存在：

"不存在" = "∞" ：无穷间断点

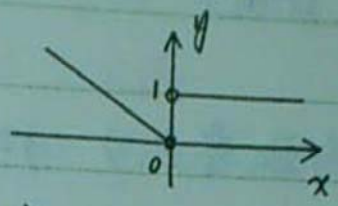
"不存在" = "振荡" ：振荡间断点

即：第二类间断点

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例] 间断点可否为极值点？

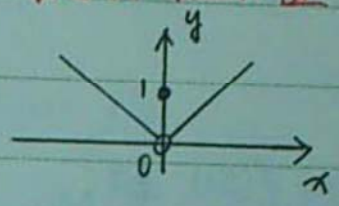
1) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -x & x\le 0\end{cases}$



跳跃间断点，0，为极小值点

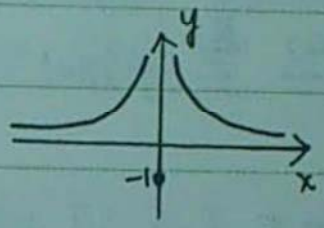
只需附近点值都比该点值大，即可为极小值.

2) $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ |x| & x\neq 0\end{cases}$



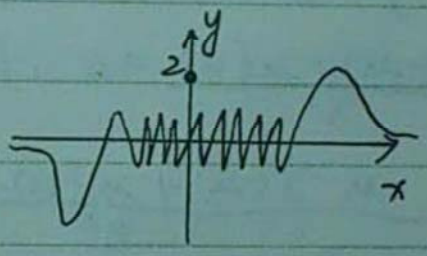
可去间断点，0为极大值.

3) $f(x)=\begin{cases}-1 & x=0\\ \frac{1}{x^2} & x\neq 0\end{cases}$



无穷间断点，0为极小值.

4) $f(x)=\begin{cases}2 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}$



振荡间断点，0为极大值.

综上，间断点都可以是极值点.

第二讲. 一元函数微积分. (18讲 3～7讲)

大纲 一. 概念

1)导数 2)微分 3)不定积分 4)定积分.

5)变限积分 6)反常积分.

二. 计算

1)求导 2)求积

三. 应用.

1. 微分应用：1)三点，2)两性，3)一线

2. 积分应用：1)求面积 2)求体积.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

四、逻辑推理（证明）

1. 中值定理

2. 等式证明（函数零点） $f(x)=0$

3. 不等式证明 $f(x)\neq 0$

考研包过
www.Freekao.com

一、概念

1. 导数.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\overset{若\exists}{=}f'(x_0)$$

或 $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{若\exists}{=}f'(x_0)$$

[例1] 设 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $[-\delta,\delta]$ 上有定义，$f(0)=1$，且满足 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，证明 $f'(0)$ 存在并求其值.

[解] $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-2x-\frac{1}{2}(-2x)^2+2xf(x)+o(x^2)}{x^2}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}-2=2\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-2=0$$

$\Rightarrow f'(0)=1$ #

[例2] 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是

（$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$）

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，$\Rightarrow f(0)=0$

B. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow f(0)=0$

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在 $\Rightarrow f'(0)$ 存在.

D. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，$\Rightarrow f'(0)$ 存在.

[Th] 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$ 存在. 则

$f(x_0)=0$ 且 $f'(x_0)=A$

[简证] $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)+\lim\limits_{x\to 0}f(-x)=0=2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$ B正确.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ A. C 正确.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)-f(-x)=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)-\lim\limits_{x\to 0} f(-x)=f(0)-f(0)=0$

不能证明什么. D 错误. #

考研包过 www.Freekao.com

[例3] 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(ax)-f(x)}{x}=b$

a.b 为常数，$|a|>1$，证明 $f'(0)$ 存在，并求其值.

[解] $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

脱极限号法

不等式. $\lim f>0 \Rightarrow f>0$.
等式. $\lim f=A \Rightarrow f=A+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$

则 $\frac{f(ax)-f(x)}{x}=b+\alpha(x)$，$\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$

$f(ax)+-f(x)=bx+\alpha(x)\cdot x=b(x)+o(x)$

$f(x)-f(\frac{x}{a})=b\frac{x}{a}+o(x)$

$f(\frac{x}{a})-f(\frac{x}{a^2})=b\frac{x}{a^2}+o(x)$

…… ……

$f(\frac{x}{a^{n-1}})-f(\frac{x}{a^n})=b\frac{x}{a^n}+o(x)$

$\Rightarrow f(x)-f(\frac{x}{a^n})=bx(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n})+o(x)$

$n\to\infty$，$\frac{x}{a^n}\to 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{x}{a^n})=\lim\limits_{\frac{x}{a^n}\to 0} f(\frac{x}{a^n})$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots\frac{1}{a^n})=\frac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a-1}$

$(\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{首项}{1-公比})$ ☆

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{bx\cdot\frac{1}{a-1}+o(x)}{x}=\frac{b}{a-1}$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注] "可导" ⇒ "连续".

点 ⇒ 点,

区间 ⇒ 区间

点 $\not\Rightarrow$ 区间.

考研包过
www.Freekao.com

[例] 狄式函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 点点不连续.

$f(x)=x^2D(x)=\begin{cases}x^2, & x\text{为有理数}\\ 0, & x\text{为无理数}.\end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot D(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Delta x}_{0}\cdot\underbrace{D(\Delta x)}_{\text{有界}}=0$$ 故 $f(x)$ (只) 在 0 点处连续.

一点可导 可推 一点连续.

2. 微分.

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

2) $A=f'(x_0)$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-A=0 \Rightarrow \Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$

$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$\Rightarrow dy|_{x=x_0}=\boxed{A\cdot\Delta x}=A\,dx$

"线性主部".

[例] 设 $f(x)$ 可导, $y=f(x^2)$ 当 x 在 $x=-1$ 处取 $\Delta x=0.1$ 时 Δy 的线性主部为 0.1, 求 $f'(1)$

[解] $y'(-1)\cdot\Delta x=0.1$, $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$y'(-1) = y'(x)\big|_{x=-1} = [f(x^2)]'\big|_{x=-1}$$
$$= f'(x^2)\cdot 2x\big|_{x=-1}$$
$$= f'(1)\cdot(-2)$$

$$f'(1)\cdot(-2)\cdot 0.1 = 0.1 \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

考研包过
www.Freekao.com

3. 不定积分

设 $f(x)$ 在 I 上有定义，若存在可导函数 $F(x)$，对 $\boxed{\forall x \in I}$ 都有 $F'(x) = f(x)$，则称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

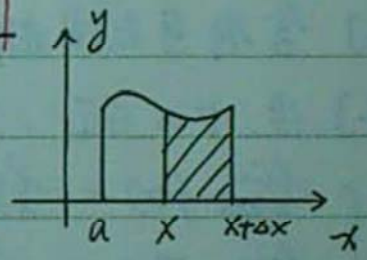
且 $\int f(x)dx = F(x) + C$

意味着，$\exists x_0 \in I$ 使 $F'(x_0) \neq f(x_0) \Rightarrow$ 推翻结论.

1) x_0，连续.

设 $f(x)$ 在 I 上连续，则 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 I 上可导，且 $F'(x) = f(x)$

[证] $$F'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\boxed{f(\xi)\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$
$$= \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$



[注] ① 积分 → 函数

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

$\int_a^x f(t)dt = f(\xi)(x-a)$

$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(\xi)\Delta x$

ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间

$\Delta x \gtrless 0$

② 函数 → 积分

"牛-莱公式"

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_a^b 1\,dx = x\big|_a^b = b-a$

$\int_a^x dt = t\big|_a^x = x-a.$

$\int_a^b x^y dy = \frac{x^y}{\ln x}\Big|_a^b = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$

$(x^y)'_y = x^y \ln x$

综上. $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$

不定积分. 定积分.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

2) x_0 跳跃 潜在考点.

[Th] 含有跳跃间断点的函数，在 I 上一定没有原函数.

意味着：在 x_0 处，$F'(x_0) \neq f(x_0)$

考研包过 www.Freekao.com

[证] 反证法. 假设 $\forall x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$，则

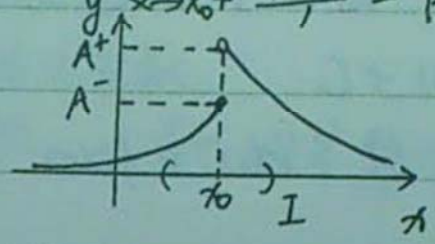
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} F'(x) = A^- \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} F'(x) = A^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)}{1} = F'_-(x_0) = A^-$$

$$F'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)}{1} = F'_+(x_0) = A^+$$

$$\Rightarrow F'_-(x_0) \neq F'_+(x_0)$$

$$\Rightarrow F'(x_0) \neq f(x_0)$$



3) 可去

[Th] 含有可去间断点的函数 $f(x)$，在 I 上没有原函数.

[证] 设 $\forall x \in I$，都有 $F'(x) = f(x)$，且

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x^+} f(x) = A \neq B = f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0^-} F'(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} F'(x) = A \neq B = F'(x_0) = f(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow F'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0^-} F'(x) = A \text{ 存在.}$$

$$F'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0^+} F'(x) = A \text{ 存在}$$

$$\Rightarrow F'_-(x_0) = F'_+(x_0) \neq F'(x_0) \Rightarrow F'(x_0) \text{ 不存在.} \quad F'(x_0) \neq f(x_0)$$

4) 无穷. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

[证] 假设 $\forall (x) \in I$，使 $F'(x) = f(x)$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} F'(x) = \infty$$

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \overset{洛}{=} \lim_{x\to x_0} F'(x) = \infty$$

故 $F'(x_0) \neq f(x_0)$.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

5) 振荡　　掌握计算

[例] 设 $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

[证] $x=0$ 为振荡点.

发现 $F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$

故 $F'(x)=f(x)$

综上：若 $F(x)$ 可导，即 $F'(x)$ 存在，只在 $F'(x)=\begin{cases}\text{连续}\\ \text{振荡}\end{cases}$ 成立.

以上即不定积分存在定理.

4. 定积分.

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\text{存在}}$

$\Updownarrow$ ①

$\boxed{f(x)\text{在}[a,b]\text{上连续}}$ $\xRightarrow{③}$ $\boxed{\int_a^b f(x)dx\ \text{存在}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x)\text{在}[a,b]\text{上有界}}$

$\boxed{f(x)\text{在}[a,b]\text{上有有限个间断点，且有界}}$ $\xRightarrow{④}$ $\boxed{\int_a^b f(x)dx\ \text{存在}}$

$\Updownarrow$ ②

$\boxed{f(x)\text{在}[a,b]\text{上可积}}$

在 $[a,b]$ 上.　可导 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 有界.

无界 $\Rightarrow$ 不可积.

$\int_a^x f(t)dt$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 $[a,x]$ 上可积.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

1) 概念

若等分

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}\cdot i\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \xrightarrow[b=1]{取a=0} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(0+\frac{1-0}{n}i\right)\cdot\frac{1-0}{n}$$

即：$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

给出解题步骤：（凑定积分定义）☆

① 提出 $\frac{1}{n} \leftrightarrow dx$

② 凑出 $\frac{i}{n} \leftrightarrow x$

③ $\frac{1}{n}$: 0~1 上的 dx

$\frac{i}{n}$: 0~1 上的 x

[例1] $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

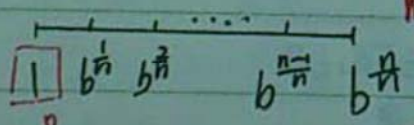
[解] $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{=x}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{=dx}$

$$= \int_0^1\frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \boxed{\ln 2} = \boxed{0.69}$$ 记.

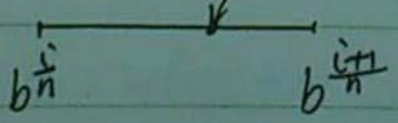
[例2] $\lim_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum_{i=0}^{n-1} b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$, $b>1$ （非等分）

[解] 原 $= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\boxed{b^{\frac{2i+1}{2n}}}\left(b^{\frac{i+1}{n}}-b^{\frac{i}{n}}\right) = \int_1^b \sin x\,dx$

$\frac{i}{n}\to x$ $\left[b^{\frac{i}{n}}, b^{\frac{i+1}{n}}\right]$ $\frac{1}{n}\to dx$



$b^{\frac{2i+1}{2n}} = \sqrt{b^{\frac{i}{n}}\cdot b^{\frac{i+1}{n}}}$ $\left[\frac{i+1}{n}, \frac{i}{n}\right]$



$= -\cos x\Big|_1^b$

$= \cos 1 - \cos b$

2) 不定积分与定积分的联系

[例] 在区间上 $[-1, 2]$ 上.

① $f(x) = \begin{cases} 2, & x>0 \\ 1, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$ 间断点1个 都有界 故没有原函数，有定积分（没有不定积分）

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

② $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2}-\underbrace{\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}}_{\Downarrow}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\infty\cdot|S|$ 无界振荡.

$\Downarrow$

$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 故有原函数，没有定积分

③ $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 没有原函数，没有定积分.

④ $f(x)=\begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x}+\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\Downarrow}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

有界振荡.

有原函数，有定积分.

综上，不定积分与定积分在存在性上没有直接关系.

[注] $\infty\cdot|S|\not\equiv\infty$ （也可能是无界振荡）

$0\cdot|S|=0$

所谓 ∞：$\lim\limits_{x\to\cdot} f(x)=\infty$

即当"$x\to\cdot$"时，所有的 x 都有 $f(x)=\infty$

才称 $f(x)$ 为"$x\to\cdot$"时的无穷大量.

所谓无界：当"$x\to\cdot$"时，没有任何两条 $y=M$，$y=m$ 能将其包住.

故：$\infty\Rightarrow$ 无界

$\infty\not\Leftarrow$ 无界

考研包过 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注]①在 I 上，若 $f(x)$ 连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导.

②在 I 上，若 $f(x)$ 可积，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 连续.

会证明.

