Kodutöö nr. 2

Joosep Näks

1.

$$\exists x((\forall y B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&(C(z) \Rightarrow A(x) \vee \forall y \neg B(y)))\&\neg\forall q \exists p \neg(A(q) \Leftrightarrow B(p)\&C(z))$$

Kvantori ja eituse vahetamisseadus:

$$\exists x((\forall y B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&(C(z) \Rightarrow A(x) \vee \forall y \neg B(y)))\&\exists q \forall p(A(q) \Leftrightarrow B(p)\&C(z))$$

Implikatsiooni definitsioon:

$$\exists x((\forall y B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&(\neg C(z) \vee A(x) \vee \forall y \neg B(y)))\&\exists q \forall p(A(q) \Leftrightarrow B(p)\&C(z))$$

Seotud muutujat mitte sisaldava valemi kvantori alla toomine:

$$\exists x(\forall y(B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&\forall y(\neg C(z) \vee A(x) \vee \neg B(y)))\&\exists q \forall p(A(q) \Leftrightarrow B(p)\&C(z))$$

Kvantori distributiivsus:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&(\neg C(z) \vee A(x) \vee \neg B(y)))\&\exists q \forall p(A(q) \Leftrightarrow B(p)\&C(z))$$

Seotud muutujate ümbernimetamine:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z) \vee \neg A(x))\&(\neg C(z) \vee A(x) \vee \neg B(y)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Disjunktsiooni distributiivsuse järgi:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&(\neg C(z) \vee A(x) \vee \neg B(y)) \vee \neg A(x)\&(\neg C(z) \vee A(x) \vee \neg B(y)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

De Morgani seaduse järgi (ja ka konjuktsioonide assotsiatiivsus):

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&(\neg(C(z)\&B(y)) \vee A(x)) \vee \neg A(x)\&(\neg(C(z)\&B(y)) \vee A(x)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Konjuktsiooni distributiivsuse järgi:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&\neg(C(z)\&B(y)) \vee (B(y)\&C(z))\&A(x)) \vee \neg A(x)\&(\neg(C(z)\&B(y)) \vee A(x)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Valemi konjuktsioon enda eitusega on väär ning valemi disjunktsioon vääraga on samaväärne valemi endaga:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&A(x)) \vee \neg A(x)\&(\neg(C(z)\&B(y)) \vee A(x)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Konjuktsiooni distributiivsus:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&A(x)) \vee \neg A(x)\&\neg(C(z)\&B(y)) \vee \neg A(x)\&A(x))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Valemi konjuktsioon enda eitusega on väär ning valemi disjunktsioon vääraga on samaväärne valemi endaga:

$$\exists x \forall y((B(y)\&C(z))\&A(x)) \vee \neg A(x)\&\neg(C(z)\&B(y)))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Ekvivalentsi definitsiooni järgi:

$$\exists x \forall y(B(y)\&C(z) \Leftrightarrow A(x))\&\exists x \forall y(A(x) \Leftrightarrow B(y)\&C(z))$$

Valemi konjuktsioon iseendaga on samaväärne valemi endaga:

$$\exists x \forall y(B(y)\&C(z) \Leftrightarrow A(x))$$

2. Vahetu arutlusega tõesatada järgmised järeldumised:
a) $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow C \models \forall x \neg A(x) \Rightarrow C$
Implikatsiooni definitsiooni järgi:
$\forall x(A(x) \Rightarrow B(x)) \Rightarrow C \equiv \neg \forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \vee C$
Kvantori ja eituse vahetamise samaväärsuse järgi:
$\neg \forall x(\neg A(x) \vee B(x)) \vee C \equiv \exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x)) \vee C$
De Morgani seaduse järgi kehtib:
$\exists x \neg(\neg A(x) \vee B(x)) \vee C \equiv \exists x(A(x) \& \neg B(x)) \vee C$
Vaatleme järgnevat järelduvust:
$\exists x(A(x) \& \neg B(x)) \vee C \models \exists x A(x) \vee C$
Vasak pool on tõene juhul kui kas $\exists x(A(x) \& \neg B(x))$ on tõene (1) või C on tõene (2).
(1): kui $\exists x(A(x) \& \neg B(x))$ on tõene tähendab, et leidub selline x, mille puhul on korraga $A(x)$ tõene ja $B(x)$ väär. See aga tähendab, et leidub selline x, mille korral $A(x)$ on tõene ehk järelduvuse parem pool on tõene kuna see on osa parema poole põhidisjunktsioonist.
(2): kui C on tõene, on ka järelduvuse parem pool tõene, kuna C on üks pool selle põhidisjunktsioonist.
Implikatsiooni definitsiooni järgi:
$\exists x A(x) \vee C \equiv \neg \exists x A(x) \Rightarrow C$
Kvantori ja eituse vahetamise samaväärsuse järgi:
$\neg \exists x A(x) \Rightarrow C \equiv \forall x \neg A(x) \Rightarrow C$

