

El martes

- * Componentes arco-conexas V/\sim de un grafo $G = (V, E)$
- * 0-homología de G con coeficientes en \mathbb{F} :

$$H_0(G; \mathbb{F}) := \frac{C_0(G; \mathbb{F})}{\text{img}(\partial)} \quad \begin{matrix} \text{Span}_{\mathbb{F}}(v) \\ \leftarrow \text{frontera} \end{matrix}$$

$$\partial : C_1(G; \mathbb{F}) \rightarrow C_0(G; \mathbb{F})$$

$$\{v, v'\} \mapsto v' - v$$

$$v \leq v'$$

$$\dim_{\mathbb{F}} (H_0(G; \mathbb{F})) = \#(V/\sim)$$

Note: Salvo isomorfismo, $H_0(G; \mathbb{F})$ es independiente de \leq

Hoy:

- * Complejos simpliciales
- * Característica de Euler
- * n-th homología

Topología: Estudia las "formas" y sus equivalencias bajo deformaciones continuas (sin pegar ni romper)



\simeq

(homotópicamente equivalente)



\simeq

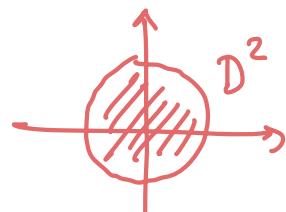


Pregunta: Que propiedades son invariantes bajo deformaciones continuas?

Ejemplos de "formas" (Espacios topológicos)

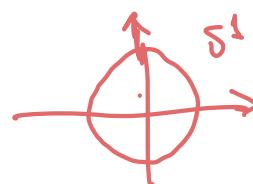
1) Disco unitario (D^2)

$$D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$$



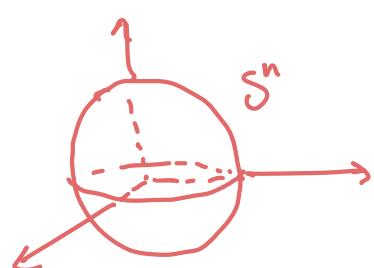
2) Círculo unitario (S^1)

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$$



3) n-esfera unitaria (S^n), $n \in \mathbb{N}$

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 = 1\}$$



4) El toro (T)

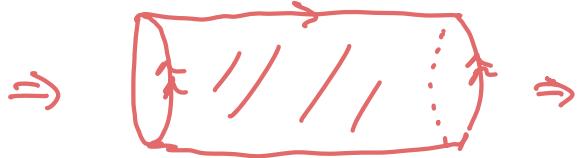
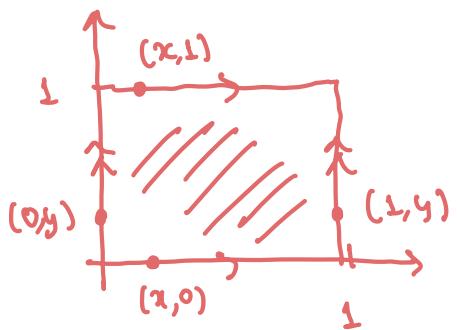
$$T = S^1 \times S^1$$



alternativa mantiene: $T \cong [0, 1] \times [0, 1]$

$$(x, 0) \sim (x, 1)$$

$$(0, y) \sim (1, y)$$



$$\rightarrow [x, y]$$

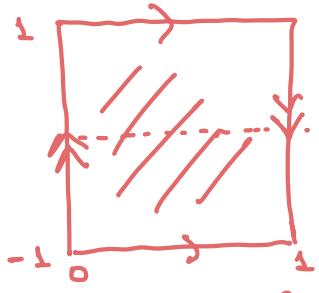
$$\rightarrow$$

$$\begin{cases} (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)) \\ (\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)) \end{cases}$$

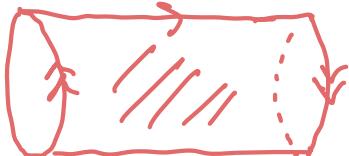
$$\in S^1 \times S^1$$

clase de equivalencia
de (x, y)

