Travaux dirigés de
Machine learning
Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Université Paris sciences et lettres

Joon Kwon

vendredi 21 avril 2023

On se place dans un cadre de régression avec $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$, et la perte quadratique :

$$\forall y, y' \in \mathbb{R}, \quad \ell(y, y') = \frac{1}{2}(y - y')^2.$$

Pour $w \in \mathbb{R}^d$, on note h_w le prédicteur défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad h_w(x) = \langle w, x \rangle .$$

On considère la classe de prédicteurs $\mathcal{F} = \{h_w\}_{w \in \mathbb{R}^d}$. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $S = (x_i, y_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ un échantillon d'apprentissage. Pour $i \in [n]$, on note x_{ij} ($1 \leqslant j \leqslant d$) les composantes de x_i. On pose :

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^\top \qquad \text{et} \qquad b = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i,$$

où $x_i^\top$ désigne la transposée de x_i, ce dernier étant vu comme un vecteur colonne.

1) Donner une expression simple des coefficients de la matrice A.

On s'intéresse à la minimisation du risque empirique avec régularisation ℓ_2 et un paramètre de régularisation $\lambda > 0$: elle donne le prédicteur $h_{\hat{w}}$ où $\hat{w}$ est défini par :

$$\hat{w} = \operatorname*{arg\,min}_{w \in \mathbb{R}^d} \mathrm{F}(w),$$

et où $\mathrm{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\forall w \in \mathbb{R}^d, \quad \mathrm{F}(w) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(y_i - h_w(x_i))^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_2^2 .$$

2) Donner une expression du gradient de F faisant intervenir A et b.
3) En déduire une équation matricielle vérifiée par $\hat{w}$.
4) Montrer que les valeurs propres de A sont positives.
5) Montrer que la matrice $\mathrm{A} + \lambda n \mathrm{I}_d$ (où I_d désigne la matrice identité) est inversible.
6) En déduire une expression matricielle pour $\hat{w}$.