b)$\forall x(B(x) \Rightarrow A(x) \vee C(x)), \exists x(B(x) \& \neg C(x)) \models \exists x A(x)$
Implikatsiooni definitsiooni kohaselt kehtib:
$\forall x(B(x) \Rightarrow A(x) \vee C(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee A(x) \vee C(x))$
De Morgani seaduse kohaselt kehtib:
$\forall x(\neg B(x) \vee A(x) \vee C(x)) \equiv \forall x(\neg(B(x) \& \neg C(x)) \vee A(x))$
Viimane valem kehtib vaid siis, kui iga x korral on tõene kas $\neg(B(x) \& \neg C(x))$ või $A(x)$. Teine algne valem on tõene vaid juhul, kui mingi x korral $(B(x) \& \neg C(x))$ on tõene ehk $\neg(B(x) \& \neg C(x))$ on väär. See aga tähendab, et selle x korral peab $A(x)$ olema tõene, et kogu järelduvuse vasak pool tõene oleks. Seega kehtib alati $\exists x A(x)$, mida oligi tarvis näidata.

c) $\forall x(R(x) \Rightarrow \neg(P(x) \Leftrightarrow Q(x))), \exists x R(x) \& \forall y P(y) \models \exists x \neg Q(x)$
Ekvivalentsi definitsiooni kohaselt kehtib:
$\forall x(R(x) \Rightarrow \neg(P(x) \Leftrightarrow Q(x))) \equiv \forall x(R(x) \Rightarrow \neg(P(x) \& Q(x) \vee \neg P(x) \& \neg Q(x)))$
Implikatsiooni definitsiooni kohaselt kehtib:
$\forall x(R(x) \Rightarrow \neg(P(x) \& Q(x) \vee \neg P(x) \& \neg Q(x))) \equiv \forall x(\neg R(x) \vee \neg(P(x) \& Q(x) \vee \neg P(x) \& \neg Q(x)))$
Järelduvuse teine eeldus on tõene vaid juhul, kui $P(x)$ on samaselt tõene ja $R(x)$ on mingi x korral tõene. Kasutades esimest informatsioonikildu esimeses valemis saame:
$\forall x(\neg R(x) \vee \neg(t \& Q(x) \vee v \& \neg Q(x))) \equiv \forall x(\neg R(x) \vee \neg(Q(x)))$
Eelduse teise valemi eeldus oli ka et $R(x)$ on mingi x korral tõene. See tähendab, et $\neg R(x)$ on mingil väärtusel väär ehk tuletatud valemi kohaselt peab sellel x väärtusel $\neg Q(x)$ tõene olema. Seega kehtib $\exists x \neg Q(x)$, mida oligi tarvis näidata.

3.
Ühtegi akrobaatikatrikki, mida pole tsirkuse eeskavas välja kuulutatud, ei püüa trupp etenduse ajal sooritada. Ühtegi aktrobaatikatrikki, mis sisaldab neljakordset saltot, pole üldse võimalik sooritada. Ühtegi akrobaatikatrikki, mida pole võimalik sooritada, ei ole tsirkuse eeskavas välja kuulutatud. Järelikult ühtegi akrobaatikatrikki, mis sisaldab neljakordset saltot, ei püüa trupp etenduse ajal sooritada.

Defineerin predikaadid:
$\mathcal{F}_1(x) =$ "x pole tsirkuse eeskavas välja kuulutatud"
$\mathcal{F}_2(x) =$ "Trupp ei esita etenduse ajal x"
$\mathcal{F}_3(x) =$ "x sisaldab neljakordset saltot"
$\mathcal{F}_4(x) =$ "x pole võimalik sooritada"

Laused predikaatlausetena:
1) $\forall x(\mathcal{F}_1(x) \Rightarrow \mathcal{F}_2(x))$
2) $\forall x(\mathcal{F}_3(x) \Rightarrow \mathcal{F}_4(x))$
3) $\forall x(\mathcal{F}_4(x) \Rightarrow \mathcal{F}_1(x))$
4) $\forall x(\mathcal{F}_1(x) \Rightarrow \mathcal{F}_2(x)),\ \forall x(\mathcal{F}_3(x) \Rightarrow \mathcal{F}_4(x)), \forall x(\mathcal{F}_4(x) \Rightarrow \mathcal{F}_1(x)) \models \forall x(\mathcal{F}_3(x) \Rightarrow \mathcal{F}_2(x))$
Implikatsiooni definitsiooni järgi saab viimase ümber kirjutada nii:
$\forall x(\neg\mathcal{F}_1(x) \vee \mathcal{F}_2(x)),\ \forall x(\neg\mathcal{F}_3(x) \vee \mathcal{F}_4(x)), \forall x(\neg\mathcal{F}_4(x) \vee \mathcal{F}_1(x)) \models \forall x(\neg\mathcal{F}_3(x) \vee \mathcal{F}_2(x))$
Järelduvuse parem pool on tõene vaid siis, kui iga x korral on kas $\mathcal{F}_3(x)$ väär või $\mathcal{F}_2(x)$ tõene.
Vasaku poole teine lause on tõene juhul kui iga x korral on kas $\mathcal{F}_3(x)$ väär, ehk parem pool on tõene, või $\mathcal{F}_4(x)$ tõene. Nüüd vaatleme, mis juhtub, kui $\mathcal{F}_4(x)$ on tõene.
Vasaku poole kolmanda lause kohaselt iga x korral on kas $\mathcal{F}_4(x)$ väär või $\mathcal{F}_1(x)$ tõene. Juhud, kus $\mathcal{F}_4(x)$ on väär on kaetud, kuna siis kas on teine lause väär või on $\mathcal{F}_3(x)$ väär. Seega huvitab meid juht, kus $\mathcal{F}_1(x)$ on tõene.
Vasaku poole esimese lause kohaselt iga x korral on kas $\mathcal{F}_1(x)$ väär või $\mathcal{F}_2(x)$ tõene. Ehk kuna vaatleme juhtu, kus $\mathcal{F}_1(x)$ on tõene, peab olema $\mathcal{F}_2(x)$ tõene.
Seega olen jõudnud järelduseni, et kui kõik vasakul olevad valemid on tõesed, on iga x korral on kas $\mathcal{F}_3(x)$ väär või $\mathcal{F}_2(x)$ tõene ehk järelduvus kehtib.