5) Botella de Klein (K)



$$\Rightarrow$$



$$\Rightarrow$$



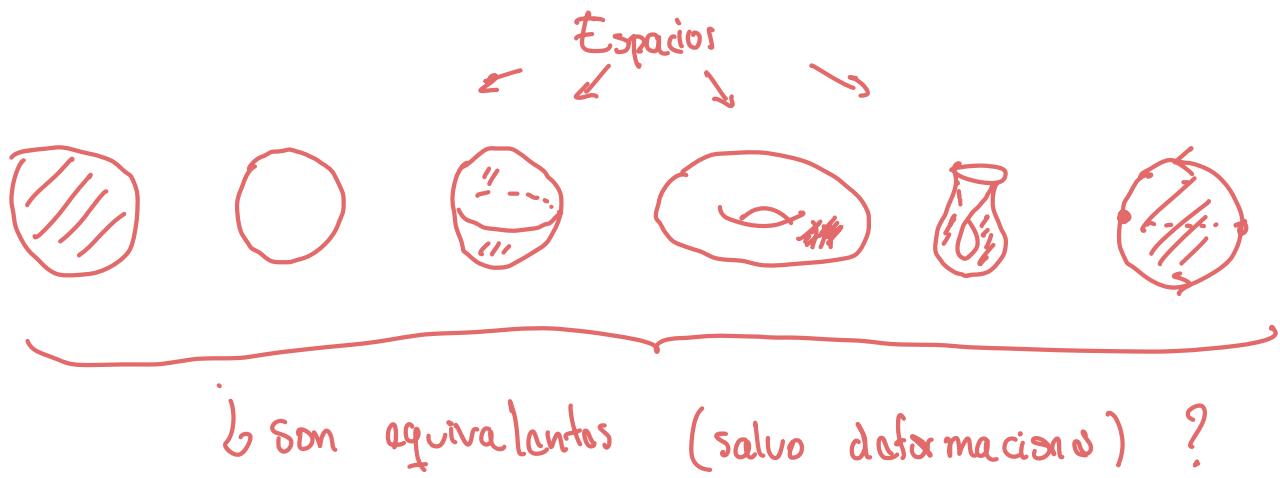
$$[0, 1] \times [-1, 1] / \begin{cases} (x, -1) \sim (x, 1) \\ (0, y) \sim (1, -y) \end{cases}$$

6) Plano proyectivo real (\mathbb{RP}^2)

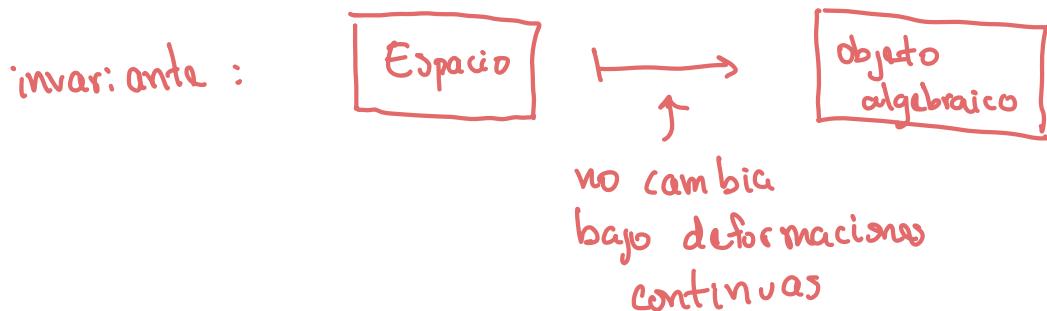


$$\mathbb{RP}^2 = D^2 / a \sim -a$$

$a \in S^1$



Topología algebraica :



Complejos simpliciales (triangulación de espacios)

Def: Un complejo simplicial (abstracto) es un conjunto K tal que:

- 1) Si $\sigma \in K$, entonces σ es un conjunto finito no vacío. Si $\#(\sigma) = n+1$, diremos que σ es un n -simplejo.
- 2) Si $\sigma \in K$ y $\emptyset \neq \tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in K$. Diremos que τ es una cara de σ .

