

CORRECTION DES TRAVAUX DIRIGÉS DE
MACHINE LEARNING
CYCLE PLURIDISCIPLINAIRE D'ÉTUDES SUPÉRIEURES
UNIVERSITÉ PARIS SCIENCES ET LETTRES

Joon Kwon

vendredi 22 mai 2020



EXERCICE 1. — Pour $x, x' \in \mathbb{R}^2$,

$$K(x, x') = \langle x, x' \rangle = (x_1 x'_1 + x_2 x'_2)^2 = x_1^2 (x'_2)^2 + 2x_1 x'_1 x_2 x'_2 + x_2^2 (x'_1)^2.$$

On pose $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\psi : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, \sqrt{2}x_1 x_2, x_2^2).$$

On a bien alors :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^2, \quad \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\mathbb{R}^3} = x_1^2 (x'_2)^2 + 2x_1 x'_1 x_2 x'_2 + x_2^2 (x'_1)^2 = K(x, x'),$$

K est le noyau associé à ψ .

EXERCICE 2. — *Noyau polynomial.* — On note $[d] = \{1, \dots, d\}$. Pour $x, x' \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \langle x, x' \rangle^m \\ &= (x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d) \times (x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d) \times \dots \times (x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in [d]^m} \prod_{k=1}^m x_{j_k} x'_{j_k} = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in [d]^m} \left(\prod_{k=1}^m x_{j_k} \right) \left(\prod_{k=1}^m x'_{j_k} \right). \end{aligned}$$

Soit $\tilde{\mathcal{H}} = \mathbb{R}^{([d]^m)}$ On considère $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ définie par

$$\psi : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \mapsto \left(\prod_{k=1}^m x_{j_k} \right)_{(j_1, \dots, j_m) \in [d]^m}$$

On considère sur $\tilde{\mathcal{H}}$ le produit scalaire canonique : pour $u, v \in \tilde{\mathcal{H}}$,

$$\langle u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in [d]^m} u_{(j_1, \dots, j_m)} v_{(j_1, \dots, j_m)}.$$

Alors, on a pour $x, x' \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \sum_{(j_1, \dots, j_m) \in [d]^m} \left(\prod_{k=1}^m x_{j_k} \right) \left(\prod_{k=1}^m x'_{j_k} \right) = K(x, x').$$

K est donc bien un noyau.

EXERCICE 3. — Noyau gaussien

1) Soit $N \geq 0$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{m=0}^N |u_m v_m| \leq \sqrt{\sum_{m=0}^N u_m^2} \sqrt{\sum_{m=0}^N v_m^2} \leq \sqrt{\sum_{m=0}^{+\infty} u_m^2} \sqrt{\sum_{m=0}^{+\infty} v_m^2}.$$

La série $\sum u_m v_m$ converge absolument, donc converge.

2) $\tilde{\mathcal{H}}$ est inclus par définition dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrons que $\tilde{\mathcal{H}}$ est un sous-espace. Pour $u, v \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a que la série $\sum (\lambda u_m)^2$ converge, donc $\lambda u \in \tilde{\mathcal{H}}$. Pour $m \geq 0$, on a :

$$(u_m + v_m)^2 = u_m^2 + 2u_m v_m + v_m^2.$$

On sait que les séries $\sum u_m^2$, $\sum v_m^2$ et $\sum u_m v_m$ convergent, donc $\sum (u_m + v_m)^2$ aussi. Donc : $u + v \in \tilde{\mathcal{H}}$. $\tilde{\mathcal{H}}$ est bien un sous-espace.

3) Soit $u, v, w \in \tilde{\mathcal{H}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— *Bilinéaire.* — On a pour $N \geq 0$,

$$\sum_{m=0}^N (u_m + v_m) w_m = \sum_{m=0}^N u_m w_m + \sum_{m=0}^N v_m w_m.$$

et

$$\sum_{m=0}^N \lambda u_m v_m = \lambda \sum_{m=0}^N u_m v_m.$$

En passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\langle u + v, w \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle u, w \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} + \langle v, w \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \quad \text{et} \quad \langle \lambda u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \lambda \langle u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}.$$

— *Symétrique.* — Pour $N \geq 0$,

$$\sum_{m=0}^N u_m v_m = \sum_{m=0}^N v_m u_m,$$

et en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient $\langle u, v \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \langle v, u \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}}$.

— *Positive.* — Pour $N \geq 0$, on a

$$\sum_{m=0}^N u_m u_m \geq 0$$

et $\langle u, u \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} \geq 0$ en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$.

— *Définie.* — Si $\langle u, u \rangle = 0$, on a pour tout $m \geq 0$:

$$0 \leq u_m^2 \leq \sum_{m'=0}^N u_{m'}^2,$$

ce qui entraîne $0 \leq u_m^2 \leq 0$ en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$, autrement dit $u_m = 0$. Donc $u = 0$.

4) Pour $x, x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K(x, x') &= \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2} + xx' - \frac{(x')^2}{2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(x')^2}{2}\right) \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(xx')^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-x^2/2} x^m}{\sqrt{m!}}\right) \left(\frac{e^{-(x')^2/2} (x')^m}{\sqrt{m!}}\right). \end{aligned}$$

On définit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) = \left(\frac{e^{-x^2/2} x^m}{\sqrt{m!}}\right)_{m \geq 0}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $\psi(x) \in \tilde{\mathcal{H}}$ car la série $\sum (\frac{x^m}{\sqrt{m!}})^2$ converge (de limite e^{x^2}). Et on a bien :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, \quad \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = K(x, x').$$

