Kodutöö nr. 4

10. variant

Joosep Näks

1. Leidke piirväärtus, tõlgendades seda sobivalt valitud funktsiooni integraalsummade piirväärtusnea:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right).$$

Lahendus:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{n}\frac{1}{3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+...+\frac{1}{3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Saadud summas on funktsioon $f(x) = \frac{1}{x}$, kus argumendi samm on $\frac{1}{n}$, mis läheneb 0le, ning see on ka läbi korrutatud $\frac{1}{n}$ga, nii et see on funktsiooni $f(x)$ integraalsumma, kus kõik alamjaotuse lõigud lähenevad 0le. Seega on see definitsiooni järgi Riemanni integraal lõigus $[1, 3]$:

$$\begin{aligned}
&= \int_1^3 \frac{1}{x}dx\\
&= \ln(x)|_1^3\\
&= \ln(3) - \ln(1)\\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

2. Leidke piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt.$$

Lahendus: Vaatlen funktisooni $f(t) = \ln \frac{2t^3}{t^2+1}$. Võtan sellest tuletise:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{t^2+1}{2t^3} * \frac{6t^2(t^2+1) - 2t^3 * 2t}{(t^2+1)^2} \\ &= \frac{3(t^2+1) - 2t^2}{t(t^2+1)} \\ &= \frac{t^2+3}{t(t^2+1)} \end{aligned}$$

Kuna saadud tuletis on positiivse argumendi puhul positiivne, on funktsioon f rangelt kasvav positiivse sisendi puhul. Kehtib $f(1) = 0$, seega kuna f on rangelt kasvav, on f positiivne vahemikus $[1, \infty)$. Kuna funktsioon f on selles vahemikus positiivne ja rangelt kasvav, on tema integraal selles vahemikus ∞. Vahemikus $(0, 1]$ funktsiooni siseminel osal kehtib $\frac{2t^3}{t^2+1} \geq \frac{2t^3}{2}$ kuna $t^2 + 1$ muutub vahemikus $(1, 2]$. Funktsioon $\ln(x)$ on rangelt kasvav funktsioon, seega kehtib ka $\ln \frac{2t^3}{t^2+1} \geq \ln \frac{2t^3}{2}$ ning integraali monotoonsuse põhjal kehtib ka võrratus $\int_0^1 \ln \frac{2t^3}{t^2+1}\ dt \geq \int_0^1 \ln \frac{2t^3}{2}\ dt$. Leian selle integraali:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \frac{2t^3}{2} dt &= \int_0^1 3 \ln t\ dt \\ &= 3t(\ln t - 1)|_0^1 \\ &= 3(1(\ln 1 - 1) - (\lim_{x\to 0} x \ln x - x)) \\ &= 3(-1 - \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}) \qquad \text{(Kasutan l'Hôspitali reeglit)} \\ &= 3(-1 - \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}) \\ &= 3(-1 - \lim_{x\to 0}(-x)) \\ &= 3(-1 - 0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

Seega integraali aditiivsuse kohaselt on funktsiooni f integraal vahemikus $(0, \infty)$ selline:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt &= \int_0^1 \ln \frac{2t^3}{t^2+1}\ dt + \int_0^1 \ln \frac{2t^3}{t^2+1}\ dt \geq \\ &\geq \int_0^1 \ln \frac{2t^3}{2}\ dt + \int_1^\infty \ln \frac{2t^3}{t^2+1}\ dt \\ &= -3 + \infty \\ &= \infty \end{aligned}$$

Vaatlen nüüd algset piirväärtust $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt$. Kuna $\int_0^\infty \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt = \infty$, saab siin kasutada l'Hôsptiali reeglit. Diferentsiaal-integraalarvutuse põhiteoreemi kohaselt kehtib $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt\right) = \ln \frac{2x^3}{x^2+1}$. Leian piirväärtuse:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x \ln \frac{2t^3}{t^2+1} dt}{x^2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{2x^3}{x^2+1}}{2x} && \text{(Kasutan l'Hôspitali reeglit)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x(x^2+1)}}{2} && \text{(Lugeja tuletise leidmine on juba varem näidatud)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3}{2x^3+2x} && \text{(Kasutan l'Hôspitali reeglit)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{6x^2+2} && \text{(Kasutan l'Hôspitali reeglit)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{12x} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Seega on see piirväärtus 0.

3. Leidke joontega

$$y = x^3 - 2x^2 + 5, \quad y = x^2 + 4x - 7$$

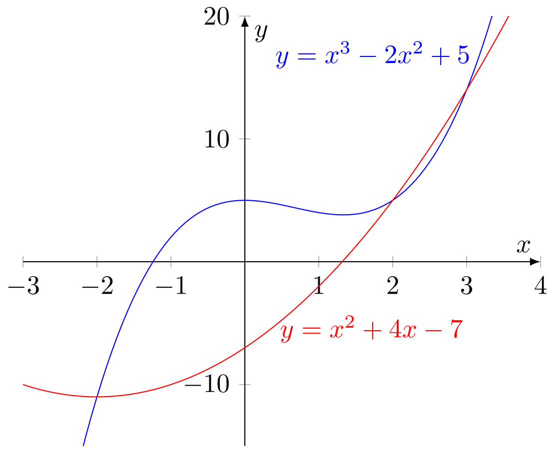
piiratud tasandilise kujundi pindala.
Lahendus: Leian joonte lõikepunktid:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + 5 &= x^2 + 4x - 7 \\ x^3 - 3x^2 - 4x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Jagan selle polünoomi $x - 2$ga läbi:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 2} &= x^2 - x - 6 \\ &= (x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

Seega on nullkohad 2, 3 ja -2. Seega tekib joonte vahele kaks kinnist kujundit.
Kujundid joonisel:



Leian nende pindalad:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \left|\int_{-2}^{2} x^3 - 2x^2 + 5 \ dx - \int_{-2}^{2} x^2 + 4x - 7 \ dx\right| \\
&= \left|\int_{-2}^{2} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \ dx\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 12x\right)_{-2}^{2}\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{4}2^4 - 2^3 - 2 * 2^2 + 12 * 2\right) - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - (-2)^3 - 2 * (-2)^2 + 12 * (-2)\right)\right| \\
&= |(4 - 8 - 8 + 24) - (4 + 8 - 8 - 24)| \\
&= |-16 + 48| = 32 \\
S_2 &= \left|\int_{2}^{3} x^3 - 2x^2 + 5 \ dx - \int_{2}^{3} x^2 + 4x - 7 \ dx\right| \\
&= \left|\int_{2}^{3} x^3 - 3x^2 - 4x + 12 \ dx\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 12x\right)_{2}^{3}\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{4}3^4 - 3^3 - 2 * 3^2 + 12 * 3\right) - \left(\frac{1}{4}2^4 - 2^3 - 2 * 2^2 + 12 * 2\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{81}{4} - 27 - 18 + 36\right) - (4 - 8 - 8 + 24)\right| \\
&= \left|\frac{81}{4} - 21\right| = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Antud joontega kujundite pindalad on 32 ja $\frac{3}{4}$.