Ejemplos 1) $K = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\} \}$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \rightarrow \quad \uparrow$

0 - simplejos 1 - simplejos

visualmente:

{a} {b} {c}

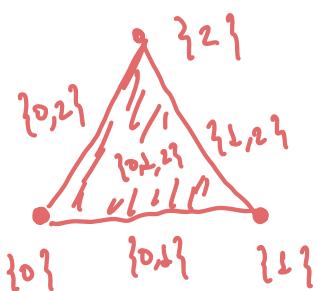
Nota: Todo grafo $G = (V, E)$ define un complejo simplicial

2) $K = \left\{ \{0\}, \{0, 1\} \right\}$ no as un complejo simplicial

porque $\{0, 1\} \in K$, $\{1\} \subseteq \{0, 1\}$, pero $\{1\} \notin K$.

$$3) K = \{ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\} \}$$

$$= \mathcal{B}(\{0,1,2\}) - \{\emptyset\}$$

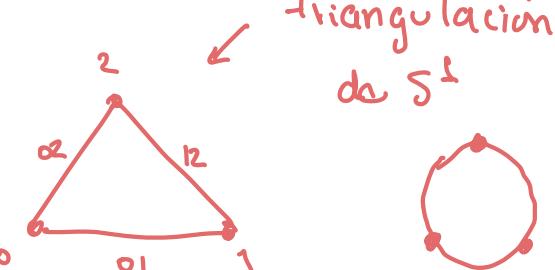


\leftarrow triangulación de D^2

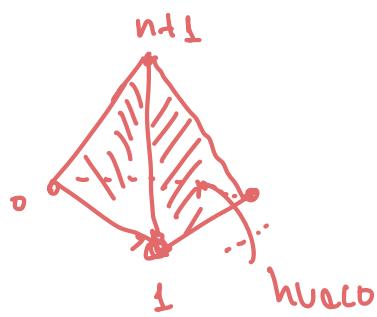
3 vértices, 3 aristas
1 triángulo

$$4) \quad \mathcal{B}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0,1,2\}\}$$

3 vértices, 3 aristas

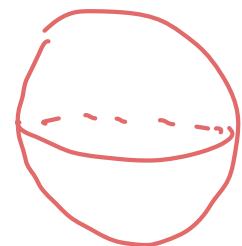


$$5) \mathcal{B}(\{0, 1, \dots, n+1\}) - \{\emptyset, \{0, 1, \dots, n+1\}\}$$



← triangulación de S^n

$$\binom{n+2}{k+1} = \# \left(k - \text{simplices} \atop 0 \leq k \leq n \right)$$



$$\frac{(n+2)!}{(n-k+1)! \cdot (k+1)!} \quad \leftarrow \text{coeficiente binomial}$$

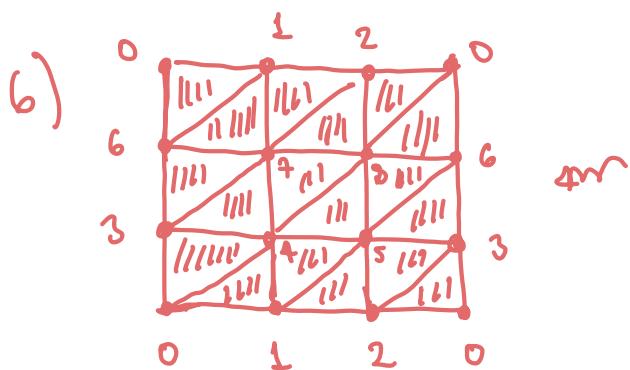
-/- →

Note:

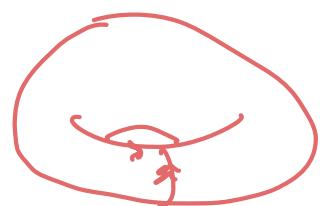
Si $\sigma \in K$ es un 0-simples $\rightsquigarrow \sigma$ es un vértice
1-simples \rightsquigarrow arista

