

Kodutöö nr. 2

Joosep Näks ja Uku Hannes Arismaa

1. Leida täisarvud u ja v nii, et

$$(-8142, -9756) = u \cdot 8142 + v \cdot 9756.$$

9756	1	0
8142	0	1
1614	1	-1
72	-5	6
30	111	-133
12	-227	272
6	565	-677

Seega saame $v = 565$ ning $u = -677$

2. Tõestada, et mistahes $a, b, c \in \mathbb{N}$ korral $(a, b, c)(ab, ac, bc) = (a, b)(a, c)(b, c)$.

$$\begin{aligned}(a, b, c)(ab, ac, bc) &= (a, b, c)(a(b, c), bc) = (a, b, c)(a(b, c), (b, c)[b, c]) \\&= (a, (b, c))(a, [b, c])(b, c) = (a^2, a(b, c), a[b, c], bc)(b, c) \\&= (a^2, bc, (a(b, c), a[b, c]))(b, c) = (a^2, bc, a((b, c), [b, c]))(b, c) \\&= (a^2, bc, a(b, c))(b, c) = (a^2, bc, ab, ac)(b, c) \\&= (a(a, c), b(a, c))(b, c) = (a, b)(a, c)(b, c)\end{aligned}$$

3. Leida, mitu nulli on arvu 2021! lõpus.

See, et arvu lõpus on null, on samaväärne arvu jagumisega kümnega. Selleks, et arv jaguks kümnega, peab see jaguma kahe ja viiega. Paneme tähele, et kahega jagub iga teine ning viiega iga viies arv, seega on kahega jaguvaid arve rohkem. Seega taandub ülesanne sellele, kui mitu korda 2021! jagub viiega. Vähemalt üks kord viiega jaguvaid arve on 2021 täisosa viiega jagamisel, kuna viiega jagub viiest arvust kõige viimane ühest lugedes. Seega on neid arve 404. Iga viies nendest jagub kaks korda viiega ehk 80 arvu. Nii jätkates, saame, et kolm korda jaguvad viiega 16, 4 korda 3 ning 5 ja enam korda 0 arvu antud vahemikus. Seega saame, et kokku jagub 2021! 5 ja seega kümnega $404 + 80 + 16 + 3 = 503$ korda.

4. Olgu $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Defineerime jada z_n rekursiivselt seostega $z_0 = z_1 = 1$, $z_{n+1} = az_n + bz_{n-1}$. Tõestada, et $(z_n, z_{n+1}) = 1$ mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral.

Kasutan induktsiooni. Baasiks leian 3 esimest z väärtust: $z_0 = 1$, $z_1 = 1$, $z_2 = az_1 + bz_0 = a + b$. Kuna $z_1 = 1$, siis $(z_0, z_1) = (z_1, z_2) = 1$ ehk baas kehtib. Sammuks eeldan, et $(z_{n-1}, z_{n-2}) = 1$ ja näitan, et $(z_n, z_{n-1}) = 1$.

$$(z_n, z_{n-1}) = (az_{n-1} + bz_{n-2}, z_{n-1}) = (bz_{n-2}, z_{n-1})$$

Viimane võrdus kehtib, kuna kui võtta $c := (az_{n-1} + bz_{n-2}, z_{n-1})$ ja on SÜT definitsioonist teada, et $c|z_{n-1}$ ja $c|az_{n-1} + bz_{n-2}$, siis $c|az_{n-1} + bz_{n-2} - az_{n-1} = bz_{n-2}$ ning kui mingi $c'|bz_{n-2}$ ja $c'|z_{n-1}$ siis kehtib ka $c'|bz_{n-2} + az_{n-1}$ ehk $c'|c$, seega $c = (bz_{n-2}, z_{n-1})$.

Kuna $(z_{n-1}, z_{n-2}) = 1$, siis $(bz_{n-2}, z_{n-1}) = (b, z_{n-1})$. Eeldan vastuväiteliselt, et $d := (b, z_{n-1}) \neq 1$. On teada, et $z_{n-1} = az_{n-2} + bz_{n-3}$. Kuna $d|z_{n-1}$ ja $d|bz_{n-3}$ siis $d|z_{n-1} - bz_{n-3} = az_{n-2}$. Kuid kui $(d, a) \neq 1$, siis $(d, a) = ((a, b), z_{n-1}) \neq 1$ ehk $(a, b) \neq 1$, mis on vastuolus ülesande püstitusega, ning kui $(d, z_{n-2}) \neq 1$ siis $(b, (z_{n-1}, z_{n-2})) \neq 1$ ehk $(z_{n-1}, z_{n-2}) \neq 1$, mis on induktsiooni eeldusega vastuolus. Seega $(d, az_{n-2}) = 1$ ehk $d \nmid az_{n-2}$ ehk $(z_n, z_{n-1}) = (b, z_{n-1}) = d = 1$ ehk induktsiooni samm kehtib.

