

Kodutöö nr. 3

Joosep Näks ja Uku Hannes Arismaa

1. Leida kõik algarvud lõigus $[360, 460]$. Põhjendada, et saadud arvud on tõesti algarvud ja ükski ei ole puudu. Kas selles lõigus esineb algarvukaksikuid?

Kerge vaevaga saame leida vahemikust arvud, mis jaguvad 2,3 või 5-ga ning need eemaldada valikust. Alles jäävad arvud 361, 367, 371, 373, 377, 379, 383, 389, 391, 397, 401, 403, 407, 409, 413, 419, 421, 427, 431, 433, 437, 439, 443, 449, 451, 457. Paneme tähele, et arvud 371, 413, 427 jaguvad 7ga, seega pole algarvud. 11ga jaguvad 407 ning 451. 13ga 377 ja 403. 17ga 391. 19ga 361 ja 437. Ülejäänud arvud ei jagu 22st ehk enda ruutjuurest väiksemate algarvudega, seega on algarvud (367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457). Esinevad algarvukaksikud 419 ja 421 ning 431 ja 433.

2. Olgu $n \in \mathbb{N}$ selline, et ülimalt üks selle **erinevatest** algteguritest p rahuldab tingimust $p \leq \sqrt[n]{n}$. (St võib olla, et ükski algtegur seda tingimust ei rahulda, või ongi ainult üks, aga mitmekordne algtegur, mis seda rahuldab.) Leida kõik erinevad võimalused arvu n algteguriteks lahutada (st üldkujud a ja $p^k q$) ja tuua iga juhu kohta arvuline näide.

On ilmne, et kõik üldkujud $n = p^k$ (näide: $n = 32 = 2^5$) ja $n = 1$ sobivad, kuna neis ei ole rohkem kui üks erinev algtegur. Sobivad ka kindlad arvud üldkujuga $n = p^k \cdot q$ (näide: $n = 48 = 2^4 \cdot 3$, kus $2^4 = 16 < 48 < 81 = 3^4$), arvud $n = p^k \cdot q \cdot w$ (näiteks: $n = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, kus $2^4 = 16 < 60 < 81 = 3^4$) ja $n = p^k \cdot q \cdot w \cdot r$ (näiteks: $n = 490 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, kus $2^4 = 16 < 490 < 625 = 5^4$). (Mainitud kujudes q , w ja r võivad ka võrdsed olla)

Üle kolme algteguri, mis oleks suurem kui $\sqrt[n]{n}$, ei saa arvu n olla, kuna sel juhul kehtiks $n = p^k \cdot q \cdot w \cdot r \cdot m > p^k \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = p^k \cdot n$ ehk isegi kui $k = 0$, siis jääb võrratuseks $n > n$, mis ei ole tõene.

3. Tõestada, et kui $n! + n^2 + 1$ on algarv, siis ka $n^2 + 1$ on algarv.

Kui $n^2 + 1$ on kordarv, saab teda tegurdada $n^2 + 1 = p \cdot a$, kus p on algarv, nii et $p \leq \sqrt{n^2 + 1}$ (kui arvu oleks mitu algarvulist tegurit, mis oleks suurem kui arvu juur, tuleks nende korrutis arvust suurem, ning kui arvu on vaid üks algarvuline tegur, on ta algarv). Kuna n^2 on täisruut ja ühegi kahe täisruudu vahe ei ole 1 ega vähem, kehtib ka $p \leq n$ ehk $p|n!$. Seega kuna p jagab nii $n!$ kui ka $n^2 + 1$, jagab ta ka $n! + n^2 + 1$, ehk $n! + n^2 + 1$ ei saa olla algarv.

Seega kui $n! + n^2 + 1$ on algarv, peab ka $n^2 + 1$ olema algarv.

4. Tõestada, et kahe järjestikuse paaritu algarvu summal on alati vähemalt kolm (mitte tingimata erinevat) algtegurit.

Kahe paaritu arvu summa on paaris, seega on summal algtegur 2. Kuna summa ei saa olla 2, peab olema veel mõni algtegur. Kui on ainult üks algtegur, siis saame, et kahe järjestikuse paaritu algarvu summa taandatud kahega on algarv, kuna omab ainult ühte algtegurit ning asub esialgse kahe paaritu algarvu vahel, kuna on nende aritmeetiline keskmine, mis ei saa olla, kuna algarvud pidid olema järjestikused, seega peab nende summal ikkagi olema vähemalt 3 algtegurit.

5. Tõestada ilma Dirichlet' teoreemi kasutamata, et leidub lõpmata palju algarve, millel on kuju $6k + 5$, kus $k \in \mathbb{N}$.

Kui leidub suurim algarv kujul $6k + 5$, siis saame kokku korrutada selle algarvu temast väiksemate algarvudega ($a := 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (6k + 5)$) ning lahutada sellest 1. Saame arvu kujul $6k + 5$. Kui see arv juba on algarv, siis on see suurem eelmsiest ja saime vastuolu. On teada, et kõik algarvud esituvad kas kujul $6k + 5$ või $6k + 1$. Arvu a algtegurid ei saa kõik olla kujul $6k + 1$, kuna selliste arvude omavahel korrutamisel jääb jääk 6ga jagades alati 1ks, seega peab leiduma vähemalt üks algtegur kujul $6k + 5$. Algtegur $6k + 5$ ei saa olla võrdne ega väiksem algse suurima algarvuga kujul $6k + 5$, kuna kõik sellised algarvud annavad arvu a jagades jäägi -1, ning tegur ei saa ka olla suurem kui algne suurim sellisel kujul algarv, sest see on vastuolus väitega, et tegu on suurima sellise algarvuga. Seega ei saa sobivaid tegureid leiduda ehk oleme jõudnud vastuoluni ning sellisel kujul algarve peab olema lõpmatult.