考研包过 www.Freekao.com

[证] $|F(x+\Delta x)-F(x)|\geq 0$

$|F(x+\Delta x)-F(x)| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt\right|$

$\leq \int_x^{x+|\Delta x|} |f(t)|dt \leq \int_x^{x+|\Delta x|} M dt = M|\Delta x|$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0} M|\Delta x| = 0$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}|F(x+\Delta x)-F(x)|=0$

$\Rightarrow F(x)$ 连续 #

$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 必连续，a 可为 ∞

3) 性质.

① 单调性.

☆② 有界性.

[例] 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，则 B

A $\exists\delta>0$，当 $f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 有界，$f'(x)$ 在 $[0,\delta]$ 内也有界.

B. $\exists\delta>0$，当 $f'(x)$ 在 $[0,\delta]$ 内有界，$f(x)$ 在 $[0,\delta]$ 内有界

C. $\exists\delta>0$，当 $f'(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 有界，$f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 有界

D. $\exists\delta>0$，当 $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 有界，$f'(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 内有界.

[分析] [Th] 当 $f'(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 内有界时，

$f(x)$ 在 (a,b) 内也必有界.

[证] 在 $[x_0,x]$ 上对 $f(x)$ 使用拉氏中值定理 $\Rightarrow$

$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$

$\Rightarrow |f(x)| = |f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)|$

$\leq |f(x_0)|+|f'(\xi)|(x-x_0) < |f(x_0)|+M(b-a)=K$. #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

③ 周期性.

i) $f(x)$ 为可导的周期为 T 的函数.

则 $f'(x)$ 也为周期是 T 的函数.

[证] 令 $F(x) = f'(x)$

$$F(x+T) = f'(x+T) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = F(x) \#$$

ii) $f(x)$ 为可积的周期为 T 的函数.

则 $\int_a^x f(t)dt$ 不一定是周期为 T 的函数.

[证] 令 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

$$F(x+T) = \int_a^{x+T} dt\, f(t) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+T} f(t)dt.$$

$\Rightarrow$ 当 $\int_x^{x+T} f(t)dt = 0$ 时 $\int_a^x f(t)dt$ 是周期为 T 的函数.

④ 奇偶性.

i) 可导 $f(x)$ 为奇，则 $f'(x)$ 为偶.

ii) 可导 $f(x)$ 为偶，则 $f'(x)$ 为奇.

[证] i) $f(-x) = -f(x)$，令 $F(x) = f'(x)$

$$F(-x) = f'(-x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x} = f'(x) = F(x)$$

$\Rightarrow$ $F(x)$ 为偶函数.

iii) 可积 $f(x)$ 为奇，则 $F(x) = \begin{cases}\int_0^x f(t)dt & \text{为偶}\\ \int_a^x f(t)dt & \text{为偶}\end{cases}$

[证] $f(-x) = -f(x)$，$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \xlongequal{令t=-u} \int_0^x f(-u)\,d(-u)$.

$= \int_0^x f(u)du = \int_0^x f(t)dt = F(x) \Rightarrow$ 偶函数.

* 积分值与积分号无关

$\int_a^x = \int_a^0 + \int_0^x = c + \int_0^x$ — 偶+偶=偶.

考研包过 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

iv) 可积 $f(x)$ 为偶，则 $F(x)=\begin{cases}\int_0^x f(t)dt & \text{为 奇}\\ \int_a^x f(t)dt & \text{为 不确定}\end{cases}$

考研包过 www.Freekao.com

[例] 设 $f(x)$ 为奇函数，除 $x=0$ 处外，处处连续，$x=0$ 为第一间断点，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是.

① 连续

② $x=0$ 不可导、折点.

③ 偶函数.

设 $f(x)$ 为连续的奇函数，$a\neq 0$，则

A. $\int_a^y dx\int_0^x f(u)du$ 不确定.

B. $\int_0^y dx\int_a^x f(u)du$ 奇

C. $\int_0^y dx\int_a^x x^2 f(u)du$. 奇

D. $\int_a^y dx\int_a^x x f(u)du$ 对于 x 来说是常数，为偶. ⇒偶

偶函数个数为. 1

提到前面.

5. 变限积分

$F_1(x)=\int_a^x f(t)dt$,

$F_2(x)=\int_x^b f(t)dt$,

$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$

求导: $\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt\right)'_x = f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1'(x)$,

注意不是 t.

[例] 设 $f(x)$ 连续，$\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right)'_x=$ (　　)

[解] 令 $x^2-t^2=u$，$du=-2tdt$.

原 $=\left(-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{0} f(u)du\right)'_x=\left(\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)du\right)'_x$

注意上下限. 用 $u=x^2-t^2$ 代入.

$=\frac{1}{2}[f(x^2)\cdot 2x-0]=xf(x^2)$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

6. 反常积分.

1) 无穷区间的反常积分.

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ "$-\infty$" "$+\infty$" 称为奇点.

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ $f(x)$ 越小, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 越容易收敛.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. 一个反常积分中有且仅有一个奇点时,

才能讨论敛散性.

$= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$

收敛	+	收敛	=	收敛.
发	+	发	=	发
收	+	发	=	发
发	+	收	=	发

至少有一个发散, 就一定发散.

"$-\infty$"与"$+\infty$"不对称 (故在讨论奇偶性时也要注意) 好.

2) 无界函数的反常积分.

$\int_a^b f(x)dx$, 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = \infty$

称 a, 或 b 为瑕点 (奇点)

($-\infty$, $+\infty$ 和瑕点统称为奇点)

二. 计算.

1. 求导.

1) 复合求导,

$$(f[g(x)])' = \frac{df[g(x)]}{dx} = \frac{df[g(x)]}{dg(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

$$f'[g(x)] = \frac{df[g(x)]}{dg(x)}$$ 注意区别二者

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例] 设 $f(x)$、$g(x)$ 二阶可导，且 $g''(x)<0$，若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是（ B ）

考研包过 www.Freekao.com

A. $f'(a)<0$，B $f'(a)>0$

C. $f''(a)<0$　　D $f''(a)>0$

[分析] ① $f'(x_0)=0$

$f''(x_0)>0$

极小

② $f'(x_0)=0$

$f''(x_0)<0$

极大

i) $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，由费马定律得

$g'(x_0)=0$，则

$$(f[g(x)])'\big|_{x=x_0}=f'[g(x)]\cdot g'(x)\big|_{x=x_0}=0$$

ii) $$(f[g(x)])''\big|_{x=x_0}=f''[g(x)][g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x)\big|_{x=x_0}$$

$$=f'(a)\cdot \underbrace{g''(x_0)}_{<0}<0$$

$\Downarrow$

$f'(a)>0$

2) 分段导数求导.

[例] 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x^{\beta}}, & \beta>0,\ x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

讨论 α、β 满足何种条件时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

[分析] 求导规则 $\begin{cases} \text{分段点用定义} \\ \text{非分段点用公式.} \end{cases}$

[解] ① $x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\alpha-1}\sin\frac{1}{x^{\beta}}$$

若 $f'(0)$ 存在，$\alpha>1$，$f'(0)=0$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

② $x \neq 0$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin x^{-\beta} + x^{\alpha} \cdot \cos x^{-\beta} \cdot (-\beta) \cdot x^{-\beta-1}$

故 $f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin x^{-\beta} + (-\beta) x^{\alpha-\beta-1} \cos x^{-\beta} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

考研包过 www.Freekao.com

$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\alpha x^{\alpha-1} \sin x^{-\beta}}_{=0} - \beta x^{\alpha-\beta-1} \cos x^{-\beta} = 0$

若上式成立. $\alpha - \beta - 1 > 0 \Rightarrow \alpha > \beta + 1$

$\alpha > 1$ #

另 P55-P57 ③~⑥

3) 隐函数求导.

$F(x, y) = 0$ 的 $\frac{dy}{dx}$ 求法:

① 两边同时对 x 求导

② 公式: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

③ 两边求微分.

4) 对数求导法及幂指函数求导.

$u^v = e^{v \ln u}$.

[例] $y = \frac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x+5)}}{(x+1)^4} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{5}[3\ln(x-2) + \ln(x+5)] - 4\ln(x+1)$

(对数求导法)

5) 高阶导数 ☆

求 $f^{(n)}(x_0)$ $(n \geq 2)$ 步骤.

设 $y = f(x)$ 无穷阶可导

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

① 抽象展开

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

② 具体展开 P193

(1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad (-\infty<x<+\infty)$

(2) $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$

(3) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$

(4) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$

$(-1<x\le 1)$

☆ (5) $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$

☆ (6) $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$

$(-\infty<x<+\infty)$

(7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}+\cdots$

③ 展开式具有唯一性

通过比较 x^n 前的系数，得出 $f^{(n)}(x_0)$

[例1] 设 $y=x^3\cdot\sin x$，求 $x^{(6)}(0)$

[解] ① $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$

② $y=x^3(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots)$

$=x^4-\frac{1}{6}x^6+\cdots$

③ 由唯一性 $\Rightarrow \frac{y^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{1}{6} \Rightarrow y^{(6)}(0)=-\frac{1}{6}\cdot 6!=-120$ #

[例2] 设 $y=x^2\cos 2x$，求 $y^{(2014)}(0)$

[解] ① $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

② $y=x^2(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\cdots+\frac{(2x)^{2m}}{2m!}\cdot(-1)^m+\cdots)$

$=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{2^{2m}}{(2m)!}x^{2m+2}$

③ $n=2014$，$2m+2=2014$，$m=1006$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\Rightarrow \frac{f^{(2014)}(0)\cdot x^{2014}}{2014!} = \frac{(-1)^{1006}\cdot 2^{2012}\cdot x^{2014}}{2012!}$$

$$\Rightarrow f^{(2014)}(0) = 2^{2012}\times 2014\times 2013.$$

考研包过
www.Freekao.com

2. 求积.

1) 凑微分.

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f[g(x)]\,d[g(x)] = \int f(u)\,du.$$

2) 换元法.

$$\int f(x)\,dx \overset{x=g(u)}{=\!=} \int f[g(u)]\,d[g(u)]\Big|_{u=g^{-1}(x)}$$
$$= \int f[g(u)]g'(u)\,du\Big|_{u=g^{-1}(x)}$$

① 三角函数代换.

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \to x = a\sin t, & |t|<\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan t, & |t|<\frac{\pi}{2} \\ \sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec t, & 0<t<\frac{\pi}{2}\ (x>a) \end{cases}$$

② 恒等变形后作三角代换.

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \to \begin{cases} \sqrt{\varphi^2(x)+k^2} \\ \sqrt{\varphi^2(x)-k^2} \\ \sqrt{k^2-\varphi^2(x)} \end{cases}$$

③ 根式代换.

$$\sqrt[n]{ax+b},\ \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}},\ \sqrt{ae^{bx}+c} \to t.$$

$$\sqrt[n]{ax+b} \text{ 与 } \sqrt[m]{ax+b} \to \sqrt[l]{ax+b} = t$$

其中 l 为 m, n 的最小公倍数.

④ 倒代换. 当分母幂次比分子高两次以上时,

令 $x = \frac{1}{t}$.

⑤ 复杂函数的直接替换.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

3) 有理函数积分的分解原则 $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx \quad (n<m)$

① $Q_m(x)$ 的一次因式 $(ax+b) \to \frac{A}{ax+b}$

② $Q_m(x)$ 的 k 重因式 $(ax+b)^k \to$

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

③ $Q_m(x)$ 的二次因式 $(px^2+qx+r) \to \frac{Ax+B}{px^2+qx+r}$

④ $Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k \to$

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r}+\frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}$$

[例] $\int \frac{x^3+ax+b}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ 结果中不含对数函数，则 a、b 应满足（　　）

[解] 原式 $=\int \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}dx$

$A=0$，$C=0$

原式 $=\int \frac{B}{(x+1)^2}+\frac{D}{x^2+1}dx$

$$=\int \frac{Bx^2+B+Dx^2+2Dx+D}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$$

$$=\int \frac{(B+D)x^2+2Dx+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$$

$$\left.\begin{aligned} B+D&=1\\ 2D&=a\\ B+D&=b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &b=1\\ &a\text{任意}. \end{aligned}$$

#

4) 分部积分法.

$$\int u\,dv = u\cdot v-\int v\,du.$$

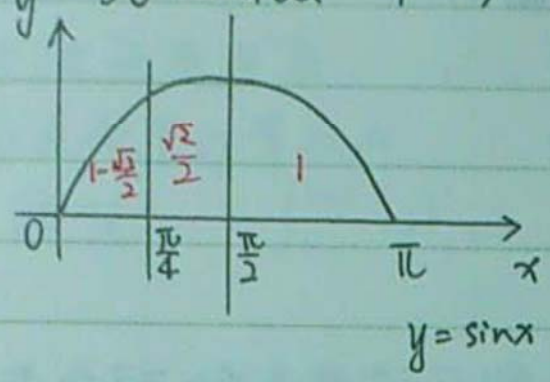
5) 重要公式. 熟记!

基本公式：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \sqrt{2}/2$

考研包过 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$, $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = 2$.



考研包过
www.Freekao.com

华里式公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx =$

$$\begin{cases} \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & n\text{为大于1的奇数} \end{cases}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$; $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \neq \int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx$

$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$.

[例1] $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\,dx$

[解] 原 $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,(1-\sin^2 x)\,dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$

[例2] $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,dx$

[解] 令 $x^2=\sin t$, $2x\,dx = \cos t\,dt$

原 $= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\cdot\cos t\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{32}\pi$.

[例3] $\int_{-2}^{2} x\ln(1+e^x)\,dx$

[分析] 令 $f(x) = x\ln(1+e^x)$

$f(-x) = -x\ln(1+e^{-x}) = -x\ln\frac{e^x+1}{e^x}$

$= -x\ln(e^x+1) + x\ln e^x = -x\ln(e^x+1)+x^2$.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注] 设 $f(x)$ 定义在 $(-l,l)$ 上. 则有

$F(x)=f(x)+f(-x)$ 为偶函数.

$G(x)=f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

$G(x)+F(x)=2f(x)$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}G(x)$

即. 任何一个函数可由一个奇函数与一个偶函数相加而成.

考研包过
www.Freekao.com

[解] $f(x)+f(-x)=x^2=F(x)$

$I=\int_{-2}^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}F(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}x^2dx$

$=\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2=\frac{8}{3}$ #

[例4] 设 $f(x)$ 连续.