2-simples \rightsquigarrow triángulo

3-simples \rightsquigarrow tetraedro

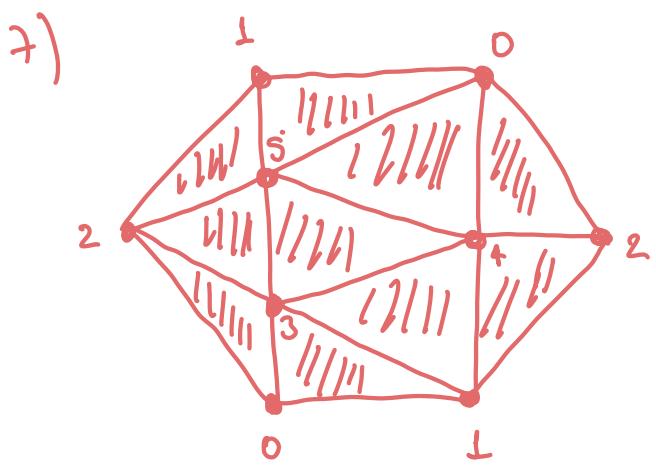


triangulación
del toro



$$K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 05, 03, 04, 06, 07, \dots, 568\}$$

K tiene 9 vértices
27 aristas
18 triángulos



una triangulación de \mathbb{RP}^2

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 05, 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45, 013, 015, 023, 024, 045, 124, 125, 134, 235, 345\}$

6 vértices, 15 aristas, 10 triángulos

8) Sea (X, d_X) un conjunto de datos (espacio métrico)

y para $\varepsilon > 0$ sea

$$R_\varepsilon(X, d_X) = \left\{ \sigma \subseteq X \mid \begin{array}{l} 0 < \#(\sigma) < \infty \\ \text{diam}(\sigma) < \varepsilon \end{array} \right\}$$

note:

i) Si $G_\varepsilon(X, d_X)$ es

el grafo de ε -vecindad,

entonces $\sigma \subseteq R_\varepsilon(X, d_X)$ si y solo si todas sus aristas están en $G_\varepsilon(X, d_X)$

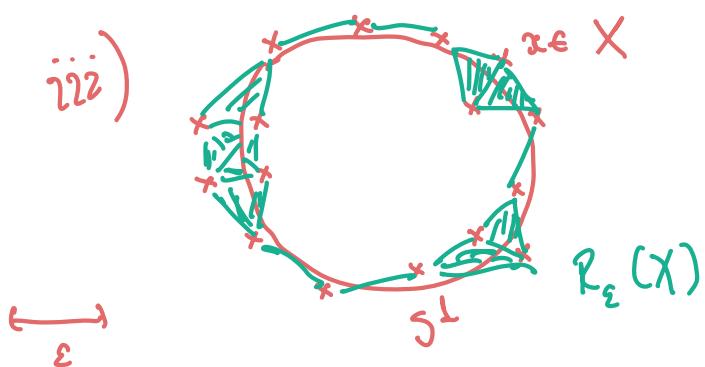
diametro de σ

$$\max \{ d_X(x, x') \mid x, x' \in \sigma \}$$

ii) $R_\varepsilon(X, d_X)$ es un complejo simplicial $\forall \varepsilon > 0$:

Si $\sigma \in R_\varepsilon(X, d_X)$ y $\phi \neq \tau \subseteq \sigma$, entonces
 $\text{diam}(\tau) \leq \text{diam}(\sigma) < \varepsilon \Rightarrow \tau \in R_\varepsilon(X, d_X)$.

$R_\varepsilon(X, d_X) \leftarrow$ complejo de (Vietoris-)Rips
 a escala ε .



Tresca (J. Latscher, "Vietoris-Rips Complexes of metric spaces near a closed Riemannian manifold", 2001)

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una variedad Riemanniana cerrada.

Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,
 entonces existe $\delta_\varepsilon > 0$ para el cual $X \subseteq \mathbb{R}^N$ y
 $d_H(X, M) < \delta_\varepsilon$ implican $|R_\varepsilon(X)| \approx |M|$.

Pregunta: Cuales son ejemplos de buenas invariantes
 $(\boxed{\text{espacio}} \rightarrow \boxed{\text{objeto algebraico}})$

Def: La caracteristica de Euler de un complejo simplicial finito K es el numero:

$$\chi(K) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\# \text{ de } n\text{-simplices de } K)$$

Ejemplos:

1) $\chi(\begin{array}{c} \triangle \\ \text{D}^2 \end{array}) = \# \text{ vertices} - \# \text{ aristas} + \# \text{ triangulos}$
 $= 3 - 3 + 1$

$= 1$

2) $\chi(\begin{array}{c} \triangle \\ S^1 \end{array}) = 3 - 3$
 $= 0$

3) $\chi(\begin{array}{c} \square \\ T \end{array}) = 9 - 27 + 18$
 $= 0$

$$3) \quad \chi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of } \mathbb{RP}^2 \\ \text{with boundary} \end{array} \right) = 6 - 15 + 10 \\ = 1$$

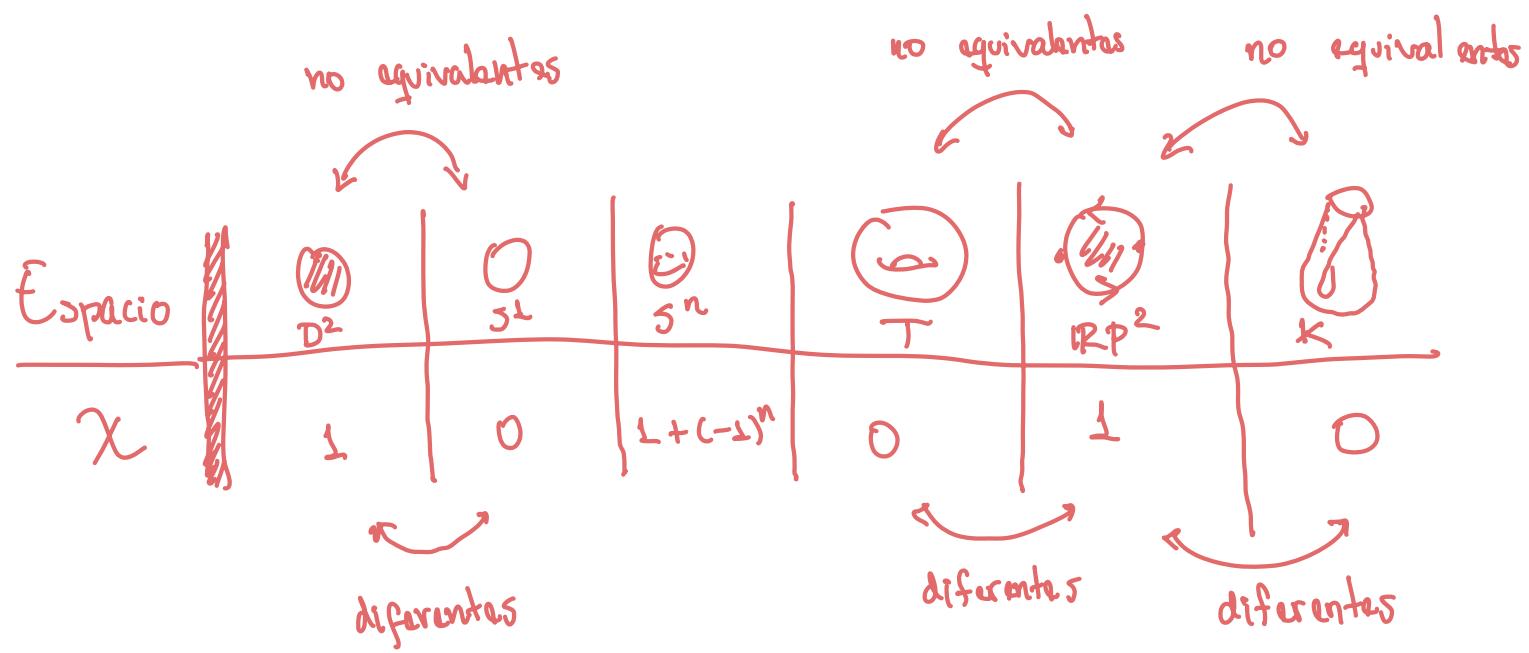
$$4) \quad \chi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of } S^n \\ \text{with boundary} \end{array} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+2}{k+1} \\ = 1 + (-1)^n$$

