Kontrolltöö nr. 3

8. variant

Joosep Näks

1. Uurige järgmise rea koonduvust:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{k+1}{k-1}$$

Lahendus:

Kasutan koonduvuse hindamiseks integraaltunnust. Selle eeldusteks on vaja näidata, et funktsioon $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1}$ on piirkonnas $[2, \infty)$ mittenegatiivne ja kahanev.

Funktsiooni osa $\frac{1}{\sqrt{x}}$ on alati positiivne, kuna ruutjuurel ei saa olla reaalarvulist negatiivset väärtust.

Funktsiooni teine pool, $\ln \frac{x+1}{x-1}$ on positiivne parajasti siis, kui kehtib $\frac{x+1}{x-1} > 1$. On teada, et $x \geq 2$ ehk $x - 1$ on alati positiivne, ning sellega saab võrratust läbi korrutada:

$$(x-1)\frac{x+1}{x-1} > x - 1 \Leftrightarrow x + 1 > x - 1 \Leftrightarrow 1 > -1$$

Seega ka teine pool funktsioonist on alati positiivne. Kuna funktsioon f on kahe alati positiivse osa korrutis, on funktsioon alati postiivne.

Funktsiooni osa $\frac{1}{\sqrt{x}}$ on kahanev, kuna see sõltub xst pöördvõrdeliselt. Võtan funktsiooni teisest poolest tuletise ning see osa on kahanev parajasti siis, kui tema tuletis on negatiivne:

$$\left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{-2}{x^2-1}$$

Kuna $x \geq 2$, on $x^2 - 1$ alati positiivne ehk tuletis on alati negatiivne, seega on see funktsiooni osa kahanev. Kuna funktsioon f on kahe kahaneva funktsiooni korrutis, on f ka ise kahanev vahemikus $[2, \infty)$.

Seega on integraaltunnuse eeldused täidetud ehk summa $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{k+1}{k-1}$ koondub parajasti siis, kui koondub $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx$. Leian määramata integraali $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx$:

$$\begin{aligned} \text{Integreerin ositi:} \quad u &= \ln \frac{x+1}{x-1} & du &= \frac{-2}{x^2-1} dx \\ dv &= \frac{dx}{\sqrt{x}} & v &= 2\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1} dx = 2\sqrt{x} \ln \frac{x+1}{x-1} + 4 \int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx$$

Integraali $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx$ hindamiseks teen muutujavahetuse $u = \sqrt{x},\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1} dx = 2 \int \frac{u^2}{u^4-1} du$$

Jagan murru $\frac{u^2}{u^4-1}$ osamurdudeks:

$$\frac{u^2}{u^4-1} = \frac{u^2}{(u-1)(u+1)(u^2+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} + \frac{Cu+D}{u^2+1}$$
$$u^2 = A(u+1)(u^2+1) + B(u-1)(u^2+1) + (Cu+D)(u^2-1)$$
$$u^2 = A(u^3+u^2+u+1) + B(u^3-u^2+u-1) + C(u^3-u) + D(u^2-1)$$

Kuna A, B, C ja D on kordajad, mis ei sõltu tst, saan võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} u^3(A+B+C)=0 \\ u^2(A-B+D)=u^2 \\ u(A+B-C)=0 \\ A-B-D=0 \end{cases}$$

Võrrandisüsteemi lahendades saan lahendi:

$$\begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=0 \\ D=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Seega saab integreeritavat murdu esitada summana:

$$\frac{u^2}{u^4-1} = \frac{1}{4(u-1)} - \frac{1}{4(u+1)} + \frac{1}{2(u^2+1)}$$

Integreerin selle osadena:

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2}{u^4-1}du &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{u-1}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u+1}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \frac{1}{4}\ln(|u-1|) - \frac{1}{4}\ln(|u+1|) + \frac{1}{2}\arctan(u) + C \end{aligned}$$

Seega on terve algse funktsiooni f integraal:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}dx &= 2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1} + 8\left(\frac{1}{4}\ln|\sqrt{x}-1| - \frac{1}{4}\ln|\sqrt{x}+1| + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{x}\right) + C \\ &= 2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1} + 2\ln|\sqrt{x}-1| - 2\ln|\sqrt{x}+1| + 4\arctan\sqrt{x} + C \\ &= 2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + 4\arctan(\sqrt{x}) + C \end{aligned}$$

Leian määratud integraali 2st lõpmatuseni:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}dx = \left(2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + 4\arctan\sqrt{x}\right)\Big|_2^\infty$$
$$= \lim_{c\to\infty} 2\sqrt{c}\ln\frac{c+1}{c-1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}\right| + 4\arctan\sqrt{c}$$
$$- 2\sqrt{2}\ln\frac{2+1}{2-1} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + 4\arctan\sqrt{2}$$
$$= \lim_{c\to\infty} 2\sqrt{c}\ln\frac{c+1}{c-1} + 0 + 4\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{2}\ln 3 + 2\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + 4\arctan\sqrt{2}$$

