

TRAVAUX DIRIGÉS D'
OPTIMISATION
MASTER 2 — MATHÉMATIQUES
POUR LES SCIENCES DU VIVANT

Joon Kwon

jeudi 7 octobre 2021



EXERCICE 1. — Résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{minimiser} & x^2 - 14x + y^2 - 6y - 7 \\ \text{soumis à} & x + y \leq 2 \\ & x + 2y \leq 3. \end{array}$$

EXERCICE 2 (*Projection orthogonale sur le simplexe*). — Soit $d \geq 2$ un entier. On considère le simplexe de \mathbb{R}^d :

$$\Delta_d = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^d, \sum_{i=1}^d x_i = 1 \right\}.$$

Soit $y \in \mathbb{R}^d$ fixé.

- 1) Montrer qu'il existe un unique minimiseur global $x^* \in \Delta_d$ de $f(x) = \frac{1}{2} \|y - x\|^2$ sur Δ_d .
- 2) Écrire ce problème sous forme standard.
- 3) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x_i^* = \max(0, y_i - \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

4) Proposer un algorithme qui donne un calcul exact de la solution x^* .

EXERCICE 3 (*Optimisation de portefeuille*). — Soit $d \geq 2$ un entier, $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \left[\min_{1 \leq i \leq d} a_i, \max_{1 \leq i \leq d} a_i \right]$, et A une matrice symétrique semi-définie positive de taille $d \times d$. On note $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} & \text{minimiser} && \frac{1}{2} x^\top A x \\ & \text{soumis à} && \mathbb{1}^\top x = 1 \\ & && x_i \geq 0 \quad (1 \leq i \leq d) \\ & && a^\top x = b. \end{aligned}$$

- 1) Écrire le problème sous forme standard.
- 2) Écrire les conditions d'optimalité pour une solution x^* du problème.
- 3) Écrire le problème dual et montrer qu'il y a dualité forte.
- 4) Écrire l'algorithme d'Uzawa associé.

