Avaruusjakoon perustuvat tietorakenteet tietokonegrafiikassa

TURUN YLIOPISTO
Informaatioteknologian laitos
tietojenkäsittelytieteet
23. marraskuuta 2016
kandidaatintutkielma
Timo Heinonen

Tiivistelmä

TURUN YLIOPISTO
Informaatioteknologian laitos

HEINONEN, TIMO: Avaruusjakoon perustuvat tietorakenteet tietokonegrafiikassa
kandidaatintutkielma, xx s., yy liites.
Tietojenkäsittelytiede
Marraskuu 2016

Asiasanat: Tietokonegrafiikka, Ray Tracing, BSP-puu, kd-puu.

Sisällys

1 Johdanto

Kolmiulotteisen tietokonegrafiikkan tutkimuksella on ollut merkittävä vaikutus viihdeteollisuuteen, kuten animaatioelokuviin, peleihin ja virtuaalitodellisuuteen, sekä tietokoneavusteiseen suunnitteluun, esimerkiksi arkktehtuurin ja teollisuuden alalla. [Wald, 2004] Tietokonegrafiikka on osin jopa syrjäyttämässä perinteistä valokuvaustyötä: huonekalujätti Ikea on siirtynyt käyttämään myyntikuvastoissaan valtaosin tietokoneella generoituja kuvia valokuvien sijaan [CGSociety, 2014]. Tietokonegrafiikan sovelluskohteet lisääntyvät jatkuvasti. Eräs aktiivinen tutkimuskohde on esimerkiksi tietokonegrafiikan tekniikoiden soveltaminen konenäköön. [Hughes et al., 2013.]

Grafiikan piirtämistä kolmiulotteisista malleista kaksiulotteisiksi kuviksi kutsutaan hahmontamiseksi (engl. *rendering*). Hahmontamisen lähtökohtana on kuvattava maisema (engl. *scene*), joka sisältää objekteja ja valonlähteitä. Objektit ja valonlähteet on voitava mallintaa matemaattisesti, jotta niille voidaan määrittää sijainti ja suuntaus ja jotta niiden välisiä etäisyyksiä ja suhteita voidaan laskea. Hahmontaminen tapahtuu aina jostakin kuvakulmasta, ja tätä varten määritellään virtuaalinen kamera, jolla on oma sijaintinsa ja suuntauksensa maisemassa. Tämän jälkeen on selvitettävä, mitkä objektit kamera näkee, miten objekteihin osuvat valonsäteet vaikuttavat niiden väriin ja kuvan varjostukseen. Lopuksi lasketaan mitkä värit projisoidaan kuvatason mihinkin pikseliin. [Janke, 2015.]

1960-luvulla tietokonegrafiikkaa käytettiin lähinnä teollisuuden komponenttisuunnittelussa ja arkkitehtuurissa. Tietokoneella osattiin piirtää objektien ääriviivoja (engl. *wireframe*), mutta varjostustekniikoita ei tunnettu. IBM:n tutkija Arthur Appel esitteli algoritmin, joka mallinsi valonsäteitä laskemalla suoran yhtälöitä kuvasta maisemaan ja siitä valonlähteisiin. Tämän tekniikan avulla voitiin piirtää yksinkertaisia varjostuksia. [Appel, 1968.]. Myöhemmin tästä säteenseurannaksi nimetystä tekniikasta tuli erittäin suosittu.

Jo Appel totesi säteenseurannan olevan erittäin laskennallisesti raskasta

[Appel, 1968]. Vaikka tietokoneiden ja varsinkin grafiikkaprosessoreiden laskentateho kasvaa jatkuvasti, ei grafiikan tuottaminen ole vieläkään halpaa tai nopeaa. Kuvista halutaan jatkuvasti realistisempia, ja yksityiskohtaisemmat kuvattavat mallit ja monimutkaiset valaisutekniikat vaativat erittäin paljon laskentatehoa. Esimerkiksi elokuvastudio Pixarin Monsterit-yliopisto -animaatioelokuvan piirtäminen vaati yli sata miljoonaa prosessorituntia [VentureBeat, 2013]. Tämän takia tutkimuksen kohteena on ollut jo pitkään entistä nopeampien hahmontamistekniikoiden kehittäminen.

1980-luvulla kehitettiin menetelmiä, joilla voitiin nopeuttaa hahmontamista vähentämällä valonsäteiden ja maiseman osumatarkasteluiden määrää. Steven Rubin ja Turner Whitted esittelivät tekniikan, jossa maisema ositetaan esiprosessointivaiheessa manuaalisesti hierarkisiin laatikoihin. Säteiden ja laatikoiden osumia tarkastelemalla voitiin vähentää operaatioiden kokonaismäärää. [Rubin ja Whitted, 1980.] Henry Fuchs et al. kehittivät toisen metodin, johon kuului myös esiprosessointivaihe, tällä kertaa tietokoneen suorittamana. Maiseman objektit oli jaettu pienempiin monikulmioihin, joista valittiin binääripuun juureksi mahdollisimman keskellä maisemaa oleva.