I) 证明 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

II) 若 $f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx$, 求 $f(x)$

[解] I) 证: 区间再现公式

$\int_a^b f(x)dx \xlongequal{令t=a+b-x} \int_b^a f(a+b-t)\cdot(-dt)$

$=\int_a^b f(a+b-t)dt=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$\Rightarrow \int_0^{\pi}xf(\sin x)dx \xlongequal{令t=\pi-x} \int_0^{\pi}(\pi-t)\underbrace{f[\sin(\pi-t)]}_{f(\sin t)}dt$

$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$

$\Rightarrow 2I=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt$

$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin t)dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

II) 令 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=A$, 则

$f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+A \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{x}{1+\cos^2x}+A\right)\sin x\,dx=A$

$\Rightarrow A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{1+\cos^2x}\sin x\,dx=2\int_0^{\pi}x\cdot\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx$

$=2\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx=-\pi\int_0^{\pi}\frac{d\cos x}{1+\cos^2x}$

$=-\pi\arctan\cos x\Big|_0^{\pi}=-\pi\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi^2}{2}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+\cos^2x}+\frac{\pi^2}{2}$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

对于反常积分

I) 收敛还是发散

II) 在收敛下计算积分.

[注] 熟记: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p>1, & 收敛 \\ p\le 1, & 发散 \end{cases}$

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx \begin{cases} p<1, & 收敛 \\ p\ge 1, & 发散 \end{cases}$

[例5] 判别 $\int_1^{+\infty} \frac{(\arctan\frac{1}{x})^\alpha dx}{[\ln(1+\frac{1}{x})]^{2\beta}}$ 的敛散性.

[解] 当 $x\to+\infty$, $\arctan\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$

$\ln(1+\frac{1}{x})\sim\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty}\frac{(\arctan\frac{1}{x})^\alpha}{[\ln(1+\frac{1}{x})]^{2\beta}}dx \sim \int_1^{+\infty}\frac{(\frac{1}{x})^\alpha}{(\frac{1}{x})^{2\beta}}dx = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-2\beta}}$$

$\alpha-2\beta>1$ 时, 收敛.

$\alpha-2\beta\le 1$ 时, 发散. #

[例6] 已知 $\alpha>0$, 则对于反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 的敛散情况, 判断正确的是 ( )

A. 当 $\alpha\ge 1$ 时, 积分收敛.

B. 当 $\alpha<1$ 时, 积分收敛.

C. 敛散性与 α 的取值无关, 必收敛.

D. 敛散性与 α 的取值无关, 必发散.

[解] 取 $\varepsilon>0$, $\alpha<1$, 使 $\alpha+\varepsilon<1$.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to0^+} x^{\alpha+\varepsilon}\cdot\frac{\ln x}{x^\alpha}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} x^\varepsilon\ln x = 0.$$

$\Rightarrow \frac{\ln x}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 的低阶无穷大.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}dx$ 收敛 $\Rightarrow$ $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 更收敛.

$\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \infty$

$\Rightarrow$ $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{1}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大.

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ 发散 $\Rightarrow$ $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$ 发散.

考研包过
www.Freekao.com

[例 7] $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

$= \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}} \xlongequal[dx=\sec t\cdot\tan t\,dt]{令x-1=\sec t} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec t\cdot\tan t\,dt}{(\sec t)^4\cdot\tan t}$

$\cancel{= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^3 t}dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sin t}{(1-\sin^2 t)^2} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{(1+x)^2(1-x)^2}dx}$

$\cancel{= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{4}{(1+x)(1-x)}dx}$

$\cancel{= \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{(1+x)^2}dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{(1-x)^2}dx + \frac{1}{2}\cdot 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{1+x}dx + \frac{1}{2}\cdot 2\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1} \frac{1}{1-x}dx}$

$\cancel{= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2+\sqrt{3}}}$

$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\,d\sin t = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注] 在积分收敛的条件下，换元法（变量替换）可能实现定积分与反常积分的互化

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \text{收}.$$

考研包过
www.Freekao.com

[例] $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}}$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}}\right)\Big|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}) \ \#$$

[注] 熟记：☆ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$

☆ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$

[注] ① 瑕点（奇点）猫在区间中，要找出来并分开积分.

② $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(x)\Big|_a^{b^-}$

[例] $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi x) - \arctan(x)}{x}\,dx$

[解] $\arctan xy \Big|_{y=1}^{y=\pi} = \int_1^{\pi} \frac{1}{1+(xy)^2}\cdot x\,dy.$

$$\Rightarrow \text{原} = \int_0^{+\infty} dx \int_1^{\pi} \frac{dy}{1+(xy)^2} = \int_1^{\pi} \frac{1}{y}\arctan xy \Big|_{x=0}^{x=+\infty} dy$$

$$= \int_1^{\pi} \frac{1}{y}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) dy = \frac{\pi}{2}\ln y \Big|_1^{\pi} = \frac{\pi}{2}\ln\pi. \ \#$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

三. 应用

1. 导数应用. { 极值点, 最值点, 拐点..
单调性. 凹凸性.
渐近线.

考研包过
www.Freekao.com

(1) 极值与最值.

① 极值.

$\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$, 极小值点.

$x \in (x_0 - \delta, x + \delta)$ $< 0 \rightarrow x_0$, 极大值点.

② 最值 $\forall x \in I$, $x \neq x_0$

$\Delta f = f(x) - f(x_0) > 0$, $\Rightarrow x_0$ 为最小值点.

$< 0 \Rightarrow x_0$ 为最大值点.

☆ I内部的最值点, 一定是极值点.

③ 极值点与间断点的关系 (见前)

(2) 单调性与极值的判别

1° 一阶可导点是极值点的必要条件. (会证明)

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 且在点 x_0 处取得极值, 则必有 $f'(x_0)=0$

☆ 2° 判别极值的第三充分条件 (证明+使用)

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 且 $f^{(m)}(x_0)=0$ $(m=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n \geq 2)$ 则:

① 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值.

② 当 n 为偶数且 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 $f(x)$ 在 x_0 取得极小值.

[例] 设 $y=f(x)$ 是4阶微分方程.

$y^{(4)} - 3y''' + y' + e^{\sin x} = 0$

满足 $y'(x_0) = y''(x_0) = y'''(x_0) = 0$ 的解.

讨论 $y(x)$ 在 x_0 处的极值性.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[解] $y^{(4)}(x_0) - 3y'''(x_0) + y'(x_0) + e^{\sin x_0} = 0$

$\Rightarrow y^{(4)}(x_0) = -e^{\sin x_0} < 0$

$\Rightarrow$ x_0 为 $f(x)$ 的极大值.

考研包过
www.Freekao.com

(3) 凹凸性与拐点的判别

[Th] 判别凹凸性的第二充分条件.

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $f^{(m)}(x_0) = 0$，$(m = 2, \cdots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$ $(n > 2)$，则当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

[证] n 为奇数，令 $n = 2k+1$，构造极限.

$$\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{(x-a)^{2k-1}} \overset{洛}{=} \cdots \overset{洛}{=} \lim_{x\to a} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-1)!(x-a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f^{(2k)}(x) - f^{(2k)}(a)}{(2k-1)!(x-a)} = \frac{1}{(2k-1)!} \cdot f^{(2k+1)}(a) \neq 0$$

当 $f^{(2k+1)}(a) > 0$ 时，$\frac{f''(x)}{(x-a)^{2k-1}} > 0$，但 $x \to a^+$ 时，$f''(\overset{x}{\cancel{a}}) > 0$

$x \to a^-$ 时，$f''(\overset{x}{\cancel{a}}) < 0$，故 $(a, f(a))$ 为拐点. #

(4) 解~~反常积分~~渐近线的程序.

1) 找出无定义点 x_0.（定义区间的端点）

计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ x\to x_0^-}} f(x) \overset{?}{=} \infty$

若是，则 $x = x_0$ 为铅垂渐近线.

2) 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ -\infty}} f(x) \overset{?}{=} y_0$（存在）

~~若是，则计算 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ -\infty}} [f(x) - ax] \overset{?}{=} b$~~

若是，则 $y = y_0$ 为水平渐近线.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

(3) 计算 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\-\infty}} \frac{f(x)}{x} \overset{?}{=} a$.

若是，则计算 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\-\infty}} [f(x)-ax] \overset{?}{=} b$

若是，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

考研包过
www.Freekao.com

[例] 曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有几条？

[解] 1) $y=\sqrt{(4x+1)x}\ln\frac{2x+1}{x}$

$$\begin{cases}(4x+1)x\geq 0\\ 2x+1/x>0\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-\tfrac{1}{2})\cup(0,+\infty)$$

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-}\sqrt{4x^2+x}\ln\frac{2x+1}{x}=-\infty$

$\Rightarrow$ $x=-\frac{1}{2}$ 是一条铅垂渐近线.

$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}\ln\frac{2x+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x^2+x}[\ln(2x+1)-\ln x]$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{4x+1}\cdot\sqrt{x}\ln x=0$

$(\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0)$

故 $x=0$ 不是渐近线.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})=+\infty$

故没有水平渐近线.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\frac{1}{x}}\ln(2+\frac{1}{x})=2\ln2$.

故 $a=2\ln2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})-2\ln2x \overset{令x=\frac{1}{t}}{=} \lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{\frac{4}{t^2}+\frac{1}{t}}\ln(2+t)-\frac{2\ln2}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sqrt{4+t}\ln(2+t)-2\ln2}{t} \overset{洛}{=} \lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{2\sqrt{4+t}}\ln(2+t)+\frac{\sqrt{4+t}}{2+t}$

$=\frac{1}{4}\ln2+\frac{2}{2}=\frac{1}{4}\ln2+1$

故 $y=2\ln2x+\frac{1}{4}\ln2+1$ 为一条斜渐近线.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

同理可得 $y=-2\ln 2x-\frac{1}{4}\ln 2-1$ 也是一条斜渐近线

故 $y=f(x)$ 共有 3 条渐近线. #

考研包过
www.Freekao.com

求值域

[例] 求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域.

[解] 令 $x^2=t>0$, $\Rightarrow$ 求 $g(t)=e^{-t}\sin t$ 的值域.

$$g'(t)=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)\overset{令}{=}0$$

$\Rightarrow$ 驻点 $t_k=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k=0,1,2,\cdots$

$$g(t_k)=e^{-(k\pi+\frac{\pi}{4})}\sin(k\pi+\frac{\pi}{4})=(-1)^k\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-(k\pi+\frac{\pi}{4})}$$

其中 $g(t_0), g(t_2), g(t_4)\cdots>0$

最大者为 $g(t_0)=\sqrt{2}/2\, e^{-\frac{\pi}{4}}$

$g(t_1), g(t_3), g(t_5)\cdots<0$

最小者为 $g(t_1)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-\frac{5\pi}{4}}$

$g(0)=e^{-0}\sin 0=0$

$\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}\sin t=0$

故值域为 $[m,M]=[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}]$ #

2. 积分应用.(套公式) P102.

面积、体积、平均值、弧长.

四. 逻辑推理. (中值定理, 证明题)

1. 有界性定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $|f(x)|\le M$ $(M>0)$ (有界)

2. 最值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $m\le f(x)\le M$.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

☆3. 介值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则当 $m \le \mu \le M$ 时，

$\exists \xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\mu$.

考研包过 www.Freekao.com

[例] 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，证明 $\exists \xi \in [0,2]$

使 $2f(\xi) = \int_0^2 f(x)dx$

[解] $m \le f(x) \le M \Rightarrow \int_0^2 m dx \le \int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 M dx$

$\int_0^2 m\,dx = 2m$, $\int_0^2 M\,dx = 2M$.

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$，使

$\int_0^2 m\,dx \le 2f(\xi) = \int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 M dx$ #

4. 零点定理. 用于证明方程根.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则当 $f(a)\cdot f(b)<0$ 时，

$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f(\xi)=0$

☆5. 费马定理. (会证明)

设 $f(x)$ 满足在 x_0 点处 $\begin{cases} 1)\text{可导} \\ 2)\text{取极值} \end{cases}$，则 $f'(x_0)=0$.

[证] 不妨设 $f(x)$ 在 x_0 处取极大值.

$\Delta f = f(x) - f(x_0) < 0$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x\to x_0^+} \frac{\overset{<0}{f(x)-f(x_0)}}{\underset{>0}{x-x_0}} \le 0 \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x\to x_0^-} \frac{\overset{<0}{f(x)-f(x_0)}}{\underset{<0}{x-x_0}} \ge 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{且可导则 } f'(x_0)=0 \ \#$$

[例] 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 连续，证明 $\xi \in (0,2)$

使 $2f(\xi) = \int_0^2 f(x)dx$

[证] 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$，在 $(0,2)$ 上使用拉氏中值定理.

$\int_0^2 f(x)dx - \int_0^0 f(x)dx = f(\xi)(2-0)$ $\xi \in (0,2)$

$\Rightarrow \int_0^2 f(x)dx = 2f(\xi)$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

6. 罗尔定理.

设 $f(x)$ 满足以下三条 $\begin{cases} 1)\ [a,b]\text{上连续} \\ 2)\ (a,b)\text{内可导} \\ 3)\ f(a)=f(b) \end{cases}$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$

考研包过
www.Freekao.com

7. 拉格拉日中值定理.

设 $f(x)$ 满足以下两条 $\begin{cases} 1)\ [a,b]\text{上连续} \\ 2)\ (a,b)\text{内可导} \end{cases}$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

[常考] $a=0$，$b=x$，$[0,x]$

$f(x)-f(0)=f'(\theta\cdot x)\cdot x$

[形式] $f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$，$0<\theta<1$

则 $0<\frac{\xi-a}{b-a}<1$ $\xi=a+\theta(b-a)$，

[例] 见前.

☆ 8. 柯西中值定理.

设 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $\begin{cases} 1)\ [a,b]\text{上连续} \\ 2)\ (a,b)\text{内可导} \\ 3)\ g'(x)\neq 0 \end{cases}$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

[例] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 内可导，$0\le a\le b\le\frac{\pi}{2}$

证明 $\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使 $\frac{f'(\eta)}{\sin(\eta)}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$.

