

# 8장 | 내포 효과 (NESTED EFFECT) 모형

SAS를 이용한 실험 계획과 분산 분석 (자유아카데미)

# 교차 요인

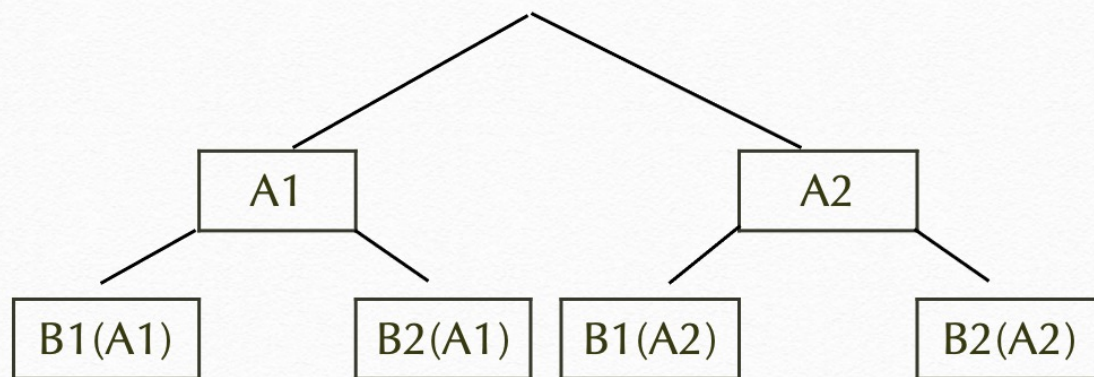
- 실험의 조건을 결정하는 **요인(factor)**의 수준이 다른 요인의 수준과 **관계없이 일정**하게 정의될 때, 이 두 요인을 **교차요인(crossed factor)**라고 한다.
- A, B 두 요인이 교차요인이면 다음과 같은 실험조건이 형성된다.

|    | A1       | A2       |
|----|----------|----------|
| B1 | (A1, B1) | (A2, B1) |
| B2 | (A1, B2) | (A2, B2) |

- (예) A=온도, B=압력

# 내포 요인

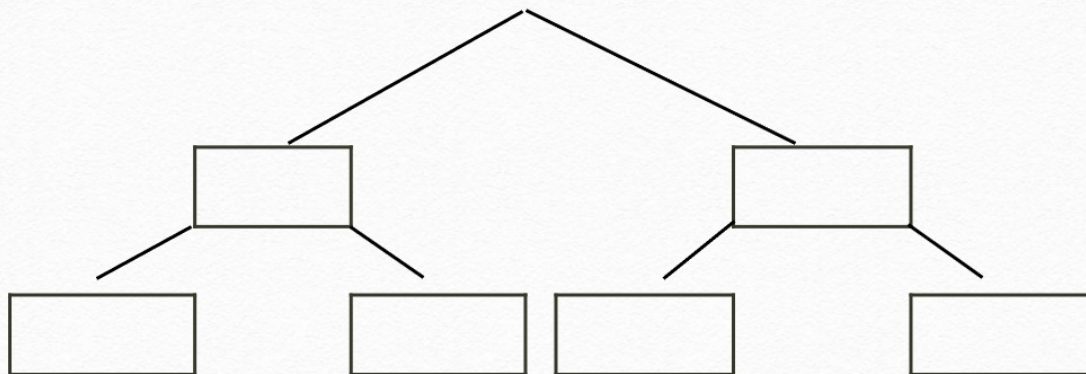
- 실험의 조건을 결정하는 **요인(B)의 수준이 다른 요인(A)의 수준에 따라 성질이 바뀌게 정의된다.**
- B 요인은 A요인에 내포되었다 (B is nested within A)
- B 요인은 내포요인(nested factor)라고 한다.



- B1(A1) 와 B1(A2) 는 서로다른 실험조건

# 내포 요인

- **내포설계**(nested design)라고 하기도 한다.
- 전체 구조가 나무가지가 자라는 모양이라고 해서, '**지분설계**'라고도 한다.
- 피라밋과 같은 상위구조를 갖는다고 해서 '**계층설계** (hierarchical design)' 라고도 한다.





# 내포 모형의 예

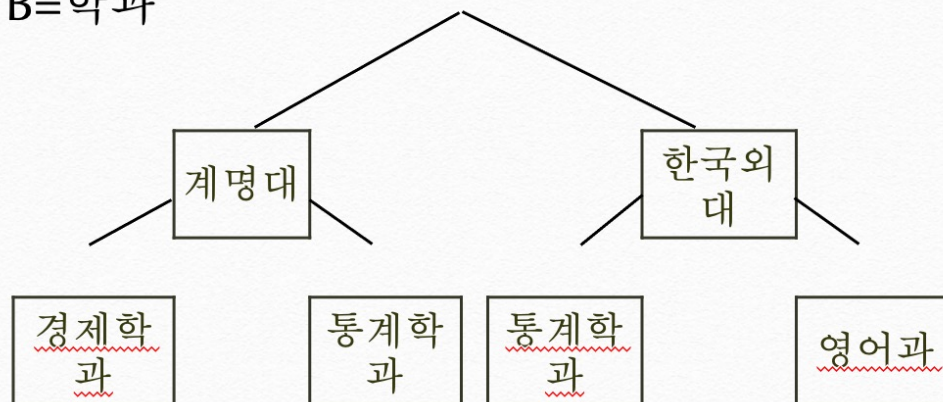
- 요인의 수준을 일정하게 유지하기 힘든 경우

A = 오븐의 종류, B=화력 (강/약/중간)



