

Avaruusjakoon perustuvat tietorakenteet  
tietokonegrafiikassa

TURUN YLIOPISTO  
Informaatioteknologian laitos  
tietojenkäsittelytieteet  
27. marraskuuta 2016  
kandidaatintutkielma  
Timo Heinonen

# Tiivistelmä

TURUN YLIOPISTO

Informaatioteknologian laitos

HEINONEN, TIMO: Avaruusjakoon perustuvat tietorakenteet tietokone-  
grafikassa

kandidaatintutkielma, xx s., yy liites.

Tietojenkäsittelytiede

Marraskuu 2016

---

Asiasanat: Tietokonegrafiikka, Ray Tracing, BSP-puu, kd-puu.

# Sisällys

<b>1</b>	<b>Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Kolmiulotteisen tietokonegrafikan peruskäsitteitä</b>	<b>4</b>
2.1	Määritelmiä . . . . .	4
2.2	Säteenseuranta . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Avaruusjakopuut</b>	<b>8</b>
3.1	Binäärinen avaruusjako . . . . .	8
3.1.1	BSP-puu . . . . .	8
3.1.2	kd-puu . . . . .	12
3.2	Rajaavien tilojen hierarkia . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Avaruusjakopuiden vertailua</b>	<b>17</b>
4.1	Tietorakenteiden alustaminen . . . . .	17
4.2	Tietorakenteiden hyödyntäminen säteenseurannassa . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Yhteenveto</b>	<b>20</b>
	<b>Viitteet</b>	<b>21</b>

# 1 Johdanto

Kolmiulotteisen tietokonegrafiikan tutkimuksella on ollut merkittävä vaikutus viihdeteollisuuteen, kuten animaatioelokuviin, peleihin ja virtuaalitodellisuuteen, sekä tietokoneavusteiseen suunnitteluun, esimerkiksi arkkitehtuurin ja teollisuuden alalla. [Wald, 2004] Tietokonegrafiikka on osin jopa syrjäyttämässä perinteistä valokuvaustyötä: huonekalujätti Ikea on siirtynyt käyttämään myyntikuvastoissaan valtaosin tietokoneella generoituja kuvia valokuvien sijaan [CGSociety, 2014]. Tietokonegrafiikan sovelluskohteet lisääntyvät jatkuvasti. Eräs aktiivinen tutkimuskohde on esimerkiksi tietokonegrafiikan tekniikoiden soveltaminen konenäköön. [Hughes et al., 2013.]

Grafiikan piirtämistä kolmiulotteisista malleista kaksiulotteisiksi kuviksi kutsutaan hahmontamiseksi (engl. *rendering*). Hahmontamisen lähtökohtana on kuvattava maisema (engl. *scene*), joka sisältää objekteja ja valonlähteitä. Objektit ja valonlähteet on voitava mallintaa matemaattisesti, jotta niille voidaan määrittää sijainti ja suuntaus ja jotta niiden välisiä etäisyyksiä ja suhteita voidaan laskea. Hahmontaminen tapahtuu aina jostakin kuvakulmasta, ja tätä varten määritellään virtuaalinen kamera, jolla on oma sijaintinsa ja suuntauksensa maisemassa. Tämän jälkeen on selvitettävä, mitkä objektit kamera näkee, miten objekteihin osuvat valonsäteet vaikuttavat niiden väriin ja kuvan varjostukseen. Lopuksi lasketaan mitkä värit projisoidaan kuvatason mihinkin pikseliin. [Janke, 2015.]

1960-luvulla tietokonegrafiikkaa käytettiin lähinnä teollisuuden komponenttisuunnittelussa ja arkkitehtuurissa. Tietokoneella osattiin piirtää objektien ääriviivoja (engl. *wireframe*), mutta varjostustekniikoita ei tunnettu. IBM:n tutkija Arthur Appel esitteli algoritmin, joka mallinsi valonsäteitä laske-  
malla suoran yhtälöitä kuvasta maisemaan ja siitä valonlähteisiin. Tämän tekniikan avulla voitiin piirtää yksinkertaisia varjostuksia. [Appel, 1968.]. Myöhemmin tästä säteenseurannaksi nimetystä tekniikasta tuli erittäin suosittu.

Jo Appel totesi säteenseurannan olevan erittäin laskennallisesti raskasta

[Appel, 1968]. Vaikka tietokoneiden ja varsinkin grafiikkaprosessoreiden laskentateho kasvaa jatkuvasti, ei grafiikan tuottaminen ole vielääkään halpaa tai nopeaa. Kuvista halutaan jatkuvasti realistisempia, ja yksityiskohtaisemmat kuvattavat mallit ja monimutkaiset valaisutekniikat vaativat erittäin paljon laskentatehoa. Esimerkiksi elokuvastudio Pixarin Monsterit-yliopisto-animaatioelokuvan piirtäminen vaati yli sata miljoonaa prosessorituntia [VentureBeat, 2013]. Tämän takia tutkimuksen kohteena on ollut jo pitkään entistä nopeampien hahmontamistekniikoiden kehittäminen.

1980-luvulla kehitettiin menetelmiä, joilla voitiin nopeuttaa hahmontamista vähentämällä valonsäteiden ja maiseman osumatarkasteluiden määrää. Steven Rubin ja Turner Whitted esittelivät tekniikan, jossa maisema ositeetaan esiprosessointivaiheessa manuaalisesti hierarkisiin laatikoihin. Säteiden ja laatikoiden osumia tarkastelemalla voitiin vähentää operaatioiden kokonaismäärää. [Rubin and Whitted, 1980.] Henry Fuchs et al. kehittivät toisen metodin, johon kuului myös esiprosessointivaihe, tällä kertaa tietokoneen suorittamana. Maiseman objektit oli jaettu pienempiin monikulmioihin, joista valittiin binääripuun juureksi mahdollisimman keskellä maisemaa oleva.

Tässä tutkielmassa esitellään avaruuden jakamiseen perustuvia tietorakenteita, joilla kolmiulotteisten kuvien hahmontamista voidaan nopeuttaa. Luvussa 2 määritellään joitakin grafiikan peruskäsitteitä sekä esitetään algoritmi säteenseurannalle. Luvussa 3 tutkitaan binääristä avaruusjakoa, kd-puuta ja rajaavien tilojen hierarkiaa sekä niiden rakentamiseen ja läpikäyntiin liittyviä algoritmeja. Luvussa 4 vertaillaan edellä mainittuja tietorakenteita ja niiden soveltuvuutta säteenseuranta-algoritmin optimoimiseen.

