

Kodutöö nr. 4

1. variant

Joosep Näks

Olgu

$$f = 15X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 14X^2 + 4X + 5, \quad g = 25X^4 - 25X^3 + 39X^2 - 22X + 10$$

Ringides $\mathbb{Z}_7[X]$ ja $\mathbb{Q}[X]$ leida

- Eukleidese algoritmi abil polünoomide f ja g suurim ühistegur d ,
- polünoomid u ja v nii, et $d = u \cdot f + v \cdot g$,
- polünoomide f ja g vähim ühiskordne.

Eukleidese algoritmi sammud peavad lahenduskäigus näha olema, jagamisprotseduur ise ei pea. Vahetulemusi valida otstarbekalt, korrutades neid vajadusel pööratava elemendiga.

Lahendus:

Vaatlen kõigepealt ringi $\mathbb{Z}_7[X]$. Lihtsustan f ja g :

$$f = X^5 + 0X^4 + 4X^3 + 0X^2 + 4X + 5, \quad g = 4X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 6X + 3$$

. Kasutan Eukleidese algoritmi:

$$f = g \cdot (2X + 2) + 4X^3 + X^2 + 6$$

$$g = (4X^3 + X^2 + 6)(X + 4) + 0$$

Seega $\text{SÜT}(f, g) = 4X^3 + X^2 + 6$.

Algoritmist on näha, et

$$d = 4X^3 + X^2 + 6 = f - g \cdot (2X + 2) = f \cdot 1 + g \cdot (5X + 5)$$

seega kui $u = 1$ ja $v = 5X + 5$ siis $d = f \cdot u + g \cdot v$.

Loengukonspekti teoreemi 9.26 järgi kui $m = \text{VÜK}(f, g)$ ja $fg = md$, siis $d = \text{SÜT}(f, g)$.

Seega

$$\text{VÜK}(f, g) = m = \frac{fg}{d} = X^6 + 4X^5 + 4X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 6.$$

Kordan nüüd samme ringis $\mathbb{Q}[X]$. Eukleidese algoritm:

$$f = g \cdot \left(\frac{3}{5}X + \frac{22}{25} \right) + \frac{83}{5}X^3 - \frac{178}{25}X^2 + \frac{434}{25}X - \frac{19}{5}$$

$$g = \left(\frac{83}{5}X^3 - \frac{178}{25}X^2 + \frac{434}{25}X - \frac{19}{5} \right) \left(\frac{125}{83}X - \frac{5925}{6889} \right) + \left(\frac{46375}{6889}X^2 - \frac{9275}{6889}X + \frac{46375}{6889} \right)$$

$$\frac{83}{5}X^3 - \frac{178}{25}X^2 + \frac{434}{25}X - \frac{19}{5} = \left(\frac{46375}{6889}X^2 - \frac{9275}{6889}X + \frac{46375}{6889} \right) \left(\frac{571787}{231875}X - \frac{130891}{231875} \right) + 0$$

Seega

$$\text{SÜT}(f, g) = \frac{46375}{6889}X^2 - \frac{9275}{6889}X + \frac{46375}{6889} = (5X^2 - X + 5) \left(\frac{9275}{6889} \right) \sim 5X^2 - X + 5$$

Kui algoritmi esimene rida teise asendada, saab võrrandi

$$g = \left(f - g \cdot \left(\frac{3}{5}X + \frac{22}{25} \right) \right) \left(\frac{125}{83}X - \frac{5925}{6889} \right) + d$$

$$d = f \cdot \left(-\frac{125}{83}X + \frac{5925}{6889} \right) + g \cdot \left(\frac{75}{83}X^2 + \frac{5635}{6889}X + \frac{1763}{6889} \right)$$

seega kui $u = -\frac{125}{83}X + \frac{5925}{6889}$ ja $v = \frac{75}{83}X^2 + \frac{5635}{6889}X + \frac{1763}{6889}$ siis $d = f \cdot u + g \cdot v$.
Vähima ühiskordse leian sarnaselt eelnevaga:

$$\text{VÜK}(f, g) = \frac{f \cdot g}{d} \sim 75X^7 - 25X^6 + 92X^5 + 12X^4 + 37X^2 - 12X + 10$$