Kodutöö nr. 3

Joosep Näks ja Uku Hannes Arismaa

1. Leida kõik algarvud lõigus $[360, 460]$. Põhjendada, et saadud arvud on tõesti algarvud ja ükski ei ole puudu. Kas selles lõigus esineb algarvukaksikuid?

2. Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et ülimalt üks selle **erinevatest** algteguritest p rahuldab tingimust $p \leq \sqrt[4]{n}$. (St võib olla, et ükski algtegur seda tingimust ei rahulda, või ongi ainult üks, aga mitmekordne algtegur, mis seda rahuldab.) Leida kõik erinevad võimalused arvu n algteguriteks lahutada (st üldkujud á la $p^k q$) ja tuua iga juhu kohta arvuline näide.

On ilmne, et kõik üldkujud $n = p^k$ (näide: $n = 32 = 2^5$) ja $n = 1$ sobivad, kuna neis ei ole rohkem kui üks erinev algtegur. Sobivad ka kindlad arvud üldkujuga $n = p^k \cdot q$ (näide: $n = 48 = 2^4 \cdot 3$, kus $2^4 = 16 < 48 < 81 = 3^4$), arvud $n = p^k \cdot q \cdot w$ (näiteks: $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, kus $2^4 = 16 < 60 < 81 = 3^4$) ja $n = p^k \cdot q \cdot w \cdot r$ (näiteks: $n = 490 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, kus $2^4 = 16 < 490 < 625 = 5^4$). (Mainitud kujudes q, w ja r võivad ka võrdsed olla)
Üle kolme algteguri, mis oleks suurem kui $\sqrt[4]{n}$, ei saa arvul n olla, kuna sel juhul kehtiks $n = p^k \cdot q \cdot w \cdot r \cdot m > p^k \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{n} \cdot \sqrt[4]{n} = p^k \cdot n$ ehk isegi kui $k = 0$, siis jääb võrratuseks $n > n$, mis ei ole tõene.

3. Tõestada, et kui $n! + n^2 + 1$ on algarv, siis ka $n^2 + 1$ on algarv.

Kui $n^2 + 1$ on kordarv, saab teda tegurdada $n^2 + 1 = p \cdot a$, kus p on algarv, nii et $p \leq \sqrt{n^2 + 1}$ (kui arvul oleks mitu algarvulist tegurit, mis oleks suurem kui arvu juur, tuleks nende korrutis arvust suurem, ning kui arvul on vaid üks algarvuline tegur, on ta algarv). Kuna n^2 on täisruut ja ühegi kahe täisruudu vahe ei ole 1 ega vähem, kehtib ka $p \leq n$ ehk $p|n!$. Seega kuna p jagab nii $n!$ kui ka $n^2 + 1$, jagab ta ka $n! + n^2 + 1$, ehk $n! + n^2 + 1$ ei saa olla algarv.
Seega kui $n! + n^2 + 1$ on algarv, peab ka $n^2 + 1$ olema algarv.

4. Tõestada, et kahe järjestikuse paaritu algarvu summal on alati vähemalt kolm (mitte tingimata erinevat) algtegurit.

5. Tõestada ilma Dirichlet' teoreemi kasutamata, et leidub lõpmata palju algarve, millel on kuju $6k + 5$, kus $k \in \mathbb{N}$.

6. Tõestada, et iga naturaalarvu on võimalik üles kirjutada summana, mille liidetavad on kõik **erinevad** ja kas algarvud või arv 1. Summa võib koosneda ka ühestainsast liidetavast.

7. Leida kõik algarvukolmikud (p, q, r), mille korral $pq + pr + qr > pqr$.

8. Tõestada, et aritmeetilises jadas vahega $b < 2021$ ei saa olla 12 järjestikust algarvu.