4. Tuletusreeglid ja nende ratsionaalarvulised seletused:

$$1:\frac{xQy}{xQ+y}\iff\frac{1}{n}Q\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n}Q\frac{p}{q+1}$$
$$2:\frac{xQy}{\diamond xQ+y}\iff\frac{1}{n}Q\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n+1}Q\frac{p}{q+1}$$
$$3:\frac{xQy}{xQy-}\iff\frac{1}{n}Q\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n}Q\frac{p+1}{q}$$

a) Kirjutan tuletusreeglid ümber tähendusega $\frac{1}{n}Q\frac{p}{q}\Leftrightarrow\frac{1}{n}=\frac{p}{q}$

$$1)\frac{1}{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{p}{q+1}\Leftrightarrow\frac{p}{q}=\frac{p}{q+1}$$

See reegel kehtib vaid juhul, kui $p=0$, kuid - märkide kogus pidi positiivne olema ehk selle peab ära jätma, et semantika suhtes kehtiks formaalse aksiomaatilise teooria korrektsus.

$$2)\frac{1}{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n+1}=\frac{p}{q+1}\Leftrightarrow q=np\Rightarrow q+1=np+p\Leftrightarrow p=1$$

Tuletusreegel kehtib vaid $P=1$ juhul, vaatlen selle töötamist hiljem.

$$3)\frac{1}{n}=\frac{p}{q}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{p+1}{q}\Leftrightarrow q=np\Rightarrow q=np+n\Leftrightarrow n=0$$

See reegel kehtib vaid juhul $n=0$, mis pole võimalik kuna $\diamond$ sümboleid peab valemis olema vähemalt 1, seega tuleb valem eemaldada et kehtiks teooria korrektsus semantika suhtes.

Kokkuvõttes tuleb esimene ja kolmas tuletusreegel ei kehti kindlasti ning teine töötab vaid juhul kui $p=1$. Ainus aksioom on $\diamond Q+-$ ehk $n=1,\ p=1,\ q=1$. Teine ehk ainus potentsiaalne tuletusreegel suurendab n ja q väärtusi 1 võrra, kuid ei muuda p väärtust, ehk p on alati 1 ning teine tuletusreegel kehtib alati. Seega peab selleks, et teooria oleks semantikas S_1 korrektne, ära jätma esimese ja kolmanda tuletusreegli.

b) Kirjutan tuletusreeglid ümber tähendusega $\frac{1}{n}Q\frac{p}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{p}{q}$

$$1)\frac{1}{n} \geq \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{p}{q+1} \Leftrightarrow q \geq np \Rightarrow q+1 \geq np$$

See reegel kehtib alati, kuna kui q-le positiivne arv 1

juurde liita, on ta ikka suurem kui np.

$$2)\frac{1}{n} \geq \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{p}{q+1} \Leftrightarrow q \geq np \Rightarrow q+1 \geq np+p \Leftrightarrow q \geq np \Rightarrow q \geq np+p-1$$

Seega kehtib tuletusreegel kindlalt juhul, kui $p \leq 1$, jätkan selle reegliga hiljem.

$$3)\frac{1}{n} \geq \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{p+1}{q}$$

Kui seda reeglit aksioomi peal kasutada, saame:

$$\frac{1}{1} \geq \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{2}{1}$$

See ei kehti kuna $2 = 1 + 1 > 1$.

Kokkuvõttes kehtib kindlasti esimene reegel, ei kehti kindlalt kolmas reegel ning teine reegel kehtib juhul kui $p \leq 1$. Nagu punktis a mainitud, on aksioomis $n = 1,\ p = 1,\ q = 1$. Esimene reegel suurendab q väärtust ühe võrra ning teine reegel suurendab n ja q väärtusi 1 võrra kuid p väärtus jääb alati 1ks ehk kehtib alati $p \leq 1$ ning seega ka teine tuletusreegel. Seega peab selleks, et teooria oleks semantikas S_2 korrektne, ära jätma vaid kolmanda tuletusreegli.