- 2단계 랜덤화를 통해 학생표본을 추출할 경우

A=대학교, B=학과



## 내포 모형의 예

돼지 사육자가 돼지 사료의 종류에 따라 아기 돼지의 체중증가량이 같은지/다른지 알아보고 싶다고 가정하자. 돼지 사료의 종류가 A1, A2 이고, A1 사료를 주는 돼지 사육장을 두 군데 선정하여 B1, B2라 하고, A2 사료를 주는 사육장을 두 군데 선정하여 B1, B2라고 하자. 이 경우 두 개 사육장을 B1, B2라고 표기했지만 사실 A1 사료를 사용하는 첫 번째 사육장 B1과 A2 사료를 사용하는 첫 번째 사육장 B1은 서로 다른 사육장이고 편의상 B1으로 같게 표기한 것이다. 따라서 실험에 참가한 4개 사육장은 실제로는 B1(A1), B2(A1), B1(A2), B2(A2)가 되어 사육장의 종류(B요인)는 사료의 종류(A요인)에 내포(nested)된 형태가 된다.

# 내포모형의 모형식

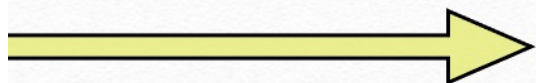
$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad \text{교차요인}$$

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(i)} + \epsilon_{ijk} \quad \text{내포요인}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^b \beta_{j(i)} = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \sim \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2)$$



```
proc glm data=a; class A B;  
  model y=A B(A) /test ;  
run;
```

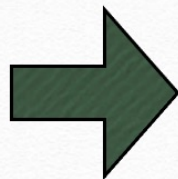
## 내포모형의 분산 분석표

| Source | d.f.        | SS  | MS     | $F_0$                              |
|--------|-------------|-----|--------|------------------------------------|
| A      | $a - 1$     | SSA | MSA    | $\frac{\text{MSA}}{\text{MSE}}$    |
| B(A)   | $b - 1$     | SSB | MSB(A) | $\frac{\text{MSB(A)}}{\text{MSE}}$ |
| Error  | $ab(n - 1)$ | SSE | MSE    |                                    |
| Total  | $abn - 1$   | SST |        |                                    |



# 내포모형의 ANOVA

| source | df         | SS   |
|--------|------------|------|
| A      | a-1        | SSA  |
| B      | b-1        | SSB  |
| AB     | (a-1)(b-1) | SSAB |
| Error  | ab(n-1)    | SSE  |
| Total  | abn-1      | SST  |



| source | df      | SS     |
|--------|---------|--------|
| A      | a-1     | SSA    |
| B(A)   | a(b-1)  | SSB(A) |
|        |         |        |
| Error  | ab(n-1) | SSE    |
| Total  | abn-1   | SST    |

$$SSB(A) = SSB + SSAB$$

# 예

- 학교나 담임선생님에 따라 학생들의 모의고사 성적이 차이가 나는지 알아보기 위해 임의로 세개의 학교를 선정하고 (A1,A2,A3), 각 학교에서 임의로 2개의 반을 선정하였다 (B1, B2). 모의고사 후 각 반에서 3명의 학생에 대한 성적을 조사한 결과 다음의 표와 같다.

| A1 |    | A2 |    | A3 |    |
|----|----|----|----|----|----|
| B1 | B2 | B1 | B2 | B1 | B2 |
| 20 | 19 | 14 | 12 | 13 | 9  |
| 18 | 20 | 18 | 12 | 16 | 4  |
| 14 | 20 | 14 | 9  | 13 | 4  |

# 예

제곱합을 계산하면

$$SST = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^3 y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{18} = 428.500$$

$$SSA = \sum_{i=1}^3 \frac{y_{i..}^2}{6} - \frac{y_{...}^2}{18} = 229.333$$

$$SSB = \sum_{j=1}^2 \frac{y_{.j.}^2}{9} - \frac{y_{...}^2}{18} = 53.388$$

$$SSAB = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{y_{ij.}^2}{3} - \sum_{i=1}^3 \frac{y_{i..}^2}{6} - \sum_{j=1}^2 \frac{y_{.j.}^2}{9} + \frac{y_{...}^2}{18} = 87.111$$

$$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB = 58.666$$

가 되는데

$$SSB(A) = SSB + SSAB = 140.500$$

| Source        | d.f. | SS      | MS      | $F_0$  |
|---------------|------|---------|---------|--------|
| School        | 2    | 229.333 | 114.666 | 2.448  |
| Class(School) | 3    | 140.500 | 46.833  | 9.58** |
| Error         | 12   | 58.666  | 4.888   |        |
| Total         | 17   | 428.500 |         |        |

## 예 (다중검정)

```
proc glm data=a;  
    class School Class;  
    model Y = School Class(School);  
    random School Class(School) / test;  
    lsmeans Class(School) / adjust=tukey lines;  
run;
```



# 예 (다중검정)

| Tukey Comparison Lines for Least Squares Means of class(school) |   |           |       |        |               |
|---|---|-----------|-------|--------|---------------|
| LS-means with the same letter are not significantly different.  |   |           |       |        |               |
|   |   | y LSMEAN  | class | school | LSMEAN Number |
|   | A | 19.666667 | B2    | A1     | 2             |
|   | A |           |       |        |               |
|   | A | 17.333333 | B1    | A1     | 1             |
|   | A |           |       |        |               |
| B   | A | 15.333333 | B1    | A2     | 3             |
| B   | A |           |       |        |               |
| B   | A | 14.000000 | B1    | A3     | 5             |
| B   |   |           |       |        |               |
| B   | C | 11.000000 | B2    | A2     | 4             |
|   | C |           |       |        |               |
|   | C | 5.666667  | B2    | A3     | 6             |