Tässä tutkielmassa esitellään avaruuden jakamiseen perustuvia tietorakenteita, joilla kolmiulotteisten kuvien hahmontamista voidaan nopeuttaa. Luvussa 2 määritellään joitakin grafiikan peruskäsitteitä sekä esitetään algoritmi säteenseurannalle. Luvussa 3 tutkitaan binääristä avaruusjakoa, kd-puuta ja rajaavien tilojen hierarkiaa sekä niiden rakentamiseen ja läpikäyntiin liittyviä algoritmeja. Luvussa 4 vertaillaan edellä mainittuja tietorakenteita ja niiden soveltuvuutta säteenseuranta-algoritmin optimoimiseen.

2 Kolmiulotteisen tietokonegrafiikan peruskäsitteitä

2.1 Määritelmiä

Kolmiulotteisten kuvien hahmontamisen kohteena ovat *objektit*, jotka mallintavat jotakin esinettä tai muotoa avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Objektit voidaan esittää tietokoneen muistissa taulukkona pisteitä $P = (x, y, z)\ \epsilon\mathbb{R}^3$: esimerkiksi kolmiota voidaan kuvata kolmella pisteellä ja palloa kahdella pisteellä, jotka esittävät sen keskipistettä ja yhtä pistettä sen pinnalla. [Angel ja Shreiner, 2014.]

Objektit jaetaan lähes kaikissa ei-triviaaleissa tapauksissa monikulmioihin (engl. *polygoneihin*). Monikulmio $\gamma = \diamond P_1P_2...P_n,\ n > 2$, on samassa tasossa olevien kärkien $P_1, ..., P_n$ muodostaman murtoviivan rajaama alue, jonka kärkien muodostamat janat P_iP_{i+1} eivät leikkaa toisiaan muualla kuin kärjissä [Harju, 2015]. Useimmiten grafiikkasovelluksissa ja -rajapinnoissa valitaan monikulmioiden kärkien lukumääräksi kolmi, sillä kolmioiden kärjet muodostavat aina tason, ja grafiikkaprosessorit osaavat operoida kolmioilla erittäin nopeasti [Angel ja Shreiner, 2014].

Objektien sisäpuoli halutaan yleensä jättää huomioimatta, joten monikulmioille on määriteltävä, kummalla puolella on niiden etupuoli. Kolmiot ovat tässäkin suhteessa hyvä valinta monikulmioiden muodoksi, sillä kolmiolle $\triangle P_1P_2P_3$ voidaan helposti laskea etupuolen määrittävä normaali n ristitulolla $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_2)$. Huomioitavaa on, että normaalin suunta riippuu siitä, missä järjestyksessä kärjet P_1, P_2 ja P_3 on määritelty. [Hughes et al., 2013.]

Jotta voitaisiin tarkastella objektien, valonlähteiden, ja kuvakulman eli *kameran* välisiä suhteita ja suuntauksia avaruudessa, valitaan kolme koordinaatistoa, jotka on määritelty kolmella toisiinsa nähden kohtisuoralla kantavektorilla $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Jokaisella objektilla on *lokaalikoordinaatisto*, joka sisältää objektin geometrian. Useimmiten origo sijoitetaan objektin keskipisteeseen.

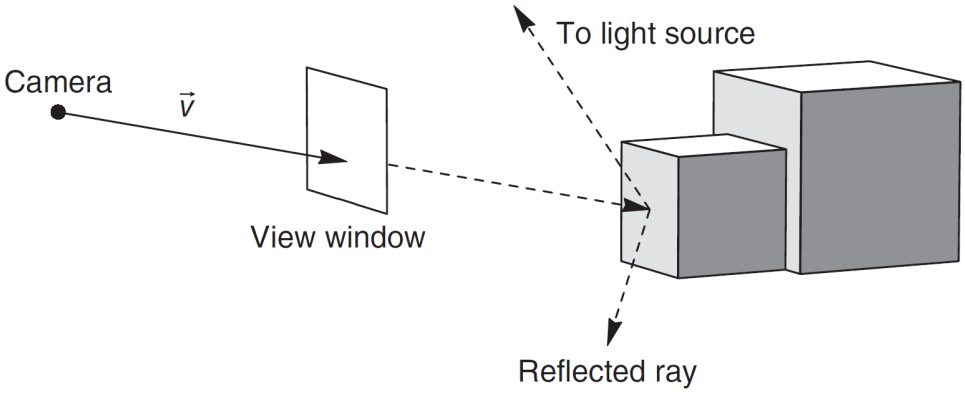
Maailmakoordinaatisto kuvaa koko avaruutta ja sisältää tietoa siitä, mihin objektien lokaalikoordinaatistojen origot on sijoitettu. Lopuksi tämä maisema kuvataan virtuaalisella kameralla, jolla on oma *kamerakoordinaatistonsa.* Koordinaatistosta toiseen siirtyminen, koordinaatistojen skaalaus ja rotaatio voidaan toteuttaa lineaarikuvauksilla. [Janke, 2015.]

