3-1. 미분의 정의 (한 점에서의 변화율)

미분의 정의는 주로 함수의 한 점에서 변화율, 즉 기울기를 구하는 과정으로 설명됩니다. 이는 우리가 연속적인 변화에 대해 얼마나 빠르게 변하는지를 다루는 수학적 방법입니다.

1. 변화율의 개념

   변화율은 말 그대로 변화의 비율을 의미합니다. 예를 들어, 차 운전할 때 속도는 변화율의 한 예입니다.
   속도는 시간에 따른 위치 변화, 즉 단위 시간당 차가 얼마나 멀리 가는지를 나타냅니다.
   수학에서는 이러한 변화를 궁는 방법으로 미분을 사용합니다.

2. 평균 변화율

   미분을 이해하기 위한 첫 번째 개념은 평균 변화율입니다. 함수 $f(x)$가 있을 때, 두 점 x와 $x+h$에서 함수 값의 차이를 구한 후, 그 차이를 x에서 $x+h$까지의 거리인 h로 나누면 평균 변화율이 됩니다.

   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

   이 식은 두 점 x와 $x+h$사이에서 함수가 얼마나 변화했는지를 나타냅니다. 이 때, h는 두 점 사이의 거리 입니다.

3. 순간 변화율 (미분)

   미분은 평균 변화율을 극한으로 생각한 개념입니다. 즉, 두 점 사이의 간격을 점점 더 좁혀서 두 점이 사실상 하나가 될 때 그 변화율을 구하는 것입니다. 이때, 두 점이 사실상 하나가 되는 것을 수학적으로는 극한을 이용해 표현합니다.

   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

   위 식에서 h가 0에 가까워질수록, 평균 변화율은 한 점에서의 변화율로 수렴하게 됩니다. 이것이 바로 미분계수이며, 함수의 한 점에서 순간 변화율을 나타냅니다.

4. 기울기와 접선

   미분은 함수의 한 점에서의 기울기, 즉 그 점에서의 접선의 기울기를 구하는 것입니다. 함수 $f(x)$의 미분은 기울기가 어떻게 변하는지, 즉 변화율을 표현하는 방법이기도 합니다.

   만약 그래프가 곡선이라면, 곡선의 특정 점에서 접선을 그릴 수 있습니다. 이때 그 접선의 기울기는 바로 그 점에서의 미분 값과 같습니다.

5. 미분의 기호

   미분은 여러 가지 기호로 표현할 수 있습니다.

   - $f'(x)$: 함수 $f(x)$의 미분.
   - $\frac{d}{dx}f(x)$: 함수 $f(x)$를 x에 대해 미분한 것.
   - $\frac{dy}{dx}$: y가x에 대한 함수일 때, y의 변화율.

