Kodutöö nr. 2

7. variant

Joosep Näks

1. Tõestada, et kui z ja w on kompleksarvud ja n on paaritu naturaalarv, siis

$$\sqrt[n]{-z^n w} = -z \sqrt[n]{w}$$

Lahendus:
Kirjutan võrrandi mõlemad pooled kompleksarvu juure definitsiooni järgi hulkadena lahti:

$$\sqrt[n]{-z^n w} = \{q \mid q, z, w \in \mathbb{C}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} : \; q^n = -z^n w\}$$
$$-z \sqrt[n]{w} = \{-zq \mid q, z, w \in \mathbb{C}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} : \; q^n = w\}$$

Kui parema poole hulga definitsiooni võrduses mõlemad pooled $(-z)^n$-ga läbi korrutada (kuna n on paaritu naturaalarv, kehtib $(-z)^n = -z^n$), saab

$$-z \sqrt[n]{w} = \{-zq \mid q, z, w \in \mathbb{C}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} : \; (-zq)^n = -z^n w\}$$

Teen asenduse $p = -zq$:

$$-z \sqrt[n]{w} = \{p \mid p, z, w \in \mathbb{C}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N} : \; p^n = -z^n w\}$$

Ning see on sama hulk nagu algse võrrandi vasaku poole hulk, seega kehtib $\sqrt[n]{-z^n w} = -z \sqrt[n]{w}$.

2. Tõestada, et hulk

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

on rühma $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ alamrühm.
Lahendus:
Et hulk A oleks alamrühm, peavad kehtima tingimused

$$\forall x, y \in A \quad x \cdot y \in A \tag{1}$$
$$\forall x \in A\ \exists y \in A:\ x + y = y + x = 1 \tag{2}$$

(kuna 1 on kompleksarvude ühikelement). Suvalist elementi hulgas A saab esitada kui $e^{ia}, a \in \mathbb{R}$, kuna suvalist kompleksarvu saab esitada kui re^{ia}, kus r on tema moodul, kuid hulgas A on kõigi elementide moodul 1. Näitan tingimuse (1) kehtivust:

$$\forall e^{ia}, e^{ib} \in A \quad e^{ia} \cdot e^{ib} = e^{i(a+b)}$$

Ning kuna $a + b \in \mathbb{R}$, on $e^{i(a+b)}$ hulga A liige.
Tingimuse 2 korral saab iga e^{ia} jaoks valida pöördelemendi $e^{i(-a)}$. $-a \in \mathbb{R}$, seega see element on hulgas A ja kehtib

$$e^{ia} \cdot e^{i(-a)} = e^{i(-a)} \cdot e^{ia} = e^{i(a-a)} = e^0 = 1$$

Seega on A rühma $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ alamrühm.