Chap 4. The Greedy Approach

1. **Minimum Spanning Trees**
2. **Dijkstra's Algorithm for Single-Source Shortest Paths**
5. **The Greedy Approach Vs Dynamic Programming: The Knapsack Problem**

This material is prepared by Prof. Jaeyoung Choi, Soongsil University.

Introduction

- Want to solve optimization problems
  - Using dynamic programming and greedy approach

- Dynamic Programming
  - A recursive property is used to divide an instance into smaller instances

- Greedy approach
  - Arrives at a solution by making a sequence of choices, each of which simply looks the best at the moment. That is, each choice is locally optimal.

Introduction

- 탐욕적인 알고리즘(Greedy algorithm)은 결정을 해야 할 때마다 그 순간에 가장 좋다고 생각되는 것을 해답으로 선택함으로써 최종적인 해답에 도달한다.

- 그 순간의 선택은 그 당시(local)에는 최적이다. 그러나 최적이라고 생각했던 해답들을 모아서 최종적인(global)해답을 만들었다고 해서, 그 해답이 궁극적으로 최적이라는 보장이 없다.

- 따라서 탐욕적인 알고리즘은 항상 최적의 해답을 주는지를 반드시 검증해야 한다.

탐욕적인 알고리즘 설계 절차

1. Selection procedure (선정과정)

- 현재 상태에서 가장 좋으리라고 생각되는(greedy criterion) 해답을 찾아서 해답모음(solution set)에 포함시킨다.

2. Feasibility check (적정성 점검)

- 새로 얻은 해답모음이 적절한지를 결정한다.

3. Solution check (해답 점검)

- 새로 얻은 해답모음이 해인지를 결정한다.

Example: Change Problem

- Problem: 동전의 개수가 최소가 되도록 거스름 돈을 주는 문제

- Greedy Algorithm

```
While (there are more coins and the instance is not solved)
   Grab the largest remaining coin;              // selection procedure

   If (adding the coin makes the change
             exceed the amount owed)             // feasibility check
        reject the coin;
   else
        add the coin to the change;

   If (the total value of the change equals      // solution check
              the amount owed)
        the instance is solved;
}
```

Example: Change Problem

- **문제**: 동전의 개수가 최소가 되도록 거스름 돈을 주는 문제

- **탐욕적인 알고리즘**
  - 거스름돈을 x라 하자.
  - 먼저, 가치가 가장 높은 동전부터 x가 초과되지 않도록 계속 내준다.
  - 이 과정을 가치가 높은 동전부터 내림순으로 총액이 정확히 x가 될 때까지 계속한다.

Example: Change Problem

- 현재 우리나라에서 유통되고 있는 동전만을 가지고, 이 알고리즘을 적용하여 거스름돈을 주면, 항상 동전의 개수는 최소가 된다. 따라서 이 알고리즘은 최적(optimal)!
  - 선정과정: (가치가 높은) 동전을 선택한다.
  - 적정성 검사: 거스름돈 총액을 넘는지 확인한다.
  - 해답 점검: 현재까지의 금액이 거스름돈 총액에 도달했는지 확인한다.

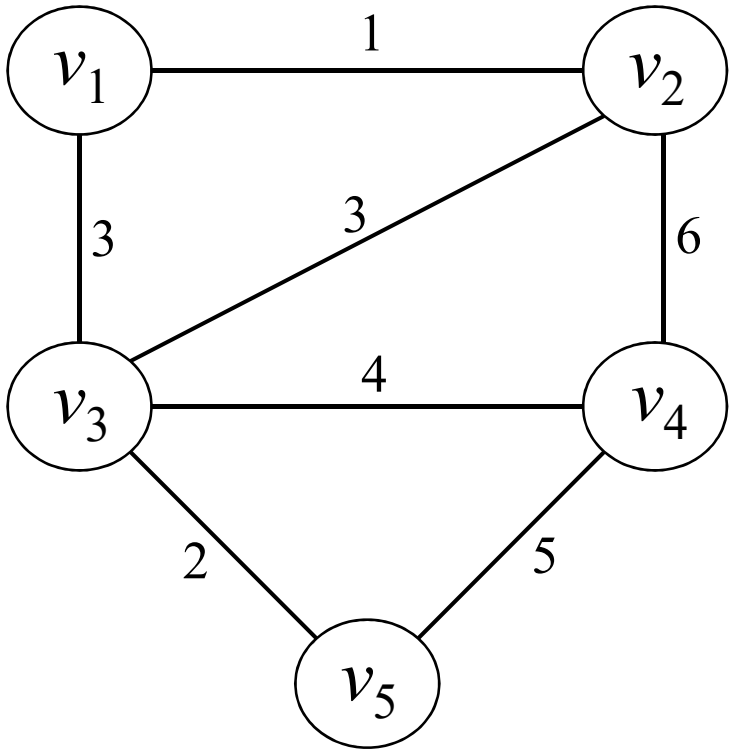
Example: Change Problem

- 12원 짜리 동전을 새로 발행했다고 하자.
- 이 알고리즘을 적용하여 거스름돈을 주면, 항상 동전의 개수는 최소가 된다는 보장이 없다.
- 예제: 거스름돈 액수 = 16원
  - 탐욕알고리즘의 결과: 12원 × 1개 = 12원, 1원 × 4개 = 4원
  - 동전의 개수 = 5개 ⇒ 최적(optimal)이 아님!
  - 최적의 해: 10원 × 1개, 5원 × 1개, 1원 × 1개가 되어 동전의 개수는 3개가 된다.

그래프 용어

- 비방향성 그래프(undirected graph) $G = (V,E)$,
  - V는 정점(vertex)의 집합
  - E는 이음선(edge)의 집합
- 경로(path)
- 연결된 그래프(connected graph) - 어떤 두 정점 사이에도 경로가 존재
- 부분그래프(subgraph)
- 가중치 포함 그래프(weighted graph)
- 순환경로(cycle)
- 순환적그래프(cyclic graph), 비순환적그래프(acyclic graph)
- 트리(tree) - 비순환적이며, 연결된, 비방향성 그래프
- 뿌리 있는 트리(rooted tree) - 한 정점이 뿌리로 지정된 트리

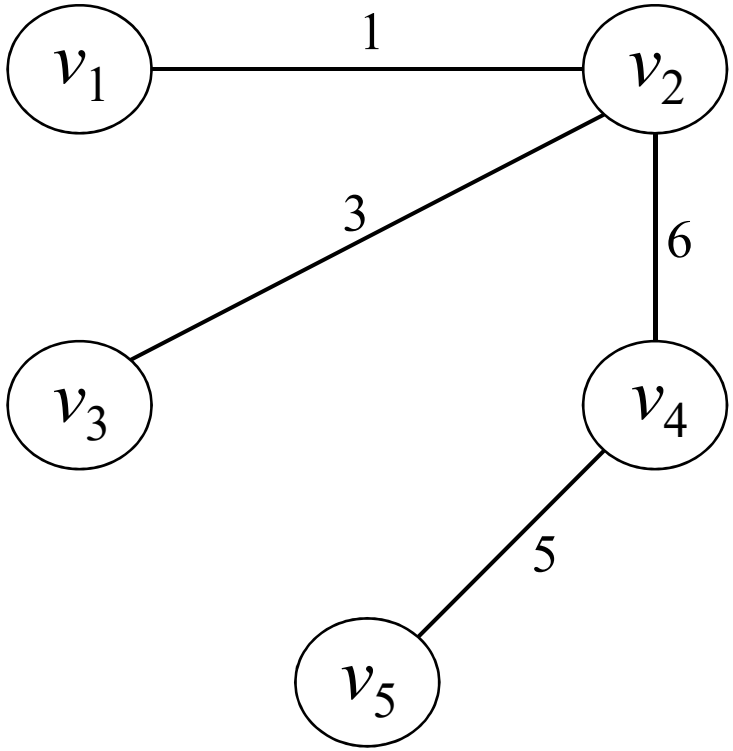
예: 연결된 가중치 비방향그래프



Spanning Tree

- Spanning Tree (신장트리)
  - A connected subgraph that contains all the vertices in G and is a tree
  - 연결된, 비방향성 그래프 G에서 순환경로를 제거하면서 연결된 부분그래프가 되도록 이음선을 제거
  - 따라서 신장트리는 G안에 있는 모든 정점을 다 포함하면서 트리가 되는 연결된 부분그래프

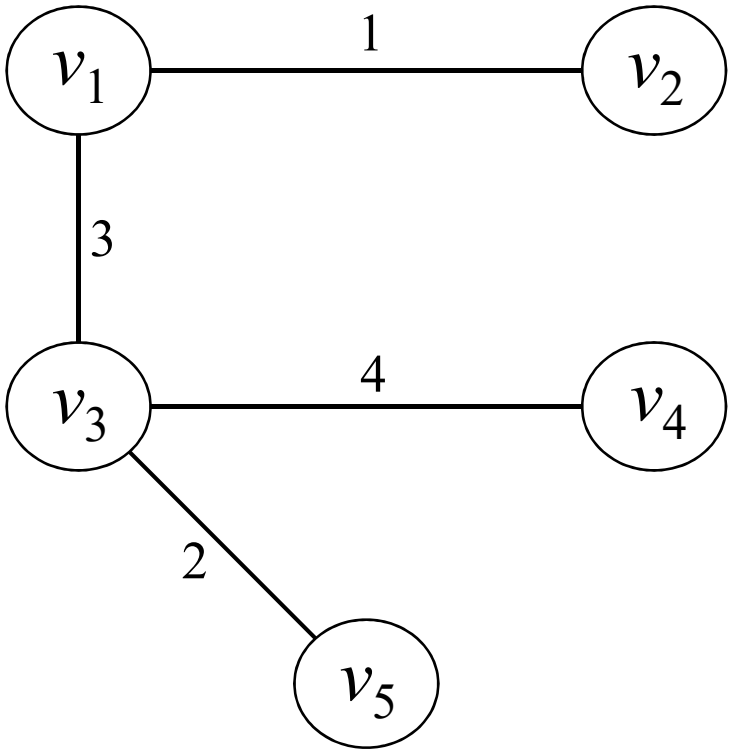
Spanning Tree



Minimum Spanning Tree

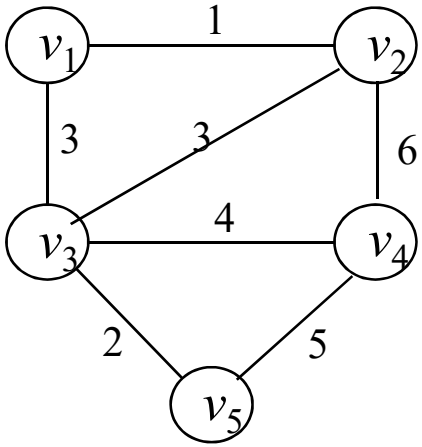
- Minimum spanning tree (최소비용 신장트리)
  - A spanning tree with minimum weight
  - 최소의 가중치를 가진 부분그래프는 반드시 트리가 되어야 한다.
    왜냐하면, 만약 트리가 아니라면, 분명히 순환경로(cycle)가 있을 것이고,
    그렇게 되면 순환경로 상의 한 이음선을 제거하면 더 작은 비용의
    신장트리가 되기 때문이다.
  - 관찰: 모든 신장트리가 최소비용 신장트리는 아니다.