6. Tõestada, et iga naturaalarvu on võimalik üles kirjutada summana, mille liidetavad on kõik erinevad ja kas algarvud või arv 1. Summa võib koosneda ka ühestainsast liidetavast.

Kasutan tugevat induktsiooni, baasiks vaatlen esimest 6 naturaalarvu. 1, 2, 3 ja 5 on ise algarvud või 1 ehk nad on ise sobivad summad. Alles jäävad $4 = 1 + 3$ ja $6 = 1 + 5$.

Samm: eeldan et kõiki arve, mis on väiksemad või võrdsed arvuga $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, on võimalik summaks jagada.

Tšebõšovi teoreemi järgi leidub iga $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil =: k > 3$ puhul vahemikus $(k, 2k - 2)$ vähemalt üks algarv. Võtan sellest vahemikust viimase algarvu ning lahutan ta arvust n . $n - p$ on vähemalt 1, kuna selle alumine piir on $n - (2k - 2) > n - 2 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 2 \geq -1 + 2 = 1$ ning selle ülemine piir on $n - k < n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, seega induktsiooni eelduse järgi leidub arvule $n - p$ vastav summa. Selles summas on ka kõik liikmed väiksemad kui p , kuna p on tervest summast suurem: $p \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor > n - p$. Seega saab võtta arvule n vastavaks summaks arvule $n - p$ vastav summa, millele on liidetud p .

7. Leida kõik algarvukolmikud (p, q, r) , mille korral $pq + pr + qr > pqr$.

Vaatleme ainult selliseid algarvu kolmikuid, et $p \leq q \leq r$. Kõik algarvukolmikud saab neid ümber järjestades. Kui $p = q = 2$, siis saame tingimuse $4r + 4 > 4r$, mis kehtib iga algarvu r korral, seega sobivad kõik algarvukolmikud kujul $(2, 2, r)$. Kui võtta $p = 2, q = 3$, siis saame tingimuse $5r + 6 > 6r \Rightarrow 6 > r$ ehk r saab olla kas 3 või 5. Kui võtta $p = 2, q = 5$ ning ka suuremate q korral saame tingimused $2(r + q) > qr, r \geq q$, mille puhul näeme, et kui see ei kehti mingite q ja r korral ei kehti see ka suuremate korral, kuna parem pool kasvab kummagi kasvades 2 võrra, aga vasak $q > 2$ või $r > 2$ võrra ning 2, 5, 5 korral see juba ei kehti. Sarnaselt arutledes saame sama tulemuse ka $p = 3, q = 3$ ning arvukolmiku $(3, 3, 3)$ kohta ehk ei see ega ka suuremad kolmikud ei sobi.

Kokkuvõttes sobivad kolmikud $(2, 2, r)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 5)$ ning kõik nende permutatsioonid.

8. Tõestada, et aritmeetilises jadas vahega $b < 2021$ ei saa olla 12 järjestikust algarvu.

Et aritmeetilises jadas vahega b oleks n järjestikust algarvu, peab kehtima $(b, n) > 1$, kuna vastasel juhul kui $(b, n) = 1$ ja mingi jada liige a_i on algarv, siis jäägiga jagades saan $a_i = q_1 \cdot n + r_1, r_1 < n$. Kuna $(b, n) = 1$, leiduvad x ja y nii, et $xb + yn = 1$, korrutan selle r_1 ga: $xbr_1 + ynr_1 = r_1$. Teostan veel kord jäägiga jagamist: $xr_1 = n \cdot q_2 + r_2, r_2 < n$. Need kokku pannes saab, et $n|r_1 - xbr_1 + b(xr_1 - r_2) = r_1 - br_2$ ehk $n|a_i - r_1 + r_1 - br_2 = a_i - br_2 = a_{i-r_2}$, samuti $n|a_i - br_2 + bn = a_{i-r_2+n}$. Ehk iga algarvulise liikme ümber leiduvad liikmed, mis jaguvad arvuga n , mille vahele jääb vaid $n - 1$ liiget.

Seega selleks, et mingi b korral saaks 12 järjestikust arvu leiduda, peab kehtima $(b, 12) > 1$, kuid kuna seal peab sisalduma ka 11, 10, ..., 2 järjestikust algarvu, peab b suurim ühistegur kõigi arvudega 2, ..., 12 olema suurem kui 1. Selleks peab b vähemalt olema sama suur, nagu seal vahemikus paiknevate algarvude korrutis, kuna kui b suurim ühistegur mingi algarvuga on suurem kui 1, peab see olema võrdne selle algarvuga, kuna algarvul pole rohkem tegureid kui 1 ja tema ise. Nende algarvude korrutis on $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310 > 2021$, ehk 2021 sammuga aritmeetilises jadas ei saa leiduda 12 järjestikust algarvu.