Eksam

Joosep Näks

1. Vektorid $\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}$, $4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}$, $7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}$ on komplanaarsed parajasti siis, kui leiduvad skalaarid $d, e, f \neq 0$ nii, et $d(\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}) + e(4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}) + f(7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}) = 0$. Võrrandi $d$ga läbi jagades saan $(\vec{a}+2\vec{b}+\lambda\vec{c}) + \frac{e}{d}(4\vec{a}+5\vec{b}+6\vec{c}) + \frac{f}{d}(7\vec{a}+8\vec{b}+\lambda^2\vec{c}) = 0$. Defineerin uued muutujad $k := \frac{e}{d}$ ja $t := \frac{f}{d}$. Kuna $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ on mittekomplanaarsed, ei saa ühtegi neist avaldada teiste kaudu ehk ma saan leitud võrrandi teha lahti võrrandisüsteemiks algsete vektorite kaupa:

$$\begin{cases} 1 + k \cdot 4 + t \cdot 7 = 0 \\ 2 + k \cdot 5 + t \cdot 8 = 0 \\ \lambda + k \cdot 6 + t \cdot \lambda^2 = 0 \end{cases}$$

Esimesest kahest võrrandist saan, et $t = 1$ ja $k = -2$ ning viimasesse võrrandisse tekkivast ruutvõrrandist saan et sobivad λ väärtused on 3 ja -4.

2. Leian punkti M projektsiooni tasandile $\mathfrak{B}$. Kuna punkti M ja tema projektsiooni M' vaheline vektor peab olema tasandiga risti, on see normaalvektoriga paralleelne. Seega on projektsiooni kohavektor esitatav kujuna $\vec{r_0}' = \vec{r_0} + k \cdot \vec{N}$, kus k on mingi reaalarv. k leidmiseks kasutan ära seda, et projektsioon asub tasandil $\mathfrak{B}$ ehk kehtib $\langle \vec{r_0}', \vec{N} \rangle = D \Leftrightarrow \langle \vec{r_0} + k \cdot \vec{N}, \vec{N} \rangle = D \Leftrightarrow \langle \vec{r_0}, \vec{N} \rangle + k\langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = D \Leftrightarrow k = \frac{D - \langle \vec{r_0}, \vec{N} \rangle}{|\vec{N}|^2}$.
Seega kokkuvõttes punkti M projektsiooni tasandile $\mathfrak{B}$ kohavektor on
$\vec{r_0}' = \vec{r_0} + \frac{D - \langle \vec{r_0}, \vec{N} \rangle}{|\vec{N}|^2}\vec{N}$

3. Leian kõigepealt sirgete L_1 ja L_2 sihivektorid. $\vec{s_1} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 5) = (4, -7, -3)$ ja $\vec{s_2} = (-1, 1, 0) \times (5, 1, -1) = (-1, -1, -6)$.
Leitav tasand π on antud sirgetega paralleelne, seega on tema normaalvektor sirgete sihivektoritega risti. Leian tasandi normaalvektori: $\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = (4, -7, -3) \times (-1, -1, -6) = (39, 27, -11)$.
Seega on tasandi üldvalem $39x + 27y - 11z + D = 0$. D leidmiseks asendan sisse punkti A koordinaadid: $39 \cdot 1 + 27 \cdot 3 - 11 \cdot 0 + D = 0 \Leftrightarrow D = -39 - 27 = -66$ ehk tasandi üldvalem on $39x + 27y - 11z - 66 = 0$. Leian punkti $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ kauguse tasandist: $d = \frac{|39 \cdot \frac{1}{3} + 27 \cdot \frac{1}{3} - 11 \cdot 0 - 66|}{\sqrt{39^2 + 27^2 + (-11)^2}} = \frac{44}{\sqrt{2371}}$

4. Sirged lõikuvad parajasti siis kui leiduvad sellised t_1 ja t_2 väärtused, et kehtib $\vec{r_1}(t_1) = \vec{r_2}(t_2)$. Väärtuste leidmiseks koostan võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 4 - 4t_1 = -3 + t_2 \\ 1 + 4t_1 = -1 + 2t_2 \\ -5 + 7t_1 = -4 + 2t_2 \end{cases}$$

Selle lahendades saan $t_1 = 1$ ja $t_2 = 3$. Need sisse asendades saan $\vec{r_1}(1) = (0, 5, 2)$ ja $\vec{r_2}(3) = (0, 5, 2)$ ehk sirged lõikuvad punktis $(0, 5, 2)$.
Kuna võrdkülgse trapetsi diagonaalid on nurgapoolitajad, saan leida nurgapoolitaja sihivektori liites kokku võrdsete pikkustega sirgete sihivektorid. Leian mõlema sirge sihivektorid: $\vec{s_1} = \vec{r_1}(1) - \vec{r_1}(0) = (-4, 4, 7)$ ja $\vec{s_2} = \vec{r_2}(1) - \vec{r_2}(0) = (1, 2, 2)$. Samapikkuste sihivektorite saamiseks normaliseerin need: $\vec{s_1^0} = \frac{\vec{s_1}}{|\vec{s_1}|} = \frac{(-4, 4, 7)}{9} = \left(-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)$ ja $\vec{s_2^0} = \frac{\vec{s_2}}{|\vec{s_2}|} = \frac{(1, 2, 2)}{3} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Võimalikude nurgapoolitajate sihivektorid on $\vec{s_1^0} + \vec{s_2^0}$ ja $\vec{s_1^0} - \vec{s_2^0}$, et teada saada, kumb neist õige on, võrdlen nende pikkuseid, kuna võrdkülgses trapetsis on teravnurga poolitaja pikem diagonaal.
$|\vec{s_1^0} + \vec{s_2^0}| = \left|\left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}, \frac{4}{9} + \frac{2}{3}, \frac{7}{9} + \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\left(-\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{10}{9}\right)\right| = \frac{150}{81} = \frac{50}{27}$
$|\vec{s_1^0} - \vec{s_2^0}| = \left|\left(-\frac{4}{9} - \frac{1}{3}, \frac{4}{9} - \frac{2}{3}, \frac{7}{9} - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\left(-\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)\right| = \frac{54}{81} = \frac{18}{27}$
Summa $\vec{s_1^0} + \vec{s_2^0}$ on suurema pikkusega, seega on see ka tervanurga poolitaja. Nurgapoolitaja peab läbima ka varem leitud sirgete lõikumispunkti $(0, 5, 2)$, seega on nurgapoolitaja kanooniline võrrand $\frac{x}{-\frac{1}{9}} = \frac{y-5}{\frac{7}{9}} = \frac{z-2}{\frac{10}{9}}$.

