Kontrolltöö nr. 1

10. variant

Joosep Näks

1. Olgu F korpus ning olgu $a, b \in F, a \neq 0$. Tuginedes ainult korpuse aksioomidele, tõestage, et

$$(-a^{-1})b = -(a^{-1}b).$$

Tõestus:

Vaatlen nullelemendi korrutist korpuse elemendiga, millele liidan A3 järgi nullelemendi:

$$0b = 0b + 0$$

A4 järgi saan võtta, et nullelement on sama, mis b^2 ja selle vastandelemendi summa:

$$0b + 0 = 0b + (b + (-b))$$

A2 järgi muudan liitmisjärjekorda:

$$0b + 0 = (0b + b) + (-b)$$

M3 järgi on saan elemendi b läbi korrutada ühikelemendiga:

$$(0b + b) + (-b) = (0b + 1b) + (-b)$$

Distributiivsuse järgi võtan b sulgude ette:

$$(0b + 1b) + (-b) = (0 + 1)b + (-b)$$

A3 järgi saab nullelemendi liitmise ära kaotada:

$$(0 + 1)b + (-b) = 1b + (-b)$$

M3 järgi saab ühikelemendiga korrutamise ära kaotada:

$$1b + (-b) = b + (-b)$$

A4 järgi on see võrdne 0ga:

$$b + (-b) = 0$$

Seega olen näidanud, et korpuse elemendi ja nullelemendi korrutis on võrdne nullelemendiga.

Liidan A3 järgi tõestatava võrrandi paremale poolele nullelemendi:

$$-(a^{-1}b) = -(a^{-1}b) + 0$$

Varem näidatud omaduse põhjal korrutan nullelemendi läbi elemendiga b

$$-(a^{-1}b) + 0 = -(a^{-1}b) + 0b$$

A4 järgi kehtib $0 = a^{-1} + (-a^{-1})$

a^{-1} on korpuse element, kuna a on korpuse element ning M4 kohaselt on sel juhul ka tema pöördelement korpuse element. Asendan selle võrrandisse.

$$-(a^{-1}b) + 0b = -(a^{-1}b) + (a^{-1} + (-a^{-1}))b$$

Distributiivsuse järgi teen sulud lahti:

$$-(a^{-1}b) + (a^{-1} + (-a^{-1}))b = -(a^{-1}b) + (a^{-1}b + (-a^{-1})b)$$

A2 järgi muudan liitmise järjekorda ning A4 järgi kaovad element ja vastandelement

$$-(a^{-1}b) + (a^{-1}b + (-a^{-1})b = 0 + (-a^{-1})b$$

A3 järgi saab nullelemendi eemaldada:

$$0 + (-a^{-1})b = (-a^{-1})b$$

Sellega olen näidanud, et algse võrrandi pooled on võrdsed.

2. Olgu X ja Y sellised mittetühjad reaalarvude hulgad, et iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral $y \geq x$. Tõestage, et X on ülalt ja Y alt tõkestatud $\inf Y \geq \sup X$.

Lahendus:

Hulk X on ülalt tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline naturaalarv a, et iga $x \in X$ korral kehtib $x \leq a$. Kuna Y on mittetühi reaalarvude hulk, saab võtta sealt suvalise elemendi $y_0 \in Y$ ning kuna iga Y elemendi puhul kehtib $y \geq x$, kehtib ka $y_0 \geq x$. Seega on y_0 hulga X ülemine tõke.

Hulk Y on alt tõkestatud parajasti siis, kui leidub selline naturaalarv a, et iga $y \in Y$ korral kehtib $y \geq a$. Kuna X on mittetühi reaalarvude hulk, saab võtta sealt suvalise elemendi $x_0 \in X$ ning kuna iga X elemendi puhul kehtib $y \geq x$, kehtib ka $y \geq x_0$. Seega on x_0 hulga Y alumine tõke.

