Kodutöö nr. 2

13. variant

Joosep Näks

1. Olgu (x_n) tõkestatud arvjada ning olgu $M \in \mathbb{R}$. Tõestage, et $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le M$ parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$x_n < M + \varepsilon \quad \text{iga } n \ge N \text{ korral.}$$

Lahendus:
Ülemise piirväärtuse definitsiooni kohaselt:
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = a$
Piirväärtuse definitsiooni kohaselt:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sup x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad |\sup\{x_n : \ n \ge N\} - a| < \varepsilon$
Supreenumi definitsiooni kohaselt:
$\sup x_n = a \iff x_n \le a \ \forall n \in \mathbb{N}$ (1) ja $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad a - \varepsilon < x_N$ (2)
Kasutades piirväärtusest tulenevaid piiranguid saab võrratuse (1) ümber kirjutada:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \ge N \quad x_n \le a \le M \iff x_n \le M \iff x_n < M + \varepsilon$
Mida oligi vaja näidata.

2. Lähtudes funktsiooni piirväärtuse ε-δ-definitsioonist, tõestage, et

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|\ln x|}{x} = \infty$$

Lahendus:
Jagan funktsiooni korrutiseks:
$\frac{|\ln x|}{x} = |\ln x|\frac{1}{x}$
Näitan nüüd et mõlemad korrutatavad lähevenav lõpmatusle:
$\lim\limits_{x\to 0+} |\ln x| = \infty \iff \forall M > 0\ \exists\delta > 0 : [x \leq \mathbb{R}, 0 < x < \delta] \Rightarrow |\ln x| > M$
Võtan $\delta = e^{-M}$, seega $x < \delta \iff x < e^{-M} \iff \ln x < -M$
Kuna on teada, et $x < e^{-M}$, $M > 0$, $e^0 = 1$ ja e^x on rnagelt kasvav, siis kehtib $x < 1$ ehk $\ln x < 0$ seega: $\ln x < -M \iff -|\ln x| < -M \iff |\ln x| > M$
Seega kehtib $\lim\limits_{x\to 0+} |\ln x| = \infty$. Näitan sama $\frac{1}{x}$ kohta:

$\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty \iff \forall M > 0\ \exists\delta > 0 : [x \leq \mathbb{R}, 0 < x < \delta] \Rightarrow |\ln x| > M$
Võtan $\delta = \frac{1}{M}$, ehk $x < \delta \iff x < \frac{1}{M} \iff \frac{1}{x} > M$
Seega kehtib ka $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = \infty$. Kuna korrutise mõlemad pooled lähenevad lõpmatusele ja tegemist on elementaarfunktsioonidega, läheneb ka korrutis lõpmatusele.

3. Olgu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon, mis on 2-perioodiline, st. iga $x \in \mathbb{R}$ korral $f(x+2) = f(x)$. Tõestage, et
a) f on tõkestatud ning saavutab oma suurima ja vähima väärtuse,
b) leidub x_0 nii, et $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.
Lahendus:
a) Võtan kõigepealt mingi lõigu $x \in [0,2]$. Kuna vaatleme lõigus pidevat funktsiooni siis Weierstrassi teoreemi kohaselt saavutab funktsioon selles lõigus oma suurima ja vähima väärtuse. Igat väärtust $x \notin [0,2]$, saab esitada kui $x = x_0 + 2n \quad x_0 \in [0,2]\ n \in \mathbb{N}$. Kuna $f(x) = f(x+2)$ tuleneb sellest, et kõik funktsiooni väärtused esinevad vahemikus $[0,2]$. Seega kui funktsioon saavutab oma piirväärtused lõigus $[0,2]$, siis saavutab ta need ka terves oma määramispiirkonnas.
b) Saab võtta sellise x_0 et $f(x_0) = \max\{f(x)|x \in [0,2]\}$ (punktis a on näidatud, et funktsioon saavutab oma maksimaalsed väärtused). Nüüd kehtib $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ seega kehtib ka $f(x_0) \geq f(x_0 + \pi)$ ja $f(x_0) \geq f(x_0 - \pi)$. Vaatlen funktsiooni $g(x) = f(x+\pi) - f(x)$. Kuna $f(x)$ on pidev on ka $g(x)$ pidev. Varem näidatud võrduste põhjal $g(x_0) = f(x_0 + \pi) - f(x_0) \leq 0$ ja $g(x_0 - \pi) = f(x_0) - f(x_0 - \pi) \geq 0$. Kuna pidev funktsioon läbib punkti, mis on suurem või võrdne 0ga, ning punkti, mis on väiksem või võrdne 0ga, läbib ta Bolzano-Cauchy vahepealsete väärtuste teoreemi järgi ka kohta 0 ning kui $g(x) = 0$ siis $f(x+\pi) - f(x) = 0 \iff f(x+\pi) = f(x)$.