# Travaux dirigés d'
# Optimisation
## Master 2 — Mathématiques pour les sciences du vivant

Joon Kwon

jeudi 22 septembre 2022

Soit $d, \mathrm{T} \geqslant 1$ des entiers, $\mathrm{L} > 0$ et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et L-régulière admattant un minimiseur $x^* \in \mathbb{R}^d$.

Soit $x^{(1)} \in \mathbb{R}^d$ quelconque, et on considère les itérées $(x^{(t)})_{t \geqslant 1}$ définies par la descente de gradient avec un pas égal à $1/\mathrm{L}$ :

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{1}{\mathrm{L}} \nabla f(x^{(t)}), \qquad t \geqslant 1.$$

1) Montrer que

$$\min_{1 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}} \left\| \nabla f(x^{(t)}) \right\|_2^2 \leqslant \frac{2\mathrm{L}(f(x^{(1)}) - f(x^*))}{\mathrm{T}}.$$

2) On suppose de plus que $f$ est convexe. Montrer que

$$f(x^{(\mathrm{T}+1)}) - f(x_*) \leqslant \frac{2\mathrm{L} \left\| x^{(1)} - x^* \right\|_2^2}{\mathrm{T}}.$$

3) Soit $\mathrm{K} > 0$. On suppose de plus que $f$ est K-fortement convexe. Montrer que

$$f(x^{(\mathrm{T}+1)} - f(x^*)) \leqslant \frac{\beta}{2} \left( 1 - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}} \right)^{\mathrm{T}} \left\| x^{(1)} - x^* \right\|_2^2.$$