[证] ① $\frac{f(b)-f(a)}{-\cos b-(-\cos a)}=\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}$

② $\frac{f(b)-f(a)}{\sin b-\sin a}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$

$\Rightarrow \frac{①}{②}$: $\frac{\sin b-\sin a}{-\cos b+\cos a}=\frac{\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}}{\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}}$.

$\Rightarrow \cot\frac{a+b}{2}\cdot\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}=\frac{f'(\eta)}{\sin\eta}$.

$\Rightarrow \frac{f'(\eta)}{\sin\eta}\tan\frac{a+b}{2}=\frac{f'(\xi)}{\cos\xi}$ #.

JINGU

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

9. 泰勒公式.

(1) 拉氏余项. $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ —— 用于证明

(2) 佩氏余项. $o((x-x_0)^n)$ —— 用于计算.

考研包过 www.Freekao.com

$x_0=0$ 时 称麦克劳林公式.

(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$

(2) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n+o(x^n)$

10. 导数零点定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，当 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$ 时，

$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

[注] $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b)\text{内可导}\\ f'_+(a)\exists\\ f'_-(b)\exists\end{cases}$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Leftrightarrow\begin{cases}(a,b)\text{内连续}\\ f(a)=f(a+0)\\ f(b)=f(b-0)\end{cases}$

[证] *见到 $f'(a)$, $f'_+(a)$, $f'_-(b)$, $f'_x(x_0,y_0)$, 写定义！

不妨设 $f'_+(a)>0$, $f'_-(b)<0$

$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f(x)-f(a)>0$

$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow f(x)-f(b)>0$

$\Rightarrow$ $f(a)$, $f(b)$ 均不是最大值，故 $f(x)$ 的最大值取在 (a,b) 内，则必为极大值点. 根据费马定理 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[注] 题设条件中含相等关系，欲证 $f'(\xi)=0$，
则首选 罗尔及费马定理.

考研包过
www.Freekao.com

11. 导数介值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，若 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$，则
$\forall \mu$ 介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间，$\exists \xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\mu$

[证] 作 $F(x) = f(x) - \mu x$.

不妨设 $f'_+(a) < \mu < f'_-(b)$

1) $F'(x) = f'(x) - \mu$

$F'_+(a) = f'_+(a) - \mu < 0$

$F'_+(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{F(x)-F(a)}{x-a} < 0$

$\Rightarrow$

$F(x) - F(a) < 0$;

2) $F'_-(b) = f'_-(b) - \mu > 0$

$F'_-(b) = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{F(x)-F(b)}{x-b} > 0$

$\Rightarrow$

$F(x) - F(b) < 0$

3) 综上 存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f'(\xi)=\mu$.

12. 积分中值定理.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

13. 积分中值定理'

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

14. 推广的积分中值定理.

设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)$ 不变号.

证 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

考研包过
www.Freekao.com

[注] 当 $g(x)=1$ 时，即为 [12]

[证] $m \le f(x) \le M$，$g(x)$ 不变号. 不妨设 $g(x)>0$

$$\Rightarrow \int_a^b m g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \int_a^b M g(x)dx$$

$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

$$\Rightarrow f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \quad \xi \in [a,b] \ \#$$

[总结]

闭区间上连续函数的性质 $\left\{\begin{array}{l} 1)\text{有界性定理} \\ 2)\text{最值定理} \\ 3)\text{介值定理} \\ 4)\text{零点定理} \end{array}\right\}$ 只用不证.

微分中值定理 $\left\{\begin{array}{l} 5)\text{费马定理（会证）} \\ 6)\text{罗尔定理} \\ 7)\text{拉格朗日中值定理} \\ 8)\text{柯西中值定理} \\ 9)\text{泰勒公式} \end{array}\right\}$ 会用.

导数的中值定理 $\left\{\begin{array}{l} 10)\text{导数零点定理} \\ 11)\text{导数介值定理} \end{array}\right\}$ 会证会用.

积分中值定理. $\left\{\begin{array}{l} 12)\text{基本定理} \\ 13)\text{加强形式} \\ 14)\text{推广形式} \end{array}\right\}$ 会证会用.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

中值定理，大致出题角度

1. 欲证结论是：$\begin{cases} \text{高阶导数} & f''(\xi)<0 \\ \text{多个不同中值：} & \exists \text{不同的 } \xi_1, \xi_2 \in (a,b) \end{cases}$

考研包过 www.Freekao.com

则考虑将所给区间 (a,b) 人为划分成若干子区间.

(a,c_1)，(c_1,c_2)，(c_2,b)

在各个子区间多次使用中值定理.

[例1] 设 $\varphi(x)$ 二阶可导，$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3 \varphi(x)dx$，证：

$\exists \xi \in (1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$

[证] $\varphi(2)>\varphi(\eta)(3-2)$ $\quad \eta\in(2,3]$

① 对 $\varphi(x)$ 在 $(1,2)$ 上用拉氏中值定理 $\Rightarrow$

$\varphi(2)-\varphi(1)=\varphi'(\xi_1)(2-1) \Rightarrow$

$\varphi'(\xi_1)=\dfrac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0 \quad \xi_1\in(1,2)$

② 对 $\varphi(x)$ 在 $(2,\eta)$ 上用拉氏中值定理 $\Rightarrow$

$\varphi(\eta)-\varphi(2)=\varphi'(\xi_2)\cdot(\eta-2)$

$\varphi'(\xi_2)=\dfrac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0 \quad \xi_2\in(2,\eta)$

③ 对 $\varphi'(x)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 上使用拉氏中值定理.

$\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)=\varphi''(\xi)(\xi_2-\xi_1)$

$\varphi''(\xi)=\dfrac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$，$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)$

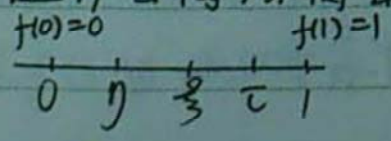
根据零点定理. $\varphi'(\xi_1)\varphi'(\xi_2)<0$，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使

$\varphi''(\xi)=0$ #.

[例2] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 上可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$

证明 $\exists$ 两个不同的 $\eta,\tau\in(0,1)$，使 $f'(\eta)\cdot f'(\tau)=1$

[证]



$f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

$f'(\tau)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}$

$$f'(1)\cdot f'(\tau) = \frac{f(\xi)(1-f(\xi))}{\xi(1-\xi)} \triangleq 1$$

考研包过
www.Freekao.com

① 即证是否有 $f(\xi)=\xi$ 成立.

令 $F(x)=f(x)-x$, $F(0)=f(0)-0=0$

② 是否有 $f(\xi)=1-\xi$ 成立,

令 $F(x)=f(x)-1+x$

$$\left.\begin{array}{l} F(0)=0-1+0=-1<0 \\ F(1)=1-1+1=1>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\xi\in(0,1) \text{ 使 } f(\xi)=1-\xi.$$

2. 函数中值定理 + 微分中值定理.

[例] 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上二阶导数连续, $f(0)=0$

证. 一定 $\exists\xi\in[-a,a]$ 使 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$

[分析] $\int_a^b f(x)dx \to f(x) \xrightarrow{\text{拉}} f'(x) \to f^{(n)}(x)$

泰勒

[证] $m\le f''(x)\le M$, $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

$$=f'(0)\cdot x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\underbrace{\int_{-a}^{a}f'(0)x\,dx}_{\text{奇函数}\,=0}+\int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2}x^2dx$$

由于 $m<f''(\xi)\le M \Rightarrow$

$$\int_{-a}^{a}\frac{m}{2}x^2dx\le\int_{-a}^{a}\frac{f''(\xi)}{2}x^2dx\le\int_{-a}^{a}\frac{M}{2}x^2dx$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{3}m\le\frac{a^3}{3}f''(\xi)\le\frac{a^3}{3}M.$$

$$\frac{a^3}{3}m\le\int_{-a}^{a}f(x)dx\le\frac{a^3}{3}M.$$

$\Rightarrow \exists\xi\in[-a,a]$ 使 $a^3f''(\xi)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx$ #

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

3. 零点问题. P98

$f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow f(\xi)=0$, $\xi\in(a,b)$

推广: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to b^-} f(x)<0$, 则 $\exists\,\xi\in(a,b)$

使 $f(\xi)=0$, 其中 a, b, α, β, 即可为有限数, 也可为 ∞

($\alpha=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\beta=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$)

考研包过
www.Freekao.com

4. 不等式问题. 1000题 P131. 第七章.

第3讲, 多元函数的微分学 (公共部分)

大纲: 一. 概念

1. 极限的存在性 (唯一性)
2. 极限的连续性.
3. 偏导数的存在性 ☆
4. 可微性 ☆
5. 偏导数的连续性

二. 计算: 微分法.

三. 应用: 极值与最值.

一. 概念. $f(x,y)$

1. 极限的存在性. (唯一性)

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

除"单调有界原则"或"洛比达法则"之外, 可将一元函数的陀极限的方法照搬

[例] 设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[解] $0 \le \left|(x^2+y^2)\sin\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le |x^2+y^2|$

$\lim\limits_{(x^2+y^2)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$，根据夹逼准则，

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} (x^2+y^2)\sin\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$ #

考研包过
www.Freekao.com

[例2] $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)$

[解] 取 $y=kx$，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to kx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to0}\frac{kx^2}{x^2(1+k^2)} = \lim\limits_{x\to0}\frac{k}{1+k^2}$

$k=0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$

$k=1 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$ $\Big\} \Rightarrow$

根据极限的唯一性，可得该极限不存在. #

[例3] $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$，$(x_0,y_0)=(0,0)$

[解] $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} x\sin\frac{1}{y} + \lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} y\sin\frac{1}{x} = 0+0 = 0$

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}\left(x\underset{\text{不存在}}{\sin\frac{1}{y}} + y\cdot\underset{0}{\sin\frac{1}{x}}\right) =$ 不∃.

同理. $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)$ 不∃. #

2. 极限的连续性.

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ 若间断，不讨论间断点分类.

3. 偏导数的存在性 ☆

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)} = f'_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

考研包过
www.Freekao.com

[注] $f'_x(x,y)$ 仅反映 x 的变化率，若 $f'_x(x,y) > (<) 0$，$(x,y)\in D$ 则 $f(x,y)$ 关于 x 为增(减)函数.

[例] 设 $y=f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$

[解] $f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{x^2}}-e^0}{x}=$ 不$\exists$.

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{\sqrt{y^6}}-e^0}{y}=0$

4. 可微性. ☆

1) 全增量.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$
$$= z(\Delta x, \Delta y)$$

2) $A\Delta x + B\Delta y$ $\begin{cases} A = f'_x(x,y) \\ B = f'_y(x,y) \end{cases}$

3) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0 \Rightarrow$ 可微.

$$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

$$f(\Delta x+x, y+\Delta y)-f(x_0,y_0)-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$$

$$\xrightarrow[\Delta y+y\to y]{\Delta x+x\to x} f(x,y)-f(x_0,y_0)-[A(x-x_0)+B(y-y_0)]=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$$

[例] 设连续函数 $z=f(x)$ 满足.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，求 $f'_x(0,1)$，$f'_y(0,1)$

[解] $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)-2x+y-2=0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(2x-y+2)=0$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x,y)=1=f(0,1)$

$f(x,y)-2x+y-2=o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$

$f(x,y)-f(0,1)-[f'_x(x,y)x+f'_y(x+y)(y-1)]=o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$

$=f(x,y)-f(0,1)-[2x+(-1)(y-1)]$

$A=2,\quad B=-1$ #

考研包过
www.Freekao.com

5 偏导数的连续性.

1) $f'_x(x_0,y_0)$ — 定义.

2) $f'_x(x,y)$ — 公式

3) $f'_x(x_0,y_0)\overset{?}{=}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_x(x,y)$

若相等, 则偏导数在这一点连续.

[小结] 5 偏导连续 $\Rightarrow$ 4 可微 $\Rightarrow$ 连续 $\Rightarrow$ 2 $\xRightarrow[\text{存在}]{\text{极限}}$ 1 $\Rightarrow$ 有界.

3 偏导存在 (可偏导)

熟记!

二. 计算. 多元微分法.

1) 显函数. $\begin{cases}\text{具体}\\ \text{抽象}\end{cases}$ 复合函数求偏导.

2) 隐函数的方程(组)确定的隐函数求偏导.

3) 偏微分方程变换.

4) 全微分计算

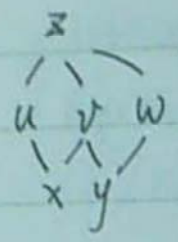
5) 偏导的逆运算.

注意以下三点:

1. 链式求导规则.

[例] $z=f(u,v,w)$, $u=u(x)$, $v=v(x,y)$, $w=w(y)$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com



$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

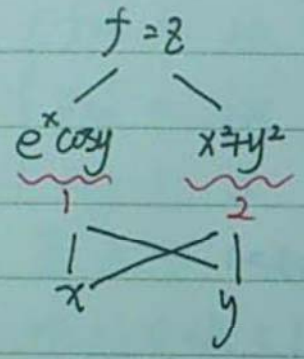
考研包过
www.Freekao.com

2、无论z对谁求导，也无论z已经求导了几阶，求导后的新函数仍具有与原函数相同的复合结构. ☆

3. 注意书写规范.