5. Puutujate võrrandite leidmiseks leian kõigepealt ellipsi parameetrilise kuju: $x(t) = \sqrt{30}\cos(t), \quad y(t) = \sqrt{24}\sin(t)$.
Leian puutuja parameetrilise võrrandi punktis t_0:
$\hat{x}_{t_0}(t) = x'(t_0)t + x(t_0) = \sqrt{30}(-\sin(t_0)t + \cos(t_0))$
$\hat{y}_{t_0}(t) = y'(t_0)t + y(t_0) = \sqrt{24}(\cos(t_0)t + \sin(t_0))$
Leian puutuja sirge kanoonilise võrrandi: $\dfrac{\hat{x}_{t_0} - \sqrt{30}\cos(t_0)}{-\sqrt{30}\sin(t_0)} = \dfrac{\hat{y}_{t_0} - \sqrt{24}\sin(t_0)}{\sqrt{24}\cos(t_0)}$
ehk puutuja punktis t_0 sihivektor on $(-\sqrt{30}\sin(t_0), \sqrt{24}\cos(t_0))$.
Sirgeid, mis on antud sirgega 45° nurga all, on kaks tükki, üks on ühes suunas 45° pööratud ja teine teises suunas. Olemas on antud sirge normaalvektor on $(1, 3)$. Kuna normaalvektor on sihivektorist 90° pööratud, siis kui puutuja ja antud sirge sihivektorid moodustavad 45° nurga, siis puutuja sihivektor ja antud sirge normaalvektor moodustavad -45° nurga ning kui sihivektorid moodustavad -45° nurga, siis sihivektor ja normaalvektor moodustavad 45° nurga.
Leian sobivad puutujavektorid skalaarkorrutise abil:

$$\langle \vec{s_1}, \vec{n} \rangle = |\vec{s_1}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(45^\circ)$$

$$\langle (-\sqrt{30}\sin(t_0), \sqrt{24}\cos(t_0)), (1,3) \rangle = |(-\sqrt{30}\sin(t_0), \sqrt{24}\cos(t_0))| \cdot |(1,3)| \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\sqrt{30}\sin(t_0) + 3\sqrt{24}\cos(t_0) = \sqrt{54} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(Ei jõudnud ülesannet lõpuni teha aja puuduse tõttu)

7. Ellipsi üks pooltelg läheb mööda polaartelge ehk selle kahekordne pikkus on ellipsi läbimõõt mööda polaartelge ehk $r(0)-r(-\pi) = \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos 0} - \frac{3\sqrt{2}}{2-\cos(-\pi)} = 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.
Ellipsi teine pooltelg on sellega risti ja algab ellipsi keskpunktist. Ellipsi keskpunkt asub vastavas ristkoordinaatteljestikus asukohas $x = \frac{r(0)-r(-\pi)}{2} - r(-\pi) = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ja $y = 0$. Defineerin ellipsi keskpunkti ja koordinaattasandi keskpunkti vaheliseks kauguseks $k = \sqrt{2}$ ning koordinaattasandi ja teise pooltelje pikkuseks b.
Seega saab Pythagorose teoreemi põhjal võrrandi $r^2 = k^2 + b^2$, kus r on teise pooltelje tipu kaugus koordinaattasandi keskpunktist ja koosinuse definitsiooni põhjal võrrandi $\cos\theta = \frac{k}{r}$. Asendades teise saadud võrrandi algsesse ellipsi võrrandisse sisse saan $r = \frac{3\sqrt{2}}{2-\frac{k}{r}}$ ehk $(2 - \frac{k}{r})r = 3\sqrt{2}$ ehk $2r - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ehk $r = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$. Kui see Pythagarose teoreemist saadud võrrandisse sisse asendada, saab $(2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2})^2 + b^2$ ehk $b = \pm\sqrt{6}$ ning kuna pooltelje pikkus saab olla vaid positiivne, on teise pooltelje pikkus $\sqrt{6}$.
Seega on antud ellipsi pooltelgede pikkused $a = \sqrt{2}$ ja $b = \sqrt{6}$.
Ellipsi fookused asuvad selle keskpunktist $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ kaugusel mööda pikemat pooltelge ehk fookuste vaheline kaugus on
$2c = 2\sqrt{|a^2 - b^2|} = 2\sqrt{|2-6|} = 2\sqrt{4} = 4$