Minimum Spanning Tree

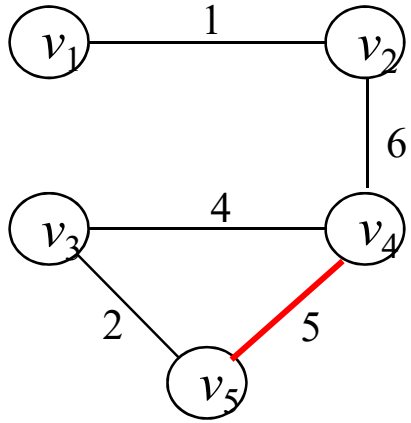


Minimum Spanning Tree

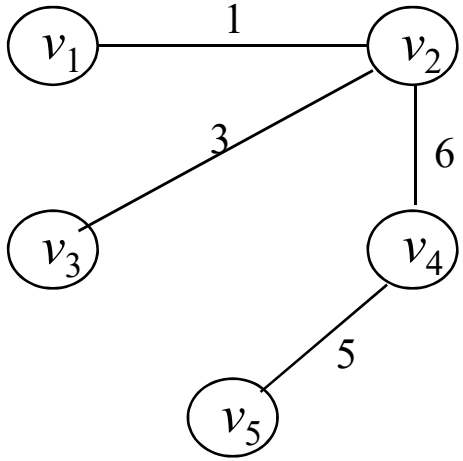
(a) A connected, weighted, undirected graph G



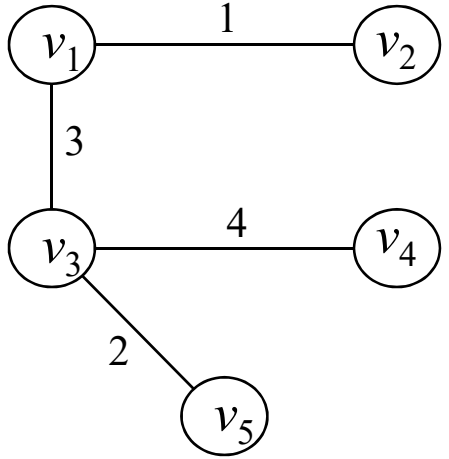
(b) If (v_4,v_5) were removed from this subgraph, the graph would remain connected.



(c) A spanning tree for G



(d) A minimum spanning tree for G



Minimum Spanning Tree

- 최소비용신장트리의 적용 예
  - 도로 건설 (road construction)
    - 도시들을 모두 연결하면서 도로의 길이가 최소가 되도록 하는 문제
  - 통신 (telecommunications)
    - 전화선의 길이가 최소가 되도록 전화 케이블 망을 구성하는 문제
  - 배관 (plumbing)
    - 파이프의 총 길이가 최소가 되도록 연결하는 문제

Minimum Spanning Tree

- Brute-force method
  - 알고리즘
    - 모든 신장트리를 다 고려해 보고,
      그 중에서 최소비용이 드는 것을 고른다.
  - 분석
    - 이는 최악의 경우, 지수보다도 나쁘다.
    - 이유?

Minimum Spanning Tree

- Greedy approach
  - Problem: 비방향성 그래프 $G = (V,E)$가 주어졌을 때,
    $F \subseteq E$를 만족하면서,
    (V,F)가 G의 최소비용신장트리(MST)가 되는 F를 찾는 문제.

  - Algorithm

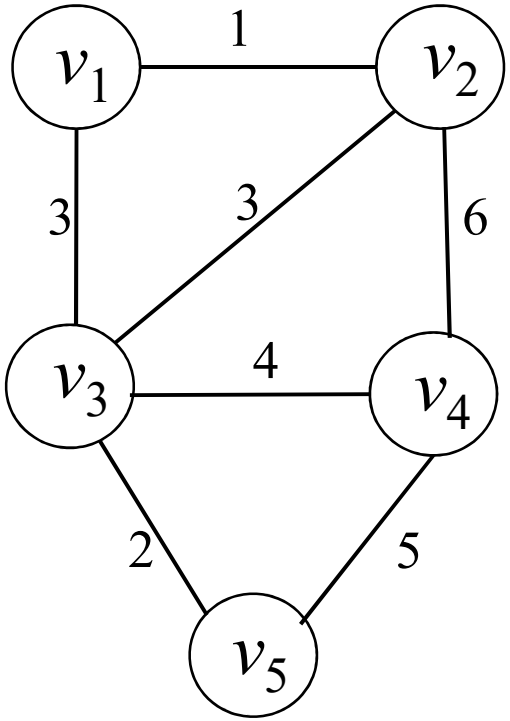
```
F = Φ;
while (the instance is not solved) {
   select an edge according to some locally   // selection procedure
       optimal consideration;

   if (adding the edge to F dose not create a cycle)
       add it;                                // feasibility check

   if (T = (V, F) is a spanning tree)         // solution check
       the instance is solved;
  }
```

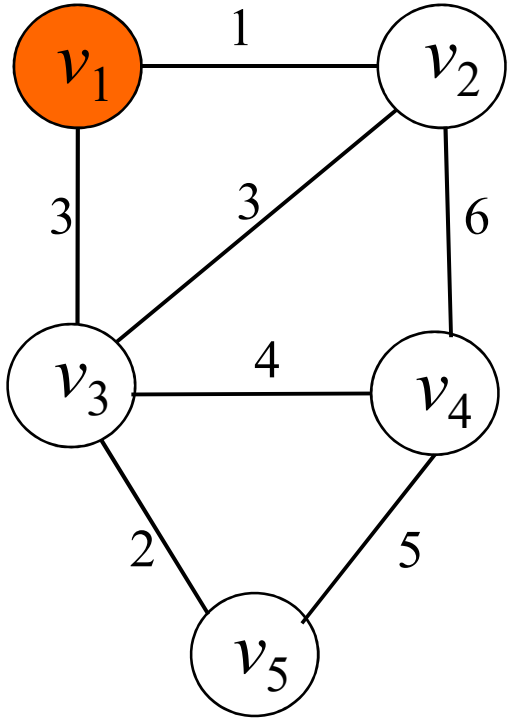
Prim's Algorithm

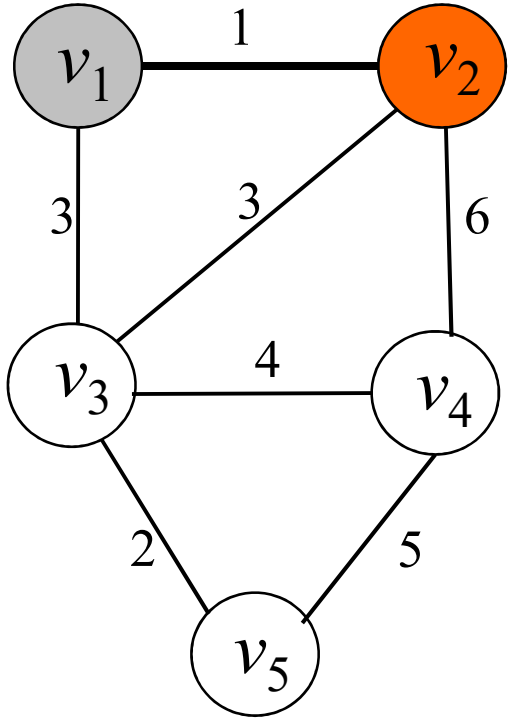
- High-level Algorithm

```
F := Φ;                                  // initialize set of edges to empty
Y := {v1};                               // initialize set of vertices to
                                         // contain only the first one
While (the instance is not solved) {
   select a vertex in V-Y that is nearest to Y;
                                        // selection procedure and
                                         // feasibility check
   add the vertex to Y;
   add the edge to F;

   if (Y == V)                           // solution check
       the instance is solved;
}
```

