# Correction des travaux dirigés de
# Machine learning
## Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
## Université Paris sciences et lettres

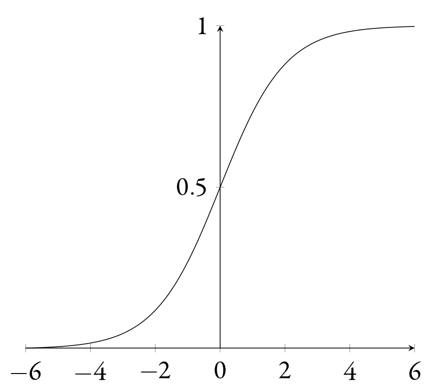
Joon Kwon

vendredi 27 mars 2020

1) Le cours donne :

$$(\hat{w}, \hat{b}) = \underset{(w,b)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i(\langle w, x_i \rangle + b)}) \right\}.$$

2) Tracé de la fonction :



3) Soit $z \in \mathbb{R}$ et $y \in ]0,1[$.

$$y = \frac{1}{1+e^{-z}} \iff e^{-z} = \frac{1}{y} - 1$$
$$\iff e^{z} = \frac{y}{1-y}$$
$$\iff z = \log \frac{y}{1-y}.$$

$\phi_{\text{sig}}$ est donc bijective de $\mathbb{R} \to ]0,1[$, et

$$\forall y \in ]0,1[\,, \quad \phi_{\text{sig}}^{-1}(y) = \log \frac{y}{1-y}.$$

4) De la définition de $(\hat{w}, \hat{b})$ il découle que

$$g_{\hat{w},\hat{b}} = \operatorname*{arg\,min}_{g \in \mathscr{L}_d} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i g(x_i)}) \right\}.$$

Dans l'expression ci-dessus, on peut tout à fait remplacer $g$ par $\phi_{\text{sig}}^{-1} \circ \phi_{\text{sig}} \circ g$. Cela donne :

$$g_{\hat{w},\hat{b}} = \operatorname*{arg\,min}_{g \in \mathscr{L}_d} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i \phi_{\text{sig}}^{-1}(\phi_{\text{sig}} \circ g)(x_i)}) \right\}.$$

En utilisant la définition de $\mathscr{F}_0$, on peut écrire :

$$\hat{f}_0 = \phi_{\text{sig}} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathscr{F}_0} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i (\phi_{\text{sig}}^{-1} \circ f)(x_i)}) \right\}.$$

On note $y_{0,i} = \frac{y_i+1}{2}$ l'étiquette de l'exemple $i \in [n]$ dans le problème auxiliaire. En utilisant l'expression de $\phi_{\text{sig}}^{-1}$, on peut écrire :

$$\hat{f}_0 = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathscr{F}_0} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log\left(1 + \exp\left(-(2y_{0,i} - 1) \log\left(\frac{f(x_i)}{1-f(x_i)}\right)\right)\right) \right\}$$

Ce qu'on peut réécrire comme une ERM :

$$\hat{f}_0 = \operatorname*{arg\,min}_{f \in \mathscr{F}_0} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell_0(y_{0,i}, f(x_i)) \right\}$$

où on a posé pour fonction de perte :

$$\ell_0(y, y') = \log\left(1 + \exp\left(-(2y-1)\log\left(\frac{y'}{1-y'}\right)\right)\right)$$

qu'on peut simplifier en :

$$\ell_0(y, y') = \log\left(1 + \left(\frac{1-y'}{y'}\right)^{2y-1}\right).$$

5) On vérifie facilemement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_{\text{sig}}(x) - \frac{1}{2}$ est du même signe strict que $x$. Autrment dit, $\text{sign} \circ (\phi_{\text{sig}} - \frac{1}{2}) = \text{sign}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\text{sign} \circ \left(\hat{f}_0 - \frac{1}{2}\right) &= \text{sign} \circ \left(\phi_{\text{sig}} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \text{sign} \circ \left(\phi_{\text{sig}} - \frac{1}{2}\right) \circ g_{\hat{w},\hat{b}} \\
&= \text{sign} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} = \hat{f}.
\end{aligned}$$