[例1] 设 $z=f(e^x\cos y,\ x^2+y^2)$ 其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

[解]



$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1'e^x\cos y + f_2'\cdot 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(f_1'e^x\cos y)}{\partial y} + \frac{\partial(f_2'\cdot 2x)}{\partial y} = I_1+I_2$$

$$I_1 = \frac{\partial f_1'}{\partial y}\cdot e^x\cos y + \frac{\partial(e^x\cos y)}{\partial y}\cdot f_1' = e^x\cos y\,(f_{11}''\cdot(-e^x\sin y)$$

$$+ f_{12}''\cdot 2y) + (-e^x\sin y)\cdot f_1'$$

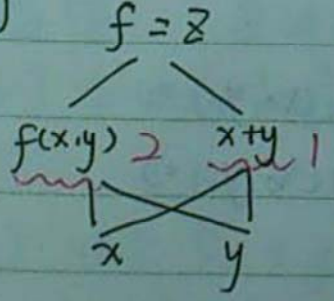
$$I_2 = 2x(f_{21}''(-e^x\sin y) + f_{22}''\cdot 2y)$$

$$\Rightarrow I = I_1+I_2 = -f_{11}''e^{2x}\cos y\sin y + 2f_{12}''e^x(y\cos y - x\sin y) + 4f_{22}''xy.$$

[注] 当 f 二阶偏导连续时，$f_{12}''=f_{21}''$，注意合并，

[例2] 已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(x+y,\ f(x,y))$ 求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$

[解]



$$\frac{\partial f(x+y,\ f(x+y))}{\partial x} = f_1'(x+y,\ f(x,y))\cdot 1 +$$

不相有.

$$f_2'(x+y,\ f(x,y))\cdot f_1'(x,y)$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\frac{\partial^2 f(x+y, f(x,y))}{\partial x \partial y} = f''_{11}(x+y, f(x,y)) + f''_{12}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_2(x,y) +$$
$$[f''_{21}(x+y, f(x,y)) + f''_{12}(x+y, f(x,y)) \cdot f'_2(x,y)] \cdot \underbrace{f'_1(x,y)}_{=0}$$
$$+ f'_2(x+y, f(x,y)) \cdot f''_{12}(x,y)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f(x+y, f(x,y))}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = \underbrace{f''_{11}(2,2)}_{\left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{(2,2)}} + \underbrace{f'_2(2,2) \cdot f''_{12}(1,1)}_{\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(2,2)} \cdot \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)}} \quad \#$$

隐函数求偏导. 关键问题是搞顺变量关系.

[例] P143 [例 8.9]

全微分. $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$.

求偏导逆运算.

[例] 设 $z = f(x,y)$ 所可偏导, 且 $\frac{\partial f}{\partial y^2} = 2$, $f(x,0) = 1$
$f'_y(x,0) = x$, 求 $f(x,y)$

[解] $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,0)} = 2y + \varphi_1(x)|_{(x,0)} = \varphi_1(x) = x$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x \Rightarrow f|_{(x,0)} = y^2 + xy + \varphi_2(x)|_{(x,0)} = x = 1$

$\Rightarrow f(x,y) = y^2 + xy + 1$ #

三. 应用.

1. 极值.

1) 函数取极值的必要条件.

设 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) $\begin{cases} \text{一阶偏导存在} \\ \text{取极值} \end{cases}$, 则 $\begin{cases} f'_x(x_0,y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$

2) 二元函数取极值的充分条件.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

记 $\begin{cases} f''_{xx}(x_0,y_0)=A \\ f''_{xy}(x_0,y_0)=B \\ f''_{yy}(x_0,y_0)=C \end{cases}$ 则 $\Delta=B^2-AC$ $\begin{cases} <0 \Rightarrow \text{极值} \begin{cases} A<0 \Rightarrow \text{极大值}, \\ A>0 \Rightarrow \text{极小值}. \end{cases} \\ >0 \Rightarrow \text{非极值}. \\ =0 \Rightarrow \text{该法失效，另选他法.} \end{cases}$

(定义法)

考研包过 www.Freekao.com

[例1] 设 $f(x,y)=kx^2+2kxy+y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，求 k 的取值范围.

[解] $f'_x=2kx+2ky \Rightarrow f'_x(0,0)=0$

$f'_y=2kx+2y \qquad f'_y(0,0)=0$

$\begin{cases} f''_{xx}=2k=A \\ f''_{xy}=2k=B \\ f''_{yy}=2=C \end{cases} \qquad \Delta=B^2-AC=4k^2-4k.$

1) 若 $\Delta<0$，$A>0$，即：$4k^2-4k<0$，$2k>0$

$\Rightarrow 0<k<1$

2) 若 $\Delta>0$，即 $4k^2-4k>0 \Rightarrow k<0$ 或 $k>1$，不是极值点.

3) 若 $\Delta=0$，即 $4k^2-4k=0 \Rightarrow k=0$，$k=1$，用定义.

当 $k=0 \Rightarrow f(x,y)=y^2\geq 0 \Rightarrow$ ~~$(0,0)$ 是极小值点~~. $f(x,0)\equiv 0$ 不是极值点

当 $k=1 \Rightarrow f(x,y)=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2\geq 0$

$\Rightarrow$ ~~$(0,0)$ 是极小值点~~. $f(x,-x)=0$ 不是极值点.

综上 $0<k<1$.

2. 最值.（条件极值）——拉格朗日乘法.

[例1] 求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

[解] 1) 令 $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$.

2) 求偏导，建立方程组.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\begin{cases} F_x' = 2x + 2\lambda x + \mu = 0 \\ F_y' = 2y + 2\lambda y + \mu = 0 \\ F_z' = 2z - \lambda + \mu = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \\ F_\mu' = x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

由对称性得 $x = y$

计算得

$P_1(-2, -2, 8)$

$P_2(1, 1, 2)$

故 $u_{max} = 8$，$u_{min} = 2$.

考研包过 www.Freekao.com

[例2] 求 $u = xy + 2yz$ 在约束条件下 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 的最大值与最小值

1) 令 $F(x, y, z, \lambda) = xy + 2yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 10)$

2)
$$\left.\begin{aligned} F_x' &= y + 2\lambda x = 0 \\ F_y' &= x + 2z + 2\lambda y = 0 \\ F_z' &= 2y + 2\lambda z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &xy + 2\lambda x^2 = 0 \\ &xy + 2zy + 2\lambda y^2 = 0 \\ &2yz + 2\lambda z^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$F_\lambda' = x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$ （边界方程）

$\Rightarrow 2(xy + 2zy) + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

$\Rightarrow 2u + 20\lambda = 0 \Rightarrow u = -10\lambda$.

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ 2\lambda & 1 & 0 \\ xy & y^2 & yz \\ 1 & 2\lambda & 2 \\ xz & yz & z^2 \\ 0 & 2 & 2\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0, & u_1 = 0 \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, & u_2 = 5\sqrt{5} \\ \lambda_3 = \frac{\sqrt{5}}{2}, & u_3 = -5\sqrt{5}. \end{cases}$$

故 $u_{max} = 5\sqrt{5}$，$u_{min} = -5\sqrt{5}$.

第四讲. 二重积分（公共部分）（18讲 第10讲）

大纲：一. 概念与性质.

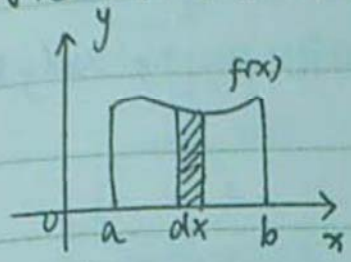
二. 计算结构
- 基础题
  - 直角系
  - 极系
- 技术题
  - 换序
  - 对称性
  - 形心公式的利用.

三. 综合计算.

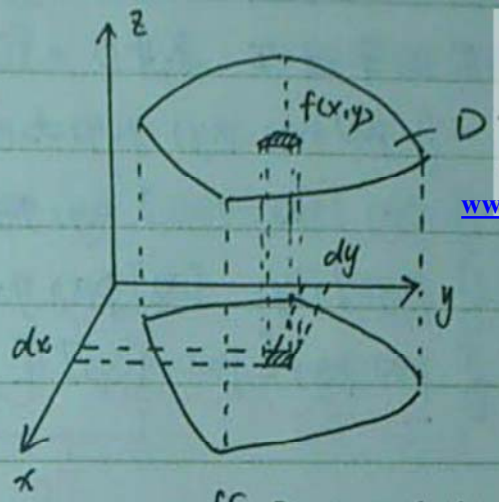
更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

一、概念与性质.

1. 对比定积分与二重积分.



$\int_a^b f(x)\,dx$



$\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

考研包过
www.Freekao.com

2. 对称性使用.

1) 普通对称性.

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 2\iint_{D} & f(x,y)=f(-x,y) \\ 0 & f(x,y)=-f(-x,y) \end{cases}$$

2) 轮换对称性

若将 $D: x \overset{对}{\underset{调}{\leftrightarrow}} y \Rightarrow D$ 不变，则 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma$.

① $\iint\limits_{D_1=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}\le 1} 3x^2+y^2\,dydx = \iint\limits_{D_2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\le 1} x^2+3y^2\,dxdy$

积分值与用何字母表示无关.

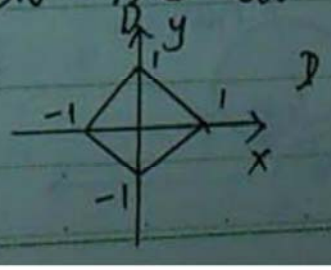
② $\iint\limits_{D=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\le 1} 2x^2+3y^2\,dxdy = \iint\limits_{D=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\le 1} 3x^2+2y^2\,dydx$

其中. $dxdy = dydx$ 、

[例1] 设 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$，常数 $\lambda>0$，计算 $I=\iint_D (e^{\lambda x}-e^{\lambda y})\,d\sigma$.

[解] $I=\iint_D e^{\lambda x}\,d\sigma - \iint_D e^{-\lambda y}\,d\sigma = \iint_D e^{\lambda x}\,d\sigma - \iint_D e^{-\lambda x}\,d\sigma$

$= \iint_D \underbrace{e^{\lambda x}-e^{-\lambda x}}_{奇}\,d\sigma. = 0$



更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例2] 设 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，$f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且有相同的单调性，其中 $D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$

判别 $I_1=\iint\limits_D p(x)f(x)p(y)g(y)\,dxdy$，$I_2=\iint\limits_D p(x)f(y)p(y)g(x)\,dxdy$ 的大小

考研包过 www.Freekao.com

[解] $I_1-I_2=\iint\limits_D p(x)[f(x)-f(y)]p(y)g(y)\,dxdy$

$=\iint\limits_D p(y)[f(y)-f(x)]p(x)g(x)\,dxdy$

$\Rightarrow 2(I_1-I_2)=\iint\limits_D \underbrace{p(x)}_{\ge 0}\cdot\underbrace{p(y)}_{\ge 0}\underbrace{[f(x)-f(y)]\cdot[g(y)-g(x)]}_{\le 0}\,dxdy.\le 0$

$\Rightarrow I_1\le I_2$

[例3] 计算 $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\,d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$

[解] $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\overset{\substack{x\to -y\\ y\to -x}}{=\!=\!=}\iint\limits_{|-y|+|-x|\le 1}\sin(-y^3-x^3)\,d(-y)\,d(-x)$

$=-\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\,dydx\quad\Rightarrow I=0$

二. 计算.

1. 基础题

1) 直角系. ① D为x型（可分为上下曲线）

$$I=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

② D为y型（可分为左右曲线）

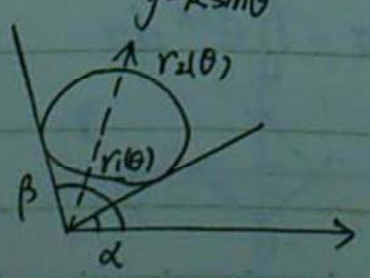
$$I=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

[总结] 后积先定限，限内画直线.

先交下曲线，后交上曲线.

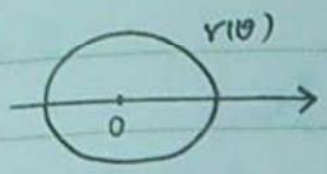
2) 极系 $\xleftrightarrow[y=R\sin\theta]{x=R\cos\theta}$ 直角系.

①



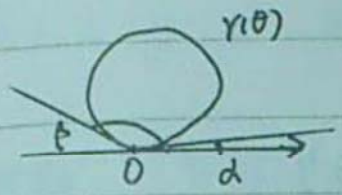
$$I=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

② 

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\cdot dr$$

考研包过
www.Freekao.com

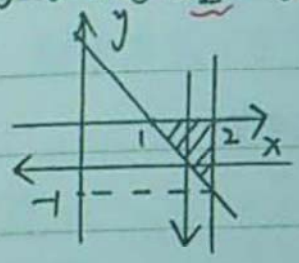
③ 

$$I=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\cdot dr.$$

2、技术题

1) 换序

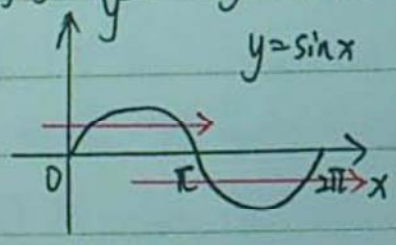
[例1] $\int_{-1}^{0}dy\int_{2}^{1-y}f(x,y)\,dx \xlongequal[\text{序}]{\text{换}} \int_1^2 dx\int_0^{1-x}f(x,y)\,dy$



$$I=-\int_1^2 dx\int_{1-x}^{0}f(x,y)\,dy.$$

注意积分上下限次序.

[例2] 设D：$y=\sin x$ 与x轴上介于 $x=0$ 与 $x=2\pi$ 上的区域.



[错误作法]：$I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi+\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx$

[正解] $I=\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\,dx.$

2) 对称性（见前）.

3) 对形心的利用.

[例] 计算 $I=\iint_D(x+y)\,d\sigma$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le x+y+1\}$

[分析] $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}$

形心 $(\bar{x},\bar{y})$，$\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,d\sigma}{\iint_D d\sigma}$

$\Rightarrow \iint_D x\,d\sigma=\bar{x}\cdot\iint_D d\sigma=\bar{x}\cdot A$，$\iint_D y\,d\sigma=\bar{y}\cdot\iint_D d\sigma=\bar{y}\cdot A$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[解] $I=\iint\limits_D x\,d\sigma+\iint\limits_D y\,d\sigma=\bar{x}\cdot\iint\limits_D d\sigma+\bar{y}\cdot\iint\limits_D d\sigma$

$=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$ #

考研包过
www.Freekao.com

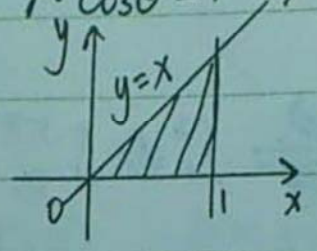
三 综合题.