## 2 Kolmiulotteisen tietokonegrafiikan peruskäsitteitä

### 2.1 Määritelmiä

Kolmiulotteisten kuvien hahmontamisen kohteena ovat *objektit*, jotka mallintavat jotakin esinettä tai muotoa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ . Objektit voidaan esittää tietokoneen muistissa taulukkona pisteitä  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ : esimerkiksi kolmiota voidaan kuvata kolmella pisteellä ja palloa kahdella pisteellä, jotka esittävät sen keskipistettä ja yhtä pistettä sen pinnalla. [Angel and Shreiner, 2014.]

Objektit jaetaan lähes kaikissa ei-triviaaleissa tapauksissa monikulmioihin (engl. *polygoneihin*). Monikulmio  $\gamma = \diamond P_1 P_2 \dots P_n$ ,  $n > 2$ , on samassa tasossa olevien kärkien  $P_1, \dots, P_n$  muodostaman murtoviivan rajaama alue, jonka kärkien muodostamat janat  $P_i P_{i+1}$  eivät leikkaa toisiaan muualla kuin kärjissä [Harju, 2015]. Useimmiten grafiikkasovelluksissa ja -rajapinnoissa valitaan monikulmioiden kärkien lukumääräksi kolmi, sillä kolmioiden kärjet muodostavat aina tason, ja grafiikkaprosessorit osaavat operoida kolmioilla erittäin nopeasti [Angel and Shreiner, 2014].

Objektien sisäpuoli halutaan yleensä jättää huomioimatta, joten monikulmioille on määriteltävä, kummalla puolella on niiden etupuoli. Kolmiot ovat tässäkin suhteessa hyvä valinta monikulmioiden muodoksi, sillä kolmiolle  $\triangle P_1 P_2 P_3$  voidaan helposti laskea etupuolen määrittävä normaali  $n$  ristitu-  
lolla  $(P_2 - P_1) \times (P_3 - P_1)$ . Huomioitavaa on, että normaalin suunta riippuu siitä, missä järjestyksessä kärjet  $P_1, P_2$  ja  $P_3$  on määritelty. [Hughes et al., 2013.]

Jotta voitaisiin tarkastella objektien, valonlähteiden, ja kuvakulman eli *kameran* välisiä suhteita ja suuntauksia avaruudessa, valitaan kolme koordinaatistoa, jotka on määritelty kolmella toisiinsa nähden kohtisuoralla kantavektorilla  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Jokaisella objektilla on *lokaalikoordinaatisto*, joka sisältää objektin geometrian. Useimmiten origo sijoitetaan objektin keskipisteeseen.

*Maaillmakoordinaatisto* kuvaa koko avaruutta ja sisältää tietoa siitä, mihin objektien lokaalikoordinaatistojen origot on sijoitettu. Lopuksi tämä maisema kuvataan virtuaalisella kameralla, jolla on oma *kamerakoordinaatistonsa*. Koordinaatistosta toiseen siirtyminen, koordinaatistojen skaalaus ja rotaatio voidaan toteuttaa lineaarikuvauksilla. [Janke, 2015.]

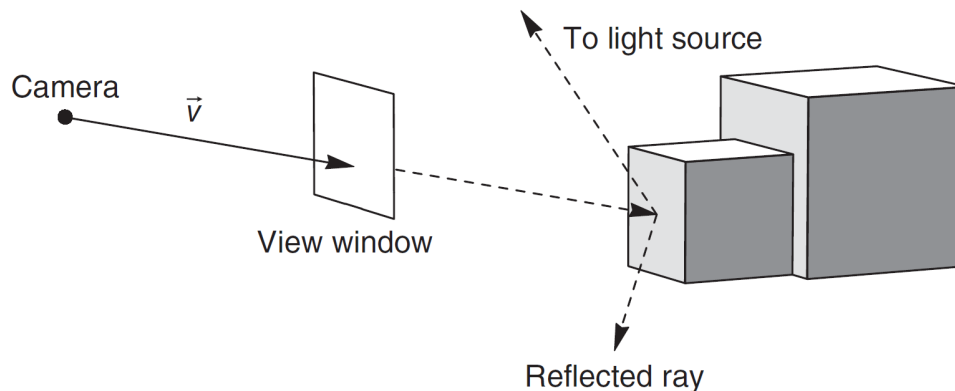
## 2.2 Säteenseuranta

*Säteenseuranta* (engl. *Ray Tracing*) on hahmontamistekniikka, jolla voidaan piirtää erittäin fotorealistisia kuvia. Säteenseuranta pyrkii mallintamaan valonsäteitä, jotka saavat alkunsa valonlähteistä, kulkevat avaruudessa ja osuvat objekteihin, jolloin ne valaisevat niitä, kimpoavat niistä toisiin objekteihin ja muodostavat varjoja. Jotkut valonsäteet löytävät lopulta tiensä katsojan silmiin eli kameraan. Koska olisi mahdotonta selvittää jokaisen valonsäteen kulkua avaruudessa, säteenseuranta-algoritmi ottaa huomioon vain ne säteet, jotka todella osuvat kameraan. Valonsäteitä seurataan siis käänteisessä järjestyksessä, kamerasta objekteihin, ja niistä valonlähteisiin. Säteenseurantatekniikkaa on havainnollistettu kuvassa 1. [Janke, 2015.]

Säteenseuranta-algoritmi muodostaa sille syötteenä annetusta kolmiulotteisesta maisemasta kamerasijainnin perusteella kaksiulotteisen kuvan. Jokaisen kuvatason pikselin läpi ammutaan säde  $\vec{R} = O + t\vec{D}$ , missä  $t \in \mathbb{R}$ ,  $O$  on kamerasijainti maailmakoordinaatistossa ja normalisoitu vektori  $\vec{D}$  kuvaa säteen kulkusuuntaa. Säteellä etsitään törmäyspistettä lähimmän objektin kanssa eli sellaista mahdollisimman pientä arvoa  $t$ , että piste  $P = O + t\vec{D}$  on jonkin objektin pinnalla. Tällöin osuman saaneen objektin piste  $P$  voi näkyä kameraan, mikäli siihen osuu valoa.<sup>1</sup> Osumakohdasta ammutaan uusi, varjostussäteeksi kutsuttu säde. Jos varjostussäde osuu suoraan tai kimmoten muista objekteista valonlähteeseen, lankeaa objektin pinnalle valoa.<sup>2</sup> [Janke, 2015.] Jos monikulmioiden muodoksi on valittu kolmiot, voidaan säteen ja kolmion leikkaus määrittää esimerkiksi nopealla

<sup>1</sup>Tämä on niin kutsuttu *näkyvyysongelma*.

<sup>2</sup>Tässä tutkielmassa huomiomatta varjostus, joka on oleellinen osa hahmontamista. Hyvä lähtöpiste realistiseen varjostukseen ja valaistukseen tutustumiseen on esimerkiksi James Kajiyan hahmontamisyhtälö [ks. Kajiya, 1986].