Tõestamaks, et kehtib $\inf Y \geq \sup X$ väidan vastuäiteliselt, et $\inf Y < \sup X \Leftrightarrow 0 < \sup X - \inf Y$. Defineerin $\varepsilon_0 := \sup X - \inf Y$. Infiinumi definitsiooni kohaselt iga positiivse $\varepsilon \in \mathbb{R}$ puhul leidub selline $y_0 \in Y$, et $y_0 < \inf Y + \varepsilon$. Kui võtta $\varepsilon = \varepsilon_0$, saab: $y_0 < \inf Y + \varepsilon_0 \Leftrightarrow y_0 < \inf Y - \inf Y + \sup X \Leftrightarrow y_0 < \sup X$. Supreenumi definitsiooni kohaselt iga $c \in \mathbb{R}$ korral, mis rahuldab võrratust $c < \sup X$, leidub $x_0 \in X$, et $c < x_0$. Võtan $c = y_0$, varem on näidatud, et kehtib $y_0 < \sup X$, seega peab kehtima ka $y_0 < x_0$. Kuid ülesande püstituse järgi iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral $y \geq x$, seega tekkis vastuolu ning $\inf Y < \sup X$ ei saa kehtida ehk kehtib $\inf Y \geq \sup X$.

3. Olgu (x_n) ja (y_n) tõkestatud arvjadad. Tõestage, et

$$\varliminf_{n\to\infty}(\min\{x_n, y_n\}) = \min\{\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varliminf_{n\to\infty} y_n\}$$

1) Näitan, et kehtib $\varliminf_{n\to\infty}(\min\{x_n, y_n\}) \leq \min\{\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varliminf_{n\to\infty} y_n\}$:

Olgu jada $(\min\{x_n, y_n\})$ osajada $(\min\{x_{n_k}, y_{n_k}\})_{k=1}^{\infty}$ selline, et $\lim_{k\to\infty}(\min\{x_{n_k}, y_{n_k}\}) = \varliminf_{n\to\infty}(\min\{x_n, y_n\})$. Sellise osajada olemasolu tuleneb loengukonspekti teoreemist 2.22, mis ütleb, et iga jada osapiirväärtuste hulgas on olemas vähim, mis on võrdne selle jada alumise piirväärtusega. Kuna jada (x_{n_k}) on tõkestatud, leidub tal Bolzano-Weierstrassi teoreemi kohaselt koonduv osajada $(x_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$. Kuna $(x_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ ja $(y_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ on koonduvad jadad, on nende miinumumi piirväärtus võrdne nende piirväärtuste miinumumidega. Seega kehtib:

$$\varliminf_{n\to\infty}(\min\{x_n, y_n\}) = \lim_{j\to\infty}(\min\{x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}\}) = \min\{\lim_{j\to\infty} x_{n_{k_j}}, \lim_{j\to\infty} y_{n_{k_j}}\} \geq \min\{\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varliminf_{n\to\infty} y_n\}$$

2) Näitan, et kehtib $\varliminf_{n\to\infty}(\min\{x_n, y_n\}) \geq \min\{\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varliminf_{n\to\infty} y_n\}$:

Kuna (x_n) ja (y_n) on tõkestatud, on ka $\min\{x_n, y_n\}$ tõkestatud, seega on jadade alumised piirväärtused reaalarvud. Defineerin $u_n := \inf_{k\geq n} x_k$ ja $v_n := \inf_{k\geq n} y_k$. Siis kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral võrratus:

$$\min\{u_n, v_n\} \geq \inf\{\min\{x_k, y_k\} : k \geq n\}$$

Piirväärtuse monotoonsuse kohsalt saab võtta mõlemast poolest piirväärtuse:

$$\min\{\varliminf_{n\to\infty} x_n, \varliminf_{n\to\infty} y_n\} = \min\{\lim_{n\to\infty} u_n, \lim_{n\to\infty} v_n\} = \lim_{n\to\infty} \min\{u_n, v_n\} \geq$$
$$\geq \lim_{n\to\infty} \inf\{\min\{x_k, y_k\} : k \geq n\} = \underline{\inf}_{n\to\infty}\{\min\{x_k, y_k\}\}$$

4. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsioonist tõestage, et

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x} = -\infty$$

Lahendus: Funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsiooni järgi kehtib $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ parajasti siis, kui kehtib

$$\forall M < 0 \; \exists N > 0 : [x \in \mathbb{R}, x > N] \Rightarrow f(x) < M$$

$$M < 0 \Leftrightarrow 4M < 0$$
$$x > N > 0 \Leftrightarrow x > 0$$
$$\text{Valin } N = \max\{-M, 4\} \Leftrightarrow N \geq -M \text{ ja } N \geq 4$$
$$x > N \geq -M \Leftrightarrow x + M > 0$$
$$x(x+M) > 0 > 4M \Leftrightarrow x^2 > 4M - xM \Leftrightarrow x^2 > M(4-x)$$
$$x > N \geq 4 \Leftrightarrow 4 - x < 0$$
$$\frac{x^2}{4-x} < M$$

Seega kehtib $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{4-x} = -\infty$.