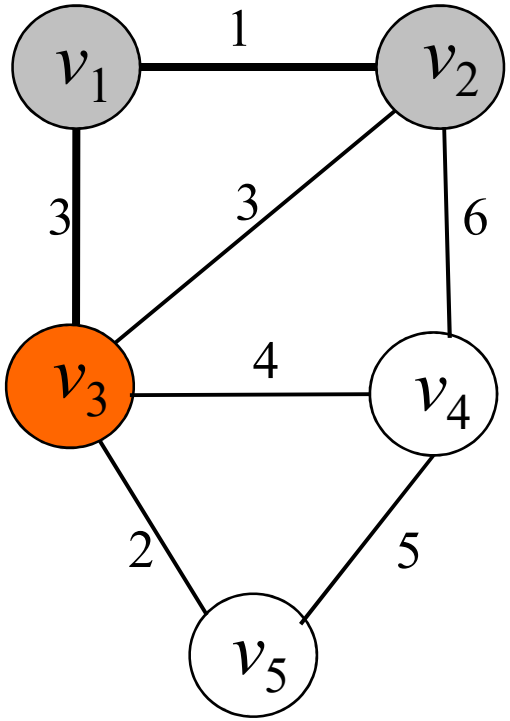
Prim's Algorithm

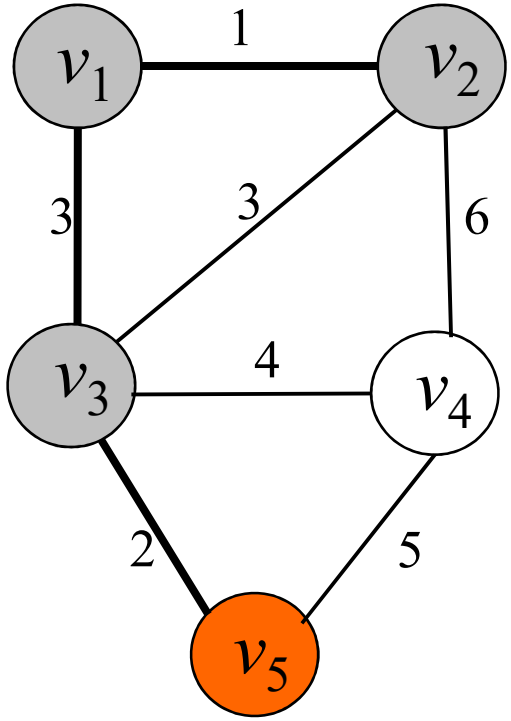


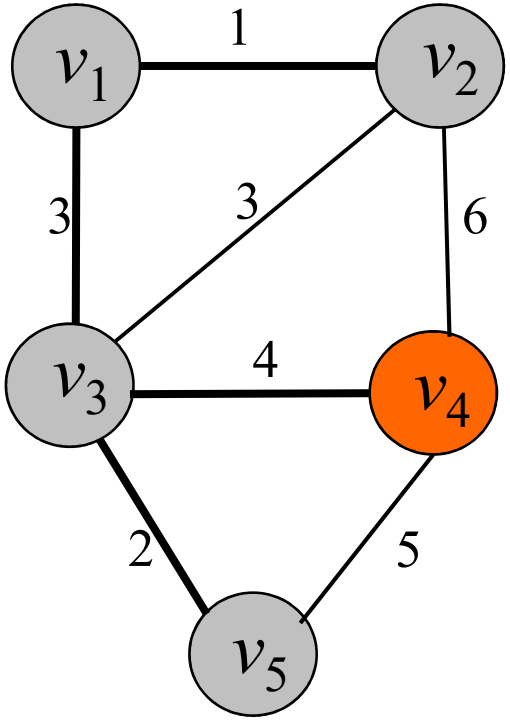




Prim's Algorithm







Prim's Algorithm

- 그래프의 인접행렬식 표현

$$W[i][j] = \begin{cases} \text{이음선의 가중치} & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 있다면} \\ \infty & v_i\text{에서 } v_j\text{로의 이음선이 없다면} \\ 0 & i = j \text{ 이면} \end{cases}$$

	1	2	3	4	5
1	0	1	3	∞	∞
2	1	0	3	6	∞
3	3	3	0	4	2
4	∞	6	4	0	5
5	∞	∞	2	5	0

Prim's Algorithm

- 추가적으로 nearest[2..n]과 distance[2..n] 배열 유지

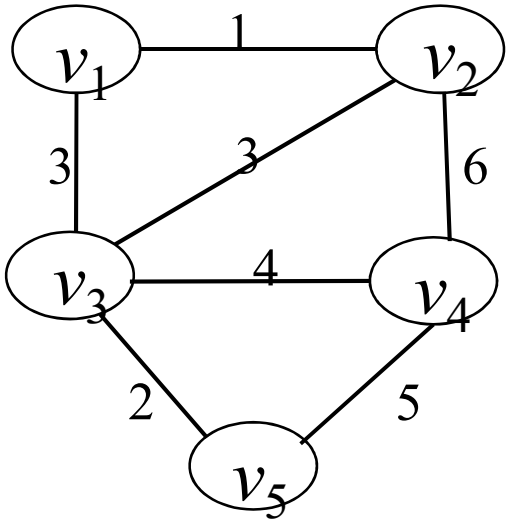
  nearest[i] = Y에 속한 정점 중에서 v_i에서
  가장 가까운 정점의 인덱스

  distance[i] = v_i 와 nearest[i]를 잇는
  이음선의 가중치

Prim's Algorithm

```
void prim(int n, const number W[][], set_of_edges& F) {
   index i, vnear; number min; edge e;
   index nearest[2..n]; number distance[2..n];

   F = Φ;
   for(i=2; i <= n; i++) {                    // 초기화
      nearest[i] = 1;                         // vi에서 가장 가까운 정점을 v1으로 초기화
      distance[i] = W[1][i];                  // vi과 v1을 잇는 이음선의 가중치로 초기화
   }

   repeat(n-1 times) {                        // n-1개의 정점을 Y에 추가한다
      min = "infinite";
      for(i=2; i <= n; i++)                   // 각 정점에 대해서
         if (0 <= distance[i] <= min) {       // distance[i]를 검사하여
             min = distance[i];               // 가장 가까이 있는 vnear을
             vnear = i;                       // 찾는다.
         }
      e = edge connecting vertices indexed by vnear and nearest[vnear];
      add e to F;
      distance[vnear] = -1;                   // 찾은 노드를 Y에 추가한다.
      for(i=2; i <= n; i++)
      if (W[i][vnear] < distance[i]) {        // Y에 없는 각 노드에 대해서
          distance[i] = W[i][vnear];          // distance[i]를 갱신한다.
          nearest[i] = vnear;
      }
   }
}
```

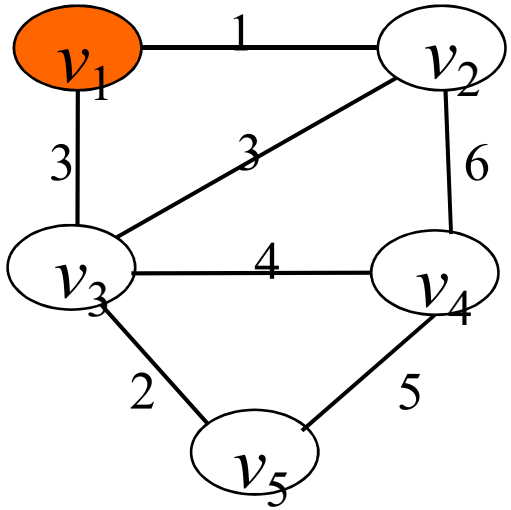
Prim's Algorithm



	1	2	3	4	5
1	0	1	3	∞	∞
2	1	0	3	6	∞
3	3	3	0	4	2
4	∞	6	4	0	5
5	∞	∞	2	5	0

nearest

2	3	4	5
1	1	1	1

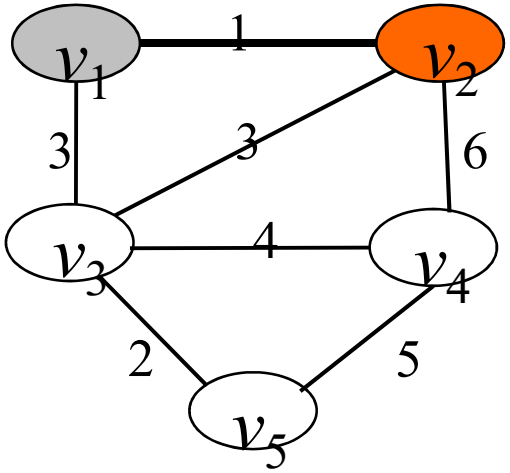


distance

2	3	4	5
1	3	∞	∞

nearest

2	3	4	5
1	1	2	1



distance

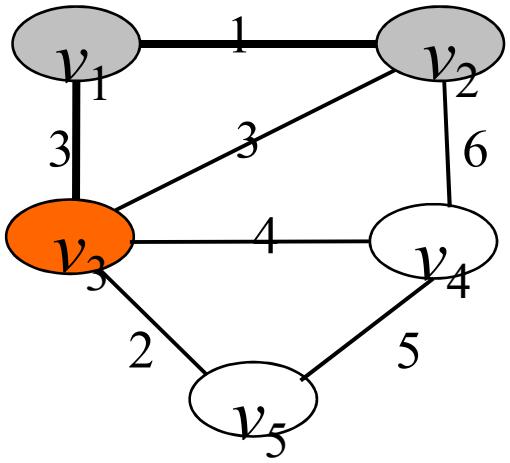
2	3	4	5
−1	3	6	∞

Prim's Algorithm

	1	2	3	4	5
1	0	1	3	∞	∞
2	1	0	3	6	∞
3	3	3	0	4	2
4	∞	6	4	0	5
5	∞	∞	2	5	0

nearest

2	3	4	5
1	1	3	3

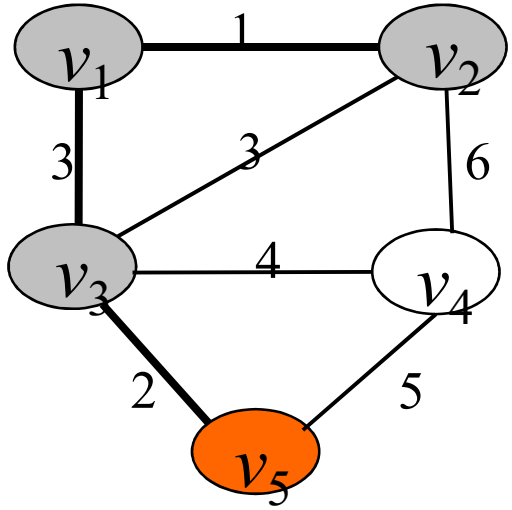


distance

2	3	4	5
−1	−1	4	2

nearest

2	3	4	5
1	1	3	3

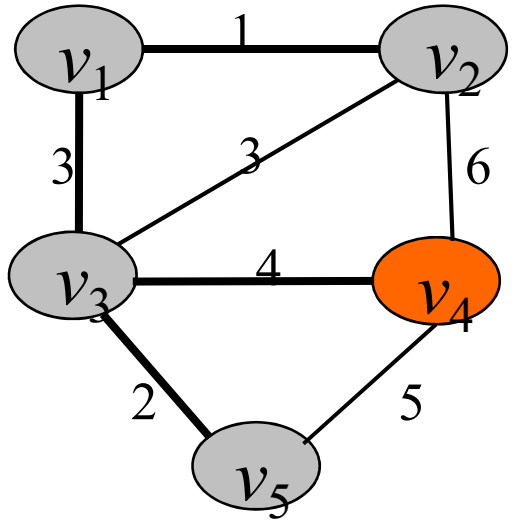


distance

2	3	4	5
−1	−1	4	−1

nearest

2	3	4	5
1	1	3	3



distance

2	3	4	5
−1	−1	−1	−1

Prim's Algorithm

- Every-case Time Complexity Analysis
  - 단위연산: repeat-루프 안에 있는 두 개의 for-루프 내부에 있는 명령문
  - 입력크기: 마디의 개수, n
  - 분석: repeat-루프가 n-1번 반복되므로
    - $T(n) = 2(n\text{-}1)(n\text{-}1) \in \Theta(n^2)$