2.2 Säteenseuranta

Säteenseuranta (engl. *Ray Tracing*) on hahmontamistekniikka, jolla voidaan piirtää erittäin fotorealistisia kuvia.Säteenseuranta pyrkii mallintamaan valonsäteitä, jotka saavat alkunsa valonlähteistä, kulkevat avaruudessa ja osuvat objekteihin, jolloin ne valaisevat niitä, kimpoavat niistä toisiin objekteihin ja muodostavat varjoja. Jotkut valonsäteet löytävät lopulta tiensä katsojan silmiin eli kameraan. Koska olisi mahdotonta selvittää jokaisen valonsäteen kulkua avaruudessa, säteenseuranta-algoritmi ottaa huomioon vain ne säteet, jotka todella osuvat kameraan. Valonsäteitä seurataan siis käänteisessä järjestyksessä, kamerasta objekteihin, ja niistä valonlähteisiin. Säteenseurantatekniikkaa on havainnollistettu kuvassa 1. [Janke, 2015.]

Säteenseuranta-algoritmi muodostaa sille syötteenä annetusta kolmiulotteisesta maisemasta kameran sijainnin perusteella kaksiulotteisen kuvan. Jokaisen kuvatason pikselin läpi ammutaan säde $\vec{R} = O + t\vec{D}$, missä $t \epsilon \mathbb{R}$, O on kameran sijainti maailmakoordinaatistossa ja normalisoitu vektori $\vec{D}$ kuvaa säteen kulkusuuntaa. Säteellä etsitään törmäyspistettä lähimmän objektin kanssa eli sellaista mahdollisimman pientä arvoa t, että piste $P = O + t\vec{D}$ on jonkin objektin pinnalla. Tällöin osuman saaneen objektin piste P voi näkyä kameraan, mikäli siihen osuu valoa. Osumakohdasta ammutaan uusi, varjostussäteeksi kutsuttu säde. Jos varjostussäde osuu suoraan tai kimmoten muista objekteista valonlähteeseen, lankeaa objektin pinnalle valoa.[1] [Janke, 2015.] Jos monikulmioiden muodoksi on valittu kolmiot, voidaan säteen ja kolmion leikkaus määrittää esimerkiksi nopealla Möllerin-Trumboren algoritmilla [ks. Möller ja Trumbore, 1997]. Säteenseu-

[1] Tässä tutkielmassa jätetään tilan säästämiseksi täysin huomiomatta varjostus, joka on oleellinen osa hahmontamista. Hyvä lähtöpiste realistiseen varjostukseen ja valaistukseen tutustumiseen on esimerkiksi [Kajiya, 1986].



Kuva 1: Säteen ampuminen kuvan läpi maisemaan [Janke, 2015]

rantatekniikan pseudokoodi on esitetty algoritmissa 1.

Algoritmin suoritusnopeutta rajoittaa se, että jokaista sädettä kohti on käytävä läpi kaikki maiseman monikulmiot ja testattava, osuuko säde niihin. Säteiden ja monikulmioiden leikkauksien määrittämiseen joudutaan joissain tapauksissa käyttämään jopa 95 % koko laskenta-ajasta [Whitted, 1980]. Algoritmia saataisiin siis nopeutettua huomattavasti, jos testattavien monikulmioiden määrää jokaista sädettä kohti saataisiin vähennettyä. Yleisesti käytetty tapa leikkaustestien vähentämiseksi on muodostaa maisemasta hierarkinen tietorakenne ennen varsinaista hahmontamista. Tätä tietorakennetta läpikäymällä löydetään nopeasti monikulmio, jonka pinnalla säteen ja objektin leikkauspiste P on. [Rubin ja Whitted, 1980.]

Säteenseurantaa on perinteisesti sen hitauden vuoksi hyödynnetty hahmontamisessa, jossa käytetty laskenta-aika saakin venyä pitkäksi. Peleissä, virtuaalitodellisuudessa ja muissa reaaliaikaista hahmontamista vaativissa sovelluksissa on käytetty pitkälti niink utsuttua kolmioiden rasterointitekniikkaa (engl. *rasterization*). Säteenseurannalla hahmonnetut kuvat ovat kuitenkin huomattavasti realistisempia kuin rasteroinnilla saavutetut, joten reaaliaikainen hahmontaminen Säteenseurantatekniikalla on suosittu tutkimuskohde. [Wald, 2004.]

Input:

`kuvataso`: $x * y$ kokoinen taulukko pikseleitä

`maisema`: joukko valonlähteitä ja monikulmioihin jaettuja objekteja

Output:

kolmiulotteinen maisema projisoituna kuvatasolle

`RAY_TRACING(kuvataso, maisema)`:

```
1  foreach pikseli (x, y) ϵ kuvataso do
2      etaisyys ← ∞
3      foreach monikulmio ϵ maisema do
4          Ammu säde R⃗ = O + tD⃗ kamerasta pikselin läpi maisemaan
5          if säde R⃗ osui monikulmioon pisteessä P and t < etaisyys then
6              etaisyys ← t
7              Valon määrä V ← 0
8              foreach valonlähde L do
9                  Ammu varjostussäde R⃗_s = L − P valonlähdettä kohti
10                 Kasvata valosummaa V
11             end
12             Aseta pikselin (x, y) väri valosumman V mukaisesti
13         else
14             Aseta pikseli (x, y) taustan väriseksi
15         end
16     end
17 end
18 return kuvataso
```

