4. 행렬의 분해

1. 고유값 분해 (Eigenvalue Decomposition)

   고유값 분해는 정방행렬(정사각 행렬)을 고유값과 고유벡터의 조합으로 분해하는 방법입니다.

   고유값 분해의 정의

   정방행렬 A는 고유값과 고유벡터를 이용해 다음과 같이 분해될 수 있습니다.

$$A = Q\Lambda Q^{-1}$$

   - A는 n x n 행렬
   - Q는 A의 고유벡터들로 이루어진 n x n 행렬
   - Λ는 대각선에 고유값을 가진 n x n 대각행렬
   - Q^{-1}는Q의역행렬

   고유값 분해는 대칭 행렬이나 대각화 가능한 행렬에 대해 사용됩니다.

```
import numpy as np

# 예제 행렬
A = np.array([[4, -2],
              [1, 1]])

# 고유값과 고유벡터 계산
eigenvalues, eigenvectors = np.linalg.eig(A)

print("고유값:", eigenvalues)
print("고유벡터:\n", eigenvectors)


# 결과
'''
고유값: [3. 2.]
고유벡터:
 [[0.89442719 0.70710678]
```

```
 [0.4472136  0.70710678]]
'''
```

위 코드는 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 계산하여 출력함

결과 해석

고유값은 행렬의 고유한 스칼라 값들이며, 고유벡터는 그 고유값에 해당하는 벡터입니다. 고유값 분해는 주로 선형 변환의 고유한 특성을 이해하거나 데이터의 중요한 방향을 파악하는 데 사용됩니다.

2. 특이값 분해 (Singular Value Decomposition, SVD)

   특이값 분해는 고유값 분해와 달리 정방행렬뿐만 아니라 모든 형태의 행렬에 대해 적용할 수 있습니다. 행렬을 세 개의 다른 행렬로 분해하여 차원 축소, 데이터 압축, 잡음 제거 등에 활용 됩니다.

   SVD의 정의

   임의의 행렬 A를 다음과 같이 세 행렬로 분해할 수 있습니다.

$$A = U\Sigma V^T$$

   - A는 m x n 행렬
   - U는 m x m 정규 직교 행렬(왼쪽 특이벡터)
   - Σ는 m x n 대각 행렬(특이값)
   - V^T는 n x n 정규 직교 행렬 (오른쪽 특이벡터)

   SVD는 모든 행렬에 대해 적용 가능하며, 차원 축소 및 데이터 압축에 널리 사용됩니다.

```
import numpy as np

# 예제 행렬
A = np.array([[3, 2, 2],
              [2, 3, -2]])

# 특이값 분해
U, S, Vt = np.linalg.svd(A)

print("U 행렬:\n", U)
print("특이값:", S)
```

```
print("V^T 행렬:\n", Vt)


#결과
'''
U 행렬:
 [[-0.70710678 -0.70710678]
 [-0.70710678  0.70710678]]
특이값: [5. 3.]
V^T 행렬:
 [[-7.07106781e-01 -7.07106781e-01 -5.55111512e-17]
 [-2.35702260e-01  2.35702260e-01 -9.42809042e-01]
 [-6.66666667e-01  6.66666667e-01  3.33333333e-01]]
 U 행 : 2
 V^T 렬 : 3
 (2, 3)
'''
```

이 코드는 행렬 A에 대해 특이값 분해를 수행하여 U, S ,V^T를 출력합니다.

결과해석

- U는 입력 행렬의 왼쪽 특이벡터(행)들로 이루어져 있으며, 이 벡터들은 입력 데이터의 중요한 패턴을 나타냅니다.
- S는 대각선에 특이값을 가진 대각 행렬로, 원본 데이터의 분산을 설명하는 값입니다.
- V^T는 입력 행렬의 오른쪽 특이벡터(열)들로, 주로 차원 축소나 데이터 압축에 활용됩니다.

3. 딥러닝에서의 활용

   SVD는 딥러닝에서 주로 다음과 같은 용도로 사용됩니다.

   - **차원 축소**: 고차원 데이터를 저차원으로 압축하여 연산량을 줄이고, 중요한 패턴만 남기도록 할 수 있습니다.
   - **데이터 압축**: 큰 크기의 행렬을 더 작은 크기로 분해하여 연산 효율성을 높일 수 있습니다.
   - **잡음 제거**: 데이터를 특이값의 일부만 사용해 재구성하여, 노이즈가 포함된 데이터를 정제하는 데 도움이 됩니다.