Travaux dirigés d'Optimisation

Master 2 — Mathématiques pour les sciences du vivant

Joon Kwon

jeudi 29 septembre 2022

Exercice 1. — On écrit le problème sous forme standard :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(x,y) = x^2 - 14x + y^2 - 6y - 7 \\ \text{soumis à} \quad & g_1(x,y) = x + y - 2 \leqslant 0 \\ & g_2(x,y) = x + 2y - 3 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Montrons d'abord qu'il existe une unique solution. La fonction objectif se réécrit :

$$f(x,y) = \|(x,y) - (7,3)\|^2 - 65.$$

Une solution du problème est la projection orthogonale du point $(7,3)$ sur l'ensemble des points admissibles qui est convexe fermé en tant qu'intersection de deux demi-espaces fermés. Donc, elle existe et est unique.

Les fonctions f, g_1, g_2 sont bien $\mathscr{C}^1$ Les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. Soit (x^*, y^*) une solution. x^* vérifie les conditions KKT. Il existe $\mu_1, \mu_2 \geqslant 0$ tels que :

$$\nabla f(x^*, y^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*, y^*) + \mu_2 \nabla g_2(x^*, y^*) = 0$$

et $\mu_1 g_1(x^*, y^*) = 0$ et $\mu_2 g_2(x^*, y^*) = 0$. On suppose dans un premier temps qu'on se trouve dans le cas $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 = 0$. Les trois équations ci-dessus sont alors équivalentes à $\mu_1 = 8$, $x^* = 3$ et $y^* = -1$. Le point $(3, -1)$ vérifie donc les conditions KKT et est bien admissible. Or, on est dans le cas convexe (f, $g_j h_i$ convexes $\mathscr{C}^1$, h_i affines) : un point admissible vérifiant les conditions KKT est nécéssairement solution. La solution du problème, qu'on sait être unique, est donc $(3, -1)$. Il est inutile d'examiner les autres cas.

Exercice 2 (*Projection orthogonale sur le simplexe*). —

1) Δ_d est un convexe fermé en tant qu'intersection d'un hyperplan $\left\{x \in \mathbb{R}^d,\ \sum_{i=1}^d x_i = 1\right\}$ et de demi-espaces fermés $\left\{x \in \mathbb{R}^d,\ x_i \geqslant 0\right\}$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Le projeté orthogonal de y sur x existe et est unique.
2) Ce problème peut s'écrire sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & f(x) = \frac{1}{2}\|y - x\|^2 \\ \text{soumis à} \quad & h_1(x) = \sum_{i=1}^d x_i - 1 = 0 \\ & g_1(x) = -x_1 \leqslant 0 \\ & \vdots \\ & g_d(x) = -x_d \leqslant 0. \end{aligned}$$

3) Les fonctions $f, h_1, g_1, \dots, g_d$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. Les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. x^* vérifie les conditions KKT. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_d \geqslant 0$ tels que :

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla h_1(x^*) + \sum_{j=1}^d \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0,$$

et $\mu_j(-x_j^*) = 0$. pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$. Donc pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$,

$$x_i^* = \mu_i + y_i - \lambda.$$

On distingue trois cas. Si $y_i - \lambda > 0$, on a $x_i^* > 0$ (car $\mu_i \geqslant 0$) ; et puisque $x_i^* \mu_i = 0$, $\mu_i = 0$ nécessairement et $x_i^* = y_i - \lambda$. Si $y_i - \lambda < 0$, alors $\mu_j > 0$ et $x_i^* = 0$. Enfin, si $y_i - \lambda = 0$, on a $x_i^* = y_i = 0$. Dans les trois cas, on peut écrire $x_i^* = \max(0, y_i - \lambda)$.

4) On a $1 = \sum_{i=1}^{d} x_i^* = \sum_{i=1}^{d} \max(0, y_i - \lambda)$. Le terme dans la somme est strictement positif si, et seulement si $\lambda < y_i$. Les termes étant positifs et la somme valant 1, il existe nécessairement un terme strictement positif. Quitte a renuméroter, on peut supposer $y_1 \leqslant y_d$. Il existe $1 \leqslant i_0 \leqslant d$ tel que $i \geqslant i_0 \implies \lambda < y_i$. On a alors,

$$1 = \sum_{i=i_0}^{d} (y_i - \lambda) = \sum_{i=i_0}^{d} y_i - \lambda(d - i_0 + 1).$$

