Kodutöö nr. 4

1. variant

Joosep Näks

1. Tõestada, et kui $D \subset \mathbb{R}$ on Jordani mõttes mõõtuv mittetühi hulk, kusjuures $D \subset \overline{D^\circ}$, siis hulga D Jordani mõõt $\mu(D) > 0$.

Lahendus:
On teada, et hulgal D leidub sisepunkte, kuna kui ei leiduks, oleks D° tühihulk ehk ka $\overline{D^\circ}$ oleks tühihulk, ehk D oleks tühihulga osahulk ehk tühihulk, kuid on teada, et D on mittetühi.
Definitsiooni järgi kui punkt x on hulga D sisepunkt, siis leidub tal ümbrus U_ε, mis on D osahulk. Ümbruse mõõt reaalteljel on $\mu(U_\varepsilon) = 2\varepsilon$ ning kuna see on D osahulk, siis $\mu(D) \geq \mu(U_\varepsilon) > 0$.

2. Leida sellise keha ruumala, mis on piiratud silindriga $x^2 + y^2 = 2x$ ja koonusega $z^2 = x^2 + y^2$.

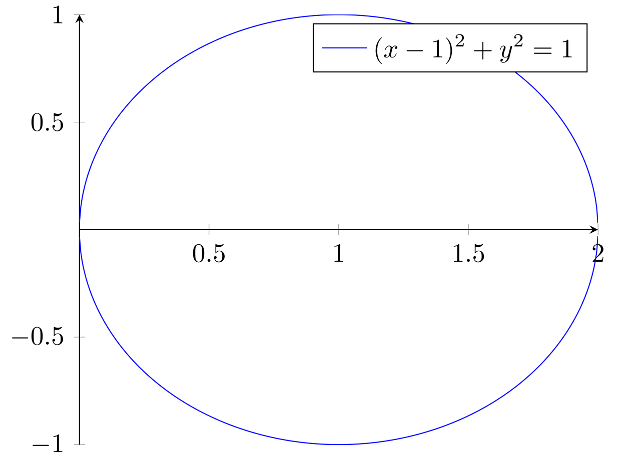
Lahendus:
Teisendades võrrandit $x^2 + y^2 = 2x$ saan $(x-1)^2 + y^2 = 1$ ehk see joon piirab $\mathbb{R}^2$ tasandil kera $B((1,0),1)$.
Avaldan koonuse võrrandist z:

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

Siit saan kaks funktsiooni, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ja $g(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}$. Kuna ruutjuur annab reaalarvuliste väärtuste korral positiivseid väärtuseid, kehtib $f(x,y) \geq g(x,y)$.
Seega on täidetud loengukonspekti teoreemi 6.2 eeldused ning ruumala on võrdne integraaliga

$$\iint\limits_{B((0,1),1)} (f(x,y) - g(x,y))dx\ dy = \iint\limits_{B((0,1),1)} 2\sqrt{x^2+y^2}dx\ dy$$

Integraali leidmiseks teen ülemineku polaarkoordinaatidesse teisednusega $x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi$. Integreeritavasse funktsiooni teisenduse sisse asendades saan $2\sqrt{x^2+y^2} = 2r$ ning kuna teisenduse jakobiaan on r, korrutan funktsiooni sellega läbi.
Loon joonise silindri projektsioonist xy tasandile.



Siit on näha, et ϕ rajad on $-\dfrac{\pi}{2}$ ja $\dfrac{\pi}{2}$. r alumine raja on 0, ülemise raja leidmiseks asendan teisenduse silindri võrrandisse: $x^2+y^2=2x \Leftrightarrow r^2=2r\cos\phi \Leftrightarrow r=2\cos\phi$. Seega saan integraali:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_E 2\sqrt{x^2+y^2}dx\ dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\phi} 2r^2dr\ d\phi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{2r^3}{3})\Big|_0^{2\cos\phi\ \ d\phi} \\
&= \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\phi)^3\ d\phi \\
&= \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\phi)\cos\phi\ d\phi \\
&= \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\phi)\ d(\sin\phi) \\
&= \frac{16}{3}\cdot\left(\sin\phi-\frac{\sin^3\phi}{3}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{16}{3}2\left(1-\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{64}{9}
\end{aligned}
$$

3. Leida kolmekordne integraal $\iiint\limits_E z^2 \; dx \; dy \; dz$, kui hulk E on piiratud pindadega

$$y = 10x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad z = xy \quad \text{ja} \quad z = 0.$$

Lahendus:
z teljel on hulk E piiratud ühelt poolt pinnaga $z = 0$ ning teiselt poolt $z = xy$, seega võtan need sisemise integraali rajadeks. y teljel on hulk piiratud ühelt poolt pinnaga $y = 0$ ja teiselt poolt $y = 10x$ seega võtan need rajadeks. Need pinnad puutuvad kokku x väärtusel $x = 0$, seega on see x teljel alumine raja. Ülemine raja x teljel on $x = 1$.
Seega saan:

