Tärnülesanne diferentssuhted

Joosep Näks

Olgu f n korda pidevalt diferentseeruv. Näidake, et iga $k \leq n$ korral

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, ..., x+kh] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)$$

Diferentssuhte definitsioon:

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, ..., x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, ..., x_{i_k}] - f[x_{i_0}, ..., x_{i_{k-1}}]}{x_{i_k} - x_{i_0}}$$

Lahendus: Lahendan matemaatilise induktsiooniga:
Baas: $k = 1$ korral saame võrrandi vasakule poolele diferentssuhte definitsioonist tuletise definitsiooni:

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h] = \lim_{h \to 0} \frac{f[x] - f[x+h]}{x - (x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f[x+h] - f[x]}{h} = f'(x) = \frac{1}{1!} f^{(1)}(x)$$

Seega $k = 1$ puhul võrrand kehtib.
Samm: Eeldame, et $k = t$ puhul kehtib:

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, ..., x+th] = \frac{1}{t!} f^{(t)}(x) \tag{1}$$

Sel juhul saab $k = t + 1$ lahti kirjutada nii:

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} f[x, x+h, ..., x+h(t+1)] &= \lim_{h \to 0} \frac{f[x+h, ..., x+h(t+1)] - f[x, ..., x+ht]}{x + h(t+1) - x} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f[x+h, ..., x+h(t+1)] - \frac{1}{t!} f^{(t)}(x)}{h(t+1)}\end{aligned}$$

Vaatleme kuju $\lim_{h \to 0} f[x+h, ..., x+h(t+1)]$. Kui siin teha muutujavahetus $u = x + h$, saame $\lim_{h \to 0} f[u, u+h, ..., u+ht]$ ning eelduse (1) kohaselt on see võrdne kujuga $\frac{1}{t!} f^{(t)}(u) = \frac{1}{t!} f^{(t)}(x+h)$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f[x+h, ..., x+h(t+1)] - \frac{1}{t!} f^{(t)}(x)}{h(t+1)} &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{t!} f^{(t)}(x+h) - \frac{1}{t!} f^{(t)}(x)}{h(t+1)} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(t+1)!} \frac{f^{(t)}(x+h) - f^{(t)}(x)}{h} \\ &= \frac{1}{(t+1)!} f^{(t+1)}(x)\end{aligned}$$

Seega on tõestatud, et iga $0 < k \leq n$ korral kehtib

$$\lim_{h \to 0} f[x, x+h, ..., x+kh] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)$$