Kuva 1: Säteen ampuminen kuvan läpi maisemaan [Janke, 2015]

Möllerin-Trumboren algoritmilla [ks. Möller and Trumbore, 1997]. Säteenseurantatekniikan pseudokoodi on esitetty algoritmissa 1.

Algoritmin suoritusnopeutta rajoittaa se, että jokaista sädettä kohti on käytävä läpi kaikki maiseman monikulmiot ja testattava, osuuko säde niihin. Säteiden ja monikulmioiden leikkauksien määrittämiseen joudutaan joissain tapauksissa käyttämään jopa 95 % koko laskenta-ajasta [Whitted, 1980]. Algoritmia saataisiin siis nopeutettua huomattavasti, jos testattavien monikulmioiden määrää jokaista sädettä kohti saataisiin vähennettyä. Yleisesti käytetty tapa leikkaustestien vähentämiseksi on muodostaa maisemasta hierarkinen tietorakenne ennen varsinaista hahmontamista. Tätä tietorakennetta läpikäymällä löydetään nopeasti monikulmio, jonka pinnalla säteen ja objektin leikkauspiste  $P$  on. [Rubin and Whitted, 1980.]

Säteenseurantaa on perinteisesti sen hitauden vuoksi hyödynnetty hahmontamisessa, jossa käytetty laskenta-aika saakin venyä pitkäksi. Peleissä, virtuaalitodellisuudessa ja muissa reaaliaikaista hahmontamista vaativissa sovelluksissa on käytetty pitkälti niinkä utsuttua kolmioiden rasterointitekniikkaa (engl. *rasterization*). Säteenseurannalla hahmonnetut kuvat ovat kuitenkin huomattavasti realistisempia kuin rasteroinnilla saavutetut, joten reaaliaikainen hahmontaminen Säteenseurantatekniikalla on suosittu tutkimuskohde. [Wald, 2004.]



**Input:**

kuvataso:  $x * y$  kokoinen taulukko pikseleitä

maisema: joukko valonlähteitä ja monikulmioihin jaettuja objekteja

**Output:**

kolmiulotteinen maisema projisoituna kuvatasolle

RAY\_TRACING(kuvataso, maisema):

```
1 foreach pikseli  $(x, y) \in$  kuvataso do
2   | etaisyys  $\leftarrow \infty$ 
3   | foreach monikulmio  $\in$  maisema do
4   |   | Ammu säde  $\vec{R} = O + t\vec{D}$  kamerasta pikselin läpi maisemaan
5   |   | if säde  $\vec{R}$  osui monikulmioon pisteessä  $P$  and  $t < \text{etaisyys}$  then
6   |   |   | etaisyys  $\leftarrow t$ 
7   |   |   | Valon määrä  $V \leftarrow 0$ 
8   |   |   | foreach valonlähde  $L$  do
9   |   |   |   | Ammu varjostussäde  $\vec{R}_s = L - P$  valonlähdettä kohti
10  |   |   |   | Kasvata valosummaa  $V$ 
11  |   |   | end
12  |   |   | Aseta pikselin  $(x, y)$  väri valosumman  $V$  mukaisesti
13  |   | else
14  |   |   | Aseta pikseli  $(x, y)$  taustan väriksi
15  |   | end
16  | end
17 end
18 return kuvataso
```

**Algoritmi 1: RAY\_TRACING**

## 3 Avaruusjakopuut

Tässä luvussa esitellään kaksi tekniikkaa avaruuden ositukseen säteenseurannan nopeuttamiseksi. Binääriseksi avaruusjaoksi kutsutaan tekniikkaa, jossa avaruutta jaetaan rekursiivisesti kahteen pienempään osaan. Binääriseen avaruusjakoon liittyvistä tietorakenteista esitellään BSP-puu ja sen erikoistapaus kd-puu. Toinen keino jakaa maisemaa nopeammin käsiteltäviin osiin on hahmotella objekteja ryhmiin ja muodostaa jokaiselle objektille niin kutsuttu rajaava tila. Tällä tekniikalla voidaan muodostaa puun muotoinen rajavien tilojen hierarkia.

### 3.1 Binäärinen avaruusjako

#### 3.1.1 BSP-puu

Eräs suosittu avaruusjakoon perustuva tietorakenne on binäärinen avaruusjakopuu, eli *BSP-puu* (engl. *Binary Space Partitioning*). BSP-puu luodaan valitsemalla kolmiulotteisen maiseman monikulmiojoukosta  $\Gamma$  yksi monikulmio  $\gamma_k$ , joka asetetaan puun juureksi. monikulmion  $\gamma_k$  muodostama taso jakaa maiseman, ja siten monikulmiojoukon  $\Gamma$ , kahteen osaan  $\Gamma_{k,+}$  ja  $\Gamma_{k,-}$ . Joukko  $\Gamma_{k,+}$  sisältää monikulmion  $\gamma_k$  positiivisella puolella olevat monikulmiot, ja siten ne asetetaan BSP-puuhun juuren oikeaksi lapseksi. Vastaavasti joukko  $\Gamma_{k,-}$  sisältää negatiivisella puolella olevat monikulmiot, ja kuuluvat monikulmion  $\gamma_k$  vasemmaksi lapseksi. Tämä jakavan monikulmion valinta ja avaruuden jako niin sanotuiksi *vokseleiksi* (engl. *voxel, volume element*) suoritetaan rekursiivisesti BSP-puun lehdille, kunnes jokaisessa lehdessä on vain yksi tai ennalta määrätty määrä monikulmioita. [Samet, 2005.] BSP-puun rakentamisen pseudokoodi on esitelty algoritmissa 2.

BSP-puuta ja sen solmuja voidaan esittää grafiikkasovelluksessa seuraavasti:

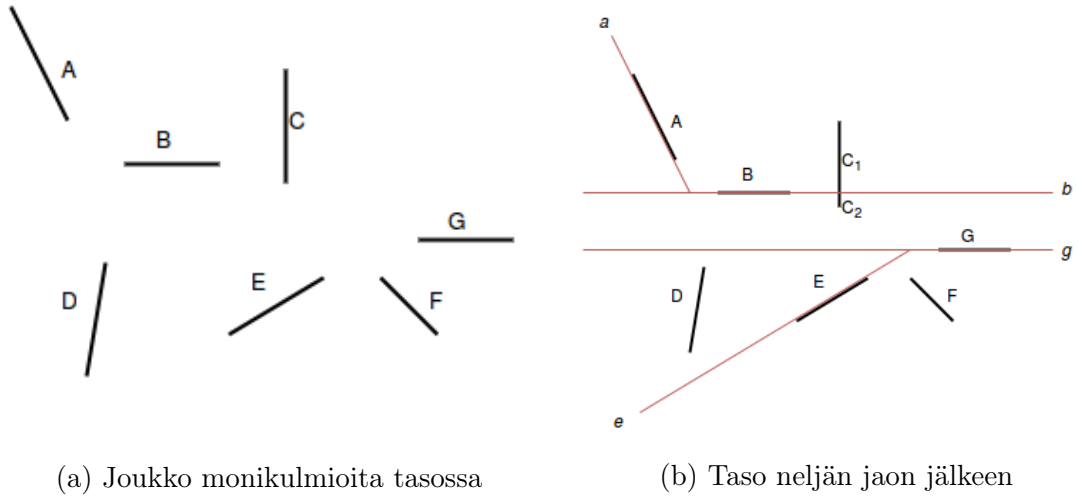
```
class BSP_Tree
{
    BSP_Node juuri
}
```

```

class BSP_Node
{
    Polygon jakaja
    BSP_Node* oikea_lapsi
    BSP_Node* vasen_lapsi
    Polygon monikulmiot[]    //joukko monikulmioita, josta alipuut
                              //muodostetaan
}

