

Kodutöö nr. 6

Joosep Näks ja Uku Hannes Arismaa

1. Millega on võrdne summa

$$S = \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \varphi(6) + \varphi(7) + \varphi(8) + \varphi(10) + \varphi(20) + \varphi(25) + \varphi(40) + \varphi(50) + \varphi(100)?$$

$$S = \sum_{d|200} \varphi(d) - \varphi(1) - \varphi(200) + \varphi(3) + \varphi(6) + \varphi(7) =$$

$$200 - 1 - 2^{3-1}(2-1)5^{2-1}(5-1) + 2 + 2 + 6 = 129$$

2. Kui palju on selliseid naturaalarve, mis ei ole suuremad kui 2121 ja mille suurim ühistegur arvuga 2020 ei ületa arvu 20?

Võtan suvalise arvu $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ ning $2020 = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \dots \cdot p_n^{l_n}$, nii et p_1, \dots, p_n on erinevad algarvud. Siis $(a, 2020) = p_1^{\min(p_1, l_1)} \cdot p_2^{\min(p_2, l_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(p_n, l_n)}$. Kuna arvu 2020 standardkuju on $2^2 \cdot 5^1 \cdot 101^1$, on kõik muudele algarvudele vastavad l_i väärtused 0 ning suurima ühisteguri saab taandada arvuks $(a, 2020) = 2^{\min(2, l_1)} \cdot 5^{\min(1, l_2)} \cdot 101^{\min(1, l_n)}$ ehk kõik erinevad võimalikud suurimad ühistegurid on 1, 2, 4, 5, 10, 20 ja lisaks kõik loetletud arvud läbi korrutatud arvuga 101. Märkan, et kõik loetletud arvud on mitte suuremad kui 20, kuid kui neid arvuga 101 läbi korrutada, on nad suuremad kui 101. Sellest järeldub, et arvu a suurim ühistegur arvuga 2020 on suurem kui 20 parajasti siis, kui $101|a$. Seega on arvude kogus, mille suurim ühistegur arvuga 2020 ei ületa arvu 20, kõigi arvude kogus miinus 101 kordsed arvud. 101 kordseid arve, mis ei ole suuremad kui 2121 on $\left\lfloor \frac{2121}{101} \right\rfloor = 21$ ning seega otsitav kogus on $2121 - 21 = 2100$.

3. Leida arvu

$$2022^{(2021^{(2020 \dots^{2^1})})}$$

neli viimast kümnendnumbrit.

Arvu viimase nelja kümnendnumbri leidmine on samaväärne arvu esindaja leidmisega jäägiklassis \mathbb{Z}_{10000} . Teoreemi 4.5 põhjal kuna $(16, 625) = 1$ ja $16 \cdot 625 = 10000$ siis \mathbb{Z}_{10000} ja $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{625}$ on isomorfsed, seega leian arvu esindaja ringis $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{625}$. Märkan et $2022 \equiv 6 \pmod{16}$ ja $6^4 \equiv 0 \pmod{16}$ ehk kuna antud arvus on 2022 astendaja suurem kui 4, on jäägiklassis \mathbb{Z}_{16} selle esindaja $\bar{0}$.

Jäägiklassi \mathbb{Z}_{625} jaoks leian, et $\varphi(625) = 500$, ning kuna $(625, 2022) = 1$, saan ma Euleri teoreemi põhjal, et

$2022^{500} \equiv 1 \pmod{625}$ ehk kui jagada jäägiga $2021^{(2020 \dots^{2^1})} = 500q + r$, siis $2022^{(2021^{(2020 \dots^{2^1})})} \equiv 2022^{500q} \cdot 2022^r \equiv 2022^r \pmod{625}$. Arvu r leidmiseks saab jällegi kasutada Euleri teoreemi, kuna $(2021, 500) = 1$ ja $\varphi(500) = 200$, ehk $2021^{200} \equiv 1 \pmod{500}$. Arvu 2021 astendajat algses arvus vaadates saab aga märgata, et $2020 \equiv 20 \pmod{200}$ ning $20^2 = 400 \equiv 0 \pmod{200}$ ehk kuna algses arvus on 2020 astendaja suurem kui 2, saab võtta $2020^{(2019 \dots^{(2^1)})} = 2020^2 \cdot 2020^{(2019 \dots^{(2^1)})-2} \equiv 0 \pmod{200}$. See tähendab, et algses arvus arvu 2021 astendaja jagub arvuga 200 ning $2021^{(2020 \dots^{2^1})} = (2020^2 00)^k \equiv 1 \pmod{500}$ ehk $r = 1$.

Ning lõpuks $2022^{(2021^{(2020 \dots^{2^1})})} \equiv 2022^1 \pmod{625} = 147$.

Seega on antud arvu esindaja ringis $\mathbb{Z}_{16} \times \mathbb{Z}_{625}$ element $(\bar{0}, \bar{147})$. Leian jäägid $625 \equiv 1 \pmod{16}$ ja $147 \equiv 3 \pmod{16}$ ehk otsitav esindaja jäägiklassis \mathbb{Z}_{10000} on $625 \cdot 13 + 147 = 8272$.

