Kodutöö nr. 2

5. variant

Joosep Näks

1. Põhjendada, miks funktsioon f on punktis A diferentseeruv, ning leida tema (esimest järku) täisdiferentsiaal punktis A, kui

(a) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x},\ A = (1,1);$

(b) $f(x,y,z) = \ln(x + z\ln(yz)),\ A = (2,1,1).$

Lahendus:

(a) Leian osatuletised:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\arctan\frac{y}{x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2}\\ &= \frac{-y}{x^2+y^2}\\ \frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{y}{x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}\\ &= \frac{x}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Kontrollin nende pidevust:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{-y}{x^2+y^2} &= -\frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial x}f(1,1)\\ \lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x}{x^2+y^2} &= \frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial y}f(1,1)\end{aligned}$$

Seega mõlemad osatuletised leiduvad ja on punktis $(1,1)$ pidevad ehk f on punktis $(1,1)$ diferentseeruv. Funktsiooni f täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned}df(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}f(1,1)dx + \frac{\partial}{\partial y}f(1,1)dy\\ &= -\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}(dy - dx)\end{aligned}$$

(b) Leian osatuletised:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\ln(x+z\ln(yz)) &= \frac{1}{x+z\ln(yz)}\\
\frac{\partial}{\partial y}\ln(x+z\ln(yz)) &= \frac{1}{x+z\ln(yz)}\frac{z^2}{yz}\\
&= \frac{z}{y(x+z\ln(yz))}\\
\frac{\partial}{\partial z}\ln(x+z\ln(yz)) &= \frac{1}{x+z\ln(yz)}\left(\ln(yz)+\frac{z}{yz}\right)\\
&= \frac{1}{x+z\ln(yz)}\left(\ln(yz)+\frac{1}{y}\right)
\end{aligned}$$

Kontrollin nende pidevust:

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,1)}\frac{1}{x+z\ln(yz)} = \frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial x}f(2,1,1)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,1)}\frac{z}{y(x+z\ln(yz))} = \frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial y}f(2,1,1)$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,1)}\frac{1}{x+z\ln(yz)}\left(\ln(yz)+\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} = \frac{\partial}{\partial z}f(2,1,1)$$

Seega kõik osatuletised leiduvad ja on punktis $(2,1,1)$ pidevad ehk f on punktis $(2,1,1)$ diferentseeruv. Funktsiooni f täisdiferentsiaal on

$$\begin{aligned}
df(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}f(2,1,1)dx + \frac{\partial}{\partial y}f(2,1,1)dy + \frac{\partial}{\partial z}f(2,1,1)\\
&= \frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}dy + \frac{1}{2}dz = \frac{1}{2}(dy+dx+dz).
\end{aligned}$$

2. Kontrollida, kas funktsioon

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^2+y^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{kui } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

on punktis $(0,0)$

a) diferentseeruv,

b) kaks korda diferentseeruv.

Diferentseeruvuse puhul esitada selle funktsiooni graafiku puutujatasandi võrrand punktis $(0,0,0)$. Joonistada arvuti abil selle funktsiooni $z = f(x,y)$ graafik punkti $(0,0,0)$ ümbruses. Esitada ka graafikut moodustav kood.

Lahendus:
Kontrollin funktsiooni f pidevust punktis $(0,0)$, teisendan selleks funktsiooni polaarkoordinaatidesse:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^5 \cos\varphi \sin^4\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \\ &= \lim_{r\to 0} r^3 \cos\varphi \sin^4\varphi \end{aligned}$$

Kuna cos ja sin funktsioonid on tõkestatud, on tulemus hääbuva ja tõkestatud väärtuse korrutis ehk piirväärtus on 0, mis on võrdne $f(0,0)$ väärtusega, ehk funktsioon f on punktis $(0,0)$ pidev.
Leian osatuletised:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\frac{xy^4}{x^2+y^2} &= \frac{y^4(x^2+y^2) - xy^4 2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{-y^4x^2+y^6}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{xy^4}{x^2+y^2} &= \frac{4xy^3(x^2+y^2) - xy^4 2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{4y^3x^3+2y^5x}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Kontrollin nende pidevust, teisendan selleks funktsioonid polaarkoordinaatidesse:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^4x^2+y^6}{(x^2+y^2)^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^6(-\sin^4\varphi\cos^2\varphi+\sin^6\varphi)}{r^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} r^2(-\sin^4\varphi\cos^2\varphi+\sin^6\varphi) \\
&= 0 \\
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y^3x^3+2y^5x}{(x^2+y^2)^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^6(4\sin^3\varphi\cos^3\varphi+2\sin^5\varphi\cos\varphi)}{r^4(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} r^2(4\sin^3\varphi\cos^3\varphi+7\sin^5\varphi\cos\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(Piirväärtuste tulemused on 0 kuna mõlemal osatuletisel oli viimane piirväärtus hääbuva ja tõkestatud väärtuse korrutis)
Mõlemad piirväärtused leiduvad seega on mõlemad osatuletised pidevad.
Kuna mõlemad piirväärtused on pidevad, on f diferentseeruv.

