

TRAVAUX DIRIGÉS DE  
**MACHINE LEARNING**  
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES  
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

vendredi 19 mai 2023



On rappelle le théorème qui donne l'existence et l'unicité de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien. Il sera utile dans le premier exercice.

**THÉORÈME.** — *Projection orthogonale.* — Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace de dimension finie. Pour  $x \in E$ , il existe un unique  $x_F \in F$  tel que :

$$x - x_F \in F^\perp.$$

De plus,

$$\|x\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x - x_F\|^2.$$

**EXERCICE 1.** — *Théorème de représentation.* — Soit  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  deux ensembles quelconques, et  $\ell : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit également  $(\tilde{\mathcal{X}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien,  $\|\cdot\|$  la norme associée, et  $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$  une application. Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}$  et on note pour  $(w, b) \in \tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}$  :

$$\forall \tilde{x} \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad f_{w,b}(\tilde{x}) = \phi(\langle w, \tilde{x} \rangle + b).$$

Soit  $\lambda > 0$ ,  $n \geq 1$  un entier et  $(x_i, y_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{S}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  un échantillon. On considère le problème d'optimisation suivant.

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ell(y_i, f_{w,b}(\psi(x_i))) + \frac{\lambda}{2} (\|w\|^2 + b^2) \\ \text{sachant} \quad & (w, b) \in \tilde{\mathcal{X}} \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (*)$$

Soit  $(\hat{w}, \hat{b})$  une solution du problème d'optimisation  $(*)$ .

1) Montrer qu'il existe  $w_* \in \tilde{\mathcal{X}}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tels que :

$$w_* = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi(x_i) \quad \text{et} \quad \forall i \in [n], (f_{w_*, \hat{b}} \circ \psi)(x_i) = (f_{\hat{w}, \hat{b}} \circ \psi)(x_i).$$

2) En déduire que  $\hat{w} = w_*$ .

**EXERCICE 2.** — Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble quelconque. On suppose dans cette question qu'on a  $(\tilde{\mathcal{X}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  espace préhilbertien,  $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ , et  $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  le noyau associé. Soit  $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{X}$ . Montrer que la matrice :

$$G = (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq m}$$

est symétrique semi-définie positive.

