Kodutöö nr. 4

Joosep Näks

1. On teada, et puus on k sisetippu, sealjuures iga sisetipu aste on samuti k. Leida selle puu tippude arv, kui puus on 290 lehttippu.
Lahendus: Kuna iga puu tipp on kas sisetipp vi lehttipp, siis on puu tippude arv 290+k. Kuna lehttipud on tipud, mille aste on 1, on puu tippude astmete summa $\sum_{v \in V} d(v) = k * k + 290 * 1 = k^2 + 290$. Tipuastmeteoreemi kohaselt on graafi servade arv pool tippude astmete summast ehk $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{k^2}{2} + 145$. Loengukonspekti teoreem 2.73 järgi on igal n-tipulisel puul n-1 serva, ehk kehtib $290 + k - 1 = \frac{k^2}{2} + 145 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 288 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 18, k_2 = -16$. Kuna sisetippude kogus peab olema positiivne arv, ei sobi k_2 ehk sisetippe on 18. Seega on kokku tippe $|V| = 290 + 18 = 308$.

2. Olgu graaf G puu ja leidugu selles tipp u nii, et iga tipu kaugus tipust u on ülimalt r. Tõesta, et iga lihtahela pikkus selles puus on ülimalt $2r$.
Lahendus: Valin kaks suvalist tippu p ja q. Moodustan G alamgraafi G', mis koosneb p ja u vahelisest lihtahelast, mille pikkus on ülimalt r ning q ja u vahelisest lihtahelast, mille pikkus on ülimalt r (need lihtahelad leiduvad kuna on teada, et iga tipu kaugus tipust u on ülimalt r). Loengukonspekti teoreemi 2.76 kohaselt on puus iga kahe tipu vahel parajasti 1 lihtahel ehk kuna saadud puus G' leiduvad tipud p ja q, siis leidub ka nende vahel lihtahel. Kuna puu G' moodustati kahest ülimalt r pikkusest ahelast, on puus G' ülimalt $2r$ serva. Seega on ka p ja q vahelises lihtahelast ülimalt $2r$ serva. Kuna G' on graafi G alamgraaf, sisaldub leitud p ja q vaheline lihtahel ka graafis G. Sama teoreemi 2.76 kohaselt kuna ka G on puu, siis on see ainus lihtahel graafis G punktide p ja q vahel. Seega olen näidanud, et iga kahe tipu vahel graafis G leidub parajasti 1 lihtahel pikkusega ülimalt $2r$.

3. Tuua näide lihtgraafist ja selle kahest toesepuust, mis ei ole isomorfsed. Põhjendada.
Lahendus: Toon näiteks graafi $G = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, d\}\})$. Selle toesuspuudeks on nii $P_1 = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}\}$ kui ka $P_2 = (\{a, b, c, d\}, \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$. Need on toesepuud kuna mõlemad on G alamgraafid, sisaldavad sama palju tippe nagu G ning on puud. Need ei ole isomorfsed, kuna graafis P_1 on üks tipp astmega 3 (tipp a) ja kolm tippu astmetega 1 kuid graafis P_2 on kaks tippus astmega 2 (tipud a j b) ja kaks tippu astmega 1 (tipud c ja d).

