

TRAVAUX DIRIGÉS DE
MACHINE LEARNING
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 12 mai 2023



EXERCICE 1. — Soit $K : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad K(x, x') = \langle x, x' \rangle^2.$$

Montrer qu'il existe une application de redescription $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont K est le noyau.

EXERCICE 2. — *Noyau polynomial.* — Soit $d, m \geq 1$ des entiers et $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \quad K(x, x') = \langle x, x' \rangle^m.$$

Montrer que K est un noyau.

EXERCICE 3. — *Noyau gaussien.* — On considère $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad K(x, x') = e^{-\frac{1}{2}(x-x')^2}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que K est un noyau.

- 1) Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on notera $(u_m)_{m \geq 0}$ ses composantes. Soit $\tilde{\mathcal{H}}$ l'ensemble défini par :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \left| \text{la série } \sum u_m^2 \text{ converge} \right. \right\}.$$

Soit $u, v \in \tilde{\mathcal{H}}$. Montrer que la série $\sum u_m v_m$ converge.

- 2) Montrer que $\tilde{\mathcal{H}}$ est un espace vectoriel.
 3) Pour $u, v \in \tilde{\mathcal{H}}$, on définit

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m v_m.$$

Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$ est un produit scalaire sur $\tilde{\mathcal{H}}$.

- 4) Trouver une application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ telle que :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

