Travaux dirigés de
Machine learning
Cycle pluridisciplinaire d'études supérieures
Université Paris sciences et lettres

Joon Kwon

vendredi 15 mai 2020

Exercice 1. — *Distance d'un point à un hyperplan.* — Soit $(w, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose $\|w\|_2 = 1$. On considère le point $v = x - (\langle w, x \rangle + b)w$.

1) Montrer que $\langle w, v \rangle + b = 0$.
2) En déduire que

$$\min_{\substack{x' \in \mathbb{R}^d \\ \langle w, x' \rangle + b = 0}} \|x - x'\|_2 \leqslant |\langle w, x \rangle + b| .$$

3) Soit $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle w, u \rangle + b = 0$. Montrer que

$$\|x - u\|_2 \geqslant \|x - v\|_2 .$$

4) Conclure.

Exercice 2. — Soit $(x_i, y_i)_{i \in [n]} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d, \{-1, 1\})$ un échantillon linéairement séparable. On considère les deux problèmes d'optimisation suivants.

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & \min_{i \in [n]} |\langle w, x_i \rangle + b| \\ \text{soumis aux contraintes} \quad & \|w\|_2 = 1 \\ & \forall i \in [n], \quad y_i(\langle w, x_i \rangle + b) > 0. \end{aligned} \tag{$*$}$$

$$\begin{array}{rl} \text{minimiser} & \|w\|_2 \\ \text{soumis aux contraintes} & \forall i \in [n], \quad y_i(\langle w, x_i\rangle + b) \geqslant 1. \end{array} \tag{$**$}$$

Soit $(\hat{w}, \hat{b})$ une solution de $(*)$. On pose :

$$\mu = \left(\min_{i\in[n]} y_i(\langle \hat{w}, x_i\rangle + \hat{b})\right)^{-1},$$

et on considère

$$\tilde{w} = \mu\hat{w} \qquad \text{et} \qquad \tilde{b} = \mu\hat{b}.$$

1) Montrer que $h_{\tilde{w},\tilde{b}} = h_{\hat{w},\hat{b}}$.

2) Montrer que $(\tilde{w}, \tilde{b})$ est solution de $(**)$.