[例1] 计算 $I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\,dr\,d\theta$

其中 $D=\{(\theta,r)\mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 0<r\le\sec\theta\}$

[解] $r=\frac{1}{\cos\theta}\Rightarrow r\cdot\cos\theta=1\Rightarrow x=1$

$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$



$1-r^2\cos2\theta=1-r^2(2\cos^2\theta-1)=1+r^2-2r^2\cos^2\theta$

$=1+x^2+y^2-2x^2=1-x^2+y^2$

$I=\iint\limits_D r\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}\cdot r\,dr\,d\theta$

$=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,d\sigma.$

$=\int_0^1dx\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dy$

$=\frac{1}{2}\int_0^1dx\int_0^x\sqrt{y^2+1-x^2}\,d(y^2+1-x^2)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^1(y^2+1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\,dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1 1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$=\frac{1}{3}\int_0^1dx-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$\overset{令x=\sin t}{=\!=}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2\cdot\frac{3}{2}}\,d\sin t$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,dt$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}$ #

第五讲，微分方程（18讲 第11讲）

大纲：一. 概念及其应用.

二. 一阶方程的求解.

三. 高阶方程的求解.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

四. 应用.

一. 概念及其应用.

1. $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

其中唯一不能少 $y^{(n)}$，决定方程所数.

2. 所数. 方程中未知函数导数的最高所数

3. 通解. $y = y(x, C_1, C_2, \cdots C_n)$

解中含有独立常数的个数等于微分方程的所数.

特解. $y = y(x)$

解中不含任意常数

[例1] 设 $y''' - y'' + e^{\sin x} = 0$ (*)，$y = y(x)$ 是为(*)式的满足 $y''(x_0) = 0$ 的解，讨论 $y(x)$ 在 $x=0$ 的性态.

A) 极大　　B) 极小　　C) 拐点　　D) 无法判断.

[解] $y'''(x_0) - y''(x_0) + e^{\sin x_0} = 0 \Rightarrow y'''(x_0) = -e^{\sin x_0} \neq 0$

→ 第二所导数开始都是0，最后一所导数 $\neq 0$ 且为奇数所 ⇒ 拐点.

[例2] 设 $y = y(x)$ 是方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 满足 $y(a) = y(b) = 0$ 的解. 其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $q(x) < 0$，求当 $x \in [a, b]$ 时 $y(x)$ 的表达式.

[解] 不妨设存在 x_1，使 $y(x_1) > 0$，则此最大值（极值点）为 x_0，则

$y''(x_0) + p(x_0)y'(x_0) + q(x_0)y(x_0) = 0$

$y''(x_0) = -q(x_0)y(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ 为极小值点. ⇒ 与假设矛盾，

故任给 x，$y(x) \leq 0$，同理可证 $\forall (x)$，$y(x) \geq 0$

综上所述 $y(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b]$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

二、一阶方程求解.

1. 变量可分离.

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y) = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dx}{f(x)} + C$$

考研包过
www.Freekao.com

[例] 求 $y' + y^2\tan x = \tan x$ 的通解.

[解] $\frac{dy}{dx} = \tan x(1-y^2) \Rightarrow \frac{dy}{1-y^2} = \tan x\,dx$

$$\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-y}dy + \int \frac{1}{1+y}dy\right) = -\ln|\cos x|$$

$$\frac{1}{2}\ln|1-y| + \frac{1}{2}\ln|1+y| = -\ln|\cos x| + \ln C_1$$

$$\ln\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \ln\frac{C_1}{|\cos x|} \Rightarrow \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{C_1^2}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y}{1-y} = \frac{\pm C_1^2}{\cos^2 x} = \frac{C}{\cos^2 x} \Rightarrow y = \frac{C-\cos^2 x}{C+\cos^2 x}$$ 其中C为非零常数.

[注] ① $\ln|*|$，$*$不确定正负，必须加"$|\ |$"

② $y^2 \neq 1$，$y \neq 1$，$y \neq -1$

$y=1$，$y=-1$ 是解，通解不一定是全部解.

考研 ~~瑕解~~ 不用补充

(奇解)

因为考纲要求只考通解.

2. 齐次方程，形如 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，$dy = \frac{du}{dx}\cdot x + u$.

$$\Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = f(u) - u.$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}$$

[例] 求 $y\,dx - (x+\sqrt{x^2+y^2})dy = 0$，$y>0$ 时的通解.

[解] [错误作法] $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \cancel{\frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}}$

[正解] ① 当 $x>0$ 时.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}$$，再用 $u = \frac{y}{x}$ 化解.

② 当 $x<0$ 时

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1+\left(-\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\right)}$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[另解] $\frac{dx}{dy} = \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{y} \Rightarrow x = x(y)$

$= \frac{x}{y} + \sqrt{(\frac{x}{y})^2+1}$ 令 $u = \frac{x}{y}$ 则 $x = uy$

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}\cdot y + u\cdot 1 = u + \sqrt{u^2+1}$

考研包过
www.Freekao.com

$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln(u+\sqrt{1+u^2}) = \ln y + \ln C$

$\Rightarrow u+\sqrt{1+u^2} = C\cdot y \Rightarrow \frac{x}{y} + \sqrt{1+(\frac{x}{y})^2} = Cy$. C为大于0的任意常数.

隐式解.

3. 一阶线性微分方程 (全部解为通解)

一般形式 $a(x)\cdot y' + b(x)y = c(x)$

标准形式 $y' + p(x)y = q(x)$

两边同乘 $e^{\int p(x)dx} \Rightarrow e^{\int p(x)dx}\cdot y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$

$v\cdot u' + v'\cdot u = (u\cdot v)'$

$\Rightarrow (ye^{\int p(x)dx})' = e^{\int p(x)dx}\cdot q(x)$

$ye^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx$

$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\cdot \int e^{\int p(x)dx} q(x)\,dx$

[例] 求 $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y}$ 的通解.

$y' + (\frac{1}{-2x})y = \frac{x^2}{2}\cdot y^{-1} \Rightarrow y\cdot y' + (-\frac{1}{2x})y^2 = \frac{x^2}{2}$ 令 $y^2 = z$.

$\Rightarrow z' = 2y\cdot y' \Rightarrow z' - \frac{1}{x}\cdot z = x^2$

$p(x) = -\frac{1}{x}$. $e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = \frac{1}{x}$

$z = e^x\cdot \int \frac{1}{x}\cdot x^2 dx = \frac{1}{2}e^x x^2 + Ce^x = y^2$

[注]. 有两种类型, 貌似二阶, 实可降价.

① $y'' = f(x, y')$ 缺y.

令 $y' = p$ 则 $y'' = p' \Rightarrow$

$p' = f(x, p)$

② $y'' = f(y, y')$ 缺x

令 $y' = p$ $y'' = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p \Rightarrow \frac{dp}{dy}\cdot p = f(y, p)$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

三、高阶方程求解.

1. $y''+py'+qy=0$ ，$p\cdot q$ 常数.

特征方程为 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ $\Delta=p^2-4q$.

① $\Delta>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2 \Rightarrow y_{通}=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$

② $\Delta=0$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda \Rightarrow y_{通}=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}$
$=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③ $\Delta<0$，$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i \Rightarrow y_{通}=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

[例] 设 $\cos x$ 与 xe^x 为某四阶常系数线性齐次微分方程的两个解. 求相应的首项系数为1的微分方程.

[解] $\cos x=e^{0x}(1\cdot\cos 1\cdot x+0\sin 1\cdot x)$

$\lambda_{1,2}=0\pm i \Rightarrow \lambda^2+1=0$

$xe^x=(0+1\cdot x)e^{1\cdot x}$

$\lambda_3=\lambda_4=1 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0$

$\Rightarrow (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)=0$

$\lambda^4-2\lambda^3+2\lambda^2+(-2\lambda)+1=0$

$\Rightarrow y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$

2. $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$ (*)

$y_{非齐通}=y_{齐通}+y^*_{特解}$.

设 $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)x^k$ 代回(*) $\Rightarrow y^*$

1) $e^{\alpha x}$ 照抄

2) $Q_m(x)$ 为 x 的 m 次一般多项式.

3) $k=\begin{cases}0, & \alpha\neq\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2\\ 1, & \alpha=\lambda_1 \text{ or } \alpha=\lambda_2\\ 2, & \alpha=\lambda_1=\lambda_2\end{cases}$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例] P181 [例 11.14]

考研包过
www.Freekao.com

四. 应用. P182.

第六讲 无穷级数 (18讲 第12讲)

大纲: 一. 数项级数的判敛.

二. 幂级数求收敛域

三. 展开与求和.

四. 傅里叶级数.

一. 数项级数的判敛.

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

① 收敛/发散?

② 若收敛. 计算.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\not\Leftarrow$

级数分类.

(常数项级数 $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \geq 0) & \text{— 正项级数.} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n \ (u_n > 0) & \text{— 交错级数.} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \ (u_n \text{符号无限制}) & \text{— 任意项级数.} \end{cases}$

函数项级数. $\begin{cases} \text{幂级数 } \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (\text{泰勒/麦克劳林}) \\ \text{傅里叶级数} \quad (\text{三角函数}) \end{cases}$

[例] 设 $a_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界 $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ $\{a_n\}$ 收敛

[解] "$\Rightarrow$" $\{S_n\}$ 单调↑, $\{S_n\}$ 收敛. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (∃) $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 收敛.

"$\Leftarrow$" 不成立, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow S_n = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n个} = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty \Rightarrow \{S_n\}$ 发散

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例2] 判别下列级数的敛散性.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$ $(p>0)$

[解] $u_n=\frac{1}{n^p}>u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^p}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0 \Rightarrow$ 收敛.

[注] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为单调递增级数.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\cdot n!}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=2e^{\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n}{n+1}}=2e^{-1\lim_{n\to\infty}n\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$=2e^{-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^2}}=2e^{-1}<1. \Rightarrow \text{收敛}.$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$

$x\to0$ $x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$ 收敛.

$\Rightarrow n\to\infty$ $\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{2n^2}$ 收敛

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 同收敛.

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt{1+x^3}\,dx}$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\int_0^n 1\cdot dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \text{ 发散.}$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\int_0^n x^{\frac{3}{2}}dx}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{5}n^{\frac{5}{2}}} \text{ 收敛.}$$

5) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

记 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

$\sqrt{n}+(-1)^n-(\sqrt{n+1}+(-1)^{n+1})$

$\overset{n\text{为偶}}{=}\sqrt{n}+1-(\sqrt{n+1}-1)=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}+2>0$

$n\to\infty\Rightarrow u_n<u_{n+1}$ 故莱氏失效.

[正解] 原式 $=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{n}-(-1)^n)}{n-1}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}/n-1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}=0$, 令 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$, 则

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}=\frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$f(x)\downarrow \Rightarrow f(n)\downarrow \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{n-1}\downarrow$，收敛.

原 = 收 + 发 = 发.

考研包过
www.Freekao.com

二. 幂级数的收敛域.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = S(x)$ 中心点 x_0

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ 中心点 0

求收敛域的程序

1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ⇒ 加绝对值. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$

2) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \text{令} < 1$
或 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} \text{令} < 1$ $\Big\} \Rightarrow x\in(a,b)$ 收敛区间

3) 单独讨论 $x=a$，$x=b$ 时的级数敛散性.

4) 综合 2). 3) 得到收敛域，即定义域.

[例] 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

[解] 令 $|u_n(x)| = \left|\frac{(x-2)^n}{n\cdot 3^n}\right| \geq 0$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{\sqrt[n]{n}\cdot 3} = \frac{|x-2|}{1\cdot 3} \overset{令}{<} 1$

$\Rightarrow x\in(-1,5)$

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot 3^n}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛.

当 $x=5$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n\cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. 发散.

故收敛域为 $[-1,5)$

三. 展开与求和.

依据. 泰勒展开式. P193 (1) ~ (7)

1. 展开.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

[例1] 将 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开为 $(x-3)$ 的幂级数，并求 $y^{(n)}(3)$

[解] $f(x)=\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2+(x-3)}+\frac{1}{5+(x-3)}$

$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x-3}{2})}+\frac{1}{5}\frac{1}{1-(-\frac{x-3}{5})}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{2^n}+\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{5^n}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)(x-3)^n$

$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{x-3}{2}\right|<1\\ \left|\frac{x-3}{5}\right|<1\end{array}\right\}\Rightarrow x\in(1,5)$

$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$

故 $f^{(n)}(3)=(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{5^{n+1}}\right)n!$ #

[例2] 将 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ 展开为 $(x-3)$ 的幂级数.

[解] $f(x)=\frac{1}{(x-3+2)^2}=\left(\int f(x)dx\right)'=\left(\int\frac{1}{(x-1)^2}dx\right)'$

$=\left(-\frac{1}{x-1}\right)'=\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x-3}{2})}\right)'$

$=\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot n\cdot(x-3)^{n-1}$

$\left|\frac{x-3}{2}\right|<1 \qquad x\in(1,5)$

2. 求和.

[例1] 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad |x|<1$

$\Rightarrow x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}=x\left(\int\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^{n-1}dx\right)'$

$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=x\cdot\frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$

$|x|<1 \qquad x\in(-1,1)$ 等比数列求和 $\frac{首项}{1-公比}$ $(n\to\infty)$

[例2] 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad |x|<1$

[解] $\left(\int S(x)dx\right)'=S(x)$，$\int S'(x)dx \neq S(x)$

$\int_a^x S'(t)dt=S(t)\Big|_a^x=S(x)-S(a)$

$S(x)=\int_a^x S'(t)dt+S(a)$ a 取中心点… $\begin{cases}0\\x_0\end{cases}$

$S(x)=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}\right)'dt+S(0)$

考研包过 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-t)\Big|_0^x = -\ln(1-x)$

[例3] 求 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n}$ $|x|<1$

① $x \neq 0$,

$S(x) = \frac{1}{x}\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1}\right)' dt + S(0)$

$= \frac{1}{x}\int \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$

$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot \ln$ 略

② $x=0$ $S(x)=1$

考研包过
www.Freekao.com

III. 傅里叶级数.

1. 狄利克雷收敛定理.

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期可积，在 $[-l,l]$ 上满足：

1) 连续或只有有限个第一类间断点.