Algoritmi 1: `RAY_TRACING`

3 Avaruusjakopuut

3.1 Binäärinen avaruusjako

3.1.1 BSP-puu

Eräs suosittu avaruusjakoon perustuva tietorakenne on binäärinen avaruusjakopuu, eli *BSP-puu* (engl. *Binary Space Partitioning*). BSP-puu luodaan valitsemalla kolmiulotteisen maiseman monikulmiojoukosta Γ yksi monikulmio γ_k, joka asetetaan puun juureksi. monikulmion γ_k muodostama taso jakaa maiseman, ja siten monikulmiojoukon Γ, kahteen osaan $\Gamma_{k,+}$ ja $\Gamma_{k,-}$. Joukko $\Gamma_{k,+}$ sisältää monikulmion γ_k positiivisella puolella olevat monikulmiot, ja siten ne asetetaan BSP-puuhun juuren oikeaksi lapseksi. Vastaavasti joukko $\Gamma_{k,-}$ sisältää negatiivisella puolella olevat monikulmiot, ja kuuluvat monikulmion γ_k vasemmaksi lapseksi. Tämä jakavan monikulmion valinta ja avaruuden jako niin sanotuiksi *vokseleiksi* (engl. *voxel, volume element*) suoritetaan rekursiivisesti BSP-puun lehdille, kunnes jokaisessa lehdessä on vain yksi tai ennaltamäärätty määrä monikulmioita. [Samet, 2005.] BSP-puun rakentamisen pseudokoodi on esitelty algoritmissa 2.

BSP-puuta ja sen solmuja voidaan esittää grafiikkasovelluksessa seuraavasti:

```
class BSP_Tree
{
  BSP_Node juuri
}

class BSP_Node
{
  Polygon jakaja
  BSP_Node* oikea_lapsi
  BSP_Node* vasen_lapsi
  Polygon monikulmiot[]    //joukko monikulmioita, josta alipuut
                           //muodostetaan
}
```

Input:

`BSP_Node solmu`: juurisolmu, josta puu rakennetaan

`Polygon monikulmiot[]`: monikulmiojoukko, josta alipuut rakennetaan

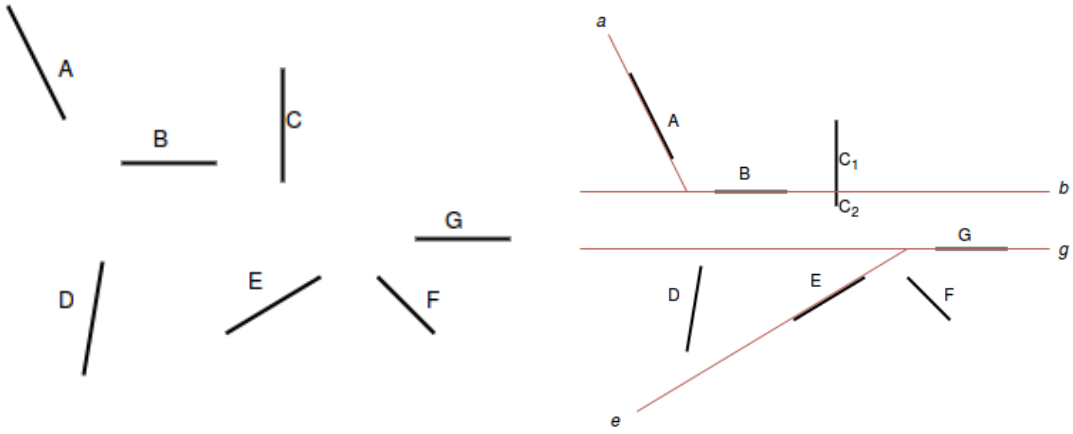
Output:

BSP-puu, jonka juurena on solmu `node`

```
RAKENNA_BSP_PUU(solmu, monikulmiot):
jakaja ← VALITSE_JAKAVA_MONIKULMIO(monikulmiot)
positiivinen_joukko ← ∅
negatiivinen_joukko ← ∅
foreach γ ∈ monikulmiot do
    sijainti ← VERTAA(jakaja, γ)
    if sijainti = jakajan edessä then
        positiivinen_joukko = positiivinen_joukko ∪γ
    else if sijainti = jakajan takana then
        negatiivinen_joukko = negatiivinen_joukko ∪γ
    else if sijainti = leikkaa jakajan määrittämää tasoa then
        JAA_MONIKULMIO(γ, jakaja, γ_i, γ_j)
        positiivinen_joukko = positiivinen_joukko ∪γ_i
        negatiivinen_joukko = negatiivinen_joukko ∪γ_j
    end
end
if positiivinen_joukko ≠ ∅ then
    RAKENNA_BSP_PUU(solmu.oikea_lapsi, positiivinen_joukko)
end
if positiivinen_joukko ≠ ∅ then
    RAKENNA_BSP_PUU(solmu.vasen_lapsi, negatiivinen_joukko)
end
```