5. Leida piirväärtus $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}$.

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=\lim_{|x|\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}$$

Teen muutujavahetuse $u:=\frac{2x+1}{2}$, kui kehtib $|x|\to\infty$ siis kehtib ka ka $|u|\to\infty$

$$x=u-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=\lim_{|u|\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u-\frac{1}{2}+1+\sin 1}$$

$$\lim_{|u|\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u-\frac{1}{2}+1+\sin 1}=\lim_{|u|\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\sin 1}\right)$$

$\lim\limits_{|u|\to\infty}f(u)=A$ kehtib parajasti siis, kui kehtivad $\lim\limits_{u\to\infty}f(u)=A$ ja $\lim\limits_{-u\to\infty}f(u)=A$

Vaatlen juhtu $u\to\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\sin 1}\right)&=\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{\sin 1}\\&=e\left(\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})\right)^{\sin 1}\\&=e(1)^{\frac{1}{2}}(1)^{\sin 1}\\&=e\end{aligned}$$

Vaatlen juhtu $-u\to\infty$, teen muutujavahetuse $t=-u$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{\sin 1}\right)&=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{-t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{-t}\right)^{\sin 1}\\&=e^{(-1)(-1)}\left(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{-t})\right)^{\frac{1}{2}}\left(\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{-t})\right)^{\sin 1}\\&=e(1)^{\frac{1}{2}}(1)^{\sin 1}\\&=e\end{aligned}$$

Kuna $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=e$, siis ka $\lim\limits_{|x|\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1+\sin 1}=e$.

6. Olgu $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$. Tõestage, et $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ parajasti siis, kui $\lim_{x\to 0} f(\tan x) = A$.

Lahendus:

1) Näitan, et kehtib $\lim_{x\to 0} f(\tan x) = A \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = A$

Eeldasin, et kehtib:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_0 > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_0] \Rightarrow |f(\tan x) - A| < \varepsilon$$

Fikseerin epsiloni väärtuse: $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Tean, et kehtib:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta] \Rightarrow |\tan x| < \varepsilon$$

Valin $\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\exists \delta_1 > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_1] \Rightarrow |\tan x| < \varepsilon_0$$

Võtan $\delta_m = \min\{\delta_0, \delta_1\}$

Sel juhul kehtib:

$$\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \delta_m > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_m] \Rightarrow |f(\tan x) - A| < \varepsilon_0 \text{ ja } |\tan x| < \varepsilon_0 \quad (1)$$

Kui eeldada, et $f(x)$ piirväärtus ei ole A, tähendab see, et

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R} : 0 < |x| < \delta \text{ ja } |f(x) - A| \geq \varepsilon \quad (2)$$

Kuna väide (1) kehtib iga epsiloni korral, saab võtta $\varepsilon_0 = \varepsilon$, ning kuna (2) kehtib iga delta puhul, saab võtta $\delta = \delta_m$.

Kuna epsilon ja delta vähenevad ning $|\tan x| < \varepsilon$ ja $|x| < \delta$ ning $f(\tan x)$ koondub, kuid $f(x)$ ei koondu, oleme jõudnud vastuoluni. Seega peab kehtima $\lim_{x\to 0} f(x) = A$.

2) Näitan, et kehtib $\lim_{x\to 0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(\tan x) = A$

ε-δ-definitsiooni järgi kehtib $\lim_{x\to 0} f(x) = A$ parajasti siis, kui kehtib

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta] \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

On teada ka et kehtib $\lim_{x\to 0} \tan x = 0$ ehk

$$\forall \varepsilon_1 > 0\ \exists \delta_1 > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_1] \Rightarrow |\tan x| < \varepsilon_1$$

Kuna viimane kehtib iga ε_1 korral, saab võtta $\varepsilon_1 = \delta$:

$$\exists \delta_1 > 0 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_1] \Rightarrow |\tan x| < \delta$$

Seega eelneva tingimuse põhjal kehtib

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 : [x \in \mathbb{R}, 0 < |x| < \delta_1] \Rightarrow |f(\tan x) - A| < \varepsilon$$

Seega kehtib $\lim_{x\to 0} f(\tan x) = A$.