Kodut nr. 1

5. variant

1. Olgu X reaalarvude hulga mittetühi ülalt tõkestatud alamhulk ning olgu a positiivne arv. Tähistame $u := supX$. Toetudes arvhulga rajade definitsioonile või loengukonspekti lausele 1.3, tõestage, et hulk $aX := \{ax : x \in X\}$ on ülalt tõkestatud, kusjuures sup(aX) = au.

Tõestus:

Loengukonspekti lause 1.3 kohaselt kehtib $u = supX$ parajasti siis kui kehtivad

$$x \leq u \; \forall x \in X \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \text{ mis rahuldab võrratust } \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in X \quad x_0 - \varepsilon < u \tag{2}$$

Tingimusest (1) saame võrratuse korrutamise monotoonsuse põhjal $ax \leq au$.
Tingimusest (2) saame võrratuse korrutamise monotoonsuse põhjal
$a(x_0 - \varepsilon) < au \Rightarrow ax_0 - a\varepsilon < au$. Eelnev kehtib iga positiivse $\varepsilon \in F$ korral ning kui korrutada elemendi ε elemendiga a^{-1}-ga, kus a on positiivne, on ka tulemus positiivne korrutamise monotoonsuse tõttu ning kuna korpus on korrutamise suhtes kinnine on tulemus ka korpuse F liige. Samuti saab öelda et kui εa^{-1} on positiivne korpuse F element siis kui seda a-ga korrutada saame ikka positiivse F elemendi korrutamise monotoonsuse tõttu ja selle tõttu et korpus on korrutamise suhtes kinnine. Seega on suvaline positiivne element ε samavrne suvalise positiivse elemendi ja mingi kindla positiivse elemendi korrutisega εa^{-1}. Seega $ax_0 - a\varepsilon < au \iff ax_0 - a\varepsilon a^{-1} < au \iff ax_0 - \varepsilon < au$. Seega oleme tõestanud et kehtivad $ax \leq au$ ja $ax_0 - \varepsilon < au$, mis on loengu konspekti lause 1.3 kohaselt tõesed parajasti siis, kui kehtib au = sup(aX).

2. Jada (a_n) on defineeritud järgmiselt:

$$a_1 = 1 \quad ja \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 3, \quad n \in \mathbb{N}$$

Näidake, et see jada on ülevalt tõkestatud, kusjuures $a_n \leq 6$ iga $x \in \mathbb{N}$ korral. Kas jada a_n on koonduv? jaatava vastuse korral leidke piirvrtus $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Tõestus:
Väidan et jada liiget saab esitada üldkujuga $a_n = \frac{3*2^n-5}{2^{n-1}}$.
Tõestan matemaatilise induktsiooni kaudu:
Induktsiooni baas:
Liige a_1 üldliikme valemi järgi:
$a_1 = \frac{3*2^1-5}{2^{1-1}} = 1$
Liige a_1 on ka definitsiooni kohaselt 1.
Liige a_2 üldliikme valemi järgi:
$a_2 = \frac{3*2^2-5}{2^{2-1}} = 3.5$
Liige a_2 rekursiivse valemi järgi:
$a_2 = \frac{1}{2} + 3 = 3.5$
Induktsiooni samm:
$a_k = \frac{3*2^k-5}{2^{k-1}}$
$a_{k+1} = \frac{\frac{3*2^k-5}{2^{k-1}}}{2} + 3 = \frac{3*2^k-5+3*2^k}{2^k} = \frac{3*2^{k+1}-5}{2^k}$
Ning see on sama, mis tuleb üldliikme valemit kasutades, seega üldliikme valem kehtib.
Seega on meil nüüd jada esitatud kujul $a_n = \frac{3*2^n-5}{2^{n-1}}$.
Väidan vastuväiteliselt et mingi n korral kehtib

$$\begin{aligned} \frac{3*2^n-5}{2^{n-1}} &> 6 \Rightarrow \\ 3*2^n-5 &> 6*2^{n-1} \Rightarrow \\ 3*2^n-3*2*2^{n-1} &> 5 \Rightarrow \\ 3*(2^n-2^n) &> 5 \Rightarrow \\ 3 &> 5 \end{aligned}$$

Jõudsin vastuoluni, seega kehtib alati $a_n \leq 6$.
Väidan, et jada piirväärtus u = 6. Tõestus:

Definitsiooni kohaselt on a jada a_n piirväärtus juhul, kui

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon < 0 \quad \exists N \; \forall n \geq N : |a_N - u| \leq \varepsilon \Rightarrow \\
|\frac{3 * 2^N - 5}{2^{N-1}} - 6| \leq \varepsilon \Rightarrow \\
|\frac{3 * 2^N - 5 - 6 * 2^{N-1}}{2^{N-1}}| \leq \varepsilon \Rightarrow \\
|\frac{-5}{2^{N-1}}| \leq \varepsilon \Rightarrow \\
\frac{5}{2^{N-1}} \leq \varepsilon \Rightarrow \\
2^{N-1} \leq \frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow \\
N \leq 1 + \log_2 \frac{5}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

Seega saab iga ε kohta leida N definitsiooni tingimus kehtib, nii et jada a_n piirväärtus on 6.

3. Lähtudes jada piirväärtuse definitsioonist, tõestage, et

$$\lim_{n\to\infty}(n^2 - (-1)^n) = \infty$$

Tõestus:
Piirväärtuse definitsiooni kohaselt

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty \iff \forall M \quad \exists N \forall n \geq N \quad x_n > M$$

$$\text{Alati kehtib } (-1)^n \leq 1 \Rightarrow -(-1)^n \geq -1 \Rightarrow n^2 - (-1)^n \geq n^2 - 1$$
$$\text{Saan alati võtta } N = \lceil M \rceil + 2 \ \forall M$$
$$N^2 - (-1)^N \geq N^2 - 1 = \lceil M \rceil + 2 - 1 = \lceil M \rceil + 1 > M$$

Seega saan alati võtta sellise N et $a_N > M$.
Sama kehtib ka iga $n > N$ korral, kuna a_n on kasvav jada:

$$a_n \geq n^2 - 1$$
$$(-1)^n \geq -1 \Rightarrow -(-1)^n \leq 1 \Rightarrow (n-1)^2 - (-1)^{n-1} \leq (n-1)^2 + 1 \Rightarrow$$
$$a_{n-1} \leq (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$$
$$n > 2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2 < n^2 - 4 + 2 = n^2 - 2 < n^2 - 1 \leq a_n$$

Seega iga $n > 2$ puhul on a_n kasvav jada.
$n = 1$ puhul
$a_1 = 1^2 - (-1)^1 = 1 + 1 = 2$
$a_2 = 2^2 - (-1)^2 = 4 + 1 = 5$
Seega on jada kasvav ka esimestel liikmetel. Kokkuvõttes iga M jaoks leidub N nii et $a_N > M$ ja a_n on kasvav jada seega on jada piirväärtus lõpmatus.