```

Kuvissa 2-3 on esitetty esimerkki BSP-puun muodostamisesta. Kuvassa 2a on yksinkertaisuuden vuoksi esitetty monikulmiot  $\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  sisältävä maisema kaksiulotteisena. Kuvassa 2b ensimmäiseksi jakomonikulmioksi on valittu  $G$ , jonka positiiviselle puolelle jäävät monikulmiot  $\Gamma_{g,+} = \{A, B, C\}$ , ja negatiiviselle puolelle  $\Gamma_{g,-} = \{D, E, F\}$ . Jaon  $g$  negatiivinen puoli saadaan jaettua loppuun asti ongelmitta valitsemalla jakomonikulmioksi  $E$ , mutta jos positiivisella puolella valitaan jakomonikulmioksi  $B$ , joudutaan monikulmio  $C$  jakamaan osiin  $C_1$  ja  $C_2$ . Jakolinjan  $b$  negatiiviselle puolelle jää vain yksi monikulmio  $C_2$ , joten jaettavaksi jää vain  $b$ :n positiivinen puoli. Valitsemalla viimeiseksi jakomonikulmioksi  $A$  syntyy kuvan 3 mukainen BSP-puu.



Kuva 2: Tason jakaminen

BSP-puun kokoon ja muotoon vaikuttaa suuresti avaruuden jakavan monikulmion valinta. Pahimmassa tapauksessa kaikki monikulmio  $\Gamma \setminus \{\gamma_k\}$  jäävät monikulmion  $\gamma_k$  positiiviselle tai negatiiviselle puolelle jokaisella jaolla  $k$ . Tällöin puusta muodostuu pikemminkin ketjun muotoinen. Sama monikulmio voi myös kuulua

**Input:**

BSP\_Node solmu: juurisolmu, josta puu rakennetaan

Polygon monikulmiot[]: monikulmiojoukko, josta alipuut rakennetaan

**Output:**

BSP-puu, jonka juurena on solmu node

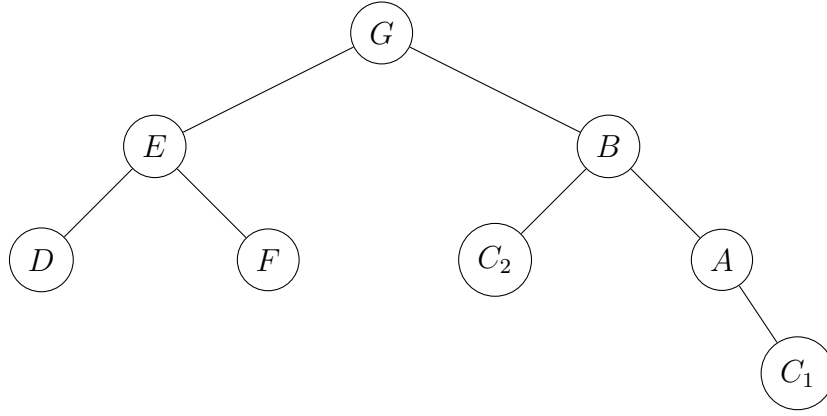
RAKENNA\_BSP\_PUU(solmu, monikulmiot):

```

1 jakaja ← VALITSE_JAKAVA_MONIKULMIO(monikulmiot)
2 positiivinen_joukko ← ∅
3 negatiivinen_joukko ← ∅
4 foreach  $\gamma \in$  monikulmiot do
5   sijainti ← VERTAA(jakaja,  $\gamma$ )
6   if sijainti = jakajan edessä then
7     positiivinen_joukko = positiivinen_joukko  $\cup$   $\gamma$ 
8   else if sijainti = jakajan takana then
9     negatiivinen_joukko = negatiivinen_joukko  $\cup$   $\gamma$ 
10  else if sijainti = leikkaa jakajan määrittämää tasoa then
11    JAA_MONIKULMIO( $\gamma$ , jakaja,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j$ )
12    positiivinen_joukko = positiivinen_joukko  $\cup$   $\gamma_i$ 
13    negatiivinen_joukko = negatiivinen_joukko  $\cup$   $\gamma_j$ 
14  end
15 end
16 if positiivinen_joukko  $\neq$  ∅ then
17   RAKENNA_BSP_PUU(solmu.oikea_lapsi, positiivinen_joukko)
18 end
19 if negatiivinen_joukko  $\neq$  ∅ then
20   RAKENNA_BSP_PUU(solmu.vasen_lapsi, negatiivinen_joukko)
21 end

```

**Algoritmi 2: RAKENNA\_BSP\_PUU**



Kuva 3: Tasosta muodostettu BSP-puu

moneen BSP-puun alipuuhun, jos jonkun ylemmällä tasolla avaruuden jakavan monikulmion  $\gamma_k$  muodostama jakolinja leikkaa tätä monikulmiota. [Samet, 2005.] Toinen lähestymistapa jakolinjalla oleviin monikulmioihin on halkaista ne kahtia. Tämäkin tapa on epäedullinen, sillä se lisää maisemassa olevien monikulmioiden määrää. [Ranta-Eskola, 2001.]

BSP-puuta rakennettaessa tavoitteena on muodostaa mahdollisimman tasapainoinen binääripuu valitsemalla jokaisella jakokerralla jakajaksi sellainen monikulmio  $\gamma_k$ , jonka positiivisella ja negatiivisella puolella on likimain yhtä paljon monikulmioita, eli  $|\Gamma_{k,+}| \approx |\Gamma_{k,-}|$ . Tällöin  $n:n$  monikulmion joukosta muodostetun BSP-puun syvyys olisi  $O(\log n)$ , mikäli rekursiivista jakoa jatketaan kunnes jokainen monikulmio on omassa lehdessään. Koska puun solmuja syntyy lisää, kun jakolinjan leikkaavat monikulmiot jaetaan kahtia, tai jakolinjalla oleva monikulmio sisällytetään useaan alipuuhun, voidaan puun logaritmisia tavoitesyvyyttä pitää vain alarajana. [Hughes et al., 2013.]  $n$  monikulmiota sisältävästä maisemasta rakennetun BSP-puun syvyys on siis  $\Omega(\log n)$ .

