# Kontrolltöö

1. (5 p) Leida kõik täisarvud $a, b, c$, mille korral $(a, b, c) = 10$ ja $[a, b, c] = 2020$.

Viin antud arvud standardkujudele: $10 = 2 \cdot 5$, $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Seega kõigi kolme arvu $a$, $b$ ja $c$ standardkujud on $2^l \cdot 5 \cdot 101^k$, kus ühel arvul $l = 1$, teisel arvul $l = 2$ ja kolmandal $l \in \{1, 2\}$, samuti ühel arvul $k = 0$, teisel $k = 1$ ja kolmandal $k \in \{0, 1\}$. Seega on võimalikud kõik järgnevad kolmikud ja nende permutatsioonid ning kuna SÜT ja VÜK on määratud märgi tapsusega, sobivad kõigist nendest kolmikutest ka variandid, kus mingi kogus arvudest $a$, $b$ ja $c$ on asendatud nende vastandarvudega.

| l \ k | (0,0,1) | (0,1,1) | (0,1,0) | (1,0,0) | (1,0,1) | (1,1,0) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,1,2) | (10,10,2020) | (10,1010,2020) | (10,1010,20) | (1010,10,20) | (1010,10,2020) | (1010,1010,20) |
| (1,2,2) | (10,20,2020) | (10,2020,2020) | (10,2020,20) | (1010,20,20) | (1010,20,2020) | (1010,2020,20) |

2. (8 p) Leida $F_{n+1}^2 \pmod{F_n}$ ja $F_n^2 \pmod{F_{n+1}}$, kus $F_n$ on $n$. Fibonacci arv.

Fibonacci arvud lahti kirjutades saan $F_{n+1}^2 = (F_{n-1}+F_n)^2 = F_{n-1}^2+2F_{n-1}F_n+F_n^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_n}$. Teise kuju vaatlemiseks vaatan arvu $F_n^2 - F_{n-1}^2 = (F_n - F_{n-1})(F_n + F_{n-1})$ ehk see arv jagub arvudega $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$ ja $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$ ning kui $F_{n+1} \mid F_n^2 - F_{n-1}^2$, on see samaväärne kongruentsiga $F_n^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_{n+1}}$ ning samuti teisest jaguvusest saab $F_n^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_{n-2}}$.
Seega olen leidnud kolm samasust: $F_{n+1}^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_n}$, $F_n^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_{n+1}}$ ja $F_n^2 \equiv F_{n-1}^2 \pmod{F_{n-2}}$.

Esimene leitud samaväärsuse põhjal on esimene leitav arv $n = k$ puhul on sama, mis teine leitav arv $n = k + 1$ puhul, kuna $F_{k+1}^2 \equiv F_{k-1}^2 \pmod{F_k}$, kus kongruentsi vasakpoolne arv on esimene leitav arv ning kui $k$ asemele võtta $k + 1$ saab $F_{k+2}^2 \equiv F_k^2 \pmod{F_{k+1}}$. Seega piisab vaid esimese arvu leidmisest.

Väidan, et kui $n$ on paarisarv, kehtib $F_{n+1}^2 \equiv 1 \pmod{F_n}$ ning kui $n$ on paaritu, kehtib $F_{n+1}^2 \equiv -1 \pmod{F_n}$.
Baas: väikeste $n$ väärtuste puhul saab läbi vaadates, et $F_{n+1}^2 \pmod{F_n}$ on $n = 1$ puhul 0 ehk 1, $n = 2$ puhul samuti 0 ehk sama mis -1, $n = 3$ puhul tuleb 1
Samm paarisarvude jaoks: eeldan, et $n$ on paarisarv ja $F_{n+1}^2 \equiv 1 \pmod{F_n}$. Siis asendades $k = n + 2$, saab $F_{k-1}^2 \equiv 1 \pmod{F_{k-2}}$ ning kolmanda leitud samasuse põhjal $1 \equiv F_{k-1}^2 \equiv F_k^2 \pmod{F_{k-2}}$. Seejärel teen asenduse $t = k + 1$ ning saan $1 \equiv F_{n+2}^2 \pmod{F_n}$

3. (7 p) Sõnastada ja tõestada teoreem $\tau$- ja $\sigma$-funktsioonide arvutusvalemitest.

Teoreem: kui $n > 1$ ja $n = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$, siis $\tau(n) = (k_1 + 1)...(k_s + 1)$ ja $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot ... \cdot \dfrac{p_s^{k_s+1} - 1}{p_s - 1}$.

1. Lause 1.21 tõttu on jagajad arvud $p_1^{l_1}...p_s^{l_s}$, kus $0 \leq l_i \leq k_i$ iga $i = 1, .., s$ kohta. Aritmeetika põhiteoreemi tõttu on iga $l$ väärtuste kombinatsiooni kohta täpselt üks arv ja iga $l_i$ jaoks on $k_i + 1$ erinevat väärtust ehk kokku on erinevaid võimalusi jagajate leidmiseks $(k_1 + 1)...(k_s + 1)$.

2. Vaatleme korrutist $(1+p_1+p_1^2+..+p_1^{k_1})(1+p_2+...+p_2^{k_2})...(1+p_s+...+p_s^{k_s})$ vaatlen summat mis tekib, kui sulud avada. On näha, et sulud lahti tehes tekkiva summa igas liikmes on $s$ tegurit, iga tegur vastavalt ühest sulust võetud. Seega on tekkivas summas igas liikmes $s$ tegurit, iga teguri valimiseks on $k_i+1$ võimalust, ehk tekkivate summa liikmete kogus on ülimalt $(k_1+1)(k_2+1)...(k_s+1) = \tau(n)$. Teiselt poolt on iga $n$ tegur esindatud selles summas, kuna kui võtta suvaline $n$ tegur $p_1^{l_1}...p_s^{l_s}$, saab esimesest sulust võtta $l_1$nda liikme, teisest $l_2$nda liikme jne ning saada vastav tegur kätte. Seega on saadud summas kõik $n$ tegurid ühe kordselt esindatud ehk summa on $\sigma(n)$. Kasutades geomeetrilise jada summa valemit saab ka lõpliku tulemuse $\sigma(n) = \dfrac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot ... \cdot \dfrac{p_s^{k_s+1} - 1}{p_s - 1}$.