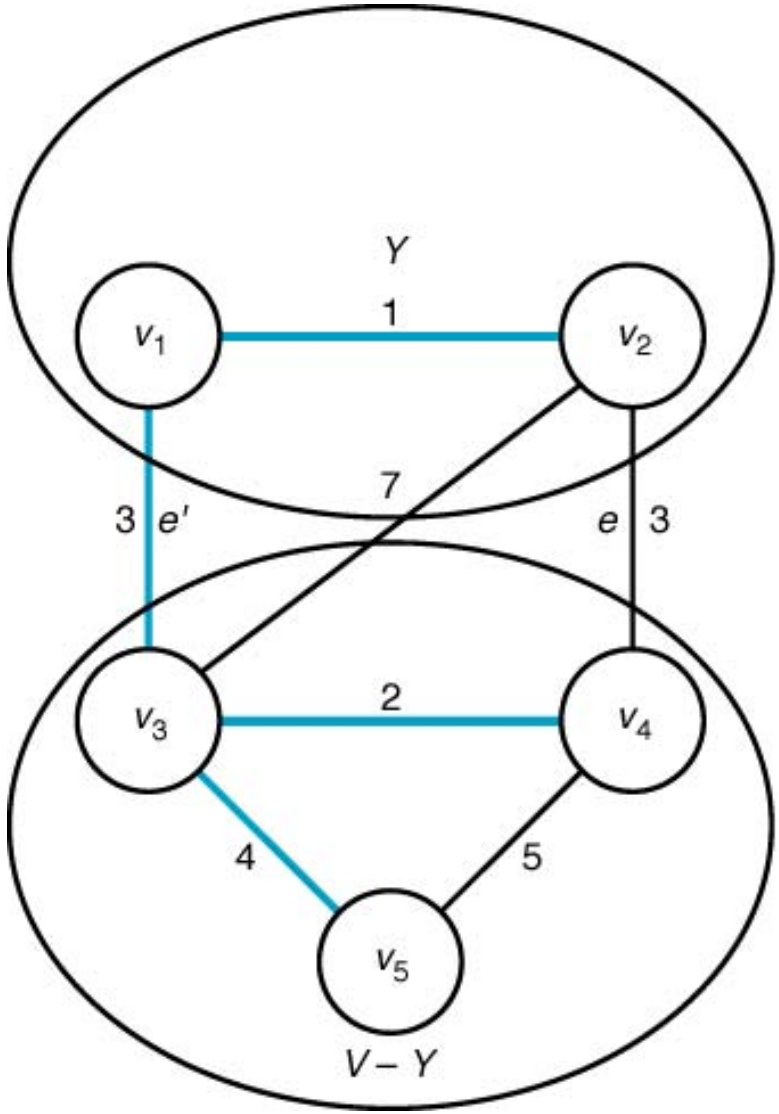
Prim's Algorithm

- 최적여부의 검증 (Optimality Proof)
  - Prim의 알고리즘이 찾아낸 신장트리가 최소비용(minimal)인지를 검증.
    다시 말하면, Prim의 알고리즘이 최적(optimal)인지를 보여야 한다.
  - **Definition 4.1**
    비방향성 그래프 $G = (V, E)$가 주어지고,
    만약 E의 부분집합 F에 MST가 되도록 이음선을 추가할 수 있으면,
    F는 유망하다(promising)라고 한다.
  - **Lemma 4.1**:
    $G = (V, E)$는 연결되고, 가중치 포함 비방향성 그래프라고 하고,
    F는 E의 유망한 부분집합이라고 하고, Y는 F안에 있는 이음선 들에
    의해서 연결이 되어 있는 정점의 집합이라고 하자.
    이때, Y에 있는 어떤 정점과 $V - Y$에 있는 어떤 정점을 잇는 이음선 중에서
    가중치가 가장 작은 이음선을 e라고 하면, $F \cup \{e\}$는 유망하다.

Prim's Algorithm

- Optimality Proof (Lemma 4.1)
  - F가 유망하기 때문에 $F \subseteq F'$이면서 (V, F')가 최소비용신장트리(MST)가 되는 이음선의 집합 F'가 반드시 존재한다.
  - 경우 1: 만일 $e \in F'$라면, $F \cup \{e\} \subseteq F'$가 되고, 따라서 $F \cup \{e\}$도 유망하다.
  - 경우 2: 만일 $e \notin F'$라면, (V, F')는 신장트리이기 때문에, $F' \cup \{e\}$는 반드시 순환경로를 하나 포함하게 되고, e는 반드시 그 순환경로 가운데 한 이음선이 된다.
    - 그러면 Y에 있는 한 정점에서 $V - Y$에 있는 한 정점을 연결하는 어떤 다른 이음선 $e' \in F'$가 그 순환경로 안에 반드시 존재하게 된다.
    - 여기서 만약 $F' \cup \{e\}$에서 e'를 제거하면, 그 순환경로는 없어지게 되며, 다시 신장트리가 된다. 그런데 e는 Y에 있는 한 정점에서 $V - Y$에 있는 한 정점을 연결하는 최소의 가중치(weight)를 가진 이음선이기 때문에, e의 가중치는 반드시 e'의 가중치 보다 작거나 같아야 한다. (실제로 반드시 같게 된다.)
    - 그러면 $F' \cup \{e\} - \{e'\}$는 최소비용신장트리(MST)이다.
    - 결론적으로 e'는 F안에 절대로 속할 수 없으므로 (F안에 있는 이음선들은 Y안에 있는 정점들 만을 연결함을 기억하라), $F \cup \{e\} \subseteq F' \cup \{e\} - \{e'\}$가 되고, 따라서 $F \cup \{e\}$ 유망하다.

Prim's Algorithm



Prim's Algorithm

- Theorem 4.1
  - **정리**: Prim의 알고리즘은 항상 최소비용신장트리를 만들어 낸다.

  - **증명**: (수학적귀납법)
    매번 반복이 수행된 후에 집합 F가 유망하다는 것을 보이면 된다.
    - 출발점: 공집합은 당연히 유망하다.
    - 귀납가정: 어떤 주어진 반복이 이루어진 후, 그때까지 선정하였던 이음선의 집합인 F가 유망하다고 가정한다
    - 귀납절차: 집합 $F \cup \{e\}$가 유망하다는 것을 보이면 된다.
      여기서 e는 다음 단계의 반복 수행 시 선정된 이음선 이다.
      그런데, 위의 보조정리 1에 의하여 $F \cup \{e\}$은 유망하다고 할 수 있다.
      왜냐하면 이음선 e는 Y에 있는 어떤 정점을 $V - Y$에 있는 어떤 정점으로 잇는 이음선 중에서 최소의 가중치를 가지고 있기 때문이다.

    증명 끝.

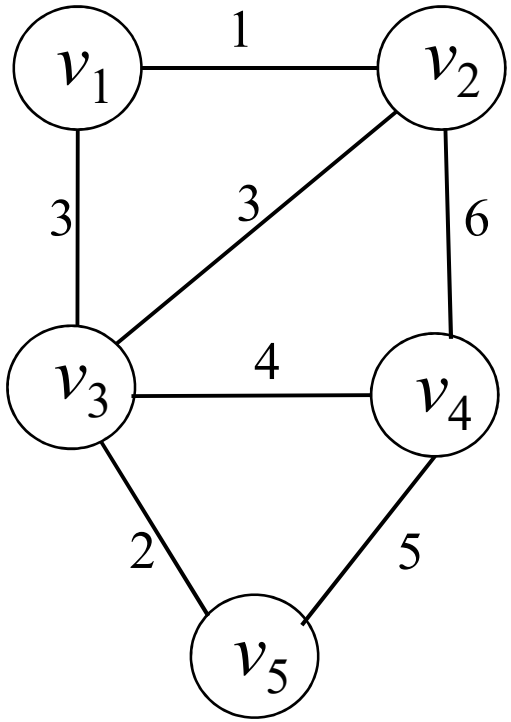
Kruskal's Algorithm

- High-level Algorithm

```
F := Φ;                                          // initialize set of edges
                                                 // to empty

create disjoint subsets of V, one for each
vertex and containing only that vertex;

sort the edges in E in nondecreasing order;

While (the instance is not solved) {
   select next edge;                             // selection procedure

   if (the edge connects 2 vertices
         in disjoint subsets) {                  // feasibility check
       merge the subsets;
       add the edge to F;
   }

   if (all the subsets are merged)               // solution check
       the instance is solved;
}
```