Leian osatuletiste osatuletised:

$$
\begin{aligned}
f''_{x,x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{-y^4x^2+y^6}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{-2y^4x(x^2+y^2)^2-(-y^4x^2+y^6)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2y^4x(x^2+y^2)-(-y^4x^2+y^6)4x}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{-2y^4x^3-2y^6x+4y^4x^3-4xy^6}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2y^4x^3-6y^6x}{(x^2+y^2)^3} \\
f''_{y,x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y^4x^2+y^6}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{(-4y^3x^2+6y^5)(x^2+y^2)^2-(-y^4x^2+y^6)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(-4y^3x^2+6y^5)(x^2+y^2)-(-y^4x^2+y^6)4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{-4y^3x^4+6y^5x^2+-4y^5x^2+6y^7+4y^5x^2-4y^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{-4y^3x^4+6y^5x^2+2y^7}{(x^2+y^2)^3} \\
f''_{y,y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{4y^3x^3+2y^5x}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{(12y^2x^3+10y^4x)(x^2+y^2)^2-(4y^3x^3+2y^5x)2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(12y^2x^3+10y^4x)(x^2+y^2)-(4y^3x^3+2y^5x)4y}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{12y^2x^5+10y^4x^3+12y^4x^3+10y^6x-16y^4x^3-8y^6x}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{12y^2x^5+6y^4x^3+2y^6x}{(x^2+y^2)^3} \\
f''_{x,y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{4y^3x^3+2y^5x}{(x^2+y^2)^2} &= \frac{(12y^3x^2+2y^5)(x^2+y^2)^2-(4y^3x^3+2y^5x)2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{12y^3x^4+2y^5x^2+12y^5x^2+2y^7-16y^3x^4-8y^5x^2}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \frac{2y^7-4y^3x^4+6y^5x^2}{(x^2+y^2)^3}
\end{aligned}
$$

Kontrollin nende pidevust (teisendan selleks funktsioonid polaarkoordinaatidesse):

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f''_{x,x} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^4x^3 - 6y^6x}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{r^7(2\sin^4\varphi\cos^3\varphi - 6\sin^6\varphi\cos\varphi)}{r^3} \\
&= \lim_{r\to0} r^4(2\sin^4\varphi\cos^3\varphi - 6\sin^6\varphi\cos\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f''_{y,x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f''_{x,y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4y^3x^4 + 6y^5x^2 + 2y^7}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{r^7(-4\sin^3\varphi\cos^4\varphi + 6\sin^5\varphi\cos^2\varphi + 2\sin^7\varphi)}{r^3} \\
&= \lim_{r\to0} r^4(-4\sin^3\varphi\cos^4\varphi + 6\sin^5\varphi\cos^2\varphi + 2\sin^7\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f''_{y,y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{12y^2x^5 + 6y^4x^3 + 2y^6x}{(x^2+y^2)^3} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{r^7(12\sin^2\varphi\cos^5\varphi + 6\sin^4\varphi\cos^3\varphi + 2\sin^6\varphi\cos\varphi)}{r^3} \\
&= \lim_{r\to0} r^4(12\sin^2\varphi\cos^5\varphi + 6\sin^4\varphi\cos^3\varphi + 2\sin^6\varphi\cos\varphi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

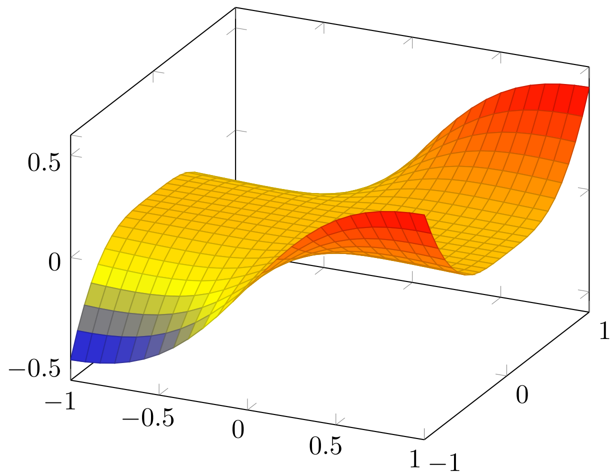
Kuna kõik teist järku osatuletised on pidevad, on f punktis $(0,0)$ kaks korda diferentseeruv.