5. Leida $(2^{202} + 1, 2^{19} + 1)$ ilma suuremahuliste arvutusteta.

$$\begin{aligned} (2^{202} + 1, 2^{19} + 1) &| 2^{202} + 1 - (2^{19} + 1) \cdot (2^{19} - 1) \cdot (2^{164} + 2^{126} + 2^{88} + 2^{50} + 2^{12}) = 2^{12} + 1 = 4097 = 17 \cdot 241 \\ (2^{202} + 1, 2^{19} + 1) &| -(2^{19} + 1) + (2^{12} + 1) \cdot 2^7 = 2^7 - 1 = 127 \\ (2^{202} + 1, 2^{19} + 1) &| (127, 4097) = 1 \Rightarrow (2^{202} + 1, 2^{19} + 1) = 1 \end{aligned}$$

6. Mitmel eri viisil on võimalik maksta 8 naela, 8 šillingit ja 6 penni poolekrooniste ja kolmandikginiste müntidega? (1 gini - 21šillingit, 1 nale - 20 šillingit, 1 kroon = 5 šillingit, 1 šilling = 12 penni)

Vaja on leida võrrandi

$$8 \text{ naela} + 8 \text{ šillingit} + 6 \text{ penni} = x \cdot \frac{1}{2} \text{ krooni} + y \cdot \frac{1}{3} \text{ gini}$$

positiivsete lahendite kogus. Šillingitesse ümber kirjutades on see:

$$160 + 8 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x + 7y$$

ehk

$$333 = 5x + 14y.$$

$(5, 14) = 1$ ja peale vaadates on näha, et võrrandi $1 = 5x + 14y$ üks lahend on $x = 3$ ja $y = -1$, seega algse võrrandi üks lahend on $x = 999$ ja $y = -333$. Võrrandi kõik lahendid on seega $x = 999 - \frac{14}{(5, 14)}t = 999 - 14t$ ja $y = -333 + \frac{5}{(5, 14)}t = -333 + 5t$ erinevate $t \in \mathbb{Z}$ puhul. Et nii x kui ka y oleks mittenegatiivsed (kuna negatiivse koguse rahaga ei saa maksta) peavad kehtima võrratused $999 - 14t \geq 0$ ja $-333 + 5t \geq 0$ ehk $t \leq 71 + \frac{5}{14}$ ja $t \geq 66 + \frac{3}{5}$. Sellesse vahemikku sobib 5 t väärtust ehk etteantud tingimustel leidub 5 erinevat viisi maksmiseks.

7. Odava nōelaga saab ampullist kätte 12 doosi ja korraliku nōelaga 15 doosi vaktsiini. Leida parema nōelaga vaktsineeritute arv, kui mõlema nōela korral kasutati ära algarv ampulle ja kokku vaktsineeriti 2019 inimest.

Kerge vaevaga saame, et valemi $15x + 12y = 2019$ lahenditeks sobib $x = 673 + 4t, y = -673 - 5t$. Proovides sobivaid t väärtuseid leiame $t = -144$ ning $x = 673 - 4 \cdot 144 = 97, y = -673 + 144 \cdot 5 = 47$, mis sobivad vastuseks.

8. Olgu a ja b samamärgilised täisarvud ning $n \in \mathbb{N}$. Tõestada, et leidub $c \in \mathbb{Z}$ nii, et võrrandil $ax + by = c$ on täpselt n erinevat negatiivset lahendit, st. lahendipaari (x, y) , kus $x < 0$ ja $y < 0$. Kas väide jääb kehtima ka vastasmärgiliste a ja b korral?

Vaatame juhtu, kus a ja b on negatiivsed ja c on positiivne. Positiivsete a ja b korral on lahendus analoogne.

$[a, b]$ saame moodustada sellel kujul kahel viisil: $a \cdot k_a + 0 \cdot b$, $a \cdot 0 + b \cdot k_b$, kus $k_a := \frac{b}{(a, b)}$ ja $k_b := \frac{a}{(a, b)}$

(murruga on tähistatud taandamine, mida saab teha kuna a ja b ei ole ülesande teksti põhjal 0 ja SÜT definitsiooni järgi $(a, b) | a$). Kui oleks mingi kolmas viis $ak_3 + bk_3$, siis saame $a | k_3 - k_a = b \cdot k_3 =: x$, kuna muidu ei moodustaks see $[a, b]$. Seega kehtib, et $a \mid x$ ning $b \mid x$ ning $x < [a, b]$. (Kui $x = [a, b]$, siis on näha, et kolmas viis peab olema sama ühega eelnevatest.) See on vastuolus VÜK definitsiooniga, kuna $[a, b] \mid x$ ei saa enam kehtida.

Seega iga a ja b puhul saame valida $c = (n + 1)[a, b]$, Saades $q - 1$ lahendit kujudel $a \cdot (k_a \cdot (q - 1)) + b \cdot (1 \cdot k_b)$, $a \cdot (k_a \cdot (q - 2)) + b \cdot (2)$, \dots , $a \cdot (1) + b \cdot ((q - 1) \cdot k_b)$.

Kui a ja b võivad olla erimärgilised, saame võtta $a = -1, b = 1$, millisel juhul on iga c korral lõpmata palju lahendeid, näiteks kui $c = 1$ siis on negatiivseteks lahenditeks kõik paarid kujul $x = -2 - t$ ja $y = -1 - t, t \in \mathbb{N}$ ja .