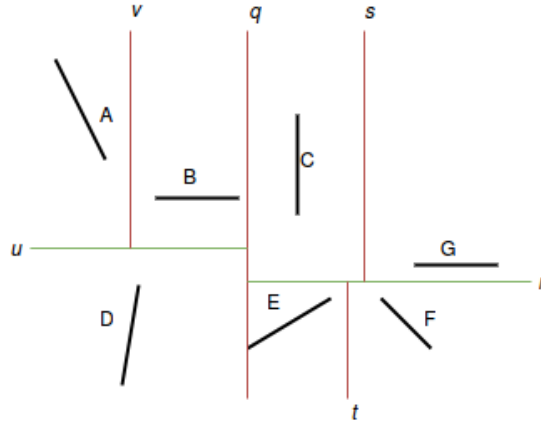
BSP-puu voidaan rakentaa ennen hahmontamista esiprosessointivaiheessa. Hahmontamisvaiheessa sitä voidaan käyttää vähentämään säde-monikulmio leikkaustestien määrää. Kamerasta ammuttua sädettä verrataan ensin BSP-puun juurena toimivaan monikulmioon. Jos säde leikkaa monikulmion  $\gamma_k$  muodostaman avaruuden jakavan tason, säde voi osua johonkin monikulmioon molemmissa joukoissa  $\Gamma_{k,+}$  ja  $\Gamma_{k,-}$ , eli joudutaan tarkastelemaan molempia alipuita. Jos säde ei leikkaa jakotasoa, siirrytään tarkastelemaan vain toista alipuuta. Säteen  $\vec{R} = O + t\vec{D}$  osumista tasoon  $T$  voidaan testata laskemalla etäisyys

$t = \frac{-\vec{n} \cdot (O - Q_0)}{\vec{n} \cdot \vec{D}}$ , missä  $\vec{n}$  on tason  $T$  normaalivektori ja  $Q_0$  on jokin tason  $T$  piste. Säde  $\vec{R}$  osuu tasoon  $T$  jos sijoittamalla  $t$  säteen yhtälöön, on piste  $Q = O + t\vec{D}$  tasossa  $T$ . Tämä pitää paikkansa jos  $(Q - Q_0) \cdot \vec{n} = 0$ . [Hughes et al., 2013.] Toistamalla säteiden ja avaruuden jakavien tasojen leikkauksia rekursiivisesti, päädytään lopulta BSP-puun juureen ja voidaan testata, osuuko säde monikulmioihin. [Ranta-Eskola, 2001.]

### 3.1.2 kd-puu

BSP-puun erikoistapaus on *kd-puu*, eli  $k$ -ulotteinen puu (engl. *k-dimensional tree*). kd-puussa avaruuden jakavaa tasoa ei valita jakavan monikulmion muodostaman sivun mukaan, vaan jaot tehdään siten, että jakotaso on kohtisuorassa jotakin koordinaattiakselia vasten. Yleisin tapa muodostaa kd-puu kolmiulotteisen maiseman monikulmioista on valita jakotaso vuorotellen maailmakoordinaatiston  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -akseleiden vastaiseksi. kd-puun jokaiseen solmuun tallennetaan jakavan monikulmion sijaan jakava taso. Tällöin monikulmioiden jakaminen solmun lapsiin onnistuu helposti vertaamalla niiden sijaintia jakotasoon. Esimerkiksi jos avaruuden jakava taso valitaan kohtisuoraksi  $x$ -akselia vasten, tallennetaan solmun vasempaan lapseen monikulmiot, joiden sijainnin  $x$ -koordinaatin arvo on pienempi kuin jakotason. Oikeaan lapseen taas tallennetaan monikulmiot, jotka ovat jakotason positiivisella puolella  $x$ -akselin suhteen. [Samet, 2005.] Avaruutta jaetaan rekursiivisesti osiin kunnes lehtisolmuissa on jokin ennaltamäärätty määrä monikulmioita. kd-puu muodostetaan vastaavalla algoritmilla kuin BSP-puun rakentamista kuvaava algoritmi 2.

Yleisen BSP-puun tapaan myös kd-puuta rakennettaessa avaruuden jakavien tasojen valinta vaikuttaa siihen, kuinka tehokkaasti puuta voidaan hyödyntää hahmontamisessa. Jakotaso voidaan valita aina jakamalla avaruuden osa tasan kahtia, jolloin samalla syvyydellä puussa olevat solmut vastaavat saman kokoista laatikkoa. Tämä tapa ei takaa sitä, että jakotason molemmille puolille jäisi saman verran monikulmioita, joten puusta ei tule tasapainoista. Hahmontamisen kannalta parempi tapa on käyttää esiprosessointivaiheessa enemmän laskenta-aikaa ja valita jakotaso siten, että sen molemmille puolilla jää likimain yhtä paljon monikulmioita. Sellaiset monikulmiot, jotka leikkaavat avaruuden jakavaa tasoa, täytyy sisällyttää puuhun useaan solmuun tai jakaa ne pienempiin osiin. [Havran, 2001.]

