

Optimisation sans contraintes

Joon Kwon

Master 2 — MathSV

30 septembre 2021

Dans ce chapitre, $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ et on considère les problèmes de minimisation sans contrainte.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

Exemple (Régression logistique avec régularisation Ridge)

Soit $d, n \geq 1$ entiers, $\lambda > 0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^d$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log \left(1 + e^{-b_i(a_i^\top x)} \right) + \lambda \|x\|_2^2 \right\}.$$

Bibliographie

- Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe. **Convex optimization**. Cambridge University Press, 2004.
- Jorge Nocedal & Stephen Wright. **Numerical optimization**. Springer Science & Business Media, 2006.
- Joseph-Frédéric Bonnans, et al. **Numerical optimization : theoretical and practical aspects**. Springer Science & Business Media, 2006.
- Wenyu Sun & Ya-Xiang Yuan. **Optimization theory and methods : nonlinear programming**. Springer Science & Business Media, 2006.
- Kenneth Lange. **Optimization**. Springer Science & Business Media, 2013.

Conditions d'optimalité

Descente de gradient

Méthode de Newton

Conditions d'optimalité

Conditions d'optimalité locale

Dans tout le chapitre, f est une application $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème (Conditions nécessaires d'optimalité locale)

Soit x^* un *minimiseur local* de f .

- Si f est *différentiable* en x^* , alors x^* est un *point critique* (i.e. $\nabla f(x^*) = 0$).
- Si de plus, f est *deux fois différentiable* en x^* , alors $\nabla^2 f(x^*)$ est *semi-définie positive*.

Remarque

La première condition n'est pas suffisante : les points d'inflexions ou les points-selles sont des points critiques, mais ne sont pas des minimiseurs.

Remarque (Résolution exacte)

Lorsque ∇f a une expression *suffisamment simple*, on peut :

- sélectionner les points critiques par résolution exacte de l'équation $\nabla f(x) = 0$,
- éventuellement sélectionner les minima locaux,
- en déduire les minimiseurs globaux.

Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème (Condition suffisante d'optimalité locale)

Soit $x^* \in \mathbb{R}^d$. On suppose que :

- f est *deux fois différentiable* en x^* ,
- $\nabla f(x^*) = 0$,
- $\nabla^2 f(x^*)$ est *symétrique définie positive*.

Alors, x^* est un *minimum local* de f .

Remarque

Cette condition n'est pas nécessaire.

Théorème (Condition suffisante d'optimalité globale)

Soit x^* un *point critique* de f .

- Si f est *convexe*, alors x^* est un *minimiseur global* de f .
- Si f est *strictement convexe*, alors x^* est l'*unique minimiseur global* de f .

Descente de gradient

Remarques générales sur les algorithmes itératifs

- Lorsqu'une résolution exacte n'est pas possible, on a recours aux algorithmes **itératifs** pour rechercher des **solutions approchées**.
- Les algorithmes itératifs construisent une suite d'itérées $(x^{(t)})_{t \geq 1}$.
- On espère une convergence vers une solution.

En pratique, différents **critères d'arrêt** sont possibles.

- Nombre d'itérations $T \geq 1$ fixé à l'avance.
- Arrêt lorsque $\|\nabla f(x^{(t)})\| \leq \varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance.
- Arrêt lorsque $f(x^{(t)}) \geq f(x^{(t-1)}) - \varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ fixé à l'avance.

Descente de gradient

Definition (Descente de gradient)

Soit $x^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ et $(\gamma^{(t)})_{t \geq 1}$ une suite strictement positive. On appelle **descente de gradient** associée à la fonction objectif f , au point initial $x^{(1)}$ et aux pas $(\gamma^{(t)})_{t \geq 1}$ la suite $(x^{(t)})_{t \geq 1}$ définie par :

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \gamma^{(t)} \nabla f(x^{(t)}), \quad t \geq 1.$$

Remarque

- *Méthode de premier ordre i.e. utilise le gradient*
- *Chaque itération correspond à la résolution d'un problème simplifié*

Garanties quantitatives

Théorème

Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et L -régulière, x^* un minimiseur de f , et $x^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ quelconque. Soit $(x^{(t)})_{t \geq 1}$ les itérées de la descente de gradient associée avec un pas $\gamma^{(t)} = 1/L$ ($t \geq 1$), et $T \geq 1$.