Algoritmi 2: `RAKENNA_BSP_PUU`

Kuvissa 2-3 on esitetty esimerkki BSP-puun muodostamisesta. Kuvassa 2a on yksinkertaisuuden vuoksi esitetty monikulmiot $\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ sisältävä maisema kaksiulotteisena. Kuvassa 2b ensimmäiseksi jakomonikulmioksi on valittu G, jonka positiiviselle puolelle jäävät monikulmiot $\Gamma_{g,+} = \{A, B, C\}$, ja negatiiviselle puolelle $\Gamma_{g,-} = \{D, E, F\}$. Jaon g negatiivinen puoli saadaan jaettua loppuun asti ongelmitta valitsemalla jakomonikulmioksi E, mutta jos positiivisella puolella valitaan jakomonikulmioksi B, joudutaan monikulmio C jakamaan osiin C_1 ja C_2. Jakolinjan b negatiiviselle puolelle jää vain yksi monikulmio C_2, joten



(a) Joukko monikulmioita tasossa (b) Taso neljän jaon jälkeen

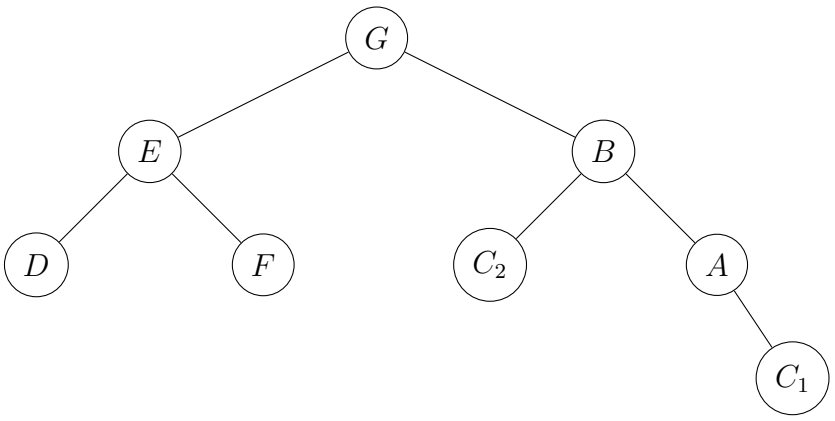
Kuva 2: Tason jakaminen

jaettavaksi jää vain b:n positiivinen puoli. Valitsemalla viimeiseksi jakomonikulmioksi A syntyy kuvan 3 mukainen BSP-puu.

BSP-puun kokoon ja muotoon vaikuttaa suuresti avaruuden jakavan monikulmion valinta. Pahimmassa tapauksessa kaikki monikulmio $\Gamma \backslash \{\gamma_k\}$ jäävät monikulmion γ_k positiiviselle tai negatiiviselle puolelle jokaisella jaolla k. Tällöin puusta muodostuu pikemminkin ketjun muotoinen. Sama monikulmio voi myös kuulua moneen BSP-puun alipuuhun, jos jonkun ylemmällä tasolla avaruuden jakavan monikulmion γ_k muodostama jakolinja leikkaa tätä monikulmiota. [Samet, 2005.] Toinen lähestymistapa jakolinjalla oleviin polygoneihin on halkaista ne kahtia. Tämäkin tapa on epäedullinen, sillä se lisää maisemassa olevien monikulmioiden määrää. [Ranta-Eskola, 2001.]

BSP-puuta rakennettaessa tavoitteena on muodostaa mahdollisimman tasapainoinen binääripuu valitsemalla jokaisella jakokerralla jakajaksi sellainen monikulmio γ_k, jonka positiivisella ja negatiivisella puolella on likimain yhtä paljon polygoneja, eli $|\Gamma_{k,+}| \approx |\Gamma_{k,-}|$. Tällöin n:n monikulmion joukousta muodostetun BSP-puun syvyys olisi $O(\log n)$. Koska puun solmuja syntyy lisää, kun jakolinjan leikkaavat monikulmiot jaetaan kahtia, tai jakolinjalla oleva monikulmio sisällytetään useaan alipuuhun, voidaan puun logaritmista tavoitesyvyyttä pitää vain alarajana. [Hughes et al., 2013.] n monikulmiota sisältävästä maisemasta rakennetun BSP-puun syvyys on siis $\Omega(\log n)$.