2) 只有有限个极值点.

背!

$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为第一类间断点} \\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{为端点} \end{cases}$$

2. 实考的三种情况: 背! 展开.

(1) 普通周期函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx \\ a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3\cdots) \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

(2) 奇偶函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 上展开

当 $f(x)$ 为奇函数时，

$$\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3\cdots) \end{cases}$$

正弦级数

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

当 $f(x)$ 为偶函数时，
$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3\ldots) \\ b_n = 0 \end{cases}$$

考研包过 www.Freekao.com

余弦级数

(3) 非对称区间 $[0,l]$ 上的函数 $f(x)$ 展开.

① $\xrightarrow[\text{作奇延拓}]{\text{展开为正弦级数}}$ $[-l,l]$ 上的奇函数 $f(x)$

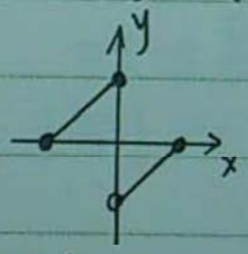
② $\xrightarrow[\text{作偶延拓}]{\text{展开为余弦级数}}$ $[-l,l]$ 上的偶函数 $f(x)$

[例1] 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0 \\ x-1 & 0<x\le 1 \end{cases}$ 的周期为 2 的傅式展开式为 $S(x)$

则 $S(-\frac{1}{2})=(\ \frac{1}{2}\ )$; $S(0)=(\ 0\ )$;

$S(1)=(\ 0\ )$; $S(\frac{3}{2})=(\ \frac{1}{2}\ )$.

[解]



连续点：$(-1,0)\cup(0,1)$

间断点：0

端点：$-1,1$

$S(-\frac{1}{2})=f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$; $S(0)=\left.\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\right|_{x=0}=0\neq f(0)=1$

$S(1)=\left.\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}\right|_{l=1}=0=f(1)=0$

$S(\frac{3}{2})=S(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

[例2] 将 $f(x)=1-x^2$ $(0\le x\le\pi)$ 展开为余弦级数.

并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

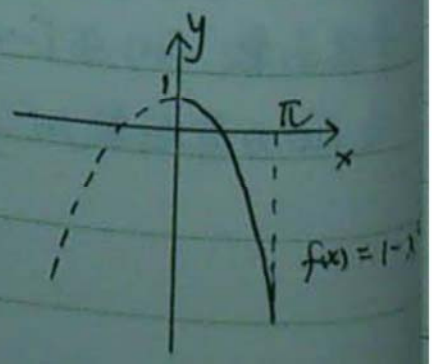
[解] 作偶延拓，$f(x)=1-x^2$ $(-\pi\le x\le\pi)$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)dx=2-\frac{2}{3}\pi^2$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-x^2)\cos n\pi dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx dx$

$=-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x^2 d\sin nx$



更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$= -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left(x^2\cdot\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin n\pi\cdot 2x\,dx\right)$

$= \frac{2}{n\pi}\cdot 2\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{4}{n\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\,d\cos nx$

$= -\frac{4}{n\pi}\cdot\left(x\cdot\cos n\pi\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)$

$= -\frac{4}{n\pi}\left(\pi\cdot(-1)^n\right) = (-1)^{n-1}\frac{4}{n^2}$

$b_n = 0$

考研包过
www.Freekao.com

第七讲. 多元函数微分学 (18讲 第13讲)

一. 基础知识. P209 ~ 213

1. 向量.

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z) = a_xb_x + a_y\cdot b_y + a_zb_z$

$= |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$, $\cos\theta = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$

$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0.$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = \left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right\| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

$\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

2. 平面

点法式 $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

3. 直线

点向式 $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

点到~~直线~~平面的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $Ax + By + Cz + D = 0$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

4. 空间曲线

一般式 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

参数方程 $\Gamma: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$

考研包过
www.Freekao.com

空间曲线在坐标面上的投影 ☆

以 Γ 对 xOy 平面为例

① 将 $\Gamma: \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中的 z 消去，得到 $\varphi(x,y)=0$

② Γ 在 xOy 平面上的投影曲线包含于 $\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

[例] 将空间曲线 $\begin{cases} 2z-y=0 \\ x^2+y^2+z^2-yz=1 \end{cases}$

投影至 xOy 面，求其投影曲线，及所围区域.

[解] $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\frac{5}{4}x_2^2+x_3^2-x_2x_3$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $|\lambda E-A|=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$

$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=1$

$\Rightarrow$ 椭圆二次型.

$+,+,+ \Rightarrow$ 椭球面类.

$+,+,- \Rightarrow$ 单叶双曲面类

$+,-,- \Rightarrow$ 双叶双曲面类.

$\left.\begin{array}{l} z=\frac{y}{2} \\ x^2+y^2+\frac{y^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ $D=\begin{cases} x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1 \\ z=0 \end{cases}$

旋转曲面.

$C: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 沿 x 轴旋转 $\Rightarrow f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

$C: \begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 沿 y 轴旋转 $\Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$

绕着谁转，谁就不变.

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

二. 应用. P215. (背)!

考研包过 www.Freekao.com

[例1] 设P点为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点. 若S在点P处的切平面与 xoy 面垂直, 求点P的轨迹C.

[解] $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1=0$

$F'_x=2x$, $F'_y=2y-z$, $F'_z=2z-y$

$\vec{n}\perp\vec{k} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{k}=2z-y=0$

$\begin{cases}\vec{k}=(0,0,1)\\ P(x,y,z)\\ \vec{n}=(2x,2y-z,2z-y)\end{cases}$

$$C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1\\ 2z+y=0\end{cases}$$

方向导数:

[例2] $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

[解] $z'_x(0,0)=$ 不∃. $z'_y(0,0)=$ 不∃.

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{z(0+t\cos\alpha,\ 0+\cancel{t\sin}\ t\sin\alpha)-z(0,0)}{t}$$

$$=\frac{\sqrt{t^2}}{t}=1>0$$

5 偏导连续 $\Rightarrow$ 4 可微 $\Rightarrow$ 3 偏导存在 $\Rightarrow$ 2 连续 $\Rightarrow$ 1 极限存在 $\Rightarrow$ 有界.

4 可微 $\Rightarrow$ 2 连续

4 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在 (单侧导数)

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

第八讲. 多元函数积分学 (18讲. 第14~16讲)

一. 三重积分.

二. 第一型曲线, 曲面积分

三. 第二型曲线, 曲面积分.

考研包过
www.Freekao.com

一. 三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV$

1. 基础计算.

1) 直角系 $dV = dxdydz$

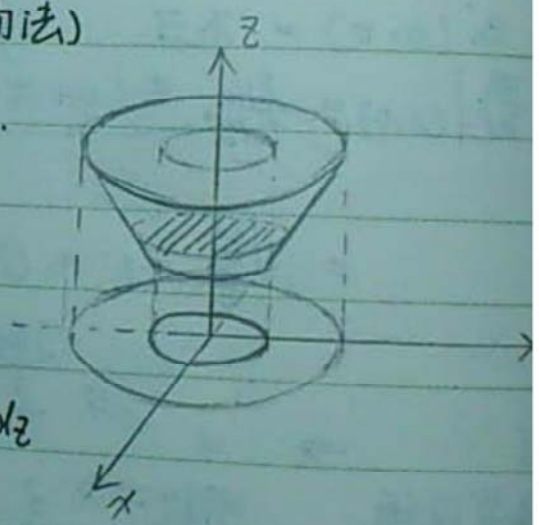
2) 柱面系 $dV = d\theta \cdot r \cdot dr \cdot dz$

☆ 积分法.

(1) 先一后二法 (先z后x,y) (穿线法)

(2) 先二后一法 (先x,y后z) (截面法)

[例] 求 $\iiint\limits_{\Omega} z dV$ 其中 Ω: $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z=1 \\ z=2 \end{cases}$ 所围成.



[解] 先一后二.

$$I = \iint\limits_{D_{xy}: x^2+y^2\le 1^2} ds \int_1^2 z\,dz + \iint\limits_{D_{xy}: x^2+y^2\le 1^2} ds \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z\,dz$$

$$= \frac{15}{4}\pi.$$

[另解] 先二后一

$$I = \int_1^2 dz \iint\limits_{D_{xy}: x^2+y^2\le z^2} z\,d\sigma = \int_1^2 z\,dz \cdot \pi z^2 = \int_1^2 z^3 dz$$

$$= \frac{z^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{15}{4}\pi. \#$$

3) 球面系 "$r \to \varphi \to \theta$" (积分次序)

$$I = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} f \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$$

记!

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

二重　　三重.

考研包过
www.Freekao.com

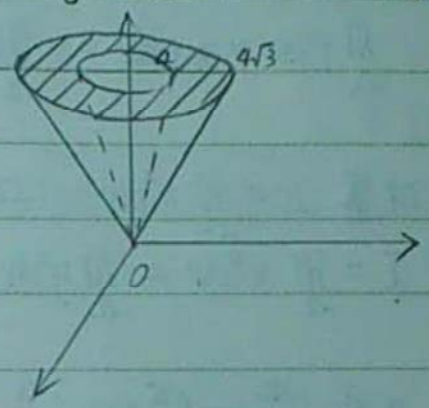
[例] 计算 $I = \iiint\limits_{\Omega} z\,dV$，其中 $\Omega = \{(x,y,z) \mid z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}z,\ 0 \le z \le 4\}$

[解] $z = r\cos\varphi = 4$

$\Rightarrow r = \dfrac{4}{\cos\varphi}$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{4}{\cos\varphi}} r^3\cos\varphi\sin\varphi\,dr$$

$= 128\pi$ #



2. 技术题

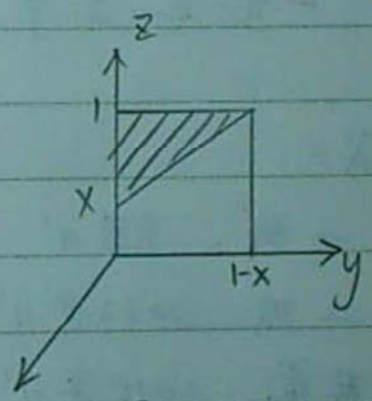
1) 换序

[例] $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \dfrac{\sin z}{z} dz$

[解] "两个两个换"　　$\int dx \int dy \int dz$

x 为常数 —— $\int dx \int dz \int dy$

y 为常数 —— $\int dz \int dx\, dy$



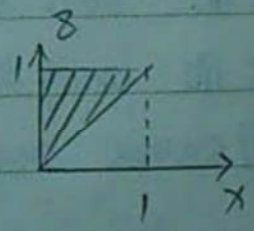
$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^{z-x} \frac{\sin z}{z} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin z}{z} dz \int_0^z dx \int_0^{z-x} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin z}{z} dz \int_0^z (z-x)\,dx$$

$$= -\int_0^1 \frac{\sin z}{z} \cdot \frac{(z-x)^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=z} dz$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 z\sin z\,dz = \frac{1}{2}(\sin 1 - \cos 1)$$



2) 形心公式.

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} x\,dV}{\iiint\limits_{\Omega} dV} \Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} x\,dV = \bar{x}\cdot V_{\Omega}.$$

[例] 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (2x-y)\,dV$.　$\Omega: (x-1)^2+y^2+(z-3)^2 \le 1$.

$$I = 2\iiint\limits_{\Omega} x\,dV - \iiint\limits_{\Omega} y\,dV = 2\bar{x}\cdot V_{\Omega} - \bar{y}\cdot V_{\Omega} = 2\cdot 1\cdot \frac{4}{3}\pi\cdot 1^3 - 0 = \frac{8}{3}\pi.$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

3) 对称性.

① 普通对称性.

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0,\ f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

考研包过
www.Freekao.com

② 轮换对称性. 若将 Ω 中 x, y 对调, Ω 不变, 则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_\Omega f(y,x,z)\,dV$$

[例] 计算 $I = \iiint_\Omega x^2 dV$, $\Omega = x^2+y^2+z^2 \le a^2$ $(a>0)$

[解] $I = \iiint_\Omega x^2 dV = \iiint_\Omega y^2 dV = \iiint_\Omega z^2 dV = \frac{1}{3}\iiint_\Omega x^2+y^2+z^2\,dV$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{4}{15}a^5 \quad \#$$

二. 区三.

一线. 只考 4'

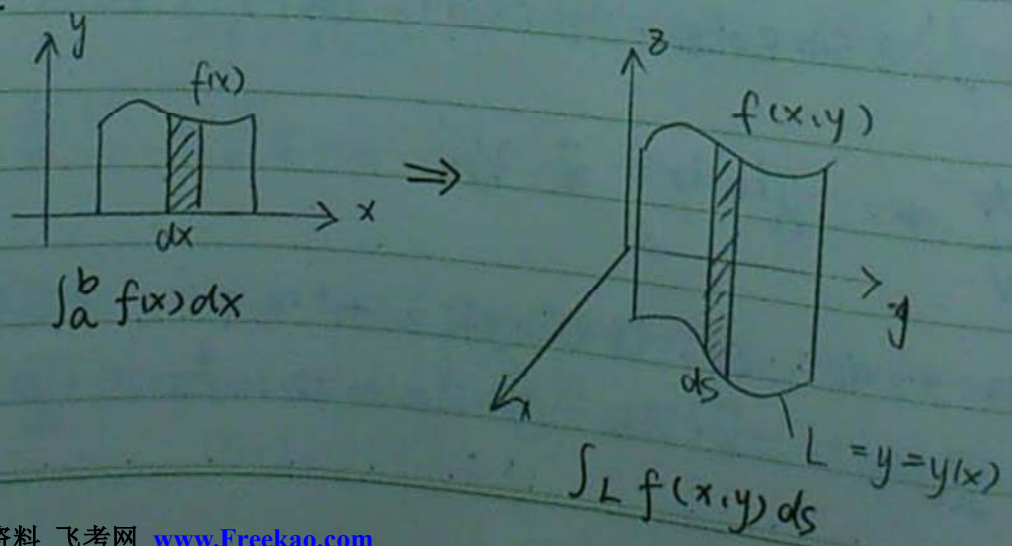
二线 2012年 11'

一面 2010年 11'

二面 2009年 11' { 高斯 2009 / $\boxed{\text{基本}}$ 预测 2013.

