

CORRECTION DES TRAVAUX DIRIGÉS DE  
**MACHINE LEARNING**  
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES  
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 26 mai 2023



**EXERCICE 1.** —

1) Pour  $i \in [n]$ , sachant que  $\hat{f}(x_i)$  et  $y_i$  sont dans  $\{-1, 1\}$ , on a :

$$\begin{aligned}\hat{f}(x_i) \neq y_i &\iff \text{sign}(\hat{f}^{(1:m)}(x_i)) \neq \text{sign}(y_i) \\ &\iff y_i \hat{f}^{(1:m)}(x_i) \leq 0.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\epsilon_S(\hat{f}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{\hat{f}(x_i) \neq y_i\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{y_i \hat{f}^{(1:m)}(x_i) \leq 0\}} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-y_i \hat{f}^{(1:m)}(x_i)) = Z^{(m)},\end{aligned}$$

car on peut facilement se convaincre que pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}} \leq e^u$ .

2) Par récurrence. Pour  $k = 0$ ,

$$\pi^{(1)} = \left( \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) = \left( \frac{e^{-y_i \times 0}}{\sum_{j=1}^n e^{-y_j \times 0}} \right)_{i \in [n]} = \left( \frac{e^{-y_i \hat{f}^{(1:0)}(x_i)}}{\sum_{j=1}^n e^{-y_j \hat{f}^{(1:0)}(x_j)}} \right)_{i \in [n]}.$$

Pour  $1 \leq k \leq m$ , et  $i \in [n]$ , on a par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} \pi_i^{(k)} \exp \left( -w^{(k)} y_i \hat{f}^{(k)}(x_i) \right) &= \frac{\exp \left( -y_i \hat{f}^{(1:(k-1))}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \exp \left( -y_j \hat{f}^{(1:(k-1))}(x_j) \right)} \exp \left( -w^{(k)} y_i \hat{f}^{(k)}(x_i) \right) \\ &= \frac{\exp \left( -w^{(k)} \hat{f}^{(1:k)}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \exp \left( -y_j \hat{f}^{(1:(k-1))}(x_j) \right)}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \pi^{(k+1)} &= \left( \frac{\pi_i^{(k)} \exp \left( -w^{(k)} y_i \hat{f}^{(k)}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \pi_j^{(k)} \exp \left( -w^{(k)} y_j \hat{f}^{(k)}(x_j) \right)} \right)_{i \in [n]} \\ &= \left( \frac{\exp \left( -y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i) \right)}{\sum_{j=1}^n \exp \left( -y_j \hat{f}^{(1:k)}(x_j) \right)} \right)_{i \in [n]} \end{aligned}$$

3) Pour  $0 \leq k \leq m-1$ , on a  $\hat{f}^{(1:k+1)} = \hat{f}^{(1:k)} + w^{(k)} \hat{f}^{(k)}$ , et donc :

$$\begin{aligned}
\frac{Z^{(k+1)}}{Z^{(k)}} &= \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(-y_i \hat{f}^{(1:k+1)}(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i)\right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left(-y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i)\right) \exp\left(-y_i w^{(k+1)} \hat{f}^{(k+1)}(x_i)\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(-y_i \hat{f}^{(1:k)}(x_i)\right)} \\
&= \sum_{i=1}^n \pi_i^{(k+1)} \exp\left(-y_i w^{(k+1)} \hat{f}^{(k+1)}(x_i)\right) \\
&= e^{-w^{(k+1)}} \sum_{\substack{i \in [n] \\ \hat{f}^{(k+1)}(x_i) = y_i}} \pi_i^{(k+1)} + e^{w^{(k+1)}} \sum_{\substack{i \in [n] \\ \hat{f}^{(k+1)}(x_i) \neq y_i}} \pi_i^{(k+1)} \\
&= e^{-w^{(k+1)}} (1 - \varepsilon^{(k+1)}) + e^{w^{(k+1)}} \varepsilon^{(k+1)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1/\varepsilon^{(k+1)} - 1}} (1 - \varepsilon^{(k+1)}) + \sqrt{1/\varepsilon^{(k+1)} - 1} \cdot \varepsilon^{(k+1)} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon^{(k+1)}}{1 - \varepsilon^{(k+1)}}} (1 - \varepsilon^{(k+1)}) + \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k+1)}}} \varepsilon^{(k+1)} \\
&= 2\sqrt{\varepsilon^{(k+1)}(1 - \varepsilon^{(k+1)})}.
\end{aligned}$$

4) Un simple étude de fonction permet de voir que  $u \mapsto u(1-u)$  est croissante sur  $[0, 1/2]$ . Comme pour  $0 \leq k \leq m$ ,  $\varepsilon^{(k+1)} \leq 1/2 - \gamma$  par hypthèse, on a, en remarquant que  $Z^{(0)} = 1$ ,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_S(\hat{f}) \leq Z^{(m)} &= \frac{Z^{(m)}}{Z^{(m-1)}} \times \dots \times \frac{Z^{(1)}}{Z^{(0)}} = \prod_{k=0}^{m-1} 2\sqrt{\varepsilon^{(k+1)}(1 - \varepsilon^{(k+1)})} \\
&\leq \prod_{k=0}^{m-1} 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \gamma\right) \left(\frac{1}{2} + \gamma\right)} = (1 - 4\gamma^2)^{m/2} = e^{\frac{m}{2} \log(1-4\gamma^2)} \\
&\leq e^{\frac{m}{2}(-4\gamma^2)} = e^{-2\gamma^2 m}.
\end{aligned}$$