BSP-puu voidaan rakentaa ennen hahmontamista esiprosessointivaiheessa. Hah-

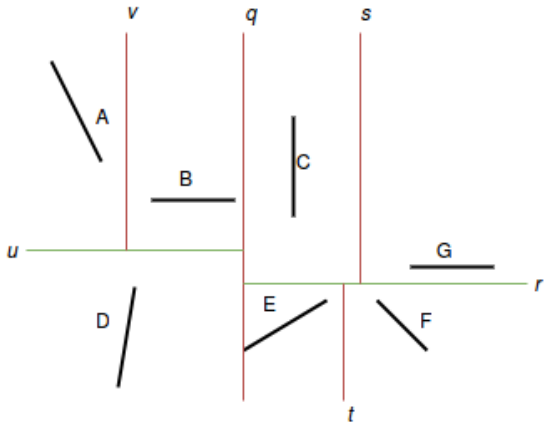


Kuva 3: Tasosta muodostettu BSP-puu

montamisvaiheessa sitä voidaan käyttää vähentämään säde-monikulmio leikkaustestien määrää. Kamerasta ammuttua sädettä verrataan ensin BSP-puun juurena toimivaan monikulmioon. Jos säde leikkaa monikulmion γ_k muodostaman avaruuden jakavan tason, säde voi osua johonkin monikulmioon molemmissa joukoissa $\Gamma_{k,+}$ ja $\Gamma_{k,-}$, eli joudutaan tarkastelemaan molempia alipuita. Jos säde ei leikkaa jakotasoa, siirrytään tarkastelemaan vain toista alipuuta. Säteen $\vec{R} = O + t\vec{D}$ osumista tasoon T voidaan testata laskemalla etäisyys $t = \dfrac{-\vec{n} \cdot (O - Q_0)}{\vec{n} \cdot \vec{D}}$, missä $\vec{n}$ on tason T normaalivektori ja Q_0 on jokin tason T piste. Säde $\vec{R}$ osuu tasoon T jos sijoittamalla t säteen yhtälöön, on piste $Q = O + t\vec{D}$ tasossa T. Tämä pitää paikkansa jos $(Q - Q_0) \cdot \vec{n} = 0$. [Hughes et al., 2013.] Toistamalla säteiden ja avaruuden jakavien tasojen leikkauksia rekursiivisesti, päädytään lopulta BSP-puun juureen ja voidaan testata, osuuko säde polygoneihin. [Ranta-Eskola, 2001.]

3.1.2 kd-puu

BSP-puun erikoistapaus on *kd-puu*, eli k-ulotteinen puu (engl. *k-dimensional tree*). Kd-puussa avaruuden jakavaa tasoa ei valita jakavan monikulmion muodostaman sivun mukaan, vaan jaot tehdään siten, että jakotaso on kohtisuorassa jotakin koordinaattiakselia vasten. Yleisin tapa muodostaa kd-puu kolmiulotteisen maiseman polygoneista on valita jakotaso vuorotellen maailmakoordinaatiston x-, y- ja z-akseleiden vastaiseksi. Kd-puun jokaiseen solmuun tallennetaan jakavan monikulmion sijaan jakava taso. Tällöin monikulmioiden jakaminen solmun lapsiin onnistuu helposti vertaamalla niiden sijaintia jakotasoon. Esimerkiksi jos avaruuden jakava taso valitaan kohtisuoraksi x-akselia vasten, tallennetaan solmun vasempaan lapseen monikulmiot, joiden sijainnin x-koordinaatin arvo on

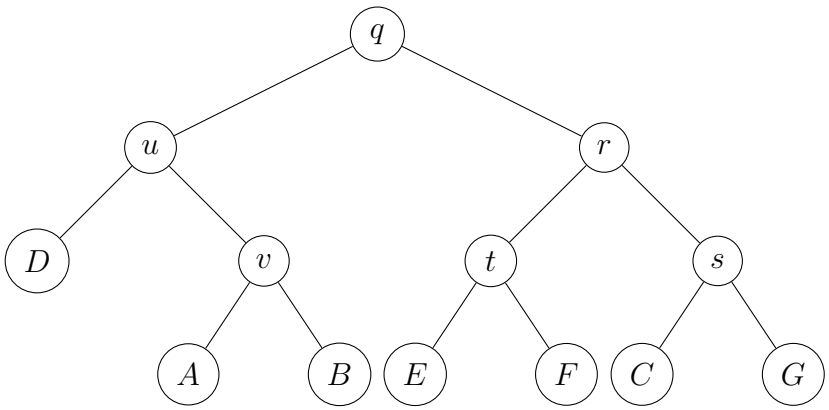


Kuva 4: Kuvan 2a taso jaettuna kuusi kertaa

pienempi kuin jakotason. Oikeaan lapseen taas tallennetaan monikulmiot, jotka ovat jakotason positiivisella puolella x-akselin suhteen. [Samet, 2005.] Avaruutta jaetaan rekursiivisesti osiin kunnes lehtisolmuissa on jokin ennaltamäärätty määrä polygoneja. Kd-puu muodostetaan vastaavalla algoritmilla kuin BSP-puun rakentamista kuvaava algoritmi 2.

Yleisen BSP-puun tapaan myös kd-puuta rakennettaessa avaruuden jakavien tasojen valinta vaikuttaa siihen, kuinka tehokkaasti puuta voidaan hyödyntää hahmontamisessa. Jakotaso voidaan valita aina jakamalla avaruuden osa tasan kahtia, jolloin samalla syvyydellä puussa olevat solmut vastaavat saman kokoista laatikkoa. Tämä tapa ei takaa sitä, että jakotason molemmille puolille jäisi saman verran polygoneja, joten puusta ei tule tasapainoista. Hahmontamisen kannalta parempi tapa on käyttää esiprosessointivaiheessa enemmän laskenta-aikaa ja valita jakotaso siten, että sen molemmille puolillä jää likimain yhtä paljon polygoneja. Sellaiset monikulmiot, jotka leikkaavat avaruuden jakavaa tasoa, täytyy sisällyttää puuhun useaan solmuun tai jakaa ne pienempiin osiin. [Havran, 2001.]