Kruskal's Algorithm

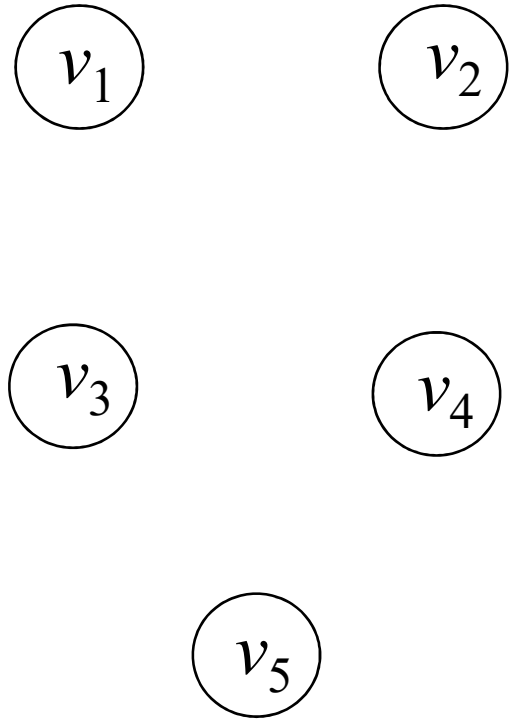
Determining a MST



1. Edges are sorted by weight

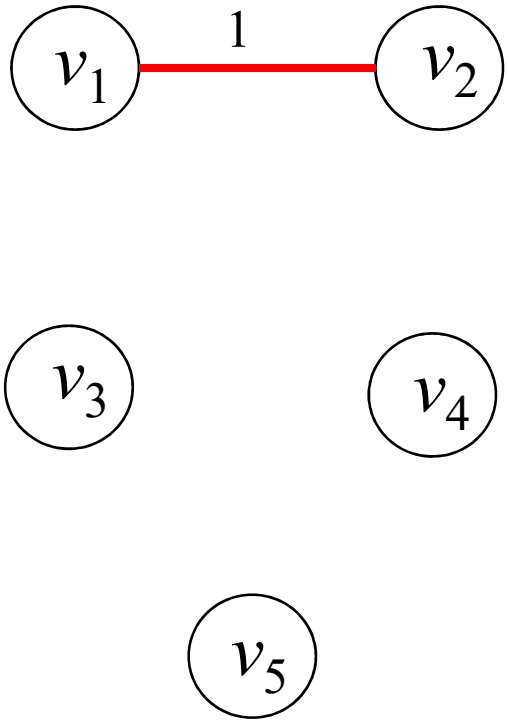
(v1, v2)	1
(v3, v5)	2
(v1, v3)	3
(v2, v3)	3
(v3, v4)	4
(v4, v5)	5
(v2, v4)	6

2. Disjoint sets are created

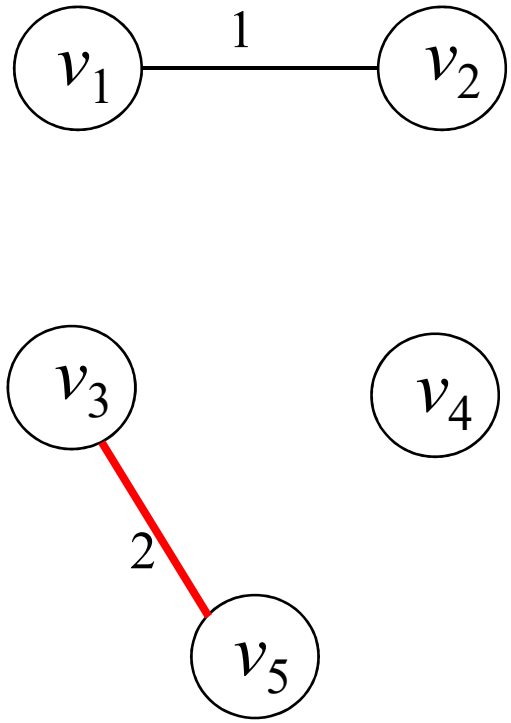


Kruskal's Algorithm

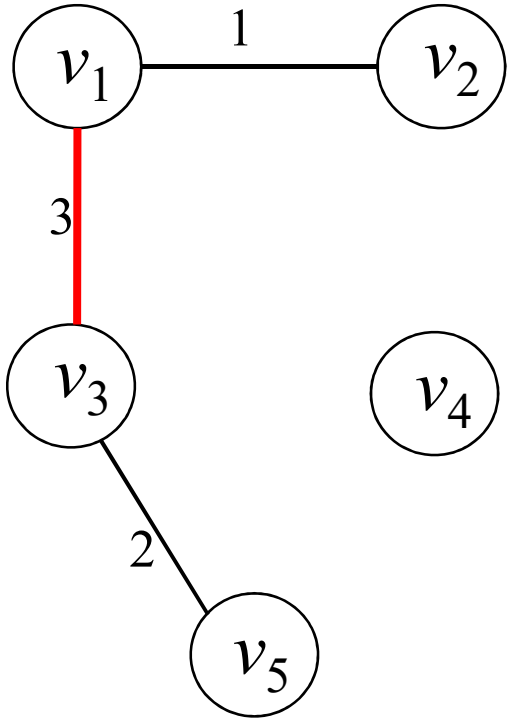
3. (v1, v2) is selected



4. (v3, v5) is selected

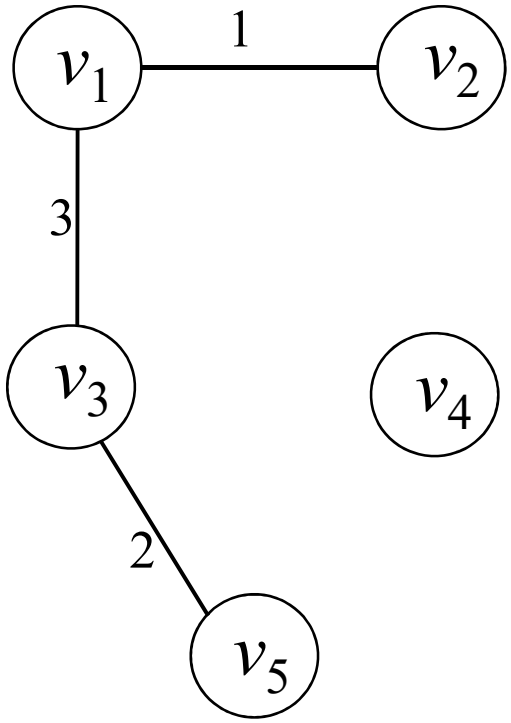


5. (v1, v3) is selected

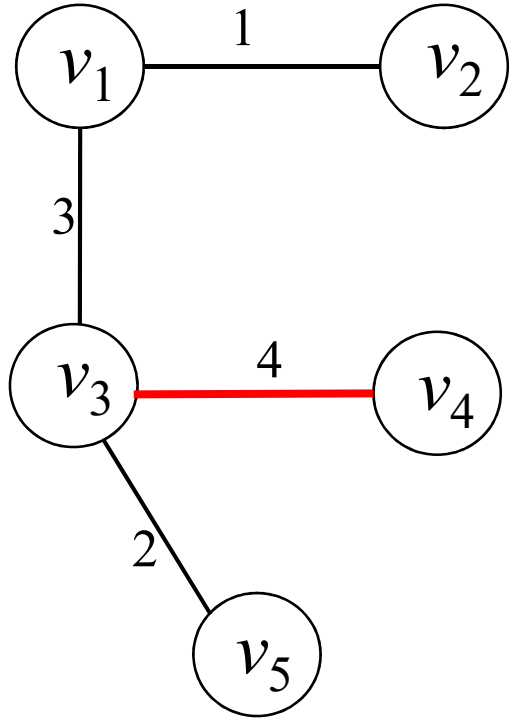


Kruskal's Algorithm

6. (v_2, v_3) is selected



7. (v_3, v_4) is selected



Kruskal's Algorithm

- 서로소 집합 추상 데이터 타입 **(disjoint set abstract data type)**

  index i;

  set_pointer p, q;

  initial(n): n개의 서로소 부분집합을 초기화

  (하나의 부분집합에 1에서 n사이의 인덱스가 정확히 하나 포함됨)

  p = find(i): 인덱스 i가 포함된 집합의 포인터 p를 넘겨줌

  merge(p, q): 두 개의 집합을 가리키는 p와 q를 합병

  equal(p, q): p와 q가 같은 집합을 가리키면 true를 넘겨줌

Kruskal's Algorithm

```
void kruskal(int n, int m, set_of_edges E, set_of_edges& F) {
    index i, j;
    set_pointer p, q;
    edge e;

    Sort the m edges in E by weight in nondecreasing order;
    F = Φ;
    initial(n);

    while (number of edges in F is less than n-1) {
        e = edges with least weight not yet considered;
        i, j = indices of vertices connected by e;
        p = find(i);
        q = find(j);
        if (!equal(p,q)) {
            merge(p,q);
            add e to F;
        }
    }
}
```

Appendix C, Page589-598(1/2)

- Disjoint Set Data Structure 1
  - typedef index set_pointer; typedef index universe[1..n];
  - universe U;
  - void makeset (index i) { U[i] = i; }
  - set_pointer find (index i) { index j; j = i;
    while (U[j] != j) j=U[j]; return j; }
  - void merge (set_pointer p, set_pointer q) {
    if (p < q) U[q] =p; else U[p] = q; }
  - bool equal(set_pointer p, set_pointer q) {
    if (p == q) return TRUE; else return FALSE; }
  - void initial (int n) { index i;
    for (i=1; i<=n; i++) makeset(i); }

- The worst-case of comparisons : order of m^2

Appendix C, Page589-598(2/2)

- Disjoint Set Data Structure 2
  - typedef index set_pointer;
  - struct nodetype { index parent; int depth ; }
  - typedef nodetype universe[1..n]; universe U;
  - void makeset (index i) { U[i].parent = i; U[i].depth = 0; }
  - set_pointer find (index i) { index j; j = i;
    while (U[j].parant != j) j=U[j].parent; return j; }
  - void merge (set_pointer p, set_pointer q) {
    if (U[p].depth == U[q].depth) { U[p].depth =+1;
    U[q].parent =p; }
    else if (U[p].depth < U[q].depth) U[p].parent =q;
    else U[q].parent = p;
    }
  - "equal"과 "initial"는 전과 동일
  - The worst-case of comparisons : order of m lg m

Kruskal's Algorithm

- Worst-Case Time-Complexity Analysis
  - 단위연산: 비교문
  - 입력크기: 정점의 수 n과 이음선의 수 m

    1. 이음선 들을 정렬하는데 걸리는 시간: $\Theta(m \lg m)$
    2. 반복문 안에서 걸리는 시간: 루프를 m번 수행한다. 서로소인 집합 자료구조(disjoint set data structure)를 사용하여 구현하고, find, equal, merge 같은 동작을 호출하는 횟수가 상수이면, m개의 이음선 반복에 대한 시간복잡도는 $\Theta(m \lg m)$이다.
    3. n개의 서로소인 집합(disjoint set)을 초기화하는데 걸리는 시간: $\Theta(n)$

  - 그런데 여기서 $m \geq n - 1$이기 때문에, 위의 1과 2는 3을 지배하게 되므로, $W(m, n) = \Theta(m \lg m)$가 된다.
  - 그러나, 최악의 경우에는 모든 정점이 다른 모든 정점과 연결이 될 수 있기 때문에, $m = \frac{n(n-1)}{2} \in \Theta(n^2)$ 가 된다. 그러므로, 최악의 경우의 시간복잡도는

$$W(m,n) \in \Theta(n^2 \lg n^2) = \Theta(2n^2 \lg n) = \Theta(n^2 \lg n)$$

  - 최적여부의 검증(Optimality Proof)
    - Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함. (교재 참조)

Minimum Spanning Tree

두 알고리즘의 비교

	$W(m,n)$	sparse graph	dense graph
Prim	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Kruskal	$\Theta(m \lg m)$ and $\Theta(n^2 \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2 \lg n)$

- 연결된 그래프에서의 m은 $n-1 \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$ 의범위를 갖는다.