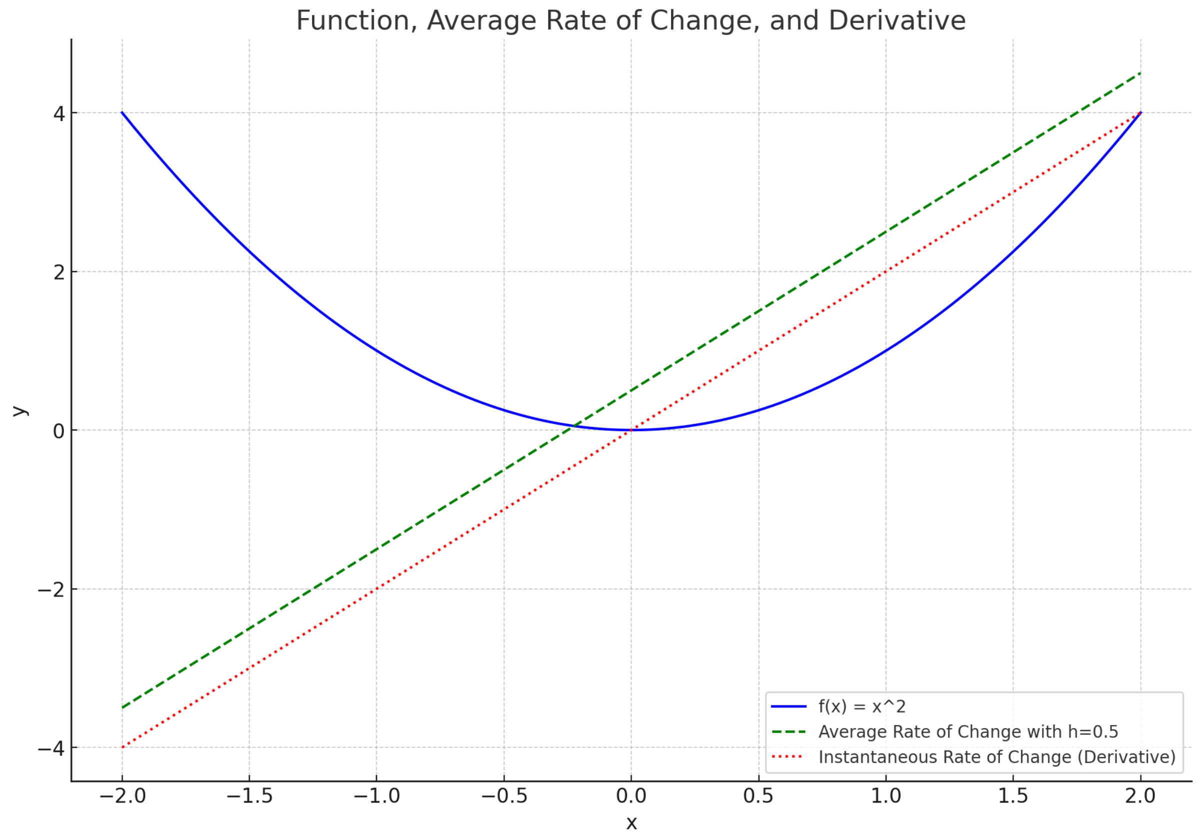
6. 미분의 물리적 의미

   미분은 물리적 상황에서 속도나 가속도를 계산할 때 매우 유용합니다. 예를 들어, 위치 함수 $s(t)$가 주어졌을 때, t에 대한 위치 변화율(즉, 미분)은 물체의 속도를 나타냅니다. 이 속도를 한번 더 미분하면 가속도를 구할 수 있습니다.

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

정리

미분은 함수의 한 점에서의 변화율을 구하는 방법으로, 평균 변화율을 극한으로 보내는 과정입니다. 이를 통해 함수의 순간 변화율, 기울기, 또는 물리적 의미로는 속도나 가속도를 계산할 수 있게 됩니다.



위 그래프는 다음과 같은 세가지 요소를 나타냅니다.

- 파란색은 곡선의 함수 $f(x) = x^2$의 그래프입니다.
- 녹색 점선은 $h = 0.5$인 경우의 평균 변화율을 나타냅니다.
- 빨간색 점선은 순간 변화율(미분계수)을 나타내며, 이는 극한으로 구한 값입니다.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 함수 정의: f(x) = x^2 (간단한 예로 사용)
def f(x):
    return x**2

# 평균 변화율 계산을 위해 h 값 설정
h = 0.5
x = np.linspace(-2, 2, 400)

# x+h로 이동한 함수
```

```
x_h = x + h

# 평균 변화율: (f(x+h) - f(x)) / h
average_rate_of_change = (f(x_h) - f(x)) / h

# 미분계수는 극한으로 구함 (h -> 0)
# 이를 근사하기 위해 매우 작은 h 사용
h_small = 1e-5
instantaneous_rate_of_change = (f(x + h_small) - f(x)) / h_sm

# 그래프 그리기
plt.figure(figsize=(12, 8))

# 원래 함수 f(x)
plt.plot(x, f(x), label='f(x) = x^2', color='blue')

# 평균 변화율 그래프
plt.plot(x, average_rate_of_change, label=f'Average Rate of C

# 미분계수(순간 변화율) 그래프
plt.plot(x, instantaneous_rate_of_change, label='Instantaneou

plt.title("Function, Average Rate of Change, and Derivative")
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()

plt.grid(True)
plt.show()
```