Kontrolltöö nr. 3

Joosep Näks

1. Lahendus:
Kontrollin liitmise säilivust:

$$\varphi(f+g)(x) = x \cdot (f+g)'(x) = xf'(x) + xg'(x) = \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x)$$

Kontrollin skalaariga korrutamise säilivust:

$$\varphi(kf)(x) = x \cdot (kf)'(x) = kxf'(x) = k\varphi(f)(x)$$

Kuna teisendus säilitab liitmise ja skalaariga korrutamise, on tegu lineaarteisendusega.

(a) Leian baasi teisendused:

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) = \varphi(1) = 0X = 0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 0 \\
\varphi(e_2) = \varphi(3X-1) = 3X = 0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + 3 \cdot X + 0 \\
\varphi(e_3) = \varphi((3X-1)^2) = 18X^2 - 6X = 0 \cdot X^3 + 18 \cdot X^2 - 6 \cdot X + 0 \\
\varphi(e_3) = \varphi((3X-1)^3) = 81X^3 - 54X^2 + 9X = 81 \cdot X^3 - 54 \cdot X^2 + 9 \cdot X + 0
\end{aligned}$$

Seega on teisenduse maatriks järgnev:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 18 & -6 & 0 \\ 81 & -54 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Teisenduse tuumaks on polünoomid $a \in R_3[X]$, mille puhul $\varphi(a) = 0$. Juhul, kui $x = 0$, võrdus kehtib, kuna $\varphi(f)(x) = xf'(x) = 0$. Muudel juhtudel saab pooled $x$ga läbi jagada ning saame tingimuse $f'(x) = 0$, see kehtib parajasti siis, kui a konstantfunktsioon. Seega $Ker\ \varphi = R_0[X]$.
Teisenduse kujutiseks on $Im\ \varphi = \left\{a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X \mid a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$ kuna nagu teisenduse maatriksist on näha, saab sobiva kordajaga $\varphi(e_4)$ kõik X^3 kordajad kätte, $\varphi(e_3)$ kordajatega kõik X^2 kordajad kätte ning $\varphi(e_2)$ kõik X kordajad kätte, kuid vabaliige on alati 0.

2. Lahendus:
Omaväärtuste leidmiseks leian kõigepealt karakteristliku polünoomi:

$$
\begin{aligned}
a =& \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\
=&(1-\lambda)^2((-1-\lambda)^2-1) \\
=&(1-\lambda)^2((1+2\lambda+\lambda^2-1) \\
=&\lambda(1-\lambda)^2(2+\lambda)
\end{aligned}
$$

Selle juured on 0, 1, -2, mis on ka teisenduse omaväärtused, millest 1 on kahekordne ning teised on ühekordsed.

3. Lahendus:
Kontrollin ega üleliigseid moodustajaid pole:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seega saab a_3 välja jätta. Ortogonaliseerin L baasi. Ortogoneerimiseks võtan projektsiooni esimeseks vektoriks $b_1 = a_1 = (4, -3, 2, -1)$. Ortogoneeritud süsteemi vektorid peavad kuuluma algse süsteemi lineaarkattesse, seega peab kehtima $a_1 + k \cdot a_2 = b_2$. Samuti peab olema süsteem ortogonaalne, millest saab tingimuse $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$. Need kokku pannes saab kordaja leida järgnevalt

$$k = -\frac{\langle a_1, b_1 \rangle}{\langle a_1, a_2 \rangle} = -\frac{30}{19}$$

Seega $b_2 = (1, -2, 3, -4) - \frac{30}{19}(4, -3, 2, -1) = \frac{1}{19}(-101, 52, -3, -46) \sim (-101, 52, -3, -46)$.
Vektori u projektsioon on

$$\begin{aligned} c =& \langle u, \frac{b_1}{|b_1|} \rangle \frac{b_1}{|b_1|} + \langle u, \frac{b_2}{|b_2|} \rangle \frac{b_2}{|b_2|} \\ =& \langle (2, 1, -5, 4), \frac{(1, -2, 3, -4)}{30} \rangle \frac{(1, -2, 3, -4)}{30} \\ &+ \langle (2, 1, -5, 4), \frac{(-101, 52, -3, -46)}{15030} \rangle \frac{(-101, 52, -3, -46)}{15030} \\ =& -\frac{31}{30}(1, -2, 3, -4) - \frac{9}{15030}(-101, 52, -3, -46) \\ =& -\frac{1}{10}\left(\frac{31}{3}(1, -2, 3, -4) + \frac{1}{167}(-101, 52, -3, -46)\right) \\ =& -\frac{1}{10}(4874, -10198, 31053, -41278) \end{aligned}$$

Ning tema ortogonaalne täiend on $u - c = \frac{1}{10}(4894, -10188, 31003, -41238)$.