

Kodutöö nr. 1

Joosep Näks

1. Teisendada arutluskäik sümbolkujule:

Me teame, et Päike eksisteerib ning et Maa peal on elusolendid olemas. Maa peale paistab päikesevalgus ainult siis, kui Päike eksisteerib Maale piisavalt lähedal. Selleks, et Maa peal saaks olla elusolendeid, peab Maa peale paistma päikesevalgust. Järelikult on Päike Maale piisavalt lähedal.

Defineerin predikaadid:

P="Päike eksisteerib"

E="Maa peal on elusolendid"

V="Maa peale paistab päikesevalgus"

L="Päike on maale piisavalt lähedal"

Laused sümbolkujul:

Lause 1: $\mathcal{F}_1 = P, \mathcal{F}_2 = E$

Lause 2: $\mathcal{F}_3 = V \Leftrightarrow (P \& L)$

Lause 3: $\mathcal{F}_4 = E \Rightarrow V$

Lause 4: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4 \models L$

2. Väljendage järgmised laused predikaatarvutuse valemitega, võttes kasutusele sobivad predikaadid. Proovige väljendada lausete struktuuri võimalikult täpselt. Indiviidide piirkonnaks võtke kõikide inimeste hulk.

a) Igal inimesel on sünnipäev.

b) Ei ole ühtegi sellist tudengit, kes saaks öösiti piisavalt kaua magada.

c) ükski advokaat ei valeta, aga mõni advokaat käitub ebaausalt.

a) Defineerin predikaadi:

A(x)="x omab sünnipäeva"

Antud lause predikaatarvutuse valemina:

$\forall x A(x)$

b) Defineerin predikaadid:

A(x)="x on tudeng"

B(x)="x saab öösiti piisavalt kaua magada"

Antud lause predikaatarvutuse valemina:

$\neg \exists x (A(x) \& B(x))$

c) Defineerin predikaadid:

A(x)="x on advokaat"

B(x)="x valetab"

C(x)="x käitub ebaausalt"

Antud lause predikaatarvutuse valemina:

$\neg \exists x (A(x) \& B(x)) \& \exists x (A(x) \& C(x))$

3. Olgu interpretatsiooni kandjaks \mathbb{N} . Väljendage järgmised väited signatuuris $\langle 0, 1; +, \cdot, = \rangle$.

- a) Arv x ei ole suurem kui y .
- b) Arv x jagub täpselt kahe erineva paarisarvuga.
- c) Arv x on vähim algarv, mille ruut on arvu y tegur.

a) $\neg \exists k (k + y + 1 = x)$

b) $\exists k \exists t (\exists d (d \cdot t = x) \ \& \ \exists d (d \cdot k = x) \ \& \ \neg(k = t) \ \& \ \neg \exists r (\exists d (d \cdot r = x) \ \& \ \neg(r = k) \ \& \ \neg(r = t)) \ \& \ \exists d ((1 + 1) \cdot d = k) \ \& \ \exists d ((1 + 1) \cdot d = t))$

c) $\forall k (\exists d (k \cdot d = x) \Rightarrow (k = 1 \vee k = x)) \ \& \ \exists d (d \cdot x \cdot x = y) \ \& \ \neg(x = 1) \ \& \ \neg(x = 0) \ \& \ \neg \exists t (\forall k (\exists d (k \cdot d = t) \Rightarrow (k = 1 \vee k = t)) \ \& \ \exists d (d \cdot t \cdot t = y) \ \& \ \exists d (t + d + 1 = x) \ \& \ \neg(t = 1))$

5. Kontrollige tõesuspüü meetodil, kas antud valem on samaselt tõene, samaselt väär või ei kumbki.

Lahendus:

a) Proovin leida interpretatsiooni, kus valem on väär:

$$1. \quad \forall x \exists y ((\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \Rightarrow (P(x,x) \Rightarrow \neg P(y,y))) = 0$$

|

$$2. \quad \exists y ((\neg P(m,y) \vee P(y,m)) \Rightarrow (P(m,m) \Rightarrow \neg P(y,y))) = 0 \quad /1/$$

|

$$3. \quad (\neg P(m,m) \vee P(m,m)) \Rightarrow (P(m,m) \Rightarrow \neg P(m,m)) = 0 \quad /2/$$

|

$$4. \quad 1 \Rightarrow (P(m,m) \Rightarrow \neg P(m,m)) = 0 \quad /3/$$

|

$$5. \quad P(m,m) \Rightarrow \neg P(m,m) = 0 \quad /4/$$

|

$$6. \quad P(m,m) = 1 \quad /5/$$

|

$$7. \quad \neg P(m,m) = 0 \quad /5/$$

|

$$8. \quad P(m,m) = 1 \quad /7/$$

Ainus haru jäi lahtiseks seega leidub interpretatsioon, nimelt selline, kus iga $P(m,m)$ on tõene, kus valem on väär ehk valem ei ole samaselt tõene.

b) Proovin leida interpretatsiooni, kus valem on tõene:

```

graph TD
    1["1.  $\forall x \exists y ((\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \Rightarrow (P(x,x) \Rightarrow \neg P(y,y))) = 1$ "]
    2["2.  $\forall x \exists y (\neg(\neg P(x,y) \vee P(y,x)) \vee (P(x,x) \Rightarrow \neg P(y,y))) = 1 \quad /1/$ "]
    3["3.  $\forall x \exists y ((P(x,y) \& \neg P(y,x)) \vee (\neg P(x,x) \vee \neg P(y,y))) = 1 \quad /2/$ "]
    4["4.  $\forall x (\exists y (P(x,y) \& \neg P(y,x)) \vee \exists y \neg P(x,x) \vee \exists y \neg P(y,y)) = 1 \quad /3/$ "]
    5["5.  $\forall x \exists y (P(x,y) \& \neg P(y,x)) \vee \forall x \exists y \neg P(x,x) \vee \forall x \exists y \neg P(y,y) = 1 \quad /4/$ "]
    6["6.  $\forall x \exists y (P(x,y) \& \neg P(y,x)) = 1 \quad /5/$ "]
    7["7.  $\forall x \exists y (\neg P(x,x)) = 1 \quad /5/$ "]
    8["8.  $\forall x \exists y (\neg P(y,y)) = 1 \quad /5/$ "]
    9["9.  $\forall x \exists y P(x,y) \& \forall x \exists y \neg P(y,x) = 1 \quad /6/$ "]
    10["10.  $\forall x (\neg P(x,x)) = 1 \quad /7/$ "]
    11["11.  $\exists y (\neg P(y,y)) = 1 \quad /8/$ "]
    12["12.  $\forall x \exists y P(x,y) = 1 \quad /9/$ "]
    13["13.  $P(n,n) = 0 \quad /11/$ "]
    14["14.  $\forall x \exists y \neg P(y,x) = 1 \quad /12/$ "]

    1 --> 2
    1 --> 3
    2 --> 6
    2 --> 7
    3 --> 4
    3 --> 5
    4 --> 12
    4 --> 13
    5 --> 10
    5 --> 11
    6 --> 14
    7 --> 10
    8 --> 11
    9 --> 12
    10 --> 14
    11 --> 13
    12 --> 14
    14 --> X["X"]
  
```

Kõik harud jäid lahtiseks seega leidub interpretatisoon, näiteks selline, kus mingi n korral $P(n,n)=0$, kus valem on tõene ehk valem ei ole samaselt väär. Seega kokkuvõttes ei ole valem ei samaselt tõene ega samaselt väär.