

TRAVAUX DIRIGÉS DE
MACHINE LEARNING
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 28 avril 2023



EXERCICE 1. — *Distance d'un point à un hyperplan.* — Soit $(w, b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose $\|w\|_2 = 1$. On considère le point $v = x - (\langle w, x \rangle + b)w$.

1) Montrer que $\langle w, v \rangle + b = 0$.

2) En déduire que

$$\min_{\substack{x' \in \mathbb{R}^d \\ \langle w, x' \rangle + b = 0}} \|x - x'\|_2 \leq |\langle w, x \rangle + b|.$$

3) Soit $u \in \mathbb{R}^d$ tel que $\langle w, u \rangle + b = 0$. Montrer que

$$\|x - u\|_2 \geq \|x - v\|_2.$$

4) Conclure.

EXERCICE 2. — Soit $(x_i, y_i)_{i \in [n]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d, \{-1, 1\})$ un échantillon linéairement séparable. On considère les deux problèmes d'optimisation suivants.

$$\begin{aligned} & \text{maximiser} && \min_{i \in [n]} |\langle w, x_i \rangle + b| \\ & \text{soumis aux contraintes} && \|w\|_2 = 1 \\ & && \forall i \in [n], \quad y_i(\langle w, x_i \rangle + b) > 0. \end{aligned} \tag{*}$$

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & \|w\|_2 \\ \text{soumis aux contraintes} & \forall i \in [n], \quad y_i(\langle w, x_i \rangle + b) \geq 1. \end{array} \quad (**)$$

Soit (\hat{w}, \hat{b}) une solution de $(*)$. On pose :

$$\mu = \left(\min_{i \in [n]} y_i(\langle \hat{w}, x_i \rangle + \hat{b}) \right)^{-1},$$

et on considère

$$\tilde{w} = \mu \hat{w} \quad \text{et} \quad \tilde{b} = \mu \hat{b}.$$

- 1) Montrer que $h_{\tilde{w}, \tilde{b}} = h_{\hat{w}, \hat{b}}$.
- 2) Montrer que (\tilde{w}, \tilde{b}) est solution de $(**)$.

