Kodutöö nr. 3

Joosep Näks

1. Tõestage, et naturaalarvudel on järgmine omadus:

$$\forall x \forall y (x' \cdot y = x \cdot y + y).$$

Tõestus: Tõestan induktsiooniga, et järgnev valem kehtib iga y korral:

$$\mathcal{F}(y) = \forall x (x' \cdot y = x \cdot y + y).$$

Alus:

$$\begin{aligned} x' \cdot 0 &= 0 \quad (P5) \\ &= x \cdot 0 \quad (P5) \\ &= x \cdot 0 + 0 \quad (P3) \end{aligned}$$

Samm: Eeldan et kehtib $\forall x (x' \cdot y = x \cdot y + y)$, näitan, et sel juhul kehtib $\forall x (x' \cdot y' = x \cdot y' + y')$:

$$\begin{aligned} x' \cdot y' &= x' \cdot y + x' \quad (P6) \\ &= (x \cdot y + y) + x' \quad (induktsioonieeldus) \\ &= x \cdot y + (y + x') \quad (liitmiseassotsiatiivsus,\ teoreem\ 1.114) \\ &= x \cdot y + (y + x)' \quad (P4) \\ &= x \cdot y + (x + y)' \quad (liitmisekommutatiivsus,\ teoreem\ 1.115) \\ &= x \cdot y + (x + y') \quad (P4) \\ &= (x \cdot y + x) + y' \quad (liitmiseassotsiatiivsus,\ teoreem\ 1.114) \\ &= x \cdot y' + y' \quad (P6) \end{aligned}$$

Seega kehtib $\forall x \forall y (x' \cdot y = x \cdot y + y)$ induktsiooniaksioomi P7 põhjal.

2. On antud 9 tipu ja 17 servaga graaf. Seejuures on teada, et graafis iga tipu aste on 3 või 4. Leidke astmega 3 tippude arv.
Lahendus: Võtan astmega 3 tippude koguseks q ja astmega 4 tippude koguseks ϖ. On teada, et kokku on tippe 9 ehk kehtib $q + \varpi = 9$. On teada ka, et kõigi tippude astmete summa on võrdne kahekordse graafi servade arvuga (loengukonspekti teoreem 2.20), seega kehtib ka $3q + 4\varpi = 2 \cdot 17 = 34$. Lahendan võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} q + \varpi = 9 \\ 3q + 4\varpi = 34 \end{cases}$$

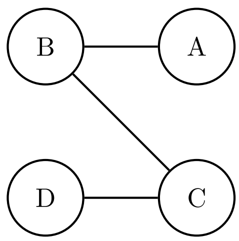
$$\begin{aligned} q &= 9 - \varpi \\ 3(9-\varpi) + 4\varpi &= 34 \\ 27 - 3\varpi + 4\varpi &= 34 \\ \varpi &= 7 \\ q &= 2 \end{aligned}$$

Seega on tippude arv, mille aste on 3, 2.

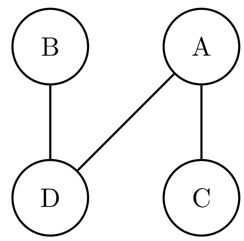
3. Tooge näide vähemalt kahe tipuga graafist, mis on isomorfne oma täiendgraafiga. Kirjutage välja nend vaheline isomorfism.

Lahendus: Minu näide on graaf $G = (\{A, B, C, D\}, \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}\})$, mille täiendgraaf on $G' = (\{A, B, C, D\}, \{\{B, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\})$

G:



G':



Graafist G saab võtta isomorfismi $A \to B, B \to D, C \to A, D \to C$, siis saame graafi $V = (\{A, B, C, D\}, \{\{B, D\}, \{D, A\}, \{A, C\}\})$, mis ongi G täiendgraaf.

4. Olgu antud sidus graaf, milles iga tipu aste on 3. On teada, et u on eraldav tipp. Tõestagem et leidub serv uv nii, et uv on sild.

Tõestus: Definitsiooni kohaselt on u eraldav tipp parajasti siis, kui tipu u ja temaga indentsete servade eemaldamisel graafi sidususkomponentide arv suureneb. Seega kuna on teada, et iga tipu aste on 3, väljub tipust täpselt 3 serva ua, ub ja uc. Kuna u on eraldav tipp, peavad tippudest a, b ja c 2 tükki olema pärast u eemaldamist erinevates sidusates komponentides, kuna muidu ei suureneks sidusate komponentide kogus. Võtan nendeks tippudeks a ja b.

Kui tipp c on pärast u eemaldamist samas sidusas komponendis nagu b, on serv ua sild, kuna a ja b on ühendatud vaid tipu u kaudu.

Samal põhjusel, kui tipp c on pärast u eemaldamist samas sidusas kpmponendis nagu a, on serv ub sild.

Kui pärast u eemaldamist pole c samas sidusas komponendis nagu a ega ka b, siis on kõik servad ua, ub ja uc sillad, kuna nad on ühendatud vaid tipu u kaudu. Seega on igal juhul vähemalt üks tipuga u indentsetest servadest sild ehk leidub sild uv.