4. Tõestada, et $a^{37} \equiv a \pmod{1995}$ iga $a \in \mathbb{Z}$ korral.

Samaväärne oleks tõestada $a^{37} = a, a \in \mathbb{Z}_{1995}$, mis omakorda on samaväärne $a^{37} = a, a \in \mathbb{Z}_{19} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$. Vaadates a osi eraldi, saame Fermat' väikese teoreemipõhjal, et näiteks $a_1 \in \mathbb{Z}_{19}$ puhul $a_1^{19-1} = a_1^{18} = \bar{1} \Rightarrow a_1^{2 \cdot 18} = \bar{1}^2 = \bar{1} \Rightarrow a_1^{37} = \bar{1} a_1 = a_1$. Sarnase tulemuseni jõuame ka teistes jäägiklassiringides, kuna $37 \equiv 1 \pmod{3-1}$, $37 \equiv 1 \pmod{5-1}$ ning $37 \equiv 1 \pmod{7-1}$. Kui mõni $a_n = 0$, siis

Fermat' väike teoreem ei kehti, aga $\bar{0}^{37} = \bar{0}$ igas jäägiklassiringis, seega ikkagi $a_n^{37} = a_n$ ning seega ka $a^{37} = a$.

5. Leida kõik naturaalarvud n , mille korral $\varphi(n) = 6$.

$$6 = 2 \cdot 3$$

φ arvutamisel saavad need tegurid tulla kahest kohast: tegur $(p-1)$ või tegur p^{k-1} . Kui 2 tuleb $(p-1)$ st, siis saame $p = 3$. Kui siis 3 tuleb p^{k-1} st, saame, et arv on $3^2 = 9$. 3 ei saa tulla $(p-1)$ st, sest 4 ei ole algarv. Kui 2 tuleb 2^{2-1} st, siis peaks 3 tulema 3^{2-1} st, aga siis peaks tulemus veel olema korrutatud $(3-1)$ ga, seega nii ei saa. On ka võimalus, et $(p-1) = 6$ ehk sobib arv 7. Lisaks 7 ja 9le sobivad ka 14 ja 18, kuna 2ga läbi korrutamisel korrutame me φ läbi $2^{1-1} = 1$ ning $(2-1) = 1$ ga.

6. Olgu $n \in \mathbb{N}$. Leida $\sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right)$.

7. Leida kõik täiuslikud paarisarvud, mis ei ole avaldatavad järjestikuste kuupide summana.

8. Tõestada, et igal paaritud täiuslikul arvul on vähemalt kolm erinevat algtegurit.

Vaatlen alustuseks ühe erineva algteguriga täiuslikke arve. Teoreemi 5.21 põhjal saab nad avaldada kujul $2n = 2p^k = \sigma(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$. Korrutan võrrandi $2p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$ mõlemad pooled läbi $p - 1$ ga, mis pole 0, kuna p on algarv ehk 2 või suurem. Saan $2p^{k+1} - 2p^k = p^{k+1} - 1$ ehk $p^k(2 - p) = 1$. Kuid selleks, et võrrandi vasak pool positiivne oleks, peaks p olema väiksem kui 2 ning selliseid algarve ei leidu.

Avaldan sarnaselt kahe erineva algteguriga täiusliku arvu: $2n = 2p^k \cdot q^t = \sigma(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \cdot \frac{q^{t+1} - 1}{q - 1}$.

Jagan mõlemad pooled läbi arvuga n : $2 = \frac{p - p^{-k}}{p - 1} \cdot \frac{q - q^{-t}}{q - 1} = \left(\frac{p}{p - 1} - \frac{p^{-k}}{p - 1}\right) \cdot \left(\frac{q}{q - 1} - \frac{q^{-t}}{q - 1}\right)$.

Eelduste kohaselt on p ja q algarvud ja k ja t naturaalarvud ehk $0 < p^{-k} < 1 < p$ ehk viimase korrutise tegurid on positiivsed, ning kui mõlemale tegurile juurde liita positiivne arv, on tulemuseks saadud korrutise väärtus suurem algsest korrutisest ehk

$$\left(\frac{p}{p - 1} - \frac{p^{-k}}{p - 1}\right) \cdot \left(\frac{q}{q - 1} - \frac{q^{-t}}{q - 1}\right) < \frac{p}{p - 1} \cdot \frac{q}{q - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q}}$$

Kui saadud kujus võtta p ja q kõige väiksemateks võimalikeks algarvudeks $p = 3$ ja $q = 5$ (2 ei ole võimalik kuna vaatleme vaid paaritud täiuslikke arve), on selle väärtus $\frac{15}{8} < 2$ ning on näha, et p ja q suurendamisel väheneb väärtus, ehk selle kuju väärtus on alati väiksem kui 2, kuid see annab vastuolu, kuna see peaks olema rangelt suurem kui 2, et n oleks täiuslik arv.