Kodutöö nr. 3

13. variant

Joosep Näks

1. Leidke $f'(x)$, kui

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & \text{kui } x \leq 0 \\ x^{1+3x}, & \text{kui } x > 0 \end{cases}$$

Lahendus: Leian kigepealt tuletise vahemikus $(-\infty, 0)$:

$$\begin{aligned} \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(-\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)(-1) \\ &= \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \\ &= \sin(\pi - 2x) \end{aligned}$$

Järgmisena leian tuletise vahemikus $(0, \infty)$. Defineerin selleks funktsiooni $g(x) := \ln(f(x))$ ning leian selle tuletise.

$$\begin{aligned} g'(x) = \left(\ln\left(x^{1+3x}\right)\right)' &= \\ &= ((1+3x)\ln(x))' \\ &= 3\ln(x) + \frac{1+3x}{x} \end{aligned}$$

Nüüd kuna $f(x) = e^{g(x)}$, saan $f(x)$ tuletise leida nii:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^{g(x)}\right)' \\ &= g'(x)e^{g(x)} \\ &= g'(x)f(x) \\ &= \left(3\ln(x) + \frac{1+3x}{x}\right)\left(x^{1+3x}\right) \\ &= (3x\ln(x) + 1 + 3x)\,x^{3x} \end{aligned}$$

Nüüd vaatlen diferentseeruvust punktis 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 0 \\ \lim_{x\to 0+} f(x) &= 0^{1+3*0} = 0 \end{aligned}$$

Kuna kehtib $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$, on f pidev punktis 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f'(x) &= \sin(\pi - 2*0) = 0 \\ \lim_{x\to 0+} f'(x) &= \lim_{x\to 0+} (3*x\ln(x) + 1 + 3*x)\,x^{3*x} \end{aligned}$$

Selle piirväärtuse leidmiseks leian kõigepealt sisemiste funktsioonide piirväärtused:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} 3x\ln(x) &= 3\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} && \text{(kasutan L'Hôpitali reeglit)} \\
&= 3\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0+} 6x \\
&= 0 \\
\lim_{x\to 0+} x^{3x} &= e^{\ln(x^{3x})} \\
&= \lim_{x\to 0+} \exp(3x\ln(x)) \\
&= \exp\left(3\lim_{x\to 0+} x\ln(x)\right) \\
&= \exp\left(3\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}\right) && \text{(kasutan L'Hôpitali reeglit)} \\
&= \exp\left(3\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2x^2}}\right) \\
&= \exp\left(6\lim_{x\to 0+} x\right) \\
&= e^0 = 1
\end{aligned}$$

Saan korrutises korrutatavatest eraldi piirväärtused võtta, kuna need piirväärtused on tõkestatud ja pole 0 ning ma saan summas liidetavatest eraldi piirväärtused võtta kuna need piirväärtused on tõkestatud. Seega naastes algse piirväärtuse juurde:

$$\lim_{x\to 0+} (3 * x\ln(x) + 1 + 3 * x)\, x^{3*x} = (0 + 1 + 0)1 = 1$$

Kuna $f'(0)$ on lähenedes vasakult 0 ja lähenedes paremalt 1, ei ole f punktis 0 diferentseeruv. Seega on $f'(x)$ selline:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin(\pi - 2x), & \text{kui } x < 0 \\ (3x\ln(x) + 1 + 3x)x^{3x}, & \text{kui } x > 0 \end{cases}$$

2. Leidke funktsiooni $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Taylori valem punktis $a = 8$ jääkliikmega Lagrange'i kujul. Leidke vastava Taylori ploünoomi $T_n(x)$ järk n, mis lõigus $[7, 9]$ garanteerib polünoomile $T_n(x)$ lähenemistäpsuse 0.001. Koostage arvuti abil 2 joonist, kus esimesel joonisel on lõigul $[7, 9]$ funktsioonide vahe $f(x) - T_n(x)$ graafik ning teisel joonisel lõigul $[1, 20]$ on samas teljestikus näha funktsiooni $f(x)$ graafik ja polünoomi $T_n(x)$ graafik. Esitage koos joonistega ka käsud, mis produtseerisid need joonised.

Lahendus:

Leian kõigepealt Taylori polünoomi järgu n, millega on lähenemistäpsus lõigus $[7, 9]$ 0.001. Kasutan selleks teoreemi 4.22 jääkliikme valemit

$$R_n(a, x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(a - x)^{n+1},\ c \in (\min\{a, x\}, \max\{a, x\})$$

a väärtuseks on antud 8 ning x väärtus saab olla lõigust $[7, 9]$ ehk suurima võimalik vea jaoks valin $x = 7$. Proovin järjest n väärtusi läbi:

$$\begin{aligned} R_1(8, 7) &= \frac{f^{(2)}(c)}{2!}1^2,\ c \in (7, 8) \\ &= -\frac{2}{2 * 9c^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