Leian puutujatasandi. Loengukonspekti teoreemi 1.7 põhjal on puutujatasandi võrrand punktis $(0,0,0)$

$$z - f(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(0,0)(x) + \frac{\partial}{\partial y}(0,0)(y)$$

Kuna osatuletised ja funktsioon ise on punktis $(0,0)$ väärtusega 0, on puutujatasandi võrrand $z = 0$.

$z = f(x,y)$ graafik punkti $(0,0)$ ümbruses:



Graafikut moodustav kood:

```
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[domain=-1:1,y domain=-1:1]
\addplot3[surf] {\y^4*\x/(\x^2+\y^2)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

3. Arvutada kashe muutuja funktsiooni esimest järku Taylori valemi abil avaldise ligikaudne väärtus:

$$(3,01)^2(0,97)^3.$$

Hinnata viga jääkliikme Lagrange'i kuju abil.
Lahendus:
Esimest järku Taylori jada üldkuju on $f(x,y) = f(P_0) + df(P_0) + \alpha_1$.
Kasutan funktsiooni $f(x,y) = x^2y^3$ algpunktiga $P_0 = (3;1)$ ehk $dx = 0,01$ ja $dy = -0,03$.
Leian funktsiooni osatuletised:

$$\frac{\partial}{\partial x}x^2y^3 = 2xy^3$$
$$\frac{\partial}{\partial y}x^2y^3 = 3x^2y^2$$

Ehk f täisdiferentsiaal on $df(x,y) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$.
Leian Taylori valemiga ligikaudse väärtuse:

$$\begin{aligned}(3,01)^2(0,97)^3 = f(3,01;\ 0,97) &= f(3,1) + 2x_0y_0^3dx + 3x_0^2y_0^2dy + \alpha_1 \\ &= 3^2 + 2\cdot 3\cdot 1^3\cdot 0,01 + 3\cdot 3^2\cdot 1^2\cdot(-0,03) + \alpha_1 \\ &= 8,25 + \alpha_1\end{aligned}$$

Seega $(3,01)^2(0,97)^3 \approx 8,25$.
Leian funktsiooni teist järku osatuletised: Jääkliikme hinnang Lagrange'i kuju abil:

$$\alpha_1 = \frac{d^{1+1}f(R)}{(1+1)!} = \frac{d^2f(R)}{2}$$

Kus $R = (x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\ \theta \in (0,1)$.
Leian teist järku osatuletised:

$$f''_{x,x} = \frac{\partial}{\partial x}2xy^3 = 2y^3$$
$$f''_{y,x} = \frac{\partial}{\partial y}2xy^3 = 6xy^2$$
$$f''_{x,y} = \frac{\partial}{\partial x}3x^2y^2 = 6xy^2$$
$$f''_{y,y} = \frac{\partial}{\partial y}3x^2y^2 = 6x^2y$$

Seega on jääkliige:

$$\alpha_1 = \frac{2(y_0+\theta\Delta y)^3d^2x + 12(x_0+\theta\Delta x)(y_0+\theta\Delta y)^2dxdy + 6(x_0+\theta\Delta x)^2(y_0+\theta\Delta y)d^2y}{2}$$

Hindan jääkliikme absoluutväärtust:

$$|\alpha_1| = \left|\frac{2(1-0.03\theta)^3(0.01)^2 + 12(3+0.01\theta)(1-0.03\theta)^2(0.01)(-0.03) + 6(3+0.01\theta)^2(1-0.03\theta)(-0.03)^2}{2}\right|$$

$$\leq \left|(1-0.03\theta)^3(0.01^2)\right| + \left|6(3+0.01\theta)(1-0.03\theta)^2(0.01)(0.03)\right| + \left|3(3+0.01\theta)^2(1-0.03\theta)(0.03)^2\right|$$

$$\leq |0.0001| + |18.06 \cdot 0.0003| + |27.1803 \cdot 0.0009|$$

$$= 0.0001 + 0.005418 + 0.02446227$$

$$= 0.02998027$$

Seega $(3,01)^2(0,97)^3 = 8.25 \pm 0.02998027$.