Eräs mahdollinen tapa jakaa taso osiin koordinaattiakselien suuntaisesti on esitetty kuvassa 4, jossa tarkastellaan kuvan 2a tapaan monikulmiot $\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ sisältävää kaksiulotteista tasoa. Ensin taso jaetaan puoliksi x-akselin vastaisella suoralla q. Jaon positiiviselle puolelle jäävät monikulmiot $\Gamma_{q,+} = \{C, G, E, F\}$. Kun jaetaan suoran q positiivinen puoli y akselin vastaisella jaolla r ja edelleen x akselin vastaisilla jakosuorilla s ja t, on monikulmiot C, G, E ja F saatu omiin solmuihinsa. Vastaava jako suoritetaan suoran q negatiivisella puolella oleville polygoneille $\Gamma_{q,-} = \{A, B, C\}$ jakosuorilla



Kuva 5: Tasosta muodostettu kd-puu

u ja v, jolloin tason polygoneista saadaan muodostettua kuvan 5 mukainen kd-puu.

Muodostamalla esiprosessointivaiheessa maiseman polygoneista BSP-puun sijaan kd-puu voidaan nopeuttaa säteiden ja avaruuden osien yhteentörmäystestejä. Koska kd-puussa avaruuden jakavat tasot ovat kohtisuorassa koordinaattiakselia a vasten, $a\,\epsilon\,(x, y, z)$, ja jakosuunta on joka solmussa tiedossa, voidaan jakotaso esittää vain yhdellä arvolla a_p. Tällöin säteen ja jakotason yhteentörmäyksen testaaminen on noin kolme kertaa nopeampaa kuin satunnaisesti suunnatulle tasolle $ax + by + cz + d = 0$. [Havran, 2001.]

Muita BSP-puun erikoistapauksia ovat *quad-* ja *oct-puut*. Quad-puuta muodostettaessa avaruuden osa jaetaan aina neljään yhtä suureen kuutioon kunnes jokin pysähtymisehto saavutetaan. Oct-puun tapauksessa kuutioiden määrä on kahdeksan [Samet, 2005.]. Lukuunottamatta ennaltamäärättyä avaruusjakojen määrää quad- ja oct-puut ovat kuten yllä määritellyt kd-puut.

3.2 Rajaavien tilojen hierarkia

BSP-puuta objektilähtöisempi tapa jakaa kolmiulotteista avaruutta osiin on määrittää jokaiselle objektille *rajaava tila* (engl. *bounding volume*). Objektin O rajaava tila on jokin yksinkertainen kolmiulotteinen muoto V, jolle $O \cap V \equiv O$ [Havran, 2001]. Useimmiten rajaavan tilan muodoksi valitaan pallo tai koordinaattiakseleiden suuntainen laatikko, sillä ne rajaavat objekteja yleensä tarkasti, jättämättä liikaa tyhjää tilaa itsensä ja objektin väliin. [Hughes et al., 2013]

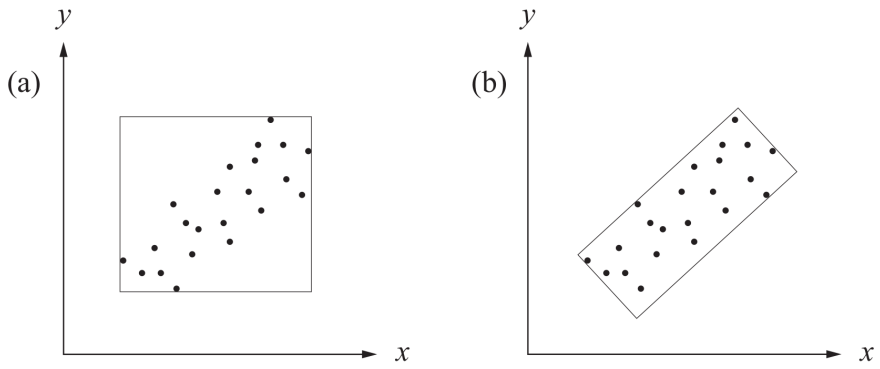
Rajaavien tilojen hierarkia, eli *BVH* (engl. *Bounding Volume Hierarchy*) on puu,

jonka juurena on koko maiseman tilavuus ja solmuissa pienempiä rajaavia tiloja. Puun solmuihin on tallennettu tieto rajaavan tilan muodosta, koosta ja sijainnista, sekä osoittimet lapsisolmuihin. Lehtisolmut ovat pienimpiä rajaavia tiloja, jotka sisältävät yhden objektin tai osan siitä. BVH voidaan muodostaa rakentamalla ensin maisemasta BSP-puu ja sen jälkeen määrittää ympäröiviä tiloja objekteille rekursiivisesti lehtisolmuista ylöspäin. [Hughes et al., 2013] Toinen tapa on käydä esiprosessointivaiheessa läpi kaikkien objektien monikulmioiden kärjet ja ottaa talteen maksimi- ja minimiarvot x_{max}, x_{min}, y_{max}, y_{min}, z_{max} ja z_{min}. Näiden arvojen avulla voidaan muodostaa rajaava tila, jonka sisään kaikki objektin monikulmiot jäävät. [Janke, 2015.]

