

Tärnülesanne nr. 154

Joosep Näks

Olgu f reaalteljel pidev funktsioon. Leidke piirväärtus

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx$$

Lahendus: Olgu $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon ehk kehtib $F'(x) = f(x)$. Sel juhul saab integraali lahti kirjutada:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(b+h) - F(b)) - (F(a+h) - F(a)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} - \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \end{aligned}$$

Tuletise definitsiooni kohaselt on see:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} - \frac{F(a+h) - F(a)}{h} &= F'(b) - F'(a) \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Seega on selle piirväärtuse väärtus $f(b) - f(a)$.