Tärnülesanne nr. 104

Joosep Näks

Funktsioon f on pidev lõigus $[0,1]$. Tõestage, et kehtib võrdus

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$$

Lahendus: Jagan aditiivsuse põhjal algse integraali kaheks:

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi xf(\sin x)dx$$

Seejärel teen teises integraalis muutujavahetuse $u = \pi - x$ ning $du = -dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi xf(\sin x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\pi - u)f(\sin(\pi - u))(-du) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - u)f(\sin(\pi - u))du\end{aligned}$$

Kuna $\sin x$ on lõigus $[0,\pi]$ punkti $\frac{\pi}{2}$ suhtes sümmeetriline, kehtib $\sin x = \sin(\pi - x)$ lõigus $[0,\pi]$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - u)f(\sin(\pi - u))du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - u)f(\sin u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\sin u)du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} uf(\sin u)du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\sin u)du\end{aligned}$$

Kuna $\sin x$ on lõigus $[0,\pi]$ punkti $\frac{\pi}{2}$ suhtes sümmeetriline, on selle integraal 0st πni sama, mis kaks korda integraal 0st $\frac{\pi}{2}$ni:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi f(\sin u)du &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du \\ &= \frac{\pi}{2}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)du \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin u)du \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx\end{aligned}$$

Seega algne võrdus kehtib.