Tärnülesanne nr. 52

Olgu (a_n) positiivsete liikmetega jada nii, et $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ ja $\overline{\lim}_n \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \in \mathbb{R}$. Leidke $\lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n^2}$.

Lahendus:
Loon uue jada:

$$\begin{aligned} p_n &:= a_n \\ t &:= \lim_n \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{n} \\ P_n &:= p_1 + p_2 + ... + p_n = \lim_n tn \end{aligned}$$

Tähistan kolmanda piirväärtuse ümber:

$$\lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n^2} = \lim_n \frac{a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + ... + a_n p_n}{n^2} =$$
$$\lim_n t \frac{a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + ... + a_n p_n}{tn} = \lim_n t \frac{a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + ... + a_n p_n}{nP_n}$$

Ning loengu konspekti kaalutud keskmiste kohta käiva lause 2.31 kohaselt kui $P_n \to \infty$:

$$a_n \to A \Rightarrow \lim_n \frac{a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + ... + a_n p_n}{P_n} = A \iff$$
$$\lim_n t \frac{a_1 * p_1 + a_2 * p_2 + ... + a_n p_n}{nP_n} = \frac{tA}{n}$$

Ülesandes on öeldud et $\lim_n \frac{a_n}{n} = 0$ seega $\frac{tA}{n} = t0$ ning kuna t on reaalarv siis saame öelda, et $\lim_n \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n^2} = 0$. Jääb alles veel juht kus P_n ei lähene lõpmatusele, kuid kuna iga a_n on positiivne, peab see tähendama, et $P_n \in \mathbb{R}_+$, ning sel juhul ei saa summa P_n minna lõpmatusesse ka juhul kui iga liige ruutu võtta ning $\lim_n \frac{k}{n^2} = 0 \quad k \in \mathbb{R}$.
Seega on küsitud piirväärtus alati 0.