斯 Stokes 2011年 4'

一线.



$\int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad$ $\int_L f(x,y)\,ds$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

一1. 基本计算法.

1) $\int_L f(x,y)\,ds = \int_L f(x, y(x))\,ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$\left(\int_L \cdot 1\,ds = L_s\right)$

考研包过 www.Freekao.com

2) $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

3) $L: r = r(\theta) \quad \alpha \le \theta \le \beta$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

2. 形心公式. (略)

3. 对称性.

1) 普遍对称性

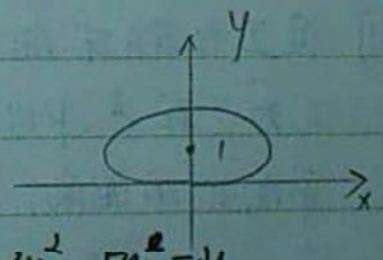
$$\int_L f(x,y)\,ds = \begin{cases} 2\int_L, & f(x,y) = f(-x,y) \\ 0, & f(x,y) = -f(-x,y) \end{cases}$$

2) 轮换对称性.

若将 L: x, y 对调, L不变, 则 $\int_L f(x,y)\,ds = \int_L f(y,x)\,ds$.

[例] $I = \oint_L \left(x\cdot\sin\sqrt{x^2+y^2} + x^2+3y^2-5y\right)ds$

L: $\frac{x^2}{3} + (y-1)^2 = 1$, 其周长为 a.

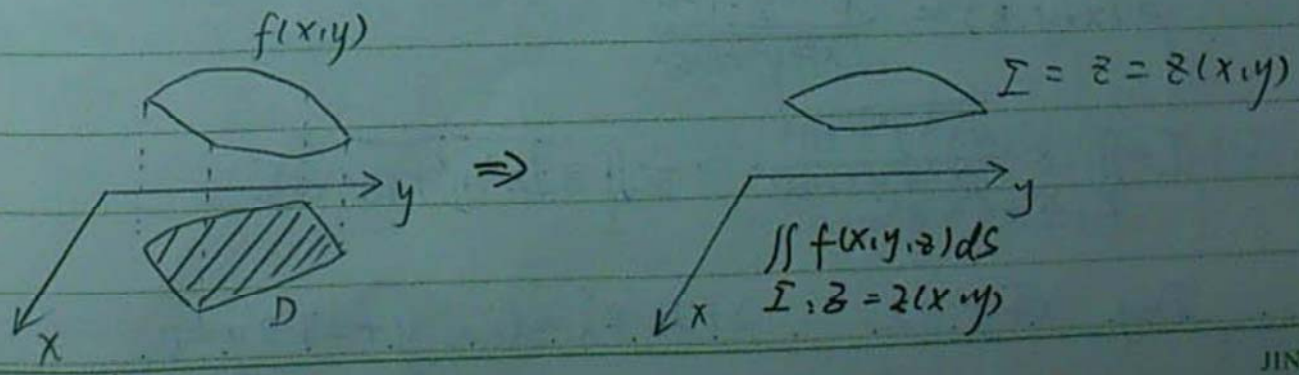


[解] $\oint_L x\sin\sqrt{x^2+y^2}\,ds = 0$

$\frac{x^2}{3} + (y-1)^2 = 0 \Rightarrow x^2+3y^2-6y = 0 \Rightarrow x^2+3y^2-5y = y$

$\oint_L (x^2+3y^2-5y)\,ds = \oint_L y\,ds = \bar{y}\cdot L = 1\cdot a = a.$ #

一面.



$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

1. 基础题. —— 化为二重积分.

做三件事，无逻辑先后.

1) 将 Σ 投影到某一平面 $\Rightarrow D_{xy}$

2) 将 $z=z(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$

3) 计算 z'_x，z'_y $\Rightarrow$ $z=z(x,y) \Rightarrow dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dxdy$

$y=y(x,z) \Rightarrow dS=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dxdz$

$x=x(y,z) \Rightarrow dS=\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,dydz$.

2. 技术题 三种考题.

1) 边界方程代入~~边界~~被积函数，简化计算

2) 对称性

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)dS=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1}, & f(x,y,z)=f(x,-y,z)\\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,-y,z)\end{cases}$$

Σ_{xy} 只能针对 xOy 投影使用. 注意对应 $dxdy$.

[例] 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$. π 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $I=\iint_\Sigma \frac{z}{\rho(x,y,z)}dS$.

$\vec{n}=(x,y,2z)$

$P(x,y,z)$

$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$

$$\rho(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+2z^2}{\sqrt{x^2+y^2+(2z)^2}}$$

$$I=\iint_{\Sigma:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1} z\frac{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}{x^2+y^2+2z^2}=\frac{1}{2}\iint_\Sigma z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\,dS$$

D_{xy} $x^2+y^2\le 2$. $x+2z\cdot z'_x=0$, $y+2z\cdot z'_y=0$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$I=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\cdot\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}z\sqrt{x^2+y^2+4z^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{4z^2}+\frac{y^2}{4z^2}}\,dxdy$$

考研包过
www.Freekao.com

$$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+4z^2)\,dxdy=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}x^2+y^2+4-2(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}4-(x^2+y^2)\,dxdy=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)\,r\cdot dr$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\pi$$ #

[例3] 设有一段均匀圆柱面 $\Sigma: x^2+y^2=1\ (0\le z\le 2)$，其面密度 $\rho=1$，G 为引力常系数，求该段圆柱面 Σ 对原点处单位质点的引力.

[解] 由对称性可得，分量 $F_x=F_y=0$.

$$F_z=Gm\iint_{\Sigma}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}dS=G\iint_{\Sigma}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS$$

将该曲面积分向 yOz 面投影，得投影区域为

$$D_{yz}=\{(y,z)\mid -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 2\}.$$

投影重合. 分前后两个半曲面，根据对称性，计算前半曲面即可.

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{x},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=0,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow F_z=G\iint_{\Sigma}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS=2G\iint_{\Sigma_1}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dS$$

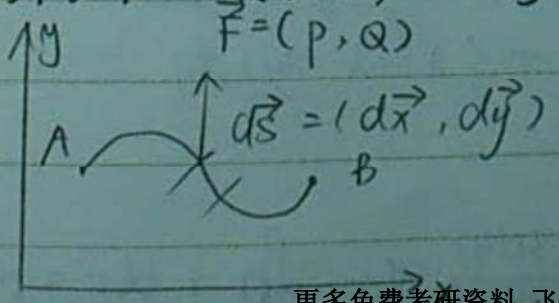
$$=2G\iint_{D_{yz}}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz$$

$$=2G\iint_{D_{yz}}\frac{z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dydz=2G\int_0^2\frac{z}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}dz\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$=2G\left(-\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}\right)\Big|_0^2\cdot 2\arcsin y\Big|_0^1=2G\pi\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

于是引力 $\vec{F}=\left(0,0,\left(2-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)G\pi\right)$ #

二线.



$$\int_A^B dW=\int_{L:A\to B}(Pdx+Qdy)=W.$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \int_A^B dW = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$

$t \in [\alpha, \beta]$

考研包过
www.Freekao.com

计算结构.

基础题 —— 化为定积分

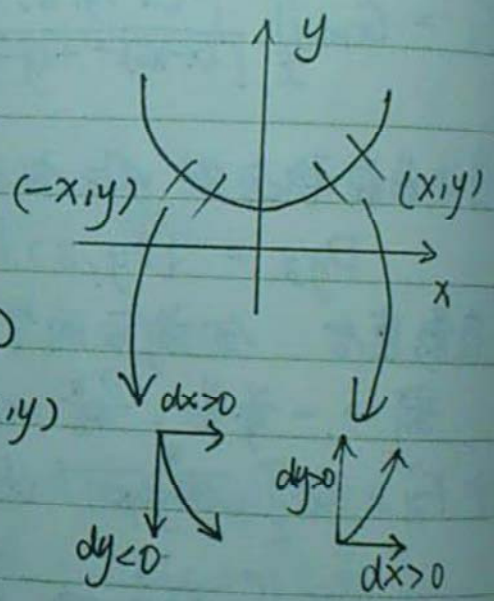
技术题 —— 边界方程.
对称性
格林公式

1. 对称性. $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

无轮换对称性.

$\int_L P(x,y)dy$

☆ $= \begin{cases} 0, & Q(x,y) = Q(-x,y) \\ 2\text{倍}, & Q(x,y) = -Q(-x,y) \end{cases}$



2. 格林公式.

$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma$

条件 1) L是封闭曲线，且取正向（左手在内）

2) $P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ 在D上连续（没有无定义点）

[例1] 已知L是第1象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点(2,0)再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点(0,2)的曲线段.

计算曲线积分：$I = \int_L 3x^2y\,dx + (x^3+x-2y)dy$

[解] $I = \int_{L+\overrightarrow{BO}} - \int_{\overrightarrow{BO}}$

$\int_{L+\overrightarrow{BO}} = \iint_D \frac{\partial(x^3+x-2y)}{\partial x} - \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} d\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2$

$= \frac{\pi}{2}$

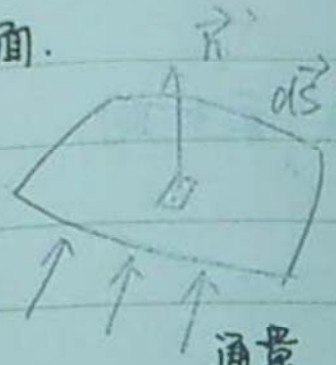
更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

$$\int_{\overrightarrow{BO}} 3x^2y\,dx + (x^2+x-2y)\,dy$$
$$= \int_2^0 -2y\,dy = y^2\Big|_0^2 = 4.$$
$$\rightarrow \quad I = \frac{\pi}{2} - 4.$$

考研包过
www.Freekao.com

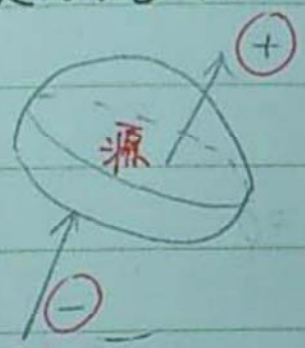
二面.



$$d\vec{S} = (dy\,dz,\ dx\,dz,\ dx\,dy)$$
$$\vec{v} = (P, Q, R)$$
$$dV = P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy$$

通量
(流量)

关于正负的规定：

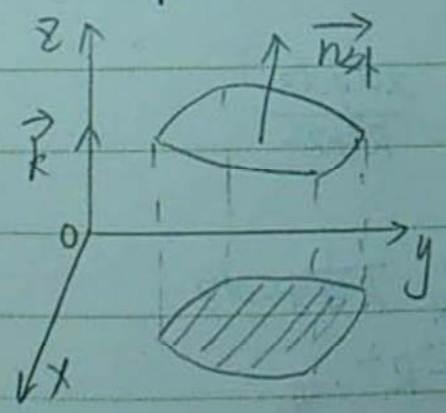


计算结构.

基础题 —— 化二重积分.

技术题 —— 边界方程
对称性.
高斯公式

指定 $\vec{n}_{外}$：



$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{k}$ 成锐角
$\Rightarrow \quad +dx\,dy$
$\vec{n}_{外}$ 与 $\vec{k}$ 成钝角
$\Rightarrow \quad -dx\,dy.$

1. 对称性

$$\iint_\Sigma Q(x,y,z)\,dz\,\hat{d}x$$
$$= \begin{cases} 0 & Q(x,y,z) = Q(x,-y,z) \\ 2\iint_{\Sigma} & Q(x,y,z) = -Q(x,-y,z) \end{cases}$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com

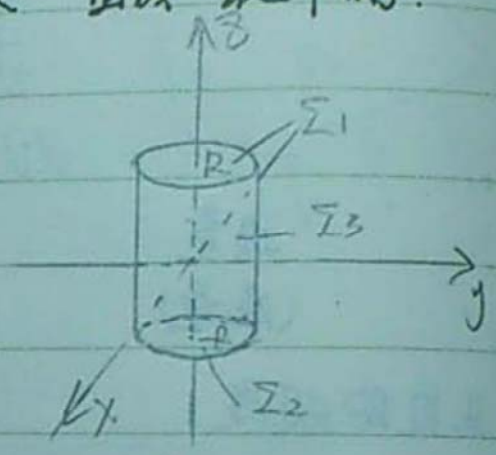
2、高斯公式.

$$\oiint_{\Sigma外} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

条件 1) Σ 封闭取正.

2) $P.Q.R.\ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ 在 Ω 中连续.

[例] 求 $I = \oiint_{\Sigma外} \frac{x\,dydz + z^2\,dxdy}{x^2+y^2+z^2}$, Σ: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=R \\ z=-R \end{cases}$ 围成 取外侧.



[解] $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 形式简单时，才用高斯，否则不如直接计算.

$$I = \iint_{\Sigma_1外} + \iint_{\Sigma_2外} + \iint_{\Sigma_3外}$$

$$\iint_{\Sigma_1外: z=R} R^2\,d\hat{x}dy = \iint_{\Sigma_1外: z=R} R^2\,dxdy$$

$$\iint_{\Sigma_2外: z=-R} R^2\,d\hat{x}dy = \iint_{\Sigma_2外: z=-R} -R^2\,dxdy \Rightarrow I_1 + I_2 = 0$$

$$I = I_3 = \iint_{\Sigma_3外: x^2+y^2\le R^2} \frac{x\,dydz + \underbrace{z^2\,dxdy}_{=0}}{R^2+z^2}$$ 当投影面与曲面垂直时，积分=0

$$= \iint_{\Sigma_3外: x^2+y^2\le R^2} \frac{x\,dydz}{R^2+z^2} = 2\iint_{\Sigma_3外前} \frac{x\,dydz}{R^2+z^2}$$

$$= 2\iint_{\substack{D_1 \\ -R\le z\le R \\ -R\le y\le R}} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\,dydz = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,dy \int_{-R}^{R} \frac{1}{R^2+z^2}\,dz$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2}R^2\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}R^2. \#$$

更多免费考研资料 飞考网 www.Freekao.com