Tärnülesanne nr. 59

Joosep Näks

Olgu p ja q kompleksarvud, kusjuures $q \neq 0$. Tõestage, et kui ruutvõrrandi $x^2 + px + q^2 = 0$ lahendite moodulid on võrdsed, siis $\frac{p}{q}$ on reaalarv.

Lahendus:

Olgu ruutvõrrandi lahendid x_1 ja x_2, seega peab kehtima $x - x_1 = 0$ ja $x - x_2 = 0$ ehk ka $(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 0$. Sellest järeldub, et algses võrrandis $p = -x_1 - x_2$ ja $q^2 = x_1x_2$.

Esitan lahendid eksponentkujul kompleksarvudena: $x_1 = me^{ia}$, $x_2 = me^{ib}$ (ülesande tekstis on antud, et moodulid on võrdsed).

Vaja on näidata, et $\frac{p}{q}$ on reaalarv, see on aga sama, mis $\frac{-x_1 - x_2}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{-me^{ia} - me^{ib}}{\sqrt{me^{ia}me^{ib}}} = \frac{-m(e^{ia} + e^{ib})}{me^{i\frac{a+b}{2}}} = -\frac{e^{ia}}{e^{i\frac{a+b}{2}}} - \frac{e^{ib}}{e^{i\frac{a+b}{2}}} = -e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{i\frac{b-a}{2}} = -e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}}$.

Viin saadud summa trigonomeetrilisele kujule:

$$\begin{aligned}
-e^{i\frac{a-b}{2}} - e^{-i\frac{a-b}{2}} &= -\left(\cos\frac{a-b}{2} + i\sin\frac{a-b}{2} + \cos-\frac{a-b}{2} + i\sin-\frac{a-b}{2}\right) \\
&= -\left(\cos\frac{a-b}{2} + i\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a-b}{2} - i\sin\frac{a-b}{2}\right) \\
&= -2\cos\frac{a-b}{2}
\end{aligned}$$

Ning kuna a ja b olid võrrandi lahendite argumendid, on need reaalarvud ehk ka $\frac{p}{q} = -2\cos\frac{a-b}{2}$ on reaalarv.