Leian suuruse $\lim\limits_{c\to\infty} 2\sqrt{c}\ln\dfrac{c+1}{c-1}$:

$$\lim_{c\to\infty} 2\sqrt{c}\ln\frac{c+1}{c-1} = 2\lim_{c\to\infty}\frac{\ln\frac{c+1}{c-1}}{c^{-\frac{1}{2}}}$$
$$= 2\lim_{c\to\infty}\frac{\frac{-2}{c^2-1}}{-\frac{1}{2}c^{\frac{-3}{2}}}$$
$$= 2\lim_{c\to\infty}\frac{4}{c^{-\frac{3}{2}}(c^2-1)}$$
$$= 2\lim_{c\to\infty}\frac{4}{\sqrt{c}-\sqrt{c^3}} = 0$$

Seega integraali väärtus on:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x}\ln\frac{x+1}{x-1}dx = 2\pi - 2\sqrt{2}\ln 3 + 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 4\arctan\sqrt{2}$$

Kuna integraal koondub, koondub ka summa $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\ln\dfrac{k+1}{k-1}$.

2. Uurige funktsionaaljada $f_k = \frac{1}{k^3}\ln(1+k^4x^2)$ koonduvust, leides koonduvuspiirkonna ja otsustades, kas koondumine on ühtlane.
Lahendus: Koonduvuspiirkonna leidmiseks vaatlen funktsionaaljada käitumist protsessis $k \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^4x^2)}{k^3} &\overset{L'H}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{4x^2k^3}{1+k^4x^2}}{3k^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{4x^2k}{3(1+k^4x^2)} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{k\to\infty} \frac{4x^2}{12k^3x^2} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3k^3} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Seega koondub f_k tervel reaalteljel funktiooniks $f(x) = 0$.
Et koondumine oleks ühtlane, peab kehtima järgnev:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : k \geq N \Rightarrow [|\frac{1}{k^3}\ln(1+k^4x^2)| < \varepsilon \textbf{ iga } x \in D \textbf{ korral}].$$

Kuid iga ε ja k korral saab valida $x = \sqrt{\frac{e^\varepsilon k^3}{k^4}}$ ehk $\frac{1}{k^3}\ln(1+k^4x^2) = \frac{1}{k^3}\ln(1+k^4\sqrt{\frac{e^\varepsilon k^3}{k^4}}^2) = \varepsilon \not< \varepsilon$, seega ei koondu funktsionaaljada ühtlaselt.

3. Leidke funktsionaalrea $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{(1+x^2)^k}$ koonduvuspiirkond D ja absoluutse koonduvuse piirkond A.

Lahendus:

Märkan et tegu on geomeetrilise summaga $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^k$ seega koondub summa punktiviisi parajasti siis, kui kehtib $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1$. Reaalarvu ruut on alati positiivne seega $1+x^2$ on alati positiivne ehk selle saab absoluutväärtusest välja tuua ning sellega võrratuse mõlemad pooled läbi korrutada: $|2x| < 1+x^2$ ehk $0 < 1-|2x|+x^2$. Juhul, kui $x \geq 0$, saan $0 < 1-2x+x^2 = (1-x)^2$. Kuna see on reaalarvu ruut, ainus nullkoht on $x = 1$, mille korral rida ei koondu. Juhul, kui $x < 0$, saan $0 < 1+2x+x^2 = (x+1)^2$. Kuna see on reaalarvu ruut, ainus nullkoht on $x = -1$, mille korral rida ei koondu. Seega funktsionaalrea koonduvuspiirkond $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Antud funktsionaalrida koondub absoluutselt parajasti siis, kui koondub $\sum_{k=0}^{\infty} \left|\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^k\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\right)^k$ ehk juhul, kui kehtib $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| < 1$. See on aga sama tingimus, mis punktiviisi koondumisel, seega on antud funktsionaaljada absoluutse koonduvuse piirkond terve tema koonduvuspiirkond ehk $A = D$.

4. Leidke järgmise astmerea summa:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}.$$

Lahendus:
Tähistan $s(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. Teoreemi 6.39 põhjal saan astmerida liikmeti diferentseerida ning tulemuseks saan summafunktsiooni tuletise $s'(x)$. Diferentseerin astmerida liikmeti kaks korda:

$$s'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(k+1)x^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$$
$$s''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{kx^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$$

Saadud arvjada on geomeetriline jada teguriga $-x$, seega arvrea summa on $s''(x) = \frac{1}{1+x}$.
Teoreemi 6.39 põhjal on algse arvrea ja tema liikmeti diferentseerimisel saadud rea koonduvusraadiused samad. Leian koonduvusraadiuse:

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|-1^k|}} = \frac{1}{1} = 1$$