Minimum Spanning Tree

- 토론사항
  - 알고리즘의 시간복잡도는 그 알고리즘을 구현하는데 사용하는 자료구조에 좌우되는 경우도 있다.

Prim 의 알고리즘	$W(m,n)$	sparse graph	dense graph
Heap	$\Theta(m \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2 \lg n)$
Fibonacci heap	$\Theta(m + n \lg n)$	$\Theta(n \lg n)$	$\Theta(n^2)$

Dijkstra's Algorithm

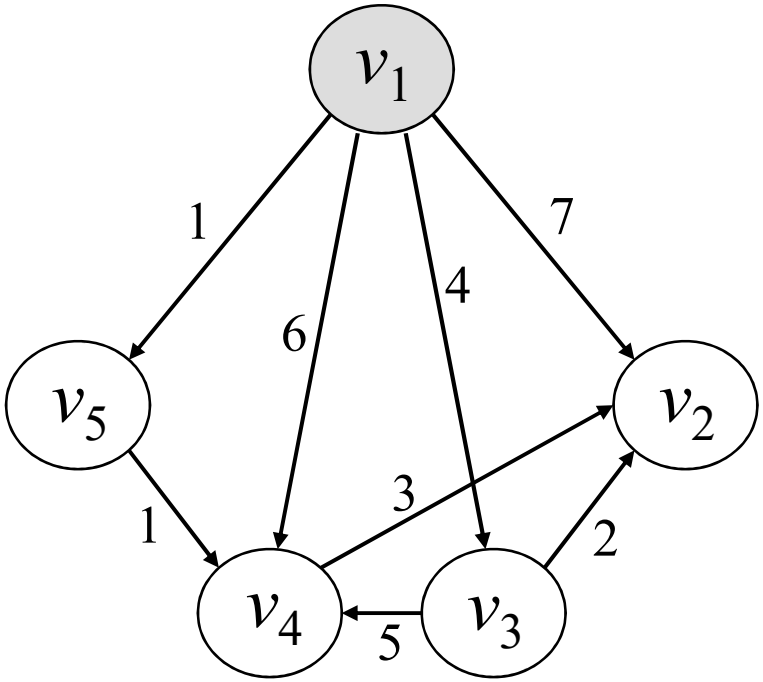
- 가중치가 있는 방향성 그래프에서 한 특정 정점에서 다른 모든 정점으로 가는 최단경로 구하는 문제
- 시작점 v_1
- 알고리즘

```
F := 0;
Y := {v1};
While (the instance is not solved)
  select a vertex v from V - Y, that has a shortest path // selection procedure
  from v1, using only vertices in Y as intermediate;     // and feasibility check

  add the new vertex v to Y;
  add the edge (on the shortest) that touches v to F;

  if (Y == V)                                            // solution check
      the instance is solved;
```