BVH:n hyödyntäminen hahmontamisessa Säteenseurantatekniikalla on yksinkertaista. Kamerasta ammuttavien säteiden osumia testataan ensin BVH:n juureen, minkä jälkeen siirrytään rekursiivisesti molempiin lapsisolmuihin aina kun säde osuu solmuun. Jos käytössä on koordinaattiakselien suuntaiset laatikot, osuu säde $\vec{R} = O + t\vec{D}$ laatikkoon kun se leikkaa laatikon kaksi sivua. Säteen ja tason osumatestiä on kuvailtu luvussa 3.1. Vertailemalla säteen $\vec{R}$ leikkauspisteitä rajaavan tilan sivujen kanssa saadaan etäisyydelle t välit $[t_{x_0}, t_{x_1}]$, $[t_{y_0}, t_{y_1}]$ ja $[t_{z_0}, t_{z_1}]$, joissa alarajat ovat säteen ensimmäisiä ja ylärajat sen toisia leikkauspisteitä laatikon kanssa. Jos jokin arvo t kuuluu kaikkiin näihin väleihin, lävistää säde $\vec{R}$ laatikon, ja siten siirrytään tarkastelemaan joko laatikon sisällä olevia rajaavia tiloja tai sen sisältämiä polygoneja. [Janke, 2015.]

Kuten BSP- ja kd-puun tapauksissa, myös BVH:n tuoma etu hahmontamisessa riippuu siitä, miten hyvin jako rajaaviin tiloihin onnistuu. Kuvassa 6 havainnollistetaan rajaavan tilan valinnan merkitystä. Kuvassa on pisteistä kaksiulotteisessa tasossa ja kaksi vaihtoehtoa niitä rajaavaksi tilaksi. Koordinaattiakseleiden suuntainen laatikko (a) ei ole tässä tapauksessa optimaalinen, vaan jättää pisteiden ja laatikoiden väliin liikaa tyhjää tilaa. Tällöin monet laatikon lävistävät säteet eivät osu itse pisteisiin. Tiiviimpi laatikko on esitetty vieressä (b).

Säteen $\vec{R} = O + t\vec{D}$ ja pallon S leikkausta voidaan tarkastella määrittämällä ensin vektori $\vec{a} = C - O$, missä C on pallon S keskipiste. Tällöin saadaan suorakulmainen kolmio, jossa $\vec{a}$ on hypotenuusa ja $\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$ on kateetti. Laskemalla Pythagoraan lauseella toisen kateetin pituus $d = \sqrt{\vec{a}^2 - (\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|})^2}$ saadaan selville mikä on pienin



Kuva 6: Kaksi vaihtoehtoa pistejoukon rajaavaksi tilaksi [Lengyel, 2012]

säteen ja pallon keskipisteen välinen etäisyys. Jos $|d| < r$, missä r on pallon S säde, lävistää säde R pallon ja voi osua sen sisältämiin polygoneihin. [Janke, 2015.]

4 Avaruusjakopuiden vertailua

4.1 Tietorakenteiden alustaminen

4.2 Hyödyntäminen säteenseurannassa

5 Yhteenveto

Viitteet

Angel, E. ja Shreiner, D. (2014). *Interactive Computer Graphics with WebGL.* Addison-Wesley Professional, 7th edition.

Appel, A. (1968). Some techniques for shading machine renderings of solids. In *Proceedings of the April 30–May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference*, AFIPS '68 (Spring), sivut 37–45, New York, NY, USA. ACM.

CGSociety (2014). Building 3d with ikea. `http://www.cgsociety.org/index.php/cgsfeatures/cgsfeaturespecial/building_3d_with_ikea`. Luettu: 28.10.2016.

Harju, T. (1989–2015). Geometria, lyhyt kurssi.

Havran, V. (2001). *Heuristic Ray Shooting Algorithms.* väitöskirja, Czech Technical University, Praha, Tšekki.

Hughes, J. F., van Dam, A., McGuire, M., Sklar, D. F., Foley, J. D., Feiner, S. K., ja Akeley, K. (2013). *Computer graphics: principles and practice (3rd ed.).* Addison-Wesley Professional, Boston, MA, USA.

Janke, S. J. (2015). *Mathematical Structures for Computer Graphics.* John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.

Kajiya, J. T. (1986). The rendering equation. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4):143–150.

Lengyel, E. (2012). *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics.* Course Technology PTR.

Möller, T. ja Trumbore, B. (1997). Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *J. Graph. Tools*, 2(1):21–28.

Ranta-Eskola, S. (2001). Binary space partitioning trees and polygon removal in real time 3d rendering. pro gradu -työ, Uppsalan yliopisto, Uppsala, Ruotsi.

Rubin, S. M. ja Whitted, T. (1980). A 3-dimensional representation for fast rendering of complex scenes. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 14(3):110–116.

Samet, H. (2005). *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling).* Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.

VentureBeat (2013). How pixar made monsters university, its latest technological marvel. http://venturebeat.com/2013/04/24/the-making-of-pixars-latest-technological-marvel-monsters-university/view-all/. Luettu 30.10.2016.

Wald, I. (2004). *Realtime Ray Tracing and Interactive Global Illumination*. väitöskirja, Saarlandin yliopisto, Saarbrücken, Saksa.

Whitted, T. (1980). An improved illumination model for shaded display. *Commun. ACM*, 23(6):343–349.