Seega on arvrea koonduvuspiirkond $(-1, 1)$. Võtan funktsioonist $s''(x)$ integraali:

$$s'(x) = \int \frac{1}{1+x}dx = \ln|1+x| + C_1$$

Kuna arvreas väärtuse $x = 0$ puhul tekib konstantfunktsioon $s(x) = 0$, leian selle põhjal C_1:

$$\ln|1+0| + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

Kuna astmerida koondub vaid vahemikus $(-1, 1)$, on $1 + x$ alati positiivne, seega $\ln|1 + x| = \ln(1 + x)$
Võtan uuesti integraali:

$$s(x) = \int \ln(1+x)dx = (1+x)(\ln(1+x) - 1) + C_2$$
$$(1+0)(\ln(1+0) - 1) + C_2 = 0 \Leftrightarrow C_2 = 1$$
$$s(x) = \ln(1+x) + x\ln(1+x) - x$$

Seega on astmerea summa $s(x) = \ln(1 + x) + x \ln(1 + x) - x$.

5. Leidke järgmistele funktsioonidele Taylori read punktis a:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e}{x-1}, & \text{kui } x \neq 1, \\ e, & \text{kui } x = 1, \end{cases} \qquad a = 1$
2. $f(x) = \sqrt[3]{4 + 2x^5}, \qquad a = 0$

Lahendus:

1. Vaatlen funktsiooni diferentseeruvust punkti $a = 1$ ümbruses:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \begin{cases} \dfrac{xe^x - 2e^x + e}{(x-1)^2}, & \text{kui } x \neq 1, \\ 0, & \text{kui } x = 1, \end{cases} \\ f'(1) &= e' = 0 \\ \lim_{a\to 1} f'(a) &= \lim_{a\to 1} \frac{ae^a - 2e^a + e}{(a-1)^2} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{a\to 1} \frac{ae^a + e^a - 2e^a}{2(a-1)} \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{a\to 1} \frac{ae^a + e^a + e^a - 2e^a}{2} \\ &= \frac{e}{2} \end{aligned}$$

   Seega kuna $f'(1) \neq \lim\limits_{a\to 1} f'(a)$, ei ole f punkti 1 ümber ühtegi korda diferentseeruv, ei leidu tal ka Taylori rida, kuna Taylori rea definitsiooni järgi peab f olema vaadeldava punkti ümbruses lõpmata kordi diferentseeruv.

2. Vaatlen kõigepealt funktsiooni $g(x) = \sqrt[3]{4 + 2x} = \sqrt[3]{2}(2 + x)^{\frac{1}{3}}$ Taylori rida. Kuna tegu on astmefunktsiooniga, mille sisu tuletis on 1, on selle $n$is tuletis lihtsalt $g^{(n)}(x) = \sqrt[3]{2}\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{3} - k)(2 + x)^{\frac{1}{3}-n}$. Seega on tema Taylori rida $a = 0$ juures $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt[3]{2}\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{3} - k)(2)^{\frac{1}{3}-n}}{n!} x^n$. Kuna algset funktsiooni saab esitada kui $f(x) = g(x^5)$, on selle Taylori rida:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2}\prod\limits_{k=0}^{n}(\frac{1}{3} - k)(2)^{\frac{1}{3}-n}}{n!} x^{5n}$$

Et olla kindel, et saadud jada on funktsiooni Taylori jada, peab kehtima

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2}\prod_{k=0}^{n}(\frac{1}{3}-k)(2)^{\frac{1}{3}-n}}{n!} x^{5n} = 0$$

Rea liikme lugejas $\prod_{k=0}^{n}(\frac{1}{3}-k)$ on $n \to \infty$ puhul absoluutväärtuselt väiksem kui nimetajas olev $n!$, kuna mõlemad on samasugused korrutised kuid lugeja omas on igast liikmest lahutatud $\frac{1}{3}$. Seega on nende jagatis vähem kui 1 ning see on läbi korrutatud $2^{\frac{1}{3}-n}$ga, mis läheneb 0le kui n läheneb lõpmatusele, seega kogu liige läheneb 0le.

6. Olgu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ ja $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, ning olgu nende ridade koonduvusraadiused vastavalt R_1 ja R_2. Näidake, et siis $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$, kus $d_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$ ning selle rea koonduvusraadius $R \geq \min\{R_1, R_2\}$.

Lahendus:

Taylori rea definitsiooni järgi arvjada a_k, mille puhul kehtib

$$\forall x \in U_r(a) f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$

on üheselt määratud ning kehtib $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Seega saab leida f ja g tuletised: $f^{(n)}(a) = b_n n!$ ning $g^{(n)}(a) = c_n n!$. Nende korrutise Taylori rea kordajad peavad olema $d_n = \frac{(f(a)g(a))^{(n)}}{n!}$, mida saab korrutise tuletise valemi järgi ümber kirjutada kui $d_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n-k)} g^{(k)}}{k!(n-k)!}$ ning kui saadud f ja g tuletised sisse asendada, saan: $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_{n-k}(n-k)! c_k k!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} b_{n-k} c_k$, nagu oli vaja näidata.