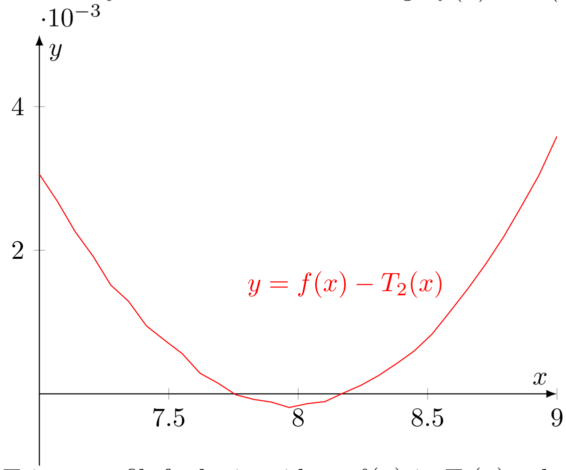
Kuna jääkliikme suurus sõltub c väärtusest pöördvõrdeliselt, valin absoluutväärtuselt suurima jääkliikme jaoks $c = 8$:

$$\begin{aligned} R_1(8, 7) &= -\frac{2}{2 * 9 * 8^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{288} > \frac{1}{1000} = 0.001 \\ R_2(8, 7) &= \frac{f^{(3)}(c)}{3!}1^3 \\ &= \frac{10}{6 * 27c^{\frac{8}{3}}} \qquad \text{(valin jälle } c = 8 \text{ suurima R jaoks)} \\ &= \frac{10}{6 * 27 * 8^{\frac{8}{3}}} = \frac{5}{201736} < \frac{1}{1000} = 0.001 \end{aligned}$$

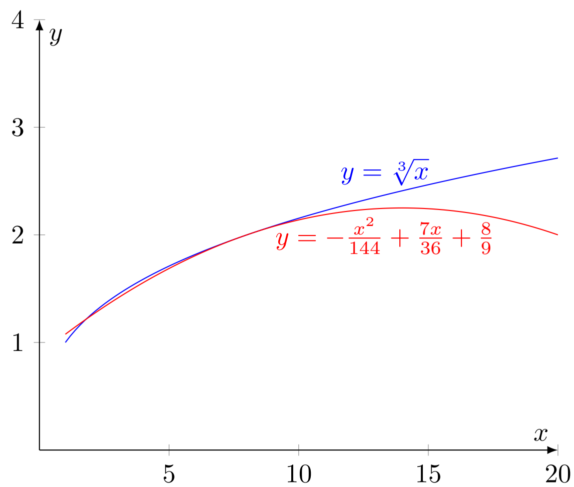
Seega $T_2(x)$ on sobiva täpsusega. Leian $T_2(x)$:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2} \\ &= 8^{\frac{1}{3}} + \frac{x - 8}{3 * 8^{\frac{2}{3}}} - \frac{2(x - 8)^2}{9 * 8^{\frac{5}{3}}} \\ &= 2 + \frac{x}{12} - \frac{2}{3} - \frac{x^2 - 16x + 64}{144} \\ &= -\frac{x^2}{144} + \frac{7x}{36} + \frac{8}{9} \end{aligned}$$

Esimene joonis funktsioonide vahega $f(x) - T_2(x)$ vahemikus $[7, 9]$:



Teine graafik funktsioonidega $f(x)$ ja $T_2(x)$ vahemikus $[1, 20]$:




```
Esimese graafiku koostamiseks kasutasin latexi kaske:
\begin{axis}[xmin=7, xmax=9, ymin=-0.001,ymax=0.005,
      axis x line=middle, axis y line=middle, axis line style=-latex, xlabel={$x$}, ylabel={$y$}]
    \addplot [no marks,red] expression[domain=7:9,samples=30]{x^(1/3)-(-x*x/144+7*x/36+8/9)}
         node[pos=0.8,anchor=south east]{$y=f(x)-T_2(x)$};
\end{axis}

Teise graafiku koostamiseks kasutasin latexi kaske:
\begin{axis}[xmin=0,xmax=20, ymin=0,ymax=4,
      axis x line=middle, axis y line=middle, axis line style=-latex, xlabel={$x$}, ylabel={$y$}]
    \addplot [no marks,blue] expression[domain=1:20,samples=100]{(x)^(1/3)}
         node[pos=0.65,anchor=south]{$y=\sqrt[3]{x}$};
    \addplot [no marks,red] expression[domain=1:20,samples=100]{-x*x/144+7*x/36+8/9}
         node[pos=0.65,anchor=north]{$y=-\frac{x^2}{144}+\frac{7x}{36}+\frac{8}{9}$};
\end{axis}
Molemad kasutavad pgfplot pakki
```

3. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lõpmata palju kordi diferentseeruv, kusjuures $f'(a) = f''(a) = f'''(a) = f^{(4)}(a) = f^{(5)}(a) = 0$ ning $f^{(6)}(a) < 0$. Tõestage, et funktsioonil f on punktis a range lokaalne maksimum.
Lahendus: Võtan funktsiooni f 6 liikmelise Taylori jada $T_5(x)$:

$$T_5(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(x-a)^k}{k!} = 0$$

Kuna f esimesed 5 tuletist on 0, on ka Taylori jada 0. Leian jääkliikme:

$$R_5(a,x) = \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-a)^6$$

Vaatlen nüüd funktsiooni piirväärtusi lähenedes punktile a:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} T_5(x) + R_5(a,x) = \lim_{x\to a+} \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-a)^6$$
$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} T_5(x) + R_5(a,x) = \lim_{x\to a-} \frac{f^{(6)}(c)}{6!}(x-a)^6$$

$(x-a)^6$ on igal juhul positiivne, kuna see on tstetud paarisarvulisele astmele. Samuti on 6! alati positiivne. f on lõpmata kordi pidevalt diferentseeruv, seega $f^{(6)}$ on pidev ning $f^{(6)}(a)$ on negatiivne, seega kui x läheneb $a$le, siis on ka $f^{(6)}(x)$ negatiivne, seega on ka $f(x)$ negatiivne, kui x läheneb $a$le. Kuna $f(a) = 0$ ning a mingis ümbruses on f negatiivne, on $f(a)$ lokaalne maksimum.