- Alors,

$$\min_{1 \leq t \leq T} \left\| \nabla f(x^{(t)}) \right\|_2^2 \leq \frac{2L(f(x^{(1)}) - f(x^*))}{T}.$$

- Si de plus f est convexe,

$$f(x^{(T+1)}) - f(x^*) \leq \frac{2L \left\| x^{(1)} - x^* \right\|_2^2}{T}.$$

- Soit $K > 0$. Si de plus que f est K -fortement convexe,

$$f(x^{(T+1)}) - f(x^*) \leq \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{K}{L} \right)^T \left\| x^{(1)} - x^* \right\|_2^2.$$

Choix du pas par line-search

Line-search exact

$$\gamma^{(t)} = \arg \min_{\gamma > 0} \left\{ f \left(x^{(t)} - \gamma \nabla f(x^{(t)}) \right) \right\}.$$

- Ce calcul de $\gamma^{(t)}$ correspond à une optimisation en dimension 1.
- Relativement coûteux (en calcul) et inutile.
- En pratique, il existe des méthodes moins coûteuses (voir TP) qui donnent d'assez bons pas $\gamma^{(t)}$: règles d'Armijo, de Wolfe, etc.

Discussion sur le conditionnement

Soit A une matrice symétrique semi-définie positive de taille $d \times d$.

- **Cas extrême.** Si $\text{Sp} = \{\lambda\}$, alors $A = \lambda I$. Et la descente de gradient peut minimiser $x \mapsto x^\top A x$ en une itération (avec line-search exact).
- **Cas “bien conditionné”.** S’il y a peu d’écarts entre les valeurs propres de A , $x \mapsto x^\top A x$ est facile à minimiser par la descente de gradient.
- **Cas “mal conditionné”.** S’il y a des écarts importants entre les valeurs propres de A , $x \mapsto x^\top A x$ est difficile à minimiser par la descente de gradient (i.e. leng).

$$\text{Au voisinage de } x^*, f(x) \simeq \frac{1}{2}(x - x^*)^\top \nabla^2 f(x)(x - x^*).$$

Conclusion

La performance de la descente de gradient dépend du **conditionnement**
de $\nabla^2 f(x^*)$

Méthode de Newton

Méthode de Newton

Definition (Méthode de Newton)

Soit $x^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ et $(\gamma^{(t)})_{t \geq 1}$ une suite strictement positive. On appelle **méthode de Newton** associée à la fonction objectif f , au point initial $x^{(1)}$ et aux pas $(\gamma^{(t)})_{t \geq 1}$ la suite $(x^{(t)})_{t \geq 1}$ définie par :

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \gamma^{(t)} \left(\nabla^2 f(x^{(t)}) \right)^{-1} \nabla f(x^{(t)}), \quad t \geq 1.$$

- Méthode du **second ordre**.
- Bien définie si la hessienne est **inversible**.
- L'itération correspond à minimiser l'approximation d'ordre 2 de f en $x^{(t)}$.
- **Solution exacte** en une seule itération si f est **quadratique**.
- Convergence très rapide dans la région où f est bien approximée par son développement d'ordre 2 en x^* .
- On peut choisir le pas $\gamma^{(t)}$ par des méthodes de **line-search**.
- Ne jamais calculer $(\nabla^2 f(x^{(t)}))^{-1}$ (sauf peut-être pour d petit). Il suffit de résoudre $\nabla^2 f(x^{(t)})u = \nabla f(x^{(t)})$. Ce qui est possible dès lors qu'on sait calculer $\nabla^2 f(x^{(t)})u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^d$.
- Malgré tout, **très coûteux** pour $d \gg 1$.

Méthodes quasi-Newton

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \gamma^{(t)} H^{(t)} \nabla f(x^{(t)}), \quad t \geq 1.$$

- Méthode de Newton où a remplacé $(\nabla^2 f(x^{(t)}))^{-1}$ par une approximation $H^{(t)}$.
- Typiquement, $H^{(t+1)}$ a une expression explicite en $H^{(t)}$, $x^{(t+1)}$, $x^{(t)}$, $\nabla f(x^{(t+1)})$ et $\nabla f(x^{(t)})$.
- Méthode d'ordre 1.
- Nombreuses formules différentes pour $H^{(t)}$: BFGS, Broyden, DFP, SR1, etc.