Kodutöö nr. 3 esimene tärnülesanne

Joosep Näks

Leida vähim naturaalarv n, mille korral $2099^{2099^{2099}} \mid n!$.

Kontrollides arvu 2099 jaguvust algarvudega kuni 43, on näha, et ükski neist ei jaga seda arvu ning kuna järgmise algarvu ruut on suurem kui 2099: $47^2 = 2209$, on 2099 algarv. Seega on vaja leida n nii, et selle faktoriaali algtegurites oleks 2099 esindatud 2099^{2099} korda.

Kui $n!$ liikmeid vaadata, siis nende hulgas 2099 kordsed lisavad igaüks vähemalt ühe 2099 teguri korrutisse ning neid on $\left\lfloor \frac{n}{2099} \right\rfloor$ tükki, 2099^2 kordsed lisavad igaüks vähemalt kaks 2099 tegurit korrutisse ning on kõik ise 2099 kordsed ja neid on $\left\lfloor \frac{n}{2099^2} \right\rfloor$ tükki jne ehk otsitava tegurite koguse saab leida summaga $\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2099^i} \right\rfloor$. Siin saab märgata, et kui $n = q \cdot 2099^k,\ q < 2099$, siis on summa väärtuseks $\sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{q \cdot 2099^k}{2099^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{k} q \cdot 2099^{k-i} = q \sum_{i=0}^{k-1} 2099^i = q \frac{2099^{k-1} - 1}{2099 - 1}$. Kui võtta $q = 2098$ ja $k = 2100$, saab vastusele väga lähedale: $q \frac{2099^{k-1} - 1}{2099 - 1} = 2098 \frac{2099^{2099} - 1}{2098} = 2099^{2099} - 1$. See on vaid 1 võrra vähem kui vaja on. Seega on vastuseks järgmine n väärtus, mis lisab vähemalt ühe 2099 teguri faktoriaali juurde. Selleks peab ta olema 2099 kordne, ning kuna $2098 \cdot 2099^{2100}$ ise on 2099 kordne, on järgmine 2099 kordne $n = 2098 \cdot 2099^{2100} + 2099$, mis ongi vastus.