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E z^2 \; dx \; dy \; dz &= \int_0^1 \int_0^{10x} \int_0^{xy} z^2 \; dz \; dy \; dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{10x} \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{xy} \; dy \; dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{10x} \frac{(xy)^3}{3} \; dy \; dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3 y^4}{12} \right) \Big|_0^{10x} \; dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^3 (10x)^4}{12} \; dx \\
&= \frac{1000}{12} \int_0^1 x^7 \; dx \\
&= \frac{1000}{12} \left(\frac{x^8}{8} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1000}{12} \cdot \frac{1}{8} \\
&= \frac{125}{12}
\end{aligned}$$

4. Üleminekuga sfäärilistele koordinaatidele leida kolmekordne integraal

$$\iiint_E \frac{z^2\ dx\ dy\ dz}{x^2+y^2+z^2}$$

kui hulk E on piiratud pinnaga $x^2+y^2+z^2=z$

Lahendus:
Teen ülemineku sfäärilistesse koordinaatidesse teisendusega $x = r\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta$.
Leian sfääriliste koordinaatide rajad. Hulka E piirav pind on teisendades $x^2 + y^2 + \left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ehk kera raadiusega $\frac{1}{2}$ ja keskpunktiga $\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$. Seega asub see täielikult $z=0$ tasandist mitte madalamal z telge pidi, ehk $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
r alumine raja on 0 kuna kera puutub $(0,0,0)$ punkti ning ülemise raja leidmiseks asendan teisenduse E piirava pinna võrrandisse ja saan $r = \cos\theta$.
Leian integreeritava funktsiooni. Asendades teisenduse algsesse integreeritavasse funktisooni sisse saan

$$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

ning kuna teisenduse jakobiaan on $r^2\sin\theta$, korrutan funktsiooni sellega läbi. Seega saan integraali:

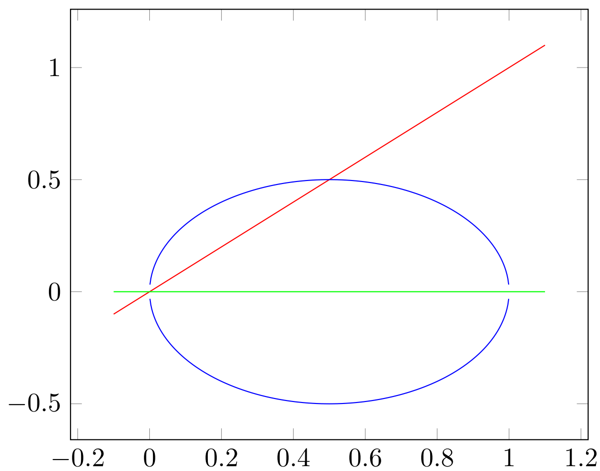
$$\begin{aligned}
\iiint_E \frac{z^2\ dx\ dy\ dz}{x^2+y^2+z^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\cos\theta} r^2\cos^2\theta\sin\theta\ dr\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta\frac{r^3}{3}\Big|_0^{\cos\theta}\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin\theta\frac{\cos^3\theta}{3}\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\frac{\cos^5\theta}{3}\phi\Big|_0^{2\pi}\ d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\frac{\cos^5\theta}{3}2\pi\ d\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\ d\cos\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\frac{\cos^6\theta}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{9}
\end{aligned}$$

5. Kolmekordse integraali abil leida keha E ruumala, kui keha E on piiratud pindadega

$$x^2 + y^2 = x, \quad y = 0, \quad y = x, \quad z = 0 \quad \text{ja} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Kolmekordse integraali arvutamisel minna üle silindrilistele koordinaatidele.

Lahendus:
Keha E ruumala saab leida integraaliga $\iiint\limits_E dx\ dy\ dz$. Esimesed kolm pinda on xy tasandiga risti ja moodustavad sellel järgneva joonise:



Seega on keha E kõversilinder, mille põhja pind on

$$\{(x, y) \mid 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < y < x\} \cup \left\{(x, y) \;\middle|\; \frac{1}{2} < x < 1, 0 < y < \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}\right\}.$$

Minnes üle silindrililistesse koordinaatidesse teisendusega

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = h$$

r ülemiseks piiriks saab koosinusteoreemist $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\cos(\pi - 2\phi)}{2}}$, millest saab lihtsustades $\cos\phi$. Jooniselt on näha, et nurk ϕ liigub pindade $y = 0$ ja $y = x$ vahel ehk $\phi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Seega saan integraali

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_E dx\ dy\ dz &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} \int_0^r r\ dh\ dr\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} (rh)\Big|_0^r\ dr\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos\phi} r^2\ dr\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\cos\phi}\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3\phi}{3}\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2\phi)\cos\phi}{3}\ d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2\phi}{3}\ d(\sin\phi) \\
&= \frac{\sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3}}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}}}{3} \\
&= \frac{5}{18\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$