4. Olgu G sidus kaalutud graaf ja serva e kaal rangelt suurem iga teise serva kaalust. Tõestada, et serv e kuulub graafi G mingisse minimaalse kaaluga toesepuusse parajasti siis, kui serv e on sild.
Lahendus:
Kuna serv e ei ole sild, sisaldub e mingis tsüklis, mis koosneb servadest $u_1, u_2, ..., u_n, e$. Toesepuu moodustamiseks peab nendest vähemalt ühe serva eemaldama, kuna toesepuud ei ole tsükleid. Juhul kui kõik servad $u_1, u_2, ..., u_n, e$ sisalduvad vaid ühes tsüklis, peab neist täpselt 1 eemaldama, kuna esimese eemaldamisel muutuvad kõik teised neist definitsiooni järgi sildadeks (kuna nad ei sisaldu üheski tsüklis) ning kui veel mõni eemaldada, tekib mitu siduskomponenti ehk tegemist poleks enam puuga. Seega tuleks nendest eemaldada suurima kaaluga serv ehk serv e. juhul aga kui mingi serv u_i asub kahes tsüklis, tuleb mõlemast tsüklist mõni serv eemaldada, kuna kui nendest kahest tsüklist mõni serv eemaldatakse, jääb tsüklitest teine alles või kui kustutada serv, mis sisaldub mõlemas tsüklis, jäb alles tsükkel, mis kasutab mõlemast tsüklist neid servu, mis ei kattu teise tsükli servadega. See tähendab aga et ka sel juhul on vaja algsest tsüklist $u_1, u_2, ..., u_n, e$ kustutada vähemalt üks serv ning kuna tahetakse saavutada vähimat kõigi servade kaalude summat, tuleks eemaldada vähima kaaluga serv ehk serv e.

Kui serv u_i sisaldub rohkemates tsüklites, tuleb igast tsüklist vähemalt 1 serv kustutada ning selliseid servi u_i, mis sisalduvad mitmes tsüklis saab ka mitu olla.

5. Olgu suunatud graafis G täpselt kaks tugevalt sidusat komponenti. On teada, et graafi G alusgraaf on sidus ja selles ei leidu ühtegi silda. Tõestada, et leidub serv, mille suuna vahetamisel muutub graaf G tugevalt sidusaks.

Lahendus:

Kuna on teada, et graafis G sisaldub kaks tugevalt sidusat komponenti, saame öelda, et graafil G on kaks ilma kattuvusteta alamgraafi U ja V, mis kumbki on tugevalt sidusad ehk kahe tipu vahel leiduvad mõlemas suunas suunatud ahelad. Kuna graafis G ei leidu sildu, thendab see definitsiooni kohaselt, et iga serv sisaldub mingis tsüklis ehk iga kahe tipu vahel leidub kaks mitte kattuvat lihtahelat. Valin graafist U tipu u ja graafist V tipu v. Kuna graafis G peab nende vahel leiduma kaks mitte kattuvat lihtahelat, peab seal leiduma vähemalt kaks serva $\{a, b\}$ ja $\{c, d\}$ nii, et tipud a ja c sisalduvad graafis U ning tipus b ja d sisalduvad graafis V. Kui serv $\{a, b\}$ on suunaga (a, b) ja $\{c, d\}$ on suunaga (d, c), siis on graaf G juba tugevalt sidus. Selle näitamiseks moodustan suvalise graafi U tipu u ja graafi V tipu v vahele mõlemat pidi suunatud lihtahelad graafis G. Kõigepealt moodustan lihtahela tipust u tippu a (kuna nad asuvad mõlemad graafis U, mis on tugevalt sidus), siis kasutada serva (a, b) ning seejärel moodustada lihtahel tipust b tippu v (see leidub kuna nad mõlemad asuvad graafis V, mis on tugevalt sidus). Seega olen leidnud suunatud lihtahela tipust u tippu v. Analoogselt saab alustades tipust v moodustada suunatud lihtahela tippu d, kasutada serva (d, c) ning seejärel moodustada lihtahel tipust c tippu u. Ülesande püstituse kohaselt aga ei ole graaf G tugevalt sidus, seega on servad $\{a, b\}$ ja $\{c, d\}$ samat pidi ehk on hoopis servad (a, b) ja (c, d) ning ka iga teine serv graafis G mis ühendab mõnda tippu graafis U tipuga graafis V on suunatud graafist U graafi V. Sel juhul pole graaf G tugevalt sidus, kuna ühestki graafi V tipus pole graafis G võimalik moodustada suunatud lihtahelat tipuni, mis asuks graafis U. kui aga serv (a, b) või (c, d) ümber pöörata, on varem seletatud põhjustel G tugevalt sidus.