Kontrolltöö

Joosep Näks

2. Lahendus:
Et saada esialgne punktid esialgses reeperis, on vaja pöörata punkte $-30°$ võrra. Saan baasiteisenduse maatriksiks:

$$X = \begin{pmatrix} \cos -30° & -\sin -30° \\ \sin -30° & \cos -30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Seega saan esialgsed punktid:

$$A = XA' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} - \sqrt{3} \\ 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = XB' = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = XC' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

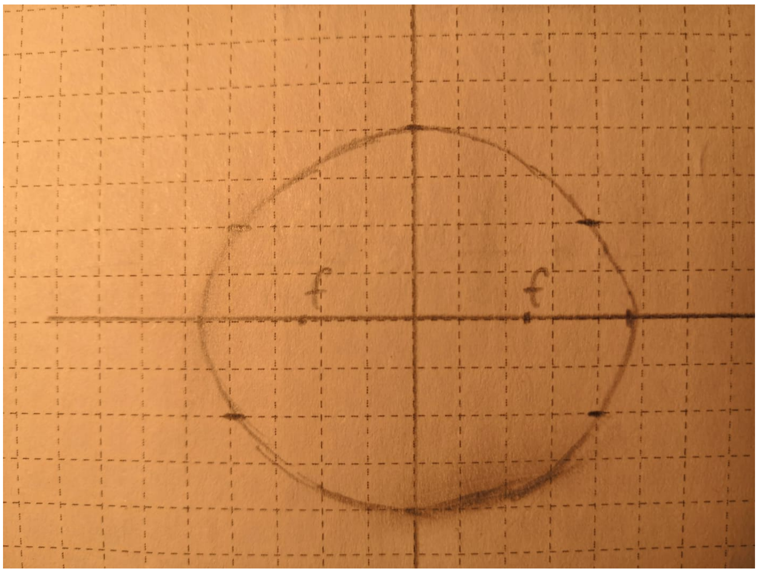
$$D = XD' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Lahendus:
Leian kõigepealt pikema pooltelje. Eksentrilisuse definitsiooni põhjal kehtib $e = \frac{c}{a}$, kus e on eksentrilisus, c fokaalpunkti kaugus keskpunktist ning a pikema pooltelje pikkus. Kuna iga ellipsi punkti kauguste fokaalpunktidest summa on $2a$, peab lühema pooltelje kaugem ots olema kummastki fokaalpunktist a kaugusel (kuna tekib võrdhaarne kolmnurk). Seega saab tekkinud võrdkülgsest kolmnurgast ellipsi keskpunkti, fokaalpunkti ja lühema pooltelje tipu vahel võrrandi $b^2 + c^2 = a^2$. Siia sisse asendades eksentrilisuse võrrandi, saab leida pikema pooltelje: $a = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{4}{\sqrt{1-\frac{1}{2^2}}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$.

Seega on ellipsi kanooniline võrrand

$$\frac{x^2}{\frac{64}{3}} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Skitseeritud ellips:



Fookuspunktid asuvad punktides $(c, 0)$ ja $(-c, 0)$ ehk $(\frac{16}{3}, 0)$ ja $(-\frac{16}{3}, 0)$

4. Lahendus:
Võrrandit teisendades saan võrrandi:

$$\frac{x^2}{\frac{29}{20}} - \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{29}{12}} = 1$$

Siit on näha, et tema keskpunkt on $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, pooltteljed $a = \dfrac{29}{20}$ ja $b = \dfrac{29}{12}$, asümptoodid $y = \sqrt{\dfrac{5}{3}}x + \dfrac{1}{2}$ ja $y = -\sqrt{\dfrac{5}{3}}x + \dfrac{1}{2}$. Fookuste kaugus keskpunktist on $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{58}{15}}$ ehk eksentrilisus on $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$ ning fookused asuvad punktides $F_1\left(\sqrt{\dfrac{58}{15}}, \dfrac{1}{2}\right)$ ja $F_2\left(-\sqrt{\dfrac{58}{15}}, \dfrac{1}{2}\right)$. Fokaalparameetriks saan $q = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{\sqrt{145}}{6}$.

5. Lahendus:
Teen kõigepealt nihke $(-1,-2)$, et saada keskpunktiks $(1,2)$: $A(1,2) \to A'(0,0)$, $B(-2,4) \to B'(-3,2)$. Seejärel pööran baasi $30°$ võrra maatriksiga

$$X = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Saan punktid $A'' = XA' = (0,0)$, $B'' = XB' = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)$. Teen vahetuse polaarkoordinaatidesse: $r_A = \sqrt{0^2+0^2} = 0$, $\theta_A = \arctan\left(\frac{0}{0}\right) = 0$, $r_B = \sqrt{\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{11 + 2\sqrt{3}}$, $\theta_B = \arctan\left(\frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}{\sqrt{3} - \frac{1}{2}}\right)$.