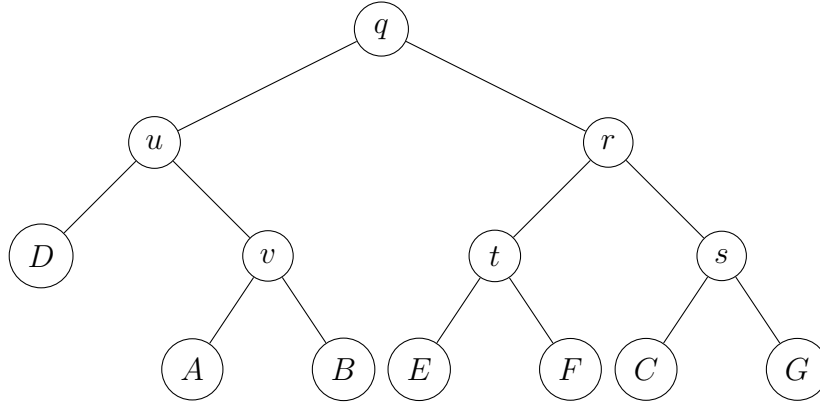


Kuva 4: Kuvan 2a taso jaettuna kuusi kertaa

Eräs mahdollinen tapa jakaa taso osiin koordinaattiakselien suuntaisesti on esitetty kuvassa 4, jossa tarkastellaan kuvan 2a tapaan monikulmiot  $\Gamma = \{A, B, C, D, E, F, G\}$  sisältävää kaksiulotteista tasoa. Ensin taso jaetaan puoliksi  $x$ -akselin vastaisella suoralla  $q$ . Jaon positiiviselle puolelle jäävät monikulmiot  $\Gamma_{q,+} = \{C, G, E, F\}$ . Kun jaetaan suoran  $q$  positiivinen puoli  $y$  akselin vastaisella jaolla  $r$  ja edelleen  $x$  akselin vastaisilla jakosuorilla  $s$  ja  $t$ , on monikulmiot  $C, G, E$  ja  $F$  saatu omiin solmuihinsa. Vastaava jako suoritetaan suoran  $q$  negatiivisella puolella oleville monikulmioille  $\Gamma_{q,-} = \{A, B, D\}$  jakosuorilla  $u$  ja  $v$ , jolloin tason monikulmioista saadaan muodostettua kuvan 5 mukainen kd-puu.

Muodostamalla esiprosessointivaiheessa maiseman monikulmioista BSP-puun sijaan kd-puu voidaan nopeuttaa säteiden ja avaruuden osien yhteentörmäystestejä. Koska kd-puussa avaruuden jakavat tasot ovat kohtisuorassa koordinaattiakselia  $a$  vasten,  $a \in (x, y, z)$ , ja jakosuunta on joka solmussa tiedossa, voidaan jakotaso esittää vain yhdellä arvolla  $a_p$ . Tällöin säteen ja jakotason yhteentörmäyksen testaaminen on noin kolme kertaa nopeampaa kuin satunnaisesti suunnatulle tasolle  $ax + by + cz + d = 0$ . [Havran, 2001.]

Muita BSP-puun erikoistapauksia ovat *quad*- ja *oct-puut*. Quad-puuta muodostettaessa avaruuden osa jaetaan aina neljään yhtä suureen kuutioon kunnes jokin pysähtymisehto saavutetaan. Oct-puun tapauksessa kuutioiden määrä on kahdeksan [Samet, 2005.]. Lukuunottamatta ennaltamäärättyä avaruusjakojen määrää quad- ja oct-puut ovat kuten yllä määritellyt kd-puut.



Kuva 5: Tasosta muodostettu kd-puu

### 3.2 Rajaavien tilojen hierarkia

BSP-puuta objektilähtöisempi tapa jakaa kolmiulotteista avaruutta osiin on määrittää jokaiselle objektille *rajaava tila* (engl. *bounding volume*). Objektin  $O$  rajaava tila on jokin yksinkertainen kolmiulotteinen muoto  $V$ , jolle  $O \cap V \equiv O$  [Havran, 2001]. Useimmiten rajaavan tilan muodoksi valitaan pallo tai koordinaattiakselien suuntainen laatikko, sillä säteen osumista niihin on helppo testata.<sup>3</sup> Rajaavat tilat tulisi valita siten, että ne rajaavat objekteja tarkasti, jättämättä liikaa tyhjää tilaa itsensä ja objektin väliin. [Hughes et al., 2013]

*Rajaavien tilojen hierarkia*, eli *BVH* (engl. *Bounding Volume Hierarchy*) on puu, jonka juurena on koko maiseman tilavuus ja solmuissa pienempiä, yhden tai useamman objektin rajaavia tiloja. Puun solmuihin on tallennettu tieto rajaavan tilan muodosta, koosta ja sijainnista, sekä osoittimet lapsisolmuihin. Lehtisolmut ovat pienimpiä rajaavia tiloja, jotka sisältävät yhden objektin tai osan siitä. BVH voidaan muodostaa rakentamalla ensin maisemasta BSP-puu ja sen jälkeen määrittää ympäröiviä tiloja objekteille rekursiivisesti lehtisolmuista ylöspäin. [Hughes et al., 2013] Toinen tapa on käydä esiprosessointivaiheessa läpi kaikkien objektien monikulmioiden kärjet ja ottaa talteen maksimi- ja minimiarvot  $x_{max}$ ,  $x_{min}$ ,  $y_{max}$ ,  $y_{min}$ ,  $z_{max}$  ja  $z_{min}$ . Näiden arvojen avulla voidaan muodostaa rajaava tila, jonka sisään kaikki objektin monikulmiot jäävät. [Janke, 2015.] Algoritmissa 3 on esitetty eräs tapa alustaa BVH [Thrane and Simonsen, 2005].

BVH:n hyödyntäminen hahmontamisessa säteenseurantatekniikalla on yksinker-

<sup>3</sup>Säteen osumatesti kummankin muodon kanssa vaatii noin kymmenen laskutoimitusta [Goldsmith and Salmon, 1987].



```

Input:
monikulmiot: monikulmiojoukko, josta alipuut rakennetaan

Output:
BVH_Node: BVH:n sisäsolmu

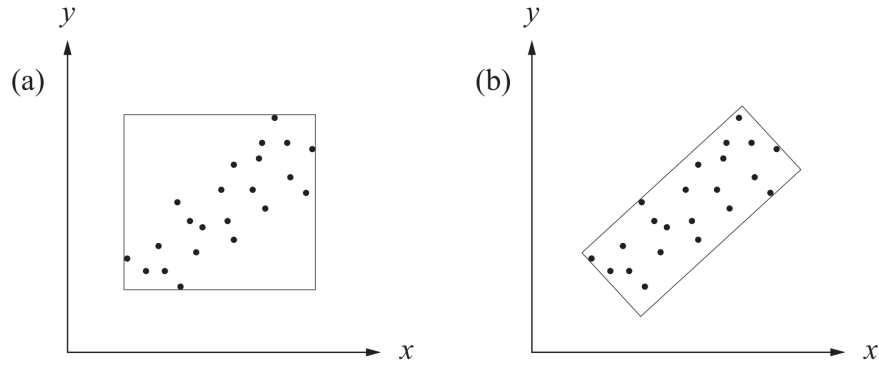
RAKENNA_BVH(monikulmiot):
1 if monikulmiot sisältää vain yhden tai ennalta määrätyn vähimmäismäärän
  monikulmoita then
2   return lehtisolmu, joka sisältää monikulmiot
3 else
4   Selvitä taso joka jakaa objektit kahteen, likimain yhtä suureen osaan
5   BVH_Node solmu
6   solmu.vasen_lapsi  $\leftarrow$  RAKENNA_BVH(monikulmiot jaon vasemmalla
    puolella)
7   solmu.oikea_lapsi  $\leftarrow$  RAKENNA_BVH(monikulmiot jaon oikealla
    puolella)
8   solmu.rajaava_tila  $\leftarrow$  pienin rajaava tila, joka sisältää kaikki
    monikulmiot
9   return solmu
10 end

