Võistlus

Joosep Näks

1.

$$a_{n+1} = \frac{1+4a_n}{10-9a_n}$$

Leian järgmise liikme:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= \frac{1+4a_{n+1}}{10-9a_{n+1}} \\
&= \frac{1+4\frac{1+4a_n}{10-9a_n}}{10-9\frac{1+4a_n}{10-9a_n}} \\
&= \frac{\frac{10-9a_n+4+16a_n}{10-9a_n}}{\frac{100-90a_n-9-36a_n}{10-9a_n}} \\
&= \frac{10-9a_n+4+16a_n}{100-90a_n-9-36a_n} \\
&= \frac{14+7a_n}{91-126a_n} \\
&= \frac{2+a_n}{13-18a_n} \\
a_{n+4} &= \frac{2+a_{n+2}}{13-18a_{n+2}} \\
&= \frac{2+\frac{2+a_n}{13-18a_n}}{13-18\frac{2+a_n}{13-18a_n}} \\
&= \frac{26-36a_n+2+a_n}{169-234a_n-36-18a_n} \\
&= \frac{28-35a_n}{133-252a_n} \\
&= \frac{4-5a_n}{19-36a_n} \\
a_{n+8} &= \frac{4-5a_{n+4}}{19-36a_{n+4}} \\
&= \frac{4-5\frac{4-5a_n}{19-36a_n}}{19-36\frac{4-5a_n}{19-36a_n}} \\
&= \frac{76-144a_n-20+25a_n}{361-684a_n-144+180a_n} \\
&= \frac{56-119a_n}{217-504a_n} \\
&= \frac{56-119a_n}{217-504a_n} \\
&= \frac{8-17a_n}{31-72a_n}
\end{aligned}$$

Märkan, et kui vaadelda murde kujul $a_{n+k} = \dfrac{b_k + c_k a_n}{d_k + f_k a_n}$, siis tundub, nagu oleksid kordajate üldvalemid järgmised: $b_n = 7n,\ c_n = 7(7-3n),\ d_n = 7(7+3n)$ ning $f_n = -7\cdot 9n$ (ning kõik saab 7ga läbi jagada. Selle testimiseks vaatlen kordajate rekursiivseid valemeid:

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{b_{n-1} + c_{n-1}a_{n-1}}{d_{n-1} + f_{n-1}a_{n-1}} \\
a_n &= \frac{b_{n-1} + c_{n-1}\frac{1+4a_{n-2}}{10-9a_{n-2}}}{d_{n-1} + f_{n-1}\frac{1+4a_{n-2}}{10-9a_{n-2}}} \\
b_n &= 10b_{n-1} + c_{n-1} \\
c_n &= 4c_{n-1} - 9b_{n-1} \\
d_n &= 10d_{n-1} + f_{n-1} \\
f_n &= -9d_{n-1} + 4f_{n-1}
\end{aligned}
$$

Asendan pakutud üldliikmed sisse:

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= 7 \cdot 10n + 7(7 - 3n) = 7^2(n+1) \\
c_{n+1} &= 4 \cdot 7(7 - 3n) - 9 \cdot 7n = 7^2(7 - 3(n+1)) \\
d_{n+1} &= 10 \cdot 7(7 + 3n) - 9 \cdot 7n = 7^2(7 + 3(n+1)) \\
f_{n+1} &= -9(7 + 3n) - 4 \cdot 9 \cdot 7n = 7^2(-9(n+1)
\end{aligned}
$$

Seega üldliikme valemid töötavad ehk kui $a_0 = 0$, siis $a_{2020} = \dfrac{b_{2020} + c_{2020}0}{d_{2020} + f_{2020}0} = \dfrac{b_{2020}}{d_{2020}} = \dfrac{2020}{7 + 3 \cdot 2020} = \dfrac{2020}{6067}$

2.
Valin $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x)^2 - f(0)^2 &= (x-0)f(x+0) \\ f(x)^2 - f(0)^2 &= xf(x) \\ f(0)^2 &= f(x)^2 - xf(x) \\ f(0)^2 &= f(x)(f(x)-x) \end{aligned}$$

Kuna $f(0)^2$ on konstantne, peab ka $f(x)(f(x)-x)$ olema konstantne. Kuna see on korrutis, piisab selleks, kui üks teguritest on 0, seega saan lahendid $f(x) = 0$ ja $f(x) = x$. Proovin neid algsesse võrrandisse:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 : & f(x)^2 - f(y)^2 \\ &= 0 - 0 \\ &= (x-y)0 \\ &= (x-y)f(x+y) \\ f(x) = x : & f(x)^2 - f(y)^2 \\ &= x^2 - y^2 \\ &= (x-y)(x+y) \\ &= (x-y)f(x+y) \end{aligned}$$

Seega mõlemad sobivad lahenditeks.

4.

(a) Tõestan abiomadused:

$$
\begin{aligned}
(i)\ :&\text{Juhul kui } y < z:\\
&x + y \vee z = x + z\\
&y < z \Rightarrow x + y < x + z\\
&(x + y) \vee (x + z) = x + z\\
&\text{Juhul kui } y > z:\\
&x + y \vee z = x + y\\
&y > z \Rightarrow x + y > x + z\\
&(x + y) \vee (x + z) = x + y\\
(ii)\ :&\text{Juhul kui } x > y:\\
&x \vee y + x \wedge y = x + y\\
&\text{Juhul kui } x < y:\\
&x \vee y + x \wedge y = y + x = x + y\\
(iii)\ :&\text{Juhul kui } x > y \text{ ehk } -x < -y:\\
&x \vee y = x = -(-x) = -(-x) \wedge (-y)\\
&\text{Juhul kui } x < y \text{ ehkl } -x > -y:\\
&x \vee y = y = -(-y) = -(-x) \wedge (-y)\\
(iv)\ :&\text{Juhul kui } x > 0 \text{ ehk } -x < 0:\\
&x \vee 0 + (-x) \vee 0 = x + 0 = x\\
&\text{Transitiivsuse põhjal} x > 0 > -x \Rightarrow x > -x\\
&\text{Juhul kui } x < 0 \text{ ehk } -x > 0:\\
&x \vee 0 + (-x) \vee 0 = 0 + (-x) = -x = -x \vee x
\end{aligned}
$$