3-2. 기본 미분 공식 및 규칙

미분은 딥러닝에서 필수적인 개념으로, 특히 역전파(Backpropagation) 과정에서 주로 활용됩니다.

1. 기본 미분 개념

   미분은 함수의 변화율을 나타내는 것으로, 어떤 함수 $f(x)$가 있을 때, x가 변화할 때 $f(x)$가 얼마나 변하는지를 나타냅니다. 미분은 함수의 접선의 기울기를 구하는 것이라고도 할 수 있습니다. 수식으로는 다음과 같이 표현됩니다.

   $$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

   여기서 $f'(x)$는 $f(x)$의 도함수로, 이 값은 x에서 함수의 기울기를 의미합니다.

2. 기본 미분 공식

   (1) 상수 함수의 미분

   $$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

   상수 c는 변하지 않으므로 미분하면 항상 0이 됩니다.

   (2) 항등 함수의 미분

   $$\frac{d}{dx}[x] = 1$$

   항등 함수 $f(x) = x$를 미분하면 1이 됩니다.

   (3) 거듭제곱 함수의 미분 (멱 함수의 법칙)

   $$\frac{d}{dx}[x^n] = n * x^{n-1}$$

   함수 $f(x) = x^n$의 미분은 지수 n을 앞에 곱하고, 지수를 1 낮춘 값으로 표현됩니다.

(4) 지수 함수의 미분

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

지수 함수 e^x의 미분은 동일하게 e^x입니다.

(5) 로그 함수의 미분

$$\frac{d}{dx}[lnx] = \frac{1}{x}$$

자연로그 lnx의 미분은 $\frac{1}{x}$입니다.

(6) 삼각 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}[sinx] = cosx$
- $\frac{d}{dx}[cosx] = sinx$
- $\frac{d}{dx}[tanx] = sec^2x$

삼각 함수는 주기적이므로 그에 맞는 미분값을 가지게 됩니다.

- 예제 문제

$$f(x) = 3x^2 + 5x + 2$$

- $3x^2$의 미분 → $6x$
- $5x$의 미분 → 5
- 상수 2의 미분 → 0
  - 따라서 전체 미분결과 : $f'(x) = 6x + 5$

3. 미분의 주요 규칙들

(1) 합의 법칙 (Sum Rule)

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

두 함수의 합을 미분하면 각각의 함수의 미분을 더한 값이 됩니다.

(2) 차의 법칙 (difference Rule)

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

두 함수의 차를 미분하면 각각의 함수의 미분을 뺀 값이 됩니다.

(3) 곱의 법칙 (Product Rule)

$$\frac{d}{dx}[f(x) * g(x)] = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

두 함수의 곱을 미분할 때는 첫 번째 함수의 미분에 두 번째 함수를 곱한것과 첫 번째 함수에 두 번째 함수의 미분을 곱한 것을 더합니다.

- 예제문제

  곱의 법칙을 사용하여 두 함수의 곱을 미분합니다. 주어진 함수는 $f(x) = (2x^3)(sinx)$입니다.

  곱의 법칙

  $$f'(x) = \frac{d}{dx}[2x^3] * sinx + 2x^3 * \frac{d}{dx}[sinx]$$

  - $2x^3$의 미분 → $6x^2$
  - $sinx$의 미분 → $cosx$
    - 따라서 전체 미분 결과

$$f'(x) = (6x^2) * sinx + (2x^3) * cosx$$
$$f'(x) = 6x^2 sinx + 2x^3 cosx$$

(4) 몫의 법칙 (Quotient Rule)

$$\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$$

몫을 미분할 때는 분자의 미분에 분모를 곱한것에서 분자의 미분되지 않은 값에 분모의 미분을 곱한 값을 빼고, 그 결과를 분모의 제곱으로 나눕니다.

- 예제문제

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}[x^2+1] * x^3 - (x^2+1) * \frac{d}{dx}[x^3]}{(x^3)^2}$$

  - x^2+1의 미분 → $2x$
  - x^3의 미분 → $3x^2$
    - 따라서 전체 미분 결과

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^3) - (x^2+1)(3x^2)}{x^6}$$
$$f'(x) = \frac{2x^4 - (3x^4+3x^2)}{x^6}$$
$$f'(x) = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6}$$
$$f'(x) = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6}$$
$$f'(x) = \frac{-x^2(1+3)}{x^6}$$
$$f'(x) = -\frac{4}{x^4}$$

(5) 연쇄 법칙 (Chain Rule)

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) * g'(x)$$

함수의 합성 형태일 때 미분은 내수 함수의 미분을 먼저 하고, 외부 함수의 미분을 곱해 줍니다. 딥러닝에서 특히 중요한 규칙입니다.

4. 고급 미분 공식

(1) 역삼각 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}[arcsinx] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}[arccosx] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}[arctanx] = \frac{1}{1+x^2}$

(2) 쌍곡 함수의 미분

- $\frac{d}{dx}[sinhx] = coshx$
- $\frac{d}{dx}[coshx] = sinhx$
- $\frac{d}{dx}[tanhx] = sech^2x$

```
import sympy as sp

# 변수 정의
x = sp.symbols('x')

# 문제 1: f(x) = 3x^2 + 5x + 2
f1 = 3*x**2 + 5*x + 2
f1_derivative = sp.diff(f1, x)
print(f"문제 1의 미분 결과: {f1_derivative}")

# 문제 2: f(x) = (2x^3)(sin(x))
f2 = (2*x**3) * sp.sin(x)
f2_derivative = sp.diff(f2, x)
print(f"문제 2의 미분 결과: {f2_derivative}")

# 문제 3: f(x) = (x^2 + 1) / (x^3)
f3 = (x**2 + 1) / x**3
f3_derivative = sp.diff(f3, x)
print(f"문제 3의 미분 결과: {f3_derivative}")
```

- sympy.symbols('x')는 미분할 변수를 정의합니다.
- sp.diff(f, x)는 함수 f를 x에 대해 미분하는 명령어 입니다.
- 각 주제에서 주어진 함수를 정의한 후, sp.diff를 사용해 미분을 계산하고 결과를 출력합니다.