

TRAVAUX DIRIGÉS D'
OPTIMISATION
MASTER 2 — MATHÉMATIQUES
POUR LES SCIENCES DU VIVANT

Joon Kwon

jeudi 6 octobre 2022



EXERCICE 1 (*Gradient stochastique*). — Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable admettant un minimiseur $x^* \in \mathbb{R}^d$. Soit $\sigma > 0$, $x^{(1)} \in \mathbb{R}^d$, $(\gamma^{(t)})_{t \geq 1}$ une suite strictement positive, et on pose pour $t \geq 1$:

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \gamma^{(t)} \hat{g}^{(t)},$$

où $\hat{g}^{(t)}$ est une variable aléatoire telle que :

$$\mathbb{E} [\hat{g}^{(t)} \mid x^{(t)}] = \nabla f(x^{(t)}) \quad \text{et} \quad \mathbb{E} [\|\hat{g}^{(t)}\|^2] \leq \sigma^2.$$

1) Montrer que pour tout $t \geq 1$,

$$2\gamma^{(t)} \hat{g}^{(t)\top} (x^{(t)} - x^*) = \|x^{(t)} - x^*\|^2 - \|x^{(t+1)} - x^*\|^2 + (\gamma^{(t)})^2 \|\hat{g}^{(t)}\|^2.$$

2) On suppose dans cette question que f est convexe. Montrer que pour tout $T \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{\sum_{t=1}^T \gamma^{(t)} x^{(t)}}{\sum_{t=1}^T \gamma^{(t)}} \right) \right] - f(x^*) \leq \frac{\|x^{(1)} - x^*\|^2 + \sigma^2 \sum_{t=1}^T (\gamma^{(t)})^2}{2 \sum_{t=1}^T \gamma^{(t)}}.$$

Proposer un choix judicieux pour $\gamma^{(t)}$, et écrire la borne qui en découle. Si σ n'est pas connu à l'avance, quelle borne peut-on obtenir ?

Soit $L > 0$. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que f est L -régulière.

3) On ne suppose plus dans cette question que f est convexe. Montrer que pour tout $T \geq 1$,

$$\mathbb{E} \left[\frac{\sum_{t=1}^T \gamma^{(t)} \|\nabla f(x^{(t)})\|^2}{\sum_{t=1}^T \gamma^{(t)}} \right] \leq \frac{f(x^{(1)}) - f(x^*) + \frac{L\sigma^2}{2} \sum_{t=1}^T (\gamma^{(t)})^2}{\sum_{t=1}^T \gamma^{(t)}}.$$

Proposer un choix judicieux pour $\gamma^{(t)}$, et écrire la borne qui en découle.

Soit $K > 0$. On suppose dans la suite que f est K -fortement convexe.

6) Montrer que :

$$\|x^{(1)} - x^*\|^2 \leq \frac{4\sigma^2}{K^2}.$$

7) On suppose dans la suite que $\gamma^{(t)} = 1/(Kt)$ pour tout $t \geq 1$. Montrer que pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{E} [\|x^{(t+1)} - x^*\|^2] \leq \left(1 - \frac{2}{t}\right) \mathbb{E} [\|x^{(t)} - x^*\|^2] + \frac{\sigma^2}{K^2 t^2}.$$

8) En déduire que pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbb{E} [f(x^{(t)})] - f(x^*) \leq \frac{2L\sigma^2}{K^2 t}.$$

