Kodutöö nr. 2

Joosep Näks ja Uku Hannes Arismaa

1.

2. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral $(a, b, c)(ab, ac, bc) = (a, b)(a, c)(b, c)$.

$$\begin{aligned}(a, b, c)(ab, ac, bc) =&(a, b, c)(a(b, c), bc) = (a, b, c)(a(b, c), (b, c)[b, c])\\ =&(a, (b, c))(a, [b, c])(b, c) = (a^2, a(b, c), a[b, c], bc)(b, c)\\ =&(a^2, bc, (a(b, c), a[b, c]))(b, c) = (a^2, bc, a((b, c), [b, c]))(b, c)\\ =&(a^2, bc, a(b, c))(b, c) = (a^2, bc, ab, ac)(b, c)\\ =&(a(a, c), b(a, c))(b, c) = (a, b)(a, c)(b, c)\end{aligned}$$

4. Olgu $a, b \in \mathbb{N},\ (a, b) = 1$. Defineerime jada z_n rekursiivselt seostega $z_0 = z_1 = 1, z_{n+1} = az_n + bz_{n-1}$. Tõestada, et $(z_n, z_{n+1}) = 1$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral.

Kasutan induktsiooni. Baasiks leian 3 esimest z väärtust: $z_0 = 1,\ z_1 = 1,\ z_2 = az_1 + bz_0 = a + b$. Kuna $z_1 = 1$, siis $(z_0, z_1) = (z_1, z_2) = 1$ ehk baas kehtib.
Sammuks eeldan, et $(z_{n-1}, z_{n-2}) = 1$ ja näitan, et $(z_n, z_{n-1}) = 1$.

$$(z_n, z_{n-1}) = (az_{n-1} + bz_{n-2}, z_{n-1}) = (bz_{n-2}, z_{n-1})$$

Viimane võrdus kehtib, kuna kui võtta $c := (az_{n-1} + bz_{n-2}, z_{n-1})$ ja on SÜT definitsioonist teada, et $c|z_{n-1}$ ja $c|az_{n-1} + bz_{n-2}$, siis $c|az_{n-1} + bz_{n-2} - az_{n-1} = bz_{n-2}$ ning kui mingi $c'|bz_{n-2}$ ja $c'|z_{n-1}$ siis kehtib ka $c'|bz_{n-2} + az_{n-1}$ ehk $c'|c$, seega $c = (bz_{n-2}, z_{n-1})$.
Kuna $(z_{n-1}, z_{n-2}) = 1$, siis $(bz_{n-2}, z_{n-1}) = (b, z_{n-1})$. Eeldan vastuväiteliselt, et $d := (b, z_{n-1}) \neq 1$. On teada, et $z_{n-1} = az_{n-2} + bz_{n-3}$. Kuna $d|z_{n-1}$ ja $d|bz_{n-3}$ siis $d|z_{n-1} - bz_{n-3} = az_{n-2}$. Kuid kui $(d, a) \neq 1$, siis $(d, a) = ((a, b), z_{n-1}) \neq 1$ ehk $(a, b) \neq 1$, mis on vastuolus ülesande püstitusega, ning kui $(d, z_{n-2}) \neq 1$ siis $(b, (z_{n-1}, z_{n-2})) \neq 1$ ehk $(z_{n-1}, z_{n-2}) \neq 1$, mis on induktsiooni eeldusega vastuolus. Seega $(d, az_{n-2}) = 1$ ehk $d \nmid az_{n-2}$ ehk $(z_n, z_{n-1}) = (b, z_{n-1}) = d = 1$ ehk induktsiooni samm kehtib.

6. Mitmel eri viisil on võimalik maksta 8 naela, 8 šillingit ja 6 penni poolekrooniste ja kolmandikginiste müntidega? (1 gini - 21šillingit, 1 nale - 20 šillingit, 1 kroon = 5 šillingit, 1 šilling = 12 penni)

Vaja on leida võrrandi

$$8 \text{ naela} + 8 \text{ šillingit} + 6 \text{ penni} = x \cdot \frac{1}{2} \text{ krooni} + y \cdot \frac{1}{3} \text{ gini}$$

positiivsete lahendite kogus. Šillingitesse ümber kirjutades on see:

$$160 + 8 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x + 7y$$

ehk

$$333 = 5x + 14y.$$

$(5, 14) = 1$ ja peale vaadates on näha, et võrrandi $1 = 5x + 14y$ üks lahend on $x = 3$ ja $y = -1$, seega algse võrrandi üks lahend on $x = 999$ ja $y = -333$. Võrrandi kõik lahendid on seega $x = 999 - \frac{14}{(5, 14)}t = 999 - 14t$ ja $y = -333 + \frac{5}{(5, 14)}t = -333 + 5t$ erinevate $t \in \mathbb{Z}$ puhul. Et nii x kui ka y oleks mittenegatiivsed (kuna negatiivse koguse rahaga ei saa maksta) peavad kehtima võrratused $999 - 14t \geq 0$ ja $-333 + 5t \geq 0$ ehk $t \leq 71 + \frac{5}{14}$ ja $t \geq 66 + \frac{3}{5}$. Sellesse vahemikku sobib 5 t väärtust ehk etteantud tingimustel leidub 5 erinevat viisi maksmiseks.