Dijkstra's Algorithm

touch

2	3	4	5
1	1	1	1

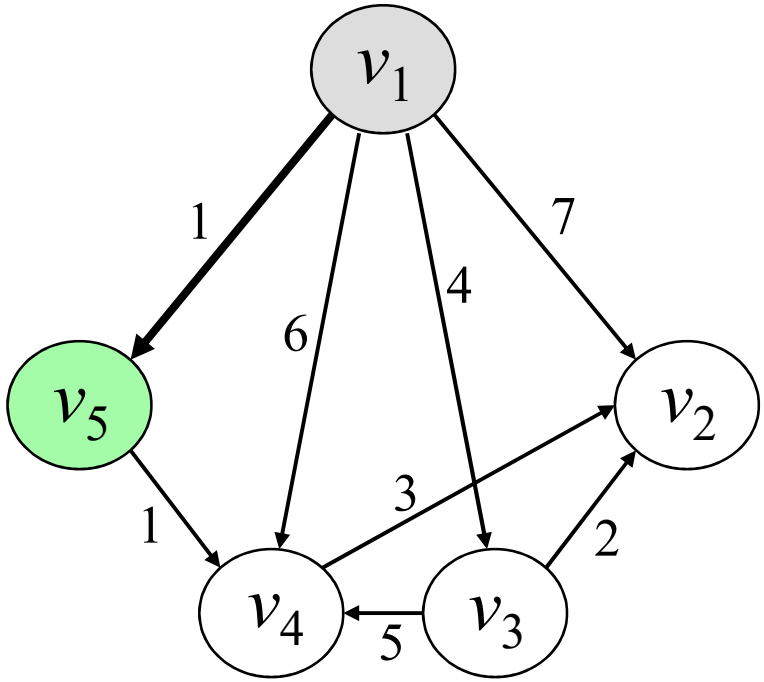


length

2	3	4	5
7	4	6	1

touch

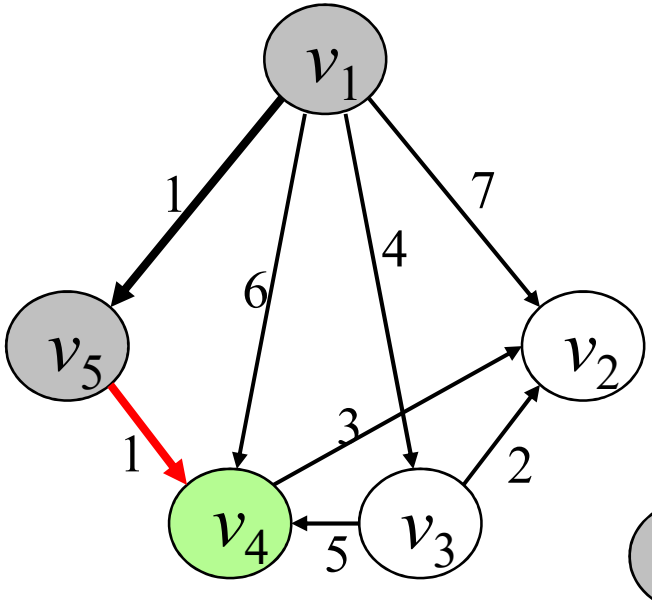
2	3	4	5
1	1	5	1



length

2	3	4	5
7	4	2	−1

Dijkstra's Algorithm

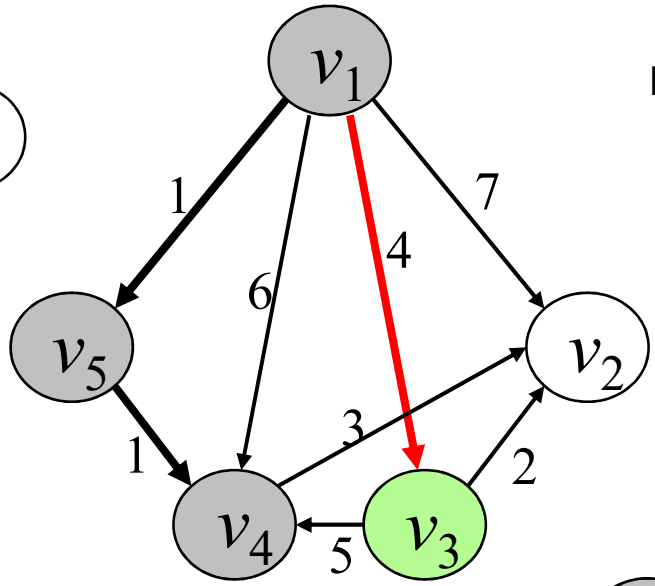


touch

2	3	4	5
4	1	5	1

length

2	3	4	5
5	4	−1	−1

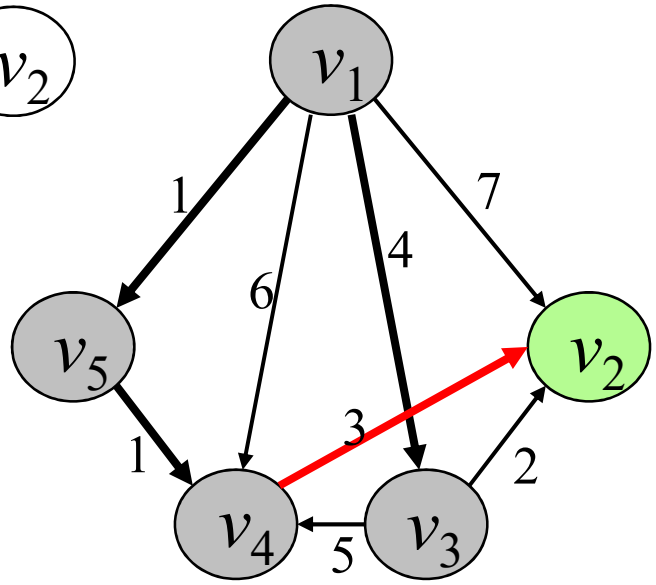


touch

2	3	4	5
4	1	5	1

length

2	3	4	5
−1	−1	−1	−1



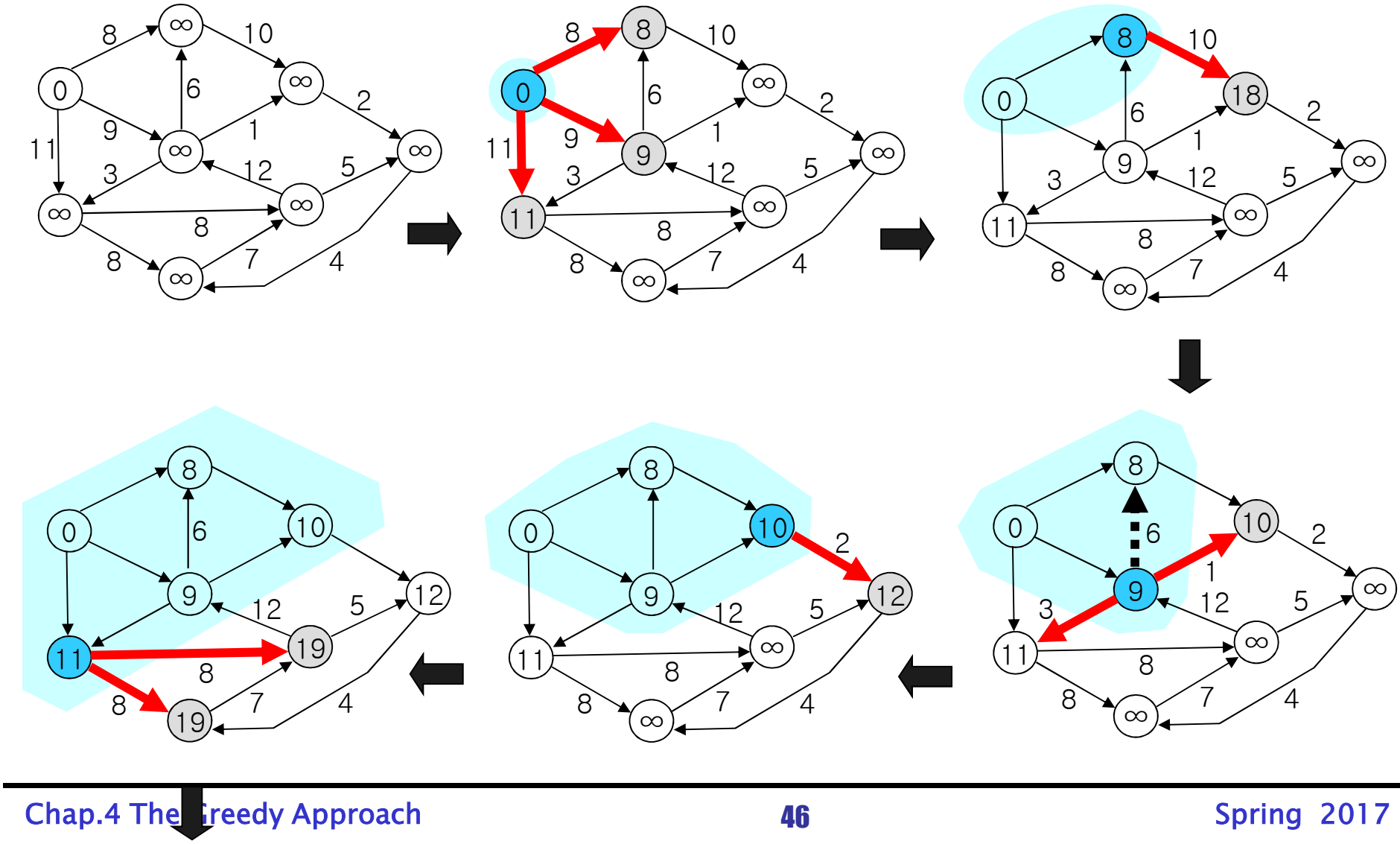
touch

2	3	4	5
4	1	5	1

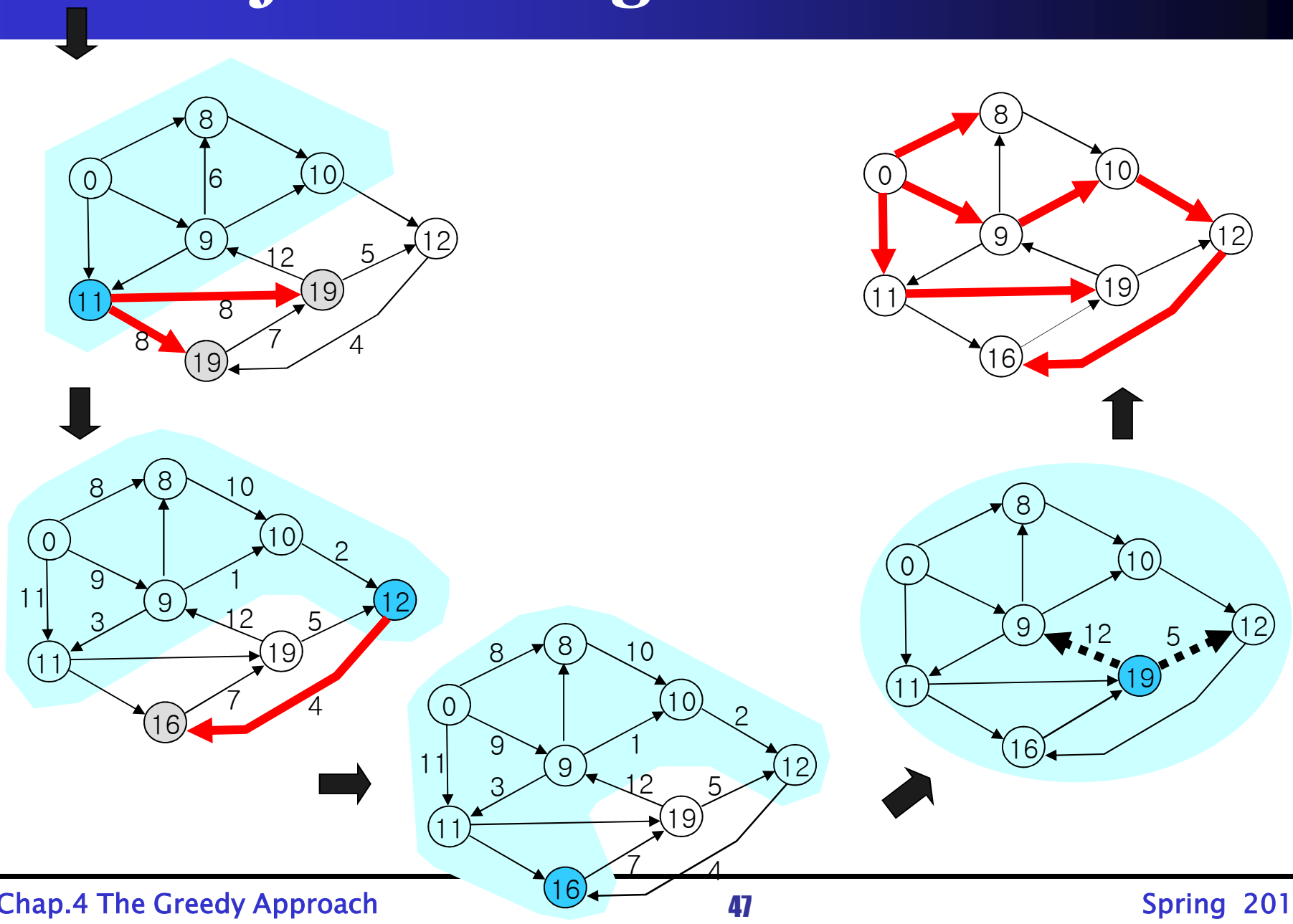
length

2	3	4	5
5	−1	−1	−1

Dijkstra's Algorithm 의 작동 예



Dijkstra's Algorithm 의 작동 예



Dijkstra's Algorithm

- Define touch & length
  - touch[i] = index of vertex v in Y such that the edge $<v, v_i>$ is the last edge on the current shortest path from v_1 to v_i using only vertices in Y as intermediates
  - length[i] = length of the current shortest path from v_1 to v_i using only vertices in Y as intermediates

Dijkstra's Algorithm

```
void dijkstra (int n, const number W[][], set_of_edges& F) {
   index i, vnear; edge e;
   index touch[2..n]; number length[2..n];

   F = Φ;
   for(i=2; i <= n; i++) {      // For all vertices, initialize v1 to be the last
      touch[i] = 1;             // vertex on the current shortest path from v1,
      length[i] = W[1][i];      // and initialize length of that path to be the
   }                            // weight on the edge from v1.

   repeat(n-1 times) {          // Add all n-1 vertices to Y.
      min = "infinite";
      for(i=2; i <= n; i++)     // Check each vertex for having shortest path.
         if (0 <= length[i] <= min) {
             min = length[i];
             vnear = i;
         }
      e = edge from vertex indexed by touch[vnear]
           to vertex indexed by vnear;
      add e to F;
      for(i=2; i <= n; i++)
         if (length[vnear] + W[vnear][i] < length[i]) {
             length[i] = length[vnear] + W[vnear][i];
             touch[i] = vnear; // For each vertex not in Y, update its shortest
         }                     // path.  Add vertex indexed by vnear to Y.
      length[vnear] = -1;
   }
}
```

Dijkstra's Algorithm

- 분석
  - $T(n) = 2\,(n-1)^2 \in \Theta(n^2)$.

- 최적여부의 검증(Optimality Proof)
  - Prim의 알고리즘의 경우와 비슷함.

탐욕적인 방법과 동적계획법의 비교

탐욕적인 접근방법	동적계획법
최적화 문제를 푸는데 적합	최적화 문제를 푸는데 적합
알고리즘이 존재할 경우 보통 더 효율적	때로는 불필요하게 복잡
단일출발점 최단경로 문제: $\Theta(n^2)$	단일출발점 최단경로 문제: $\Theta(n^3)$
알고리즘이 최적인지를 증명해야 함	최적화 원칙이 적용되는지를 점검해 보기만 하면 됨
배낭 빈틈없이 채우기 문제는 풀지만, 0-1 배낭 채우기 문제는 풀지 못함	0-1 배낭 채우기 문제를 푼다

The Knapsack Problem

- Problem:

  $S = \{item_1, item_2, \ldots, item_n\}$,

  $w_i = item_i$의 무게

  $p_i = item_i$의 가치

  W = 배낭에 넣을 수 있는 최대 무게

  라고 할 때, $\sum_{item_i \in A} w_i \le W$를 만족하면서

  $\sum_{item_i \in A} p_i$ 가 최대가 되도록

  $A \subseteq S$가 되는 A를 결정하는 문제이다.