```

### Algoritmi 3: RAKENNA\_BVH

taista. Kamerasta ammuttavien säteiden osumia testataan ensin BVH:n juureen, minkä jälkeen siirrytään rekursiivisesti molempiin lapsisolmuihin aina kun säde osuu solmuun. Jos käytössä on koordinaattiakselien suuntaiset laatikot, osuu säde  $\vec{R} = O + t\vec{D}$  laatikkoon kun se leikkaa laatikon kaksi sivua. Säteen ja tason osumatestiä on kuvailtu luvussa 3.1. Vertailemalla säteen  $\vec{R}$  leikkauspisteitä rajaavan tilan sivujen kanssa saadaan etäisyydelle  $t$  välit  $[t_{x_0}, t_{x_1}]$ ,  $[t_{y_0}, t_{y_1}]$  ja  $[t_{z_0}, t_{z_1}]$ , joissa alarajat ovat säteen ensimmäisiä ja ylärajat sen toisia leikkauspisteitä laatikon kanssa. Jos jokin arvo  $t$  kuuluu kaikkiin näihin väleihin, lävistää säde  $\vec{R}$  laatikon, ja siten siirrytään tarkastelemaan joko laatikon sisällä olevia rajaavia tiloja tai sen sisältämiä monikulmioita. [Janke, 2015.]

Kuten BSP- ja kd-puun tapauksissa, myös BVH:n tuoma etu hahmontamisessa riippuu siitä, miten hyvin jako rajaaviin tiloihin onnistuu. Kuvassa 6 havainnollistetaan rajaavan tilan valinnan merkitystä. Kuvassa on pisteistä kaksiulotteisessa tasossa ja kaksi vaihtoehtoa niitä rajaavaksi tilaksi. Koordinaattiakseleiden suun-



Kuva 6: Kaksi vaihtoehtoa pistejoukon rajaavaksi tilaksi [Lengyel, 2012]

tainen laatikko (a) ei ole tässä tapauksessa optimaalinen, vaan jättää pisteiden ja laatikoiden väliin liikaa tyhjää tilaa. Tällöin monet laatikon lävistävät säteet eivät osu itse pisteisiin. Tiiviimpi laatikko on esitetty vieressä (b).

Säteen  $\vec{R} = O + t\vec{D}$  ja pallon  $S$  leikkausta voidaan tarkastella määrittämällä ensin vektori  $\vec{a} = C - O$ , missä  $C$  on pallon  $S$  keskipiste. Tällöin saadaan suorakulmainen kolmio, jossa  $\vec{a}$  on hypotenuusa ja  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$  on kateetti. Laskemalla Pythagoraan lauseella toisen kateetin pituus  $d = \sqrt{\vec{a}^2 - (\frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|})^2}$  saadaan selville mikä on pienin säteen ja pallon keskipisteen välinen etäisyys. Jos  $|d| < r$ , missä  $r$  on pallon  $S$  säde, lävistää säde  $R$  pallon ja voi osua sen sisältämiin monikulmioihin. [Janke, 2015.]

## 4 Avaruusjakopuiden vertailua

Tässä luvussa vertaillaan luvussa 3 esiteltyjä tietorakenteita ja selvitetään, mitä eroja niissä on säteenseurannan nopeuttamisen kannalta. Lisäksi selvitetään mitä ongelmia tietorakenteiden alustamiseen liittyy, ja miten ongelmat voidaan selvittää. Vertailussa keskitytään pääasiassa binääriseen avaruusjakoon kd-puun avulla ja objektien ryhmittelyyn BVH:n avulla. Yleisen BSP-puun sijaan tarkastellaan kd-puuta sen yksinkertaisuuden ja sitä käsittelevän tutkimuksen määrän vuoksi.<sup>4</sup>

### 4.1 Tietorakenteiden alustaminen

Rakennettaessa kd-puuta on otettava kantaa, mitä tehdään monikulmioille, jotka ulottuvat avaruuden jakavan tason molemmille puolille. Sekä monikulmion jakaminen osiin, että sen sisällyttäminen useaan solmuun kasvattavat kd-puuta turhaan. kd-puusta saatava hyöty on suurin silloin, kun avaruusjakoja on tehty mahdollisimman paljon ja lehtisolmuissa on mahdollisimman vähän monikulmioita. Tällöin todennäköisyys sille, että monikulmioita jää jakotasojen molemmin puolin on suuri ja tietorakenteen vaatima tallennustila kasvaa erittäin suureksi. [Wald, 2004.]

BVH:ta muodostettaessa ei synny samankaltaista ongelmaa kuin kd-puiden kanssa, sillä monikulmio voi kuulua vain yhteen objektiin ja objektin rajaava tila sisältää kaikki sen monikulmiot. Myös BVH-puu kannattaa muodostaa syväksi. Jos BVH sisältäisi vain koko maiseman kattavan juuren ja sen lapsina olisi kaikkien objektien rajaavat tilat, ei tietorakenteen tuoma hyöty olisi paras mahdollinen. Puuhun kannattaa siis sijoittaa useita rajaavia tiloja, jotka sisältävät useita objekteja. Objektijoukon jakaminen kahtia BVH:n jokaisella tasolla näyttäisi olevan hyvä valinta. [Goldsmith and Salmon, 1987.]

Kuten aikaisemmin mainittu, avaruusjakorakenteen tuoma hyöty riippuu siitä, miten hyvin avaruuden ositus on onnistunut. Sekä kd-puun, että BVH:n alustamisessa voidaan hyödyntää samankaltaista hintafunktiota, jolla voidaan minimoida puun läpikäymisen viemä aika. Hintafunktiota voidaan kuvata seuraavasti: olkoon alipuussa  $N$  monikulmiota, jotka peittävät alueen  $V$ . Tämä alipuu jaetaan osiin  $L$  ja  $R$ , joissa on  $N_L$  ja  $N_R$  monikulmiota, jotka peittävät alueen  $V_L$

---

<sup>4</sup>Myös yleisen BSP-puun käyttö säteenseurannassa on tuottanut hyviä tuloksia. [ks. esim. Ranta-Eskola, 2001]

ja  $V_R$ . Tällöin alipuun läpikäymisen hinta on

$$Hinta(V \rightarrow \{L, R\}) = K_T + K_I \left( \frac{A(V_L)}{A(V)} N_L + \frac{A(V_R)}{A(V)} N_R \right),$$

missä  $A(V_i)$  on alueen  $V_i$  pinta-ala, ja arvot  $K_T$  ja  $K_I$  ovat joitakin puun läpikäynnistä ja säde-monikulmio-yhteentörmäystesteistä johtuvia vakioita. Minimoimalla tämä funktio puun alustuksen joka vaiheessa, saadaan muodostettua tehokas avaruuden jako. [Wald, 2007.]

