Kodutöö nr. 5

3. variant

Joosep Näks

1. Leida tasandiline esimest liiki joonintegraal

$$\int_L x\ ds,$$

kui L on logaritmilise spiraali $r = a^{k\phi},\ (k, a > 0)$ kaar, kus $\phi \in [0, \pi]$.

Lahendus:
Spiraali saab esitada parameetrilisel kujul

$$x(\phi) = r\cos\phi = a^{k\phi}\cos\phi$$

$$y(\phi) = r\sin\phi = a^{k\phi}\sin\phi$$

Seega esimest liiki joonintegraali arvutusvalemi järgi saab integraali leida järgmiselt:

$$\begin{aligned}
\int_L x\ ds &= \int_0^\pi a^{k\phi}\cos\phi\sqrt{(k\ln|a|\ a^{k\phi}\cos\phi - a^{k\phi}\sin\phi)^2 + (k\ln|a|\ a^{k\phi}\sin\phi + a^{k\phi}\cos\phi)^2}d\phi \\
&= \int_0^\pi a^{2k\phi}\cos\phi\sqrt{(k\ln|a|)^2+1}d\phi \\
&=\sqrt{(k\ln|a|)^2+1}\int_0^\pi a^{2k\phi}\cos\phi\ d\phi \\
&=\sqrt{(k\ln|a|)^2+1}\left(\frac{a^{2k\phi}}{(2k\ln|a|)^2+1}(2k\ln|a|\cos\phi+\sin\phi)\right)\Bigg|_0^\pi \\
&=\sqrt{(k\ln|a|)^2+1}\left(\frac{a^{2k\pi}}{(2k\ln|a|)^2+1}(-2k\ln|a|) - \frac{1}{(2k\ln|a|)^2+1}(2k\ln|a|)\right) \\
&= -\frac{(a^{2k\pi}+1)\sqrt{(k\ln|a|)^2+1}(2k\ln|a|)}{(2k\ln|a|)^2+1}
\end{aligned}$$

2. Teist liiki joonintegraalil üldiselt ei ole "tavalise" integraali, mis on seotud järjestusega. Tuua konkreetne kontranäide (koos tõestusega) tükiti siledast kaarest AB ja sellel määratud pidevast funktsioonist f, mille jaoks järgmine võrratus EI KEHTI:

$$\left|\int_{AB} f(x,y)\ dy\right| \leq \int_{AB} |f(x,y)|\ dy.$$

Lahendus:
Võtan funktsiooni $f(x,y) = 1$ ning kaar AB on defineeritud funktsioonidega

$$x(t) = 0, \quad y(t) = -t, \quad t \in [0,1].$$

Sel juhul saab võrratuse vasakuks pooleks

$$\left|\int_{AB} f(x,y)\ dy\right| = \left|\int_0^1 -1\ dt\right| = |-1| = 1$$

Ning paremaks pooleks

$$\int_{AB} |f(x,y)|\ dy = \int_0^1 |1| \cdot -1\ dt = \int_0^1 -1\ dt = -1$$

seega

$$\left|\int_{AB} f(x,y)\ dy\right| > \int_{AB} |f(x,y)|\ dy$$

ehk võratus ei kehti.

3. Greeni valemi abil leida tasandiline teist liiki joonintegraal

$$\int_L (y^3 - xy^2)dx + 3xy^2\ dy,$$

kus L on ringjoon $x^2 + y^2 = 2y$.

Lahendus:
Greeni valemi järgi $F = y^3 - xy^2$ ja $G = 3xy^2$. Leian nende osatuletised:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 3y^2$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 2xy$$

Seega Greeni valemi järgi saab integraali teisendada:

$$\int_L (y^3 - xy^2)dx + 3xy^2\ dy = \iint\limits_{B((0,1),1)} \left(3y^2 - 3y^2 + 2xy\right) dx\ dy$$

Lähen integraali arvutamiseks üle polaarkoordinaatidele teisendusega $x = r\cos\phi$ ja $y = r\sin\phi$. Ringjoone võrrandisse teisenduse sisse asendades saab r ülemise raja $r = 2\sin\phi$. Ring paikneb täielikult x teljest positiivses suunas mööda y telge seega võtan $\phi \in [0, \pi]$. Jakobiaan on r ehk korrutan integreeritava funktsiooni sellega läbi.
Seega saab integraali:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{B((0,1),1)} \left(3y^2 - 3y^2 + 2xy\right) dx\ dy &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\phi} r \cdot 2r\cos\phi \cdot r\sin\phi\ dr\ d\phi \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{r^4}{4} \cdot 2\cos\phi \cdot \sin\phi\right)\Bigg|_0^{2\sin\phi} d\phi \\
&= \int_0^\pi \frac{(2\sin\phi)^4}{4} \cdot 2\cos\phi \cdot \sin\phi\ d\phi \\
&=8 \int_0^\pi \cos\phi \cdot \sin^5\phi\ d\phi \\
&=8 \int_0^\pi \sin^5\phi\ d(\sin\phi) \\
&=8 \frac{\sin^6\phi}{6}\Bigg|_0^\pi \\
&=0
\end{aligned}$$

4. Keha liigub tasandil jõuvälja $F = (3x^2 + 2y, 2(x + y))$ mõjul punktist $A = (-1, -2)$ punkti $B = (1, 3)$ mööda joonisel näidatud trajektoori. Leida selle liikumise käigus jõu F poolt tehtud töö.

Lahendus:
Jõu töö arvutamise valemi järgi saab töö arvutada integraaliga

$$m \int_{AB} (3x^2 + 2y)dx + 2(x + y)dy$$

Selle integraali väärtus ei sõltu integreerimisteekonnast parajasti siis, kui integreeritava funktsiooni osa $P = 3x^2 + 2y$ osatuletis y järgi ja $Q = 2(x + y)$ osatuletis y järgi on võrdsed. Leian osatuletised:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2$$

Seega ei sõltu integraal integreerimisteekonnast. Saan funktsiooni $U = \frac{3}{4}x^4 + 2xy + y^2$, mille täisdiferentsiaal on integreeritav funktsioon: $dU = (3x^2 + 2y)dx + 2(x + y)dy$. Seega integraali väärtus on:

$$\begin{aligned}\int_{AB} (3x^2 + 2y)dx + 2(x + y)dy &= \left(\frac{3}{4}x^4 + 2xy + y^2\right)\Bigg|_{(-1,-2)}^{(1,3)} \\ &= \left(\frac{3}{4} + 2 \cdot 3 + 3^2 - \frac{3}{4} - 2 \cdot (-1) \cdot (-2) - (-2)^2\right) \\ &= 7\end{aligned}$$

Ehk jõu poolt tehtud töö on $7m$, kus m on keha mass.