λ peut donc s'écrire :

$$\lambda = \frac{\sum_{i=i_0}^{d} y_i - 1}{d - i_0 + 1}.$$

On peut alors mettre en œuvre l'algorithme suivant. On calcule les quantités $\lambda_i = \frac{\sum_{j=i}^{d} y_j - 1}{d-i+1}$ ci-dessus pour $1 \leqslant j \leqslant d$. Et on détermine j_0 qui vérifie $\sum_{i=1}^{d} \max(0, y_i - \lambda_{j_0}) = 1$. On facilement se convaincre qu'il n'existe qu'une seule telle valeur et que donc $j_0 = i_0$ et :

$$x_i^* = \max(0, y_i - \lambda_{j_0}), \quad 1 \leqslant i \leqslant d.$$

Exercice 3 (*Optimisation de portefeuille*). —

1) Le problème peut s'écrire sous la forme standard suivante :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \frac{1}{2} x^\top A x \\ \text{soumis à} \quad & h_1(x) = \sum_{i=1}^{d} x_i - 1 = 0 \\ & h_2(x) = a^\top x - b = 0 \\ & g_1(x) = -x_1 \leqslant 0 \\ & \vdots \\ & g_d(x) = -x_d \leqslant 0. \end{aligned}$$

2) Les fonctions $f, h_1, h_2, g_1, \dots, g_d$ sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$. Toutes les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. Soit x^* une solution. Elle vérifie

donc les conditions KKT : il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_d \geqslant 0$ tels que :

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla h_1(x^*) + \lambda_2 \nabla h_2(x^*) + \sum_{i=1}^{d} \mu_i \nabla g_i(x^*) = 0,$$

et $\mu_i g_i(x^*) = 0$, ce qui se réécrit :

$$\mathrm{A}x^* + \lambda_1 \mathbb{1} + \lambda_2 a - \mu = 0$$

et $\mu_i x_i^* = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

3) Le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(x, \lambda, \mu) &= \frac{1}{2} x^\top \mathrm{A} x + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i - 1 \right) + \lambda_2 (a^\top x - b) - \mu^\top x \\ &= \frac{1}{2} x^\top \mathrm{A} x + (\lambda_1 \mathbb{1} + \lambda_2 a - \mu)^\top x - \lambda_1 - \lambda_2 b. \end{aligned}$$

Le problème dual s'écrit

$$\begin{aligned} \text{maximiser} \quad & \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \mathrm{L}(x, \lambda, \mu) \\ \text{soumis à} \quad & \mu_1, \dots, \mu_d \geqslant 0. \end{aligned}$$

Les fonctions $f, h_1, h_2, g_1, \dots, g_d$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, convexes et h_1, h_2 affines. Il suffit donc de montrer qu'il existe une solution vérifiant les conditions KKT pour avoir dualité forte. L'ensemble des points admissibles est un convexe fermé car intersection de sous-espaces affines et de demi-espaces fermés. Il est non vide car si on note $i_1 = \arg\min_{1 \leqslant i \leqslant d} a_i$ et $i_2 = \arg\max_{1 \leqslant i \leqslant d} a_i$, alors on peut vérifier que

$$\frac{a_{i_2} - b}{a_{i_2} - a_{i_1}} e_{i_1} + \frac{b - a_{i_1}}{a_{i_2} - a_{i_1}} e_{i_2},$$

où e_{i_1} et e_{i_2} sont des éléments de la base canonique, est un point admissible. La fonction objectif ayant une hessienne définie positive, elle est fortement convexe et donc strictement convexe. Elle admet donc un unique minimiseur sur l'ensemble admissible. Cette solution vérifie les conditions KKT car les contraintes sont affines donc qualifiées en tout point. Il y a donc bien dualité forte.

4) Pour $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^d$ et $\mu_1, \dots, \mu_d \geqslant 0$ fixé, le gradient de l'application $x \mapsto \mathrm{L}(x, \lambda, \mu)$ est une forme quadratique de matrice hessienne définie positive égale à A, et admet donc un unique minimiseur : $\mathrm{A}^{-1}(\mu - \lambda_1 \mathbb{1} - \lambda_2 a)$. L'algorithme d'Uzawa s'écrit donc, pour $t \geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
x^{(t)} &= \mathrm{A}^{-1}(\mu^{(t)} - \lambda_1^{(t)} \mathbb{1} - \lambda_2^{(t)} a) \\
\lambda_1^{(t+1)} &= \lambda_1^{(t)} + \gamma^{(t)} \left(\mathbb{1}^\top x^{(t)} - 1 \right) \\
\lambda_2^{(t+1)} &= \lambda_2^{(t)} + \gamma^{(t)} \left(a^\top x^{(t)} - b \right) \\
\mu_i^{(t+1)} &= \max(0, \mu_i^{(t)} - \gamma^{(t)} x_i^{(t)}), \quad 1 \leqslant i \leqslant d.
\end{aligned}
$$