Edellä mainittua, hintafunktiota käyttävää tekniikkaa kutsutaan *pinta-ala heuristiikaksi* (engl. *Surface Area Heuristics, SAH*) ja sillä saadaan muodostettua hyvä avaruuden ositus sekä kd-puulle, että BVH:lle. Ingo Waldin tekemässä tutkimuksessa BVH:n muodostaminen onnistui kuitenkin jopa 10 kertaa nopeammin. Tämä johtuu muun muassa kd-puun alustamisessa esiintyvistä, jakotason leikkaavista monikulmioista. [Wald, 2007.]

## 4.2 Tietorakenteiden hyödyntäminen säteenseurannassa

Avaruusjakorakenteiden hyödyntäminen säteenseurannassa on hyvin samankaltaista riippumatta siitä, millä periaatteella tietorakenne on muodostettu. Algoritmissa 4 on kuvattu hyvin yksinkertainen pseudokoodi, jolla voidaan testata säteen osumista avaruusjakopuuna kuvattuun maisemaan.

Niels Thrane ja Lars Ole Simonsen vertailivat pro gradu -työssään eri avaruusjakorakenteita grafiikkaprosessoreilla suoritettua säteenseurannassa. Koska säteenseurannassa jokainen säde on riippumaton muista säteistä, voidaan säteenseuranta-algoritmi suorittaa helposti rinnakkain, mikä onnistuu grafiikkaprosessoreilta erittäin nopeasti. Yllättäen Thrane ja Simonsenin vertailussa BVH:n käytöllä saatiin yhdeksänkertainen nopeutus kd-puuhun verrattuna. [Thrane and Simonsen, 2005.]

Yksiselitteisesti ei voida sanoa, mikä avaruusjakoon perustuvista tietorakenteista soveltuisi parhaiten säteenseurannan nopeuttamiseen. Asymptoottisesti avaruusjakopuiden käyttö säteenseurassa vähentää tarvittavien yhteentörmäystestien määrää luokasta  $O(n)$  luokkaan  $O(\log n)$ , riippumatta käytetystä tietorakenteesta. Tulokset voivat vaihdella käytännössä eri maisemien, implementaatioiden, laitteis-

**Input:** $\vec{R}$ : kamerasta ammuttu sädeSolmu  $s$ : jonkin avaruusjakopuun solmu**Output:**Kolmio, johon säde  $\vec{R}$  osuiSÄDE\_PUU\_YHTEENTÖRMÄYS( $\vec{R}$ ,  $s$ ):

```

1 if  $\vec{R}$  osui solmun  $s$  kuvaamaan avaruuden osaan then
2   | if  $s$  on lehtisolmu then
3   |   | return SÄDE_MONIKULMIO_YHTEENTÖRMÄYS( $\vec{R}$ ,  $s.monikulmiot$ )
4   | end
5   | SÄDE_PUU_YHTEENTÖRMÄYS( $\vec{R}$ ,  $s.oikea\_lapsi$ )
6   | SÄDE_PUU_YHTEENTÖRMÄYS( $\vec{R}$ ,  $s.vasen\_lapsi$ )
7 else
8   | return NULL
9 end

```

**Algoritmi 4: SÄDE\_PUU\_YHTEENTÖRMÄYS**

tojen ja sovelluksien välillä. [Wald, 2004.]

## 5 Yhteenveto

# Viitteet

- Angel, E. and Shreiner, D. (2014). *Interactive Computer Graphics with WebGL*. Addison-Wesley Professional, 7th edition.
- Appel, A. (1968). Some techniques for shading machine renderings of solids. In *Proceedings of the April 30–May 2, 1968, Spring Joint Computer Conference*, AFIPS '68 (Spring), pages 37–45, New York, NY, USA. ACM.
- CGSociety (2014). Building 3d with ikea. [http://www.cgsociety.org/index.php/cgsfeatures/cgsfeaturespecial/building\\_3d\\_with\\_ikea](http://www.cgsociety.org/index.php/cgsfeatures/cgsfeaturespecial/building_3d_with_ikea). Luettu: 28.10.2016.
- Goldsmith, J. and Salmon, J. (1987). Automatic creation of object hierarchies for ray tracing. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 7(5):14–20.
- Harju, T. (1989–2015). Geometria, lyhyt kurssi.
- Havran, V. (2001). *Heuristic Ray Shooting Algorithms*. PhD thesis, Czech Technical University, Praha, Tšekki.
- Hughes, J. F., van Dam, A., McGuire, M., Sklar, D. F., Foley, J. D., Feiner, S. K., and Akeley, K. (2013). *Computer graphics: principles and practice (3rd ed.)*. Addison-Wesley Professional, Boston, MA, USA.
- Janke, S. J. (2015). *Mathematical Structures for Computer Graphics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.
- Kajiya, J. T. (1986). The rendering equation. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 20(4):143–150.
- Lengyel, E. (2012). *Mathematics for 3D Game Programming and Computer Graphics*. Course Technology PTR.
- Möller, T. and Trumbore, B. (1997). Fast, minimum storage ray-triangle intersection. *J. Graph. Tools*, 2(1):21–28.
- Ranta-Eskola, S. (2001). Binary space partitioning trees and polygon removal in real time 3d rendering. Master’s thesis, Uppsalan yliopisto, Uppsala, Ruotsi.
- Rubin, S. M. and Whitted, T. (1980). A 3-dimensional representation for fast rendering of complex scenes. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 14(3):110–116.

- Samet, H. (2005). *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures (The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics and Geometric Modeling)*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Thrane, N. and Simonsen, L. O. (2005). A comparison of acceleration structures for gpu assisted ray tracing. Master's thesis, Aarhusin yliopisto, Aarhus, Tanska.
- VentureBeat (2013). How pixar made monsters university, its latest technological marvel. <http://venturebeat.com/2013/04/24/the-making-of-pixars-latest-technological-marvel-monsters-university/view-all/>. Luettu 30.10.2016.
- Wald, I. (2004). *Realtime Ray Tracing and Interactive Global Illumination*. PhD thesis, Saarlandin yliopisto, Saarbrücken, Saksa.
- Wald, I. (2007). On fast construction of sah-based bounding volume hierarchies. In *Proceedings of the 2007 IEEE Symposium on Interactive Ray Tracing, RT '07*, pages 33–40, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- Whitted, T. (1980). An improved illumination model for shaded display. *Commun. ACM*, 23(6):343–349.



## Lista algoritmeista

1	RAY_TRACING . . . . .	7
2	RAKENNA_BSP_PUU . . . . .	10
3	RAKENNA_BVH . . . . .	15
4	SÄDE_PUU_YHTEENTÖRMÄYS . . . . .	19