- 무작정 (탐욕적) 알고리즘
  - n개의 물건에 대해서 모든 부분 집합을 다 고려한다.
  - 그러나 불행하게도 크기가 n인 집합의 부분집합의 수는 2^n개이다.

    ➔ Proof ? (2 ways)

The Knapsack Problem

- The 0-1 Knapsack Problem (1)
  - 가장 비싼 물건부터 우선적으로 채운다.
  - 애석하게도 이 알고리즘은 최적이 아니다!

  - 왜 아닌지 보기: $W = 30$ lb

품목	무게	값
$item_1$	25 lb	\$10
$item_2$	10 lb	\$9
$item_3$	10 lb	\$9

    - 탐욕적인 방법: $item_1 \Rightarrow 25\text{ lb} \Rightarrow \$10$
    - 최적인 해답: $item_2 + item_3 \Rightarrow 20\text{ lb} \Rightarrow \$18$

The Knapsack Problem

- The 0-1 Knapsack Problem (2)
  - 무게 당 가치가 가장 높은 물건부터 우선적으로 채운다.
  - 그래도 최적이 아니다!

  - 왜 아닌지 보기: $W = 30$ lb

품목	무게	값	값어치
$item_1$	5 lb	\$50	\$10/lb
$item_2$	10 lb	\$60	\$6/lb
$item_3$	20 lb	\$140	\$7/lb

    - 탐욕적인 방법: $item_1 + item_3 \Rightarrow 25 \text{ lb} \Rightarrow \$190$
    - 최적인 해답: $item_2 + item_3 \Rightarrow 30 \text{ lb} \Rightarrow \$200$

The Knapsack Problem

- The Fractional Knapsack Problem
  - 물건의 일부분을 잘라서 담을 수 있다.
  - 탐욕적인 접근방법으로 최적해를 구하는 알고리즘을 만들 수 있다.
  - $item_1 + item_3 + (5/10) * item_2 = \$50 + \$140 + (5/10)*\$60$

    $\Rightarrow \$220 \quad (30\ \text{lb})$
  - Optimal!

품목	무게	값	값어치
$item_1$	5 lb	\$50	\$10/lb
$item_2$	10 lb	\$60	\$6/lb
$item_3$	20 lb	\$140	\$7/lb

The Knapsack Problem

- Dynamic Programming Approach (0-1 Knapsack Problem)
  - $i > 0$ 이고 $w > 0$일 때, 전체 무게가 w가 넘지 않도록 i번째까지의 항목 중에서 얻어진 최고의 이익(optimal profit)을 $P[i][w]$라고 하면,

$$P[i][w] = \begin{cases} maximum(P[i-1][w], p_i + P[i-1][w-w_i]) & (\text{if } w_i \le w) \\ P[i-1][w] & (\text{if } w_i > w) \end{cases}$$

여기서 $P[i-1][w]$는 i번째 항목을 포함시키지 않는 경우의 최고 이익이고,
$p_i + P[i-1][w-w_i]$는 i번째 항목을 포함시키는 경우의 최고 이익이다.
위의 재귀 관계식이 최적화 원칙을 만족하는지는 쉽게 알 수 있다.

  - 그러면 어떻게 최대 이익 $P[n][W]$값을 구할 수 있을까?
    - int $P[0..n][0..W]$의 2차원 배열을 만든 후, 각 항을 계산하여 넣는다
    - 여기서 $P[0][w] = 0, P[i][0] = 0$으로 놓으면 되므로,
      계산해야 할 항목의 수는 $nW \in \Theta(nW)$

EXAMPLE: SOLVING KNAPSACK PROBLEM WITH DYNAMIC PROGRAMMING

Selection of n=4 items, capacity of knapsack M=8

Item i	Value v_i	Weight w_i
1	15	1
2	10	5
3	9	3
4	5	4

$f(0,g) = 0$, $f(k,0) = 0$

Recursion formula:

$$f(k,g) = \begin{cases} f(k-1,g) & \text{if } w_k > g \\ \max\{v_k + f(k-1,g-w_k),\ f(k-1,g)\} & \text{if } w_k \le g \text{ and } k>0 \end{cases}$$

Solution tabulated:

		Capacity remaining g=0	g=1	g=2	g=3	g=4	g=5	g=6	g=7	g=8
k=0	f(0,g) =	0	0	0	0	0	0	0	0	0
k=1	f(1,g) =	0	**15**	15	15	15	15	15	15	15
k=2	f(2,g) =	0	**15**	15	15	15	15	25	25	25
k=3	f(3,g) =	0	15	15	15	**24**	24	25	25	25
k=4	f(4, g) =	0	15	15	15	24	24	25	25	**29**

Last value: k=n, g=M

$f_{max} = f(n,M) = f(4,8) = 29$

The Knapsack Problem

- Refinement of Dynamic Programming
  - 여기서 n과 W와는 아무런 상관관계가 없다.
    만일 (임의적으로) $W = n!$이라고 한다면, 수행시간은 $\Theta(n \times n!)$이 된다.
    그렇게 되면 이 알고리즘은 앞에서 얘기한 무작정 알고리즘보다도
    나을게 하나도 없다.

  - 그럼 이 알고리즘을 최악의 경우에 $\Theta(2^n)$ 시간에 수행될 수 있도록,
    즉 무작정 알고리즘 보다 느리지 않고, 때로는 훨씬 빠르게 수행될 수
    있도록 개량할 수 있을까?
    - 착안점은 $P[n][W]$를 계산하기 위해서 $(n\text{-}1)$번째 행을 모두
      계산할 필요가 없다는데 있다.

The Knapsack Problem

- *P[n][W]*는 아래 식으로 표현할 수 있다

$$P[n][W] = \begin{cases} maximum(P[n-1][W], p_n + P[n-1][W-w_n]) & (\text{if } w_n \le W) \\ P[n-1][W] & (\text{if } w_n > W) \end{cases}$$

  - 따라서 (n-1)번째 행에서는 $P[n\text{-}1][W]$와 $P[n\text{-}1][W\text{-}w_n]$ 항만 필요
  - i-번째 행에 어떤 항목이 필요한지를 결정한 후에,
    다시 (i-1)번째 행에 필요한 항목을 결정
    - P[i][w]는 $P[i\text{-}1][w]$와 $P[i\text{-}1][w\text{-}w_i]$로 계산
  - 이런 식으로 $n = 1$이나 $w \le 0$일 때까지 계속해 나가면 된다.

The Knapsack Problem

- Ex 4.7
  - W=30 lb

품목	무게	값
$item_1$	5 lb	$50
$item_2$	10 lb	$60
$item_3$	20 lb	$140

  - We need P[3][W] = P[3][30]
    - To compute P[3][30] -- max(P[3-1][30], p_3 + P[3-1][30-w_3])
      = max(P[2][30], p_3 + P[2][10])
    - To compute P[2][30] -- max(P[2-1][30], p_2 + P[2-1][30-w_2])
      = max(P[1][30], p_2 + P[1][20])
    - To compute P[2][10] -- max(P[2-1][10], p_2 + P[2-1][10-w_2])
      = max(P[1][10], p_2 + P[1][0])

The Knapsack Problem

- Compute row 1
  - $P[1][w] = \begin{cases} \max(P[0][w], \$50+P[0][w-5]) & (\text{if } w_1 = 5 \le w) \\ P[0][w] & (\text{if } w_1 = 5 > w) \end{cases}$

    $= \begin{cases} \$50 & (\text{if } w_1 = 5 \le w) \\ \$0 & (\text{if } w_1 = 5 > w) \end{cases}$
  - Therefore

    $P[1][0] = \$0;\ P[1][10] = \$50;\ P[1][20] = \$50;\ P[1][30] = \$50$

- Compute row 2
  - $P[2][10] = \begin{cases} \max(P[1][10], \$60+P[1][0]) & (\text{if } w_2 = 10 \le 10) \\ P[1][10] & (\text{if } w_2 = 10 > 10) \end{cases}$

    $= \$60$
  - $P[2][30] = \begin{cases} \max(P[1][30], \$60+P[1][20]) & (\text{if } w_2 = 10 \le 30) \\ P[1][30] & (\text{if } w_2 = 10 > 30) \end{cases}$

    $= \$60 + \$30 = \$110$

The Knapsack Problem

- Compute row 3
  - $P[3][30] = \begin{cases} \max(P[2][30], \$140+P[2][10]) & (\text{if } w_3 = 20 \leq 30) \\ P[1][10] & (\text{if } w_3 = 20 > 30) \end{cases}$

    $= \$140 + \$60 = \$200$

- The modified algorithm – compute only 7 entries
- The original algorithm - compute $3 \times 30 = 90$ entries

The Knapsack Problem

- Efficiency in the worst case
  - Compute at most 2^i entries in the $(n - i)$-th row
    - Therefore the total number is $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
    - 따라서 최악의 경우의 수행시간은 $\Theta(2^n)$
  - The number of entries computed is in $O(nW)$
    - What about the number of the modified algorithm ?
    - If $n = W+1$, and $w_i = 1$ for all i,
      then the total number of entries is about

      $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1) / 2 = (W+1)(n+1) / 2$
    - For arbitrary large values of n and W, $\Theta(nW)$
  - Combining these 2 results, the worst case is in $O(min(2^n, nW))$

The Knapsack Problem

- 분할정복 방법으로도 이 알고리즘을 설계할 수도 있고,
  그 최악의 경우 수행시간은 $\Theta(2^n)$이다.

  - 아직 아무도 이 문제의 최악의 경우 수행시간이
    지수(exponential)보다 나은 알고리즘을 발견하지 못했고,
    아직 아무도 그러한 알고리즘은 없다라고 증명한 사람도 없다.

    - NP문제