Correction des travaux dirigés de Machine learning

Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Université Paris sciences et lettres

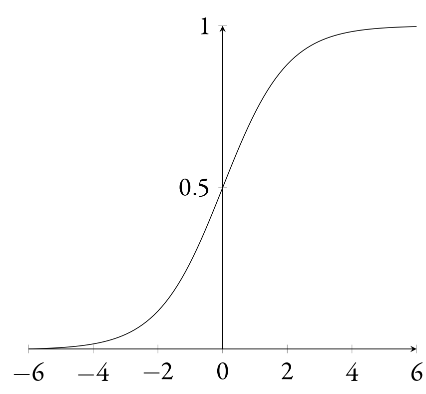
Joon Kwon

vendredi 23 mars 2022

1) Le cours donne :

$$(\hat{w}, \hat{b}) = \underset{(w,b)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i(\langle w, x_i\rangle + b)}) \right\}.$$

2) Tracé de la fonction :



3) Soit $z \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,1[$.

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{1+e^{-z}} \quad &\iff \quad e^{-z} = \frac{1}{y} - 1 \\ &\iff \quad e^{z} = \frac{y}{1-y} \\ &\iff \quad z = \log \frac{y}{1-y}. \end{aligned}$$

ϕ_{sig} est donc bijective de $\mathbb{R} \to]0,1[$, et

$$\forall y \in]0,1[\,, \quad \phi_{\text{sig}}^{-1}(y) = \log \frac{y}{1-y}.$$

4) De la définition de $(\hat{w}, \hat{b})$ il découle que

$$g_{\hat{w},\hat{b}} = \underset{g \in \mathscr{L}_d}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i g(x_i)}) \right\}.$$

Dans l'expression ci-dessus, on peut tout à fait remplacer g par $\phi_{\text{sig}}^{-1} \circ \phi_{\text{sig}} \circ g$. Cela donne :

$$g_{\hat{w},\hat{b}} = \underset{g \in \mathscr{L}_d}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i \phi_{\text{sig}}^{-1}(\phi_{\text{sig}} \circ g)(x_i)}) \right\}.$$

En utilisant la définition de $\mathscr{F}_0$, on peut écrire :

$$\hat{f}_0 = \phi_{\text{sig}} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} = \underset{f \in \mathscr{F}_0}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + e^{-y_i (\phi_{\text{sig}}^{-1} \circ f)(x_i)}) \right\}.$$

On note $y_{0,i} = \frac{y_i+1}{2}$ l'étiquette de l'exemple $i \in [n]$ dans le problème auxiliaire. En utilisant l'expression de ϕ_{sig}^{-1}, on peut écrire :

$$\hat{f}_0 = \underset{f \in \mathscr{F}_0}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \left(1 + \exp \left(-(2y_{0,i} - 1) \log \left(\frac{f(x_i)}{1 - f(x_i)} \right) \right) \right) \right\}$$

Ce qu'on peut réécrire comme une ERM :

$$\hat{f}_0 = \underset{f \in \mathscr{F}_0}{\arg\min} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ell_0(y_{0,i}, f(x_i)) \right\}$$

où on a posé pour fonction de perte :

$$\ell_0(y, y') = \log\left(1 + \exp\left(-(2y-1)\log\left(\frac{y'}{1-y'}\right)\right)\right)$$

qu'on peut simplifier en :

$$\ell_0(y, y') = \log\left(1 + \left(\frac{1-y'}{y'}\right)^{2y-1}\right).$$

5) On vérifie facilemement que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\phi_{\text{sig}}(x) - \frac{1}{2}$ est du même signe strict que x. Autrment dit, $\text{sign} \circ (\phi_{\text{sig}} - \frac{1}{2}) = \text{sign}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\text{sign} \circ \left(\hat{f}_0 - \frac{1}{2}\right) &= \text{sign} \circ \left(\phi_{\text{sig}} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \text{sign} \circ \left(\phi_{\text{sig}} - \frac{1}{2}\right) \circ g_{\hat{w},\hat{b}} \\
&= \text{sign} \circ g_{\hat{w},\hat{b}} = \hat{f}.
\end{aligned}$$