Teorema binomial $\rightarrow (a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$

$$m = n+2 \rightarrow (a+b)^{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+1} a^{n-k+1} b^{k+1}$$

$$\begin{array}{l} a=1 \\ b=-1 \end{array} \rightarrow 0 = 1 + (-1)^{n+2} + \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k+1} (-1)^{k+1}$$

$$5) \quad \chi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram of } K \\ \text{with boundary} \end{array} \right) = 0$$



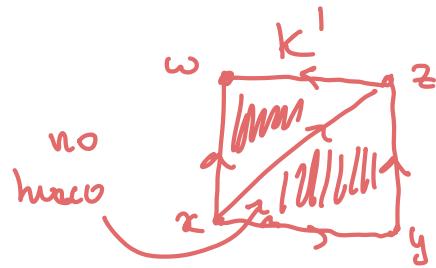
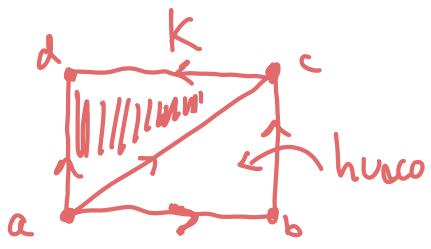
Corolario: Si n es par y m es impar, entonces S^n y S^m (e.g. S^1 y S^2) no son homotópicamente equivalentes.

Lo malo: $X(\cdot)$ no es lo suficientemente poderosa para distinguir S^1 , T , K

Un nuevo Invariante: Homológico $H_n(K; \mathbb{F})$

Idea: distinguir espacios por los huecos que tienen.

En términos de 1-cadenas (combinaciones lineales de aristas orientadas)



ciclo	$ab + bc - ac$	$xy + yz - xz$
- - -	$\partial(ab + bc - ac) = 0$	$\partial(xy + yz - xz) = 0$
lleno?	no	si, xyz llena
-	- - -	$\partial(xyz) = xy + yz - xz$...
hueco?	(si)	(no)

Def: Sea K un complejo simplicial, \mathbb{F} un campo y para $n > 0$ definir

$$C_n(K; \mathbb{F}) = \text{Span}_{\mathbb{F}} \left(n\text{-simplices de } K \right)$$

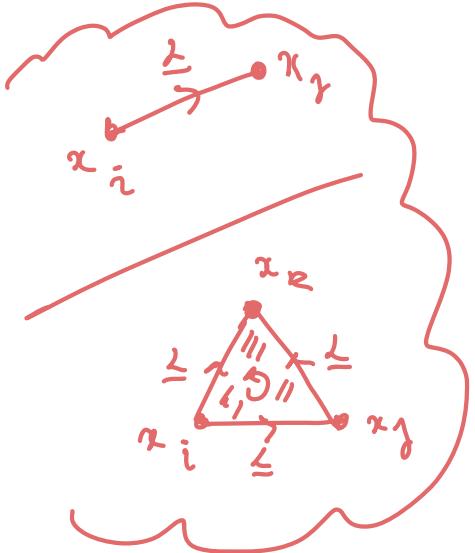
\nearrow

$$\begin{aligned} n\text{-cadenas de } K &= \left\{ \sum_{j=1}^J \lambda_j \cdot \sigma_j \mid J \in \mathbb{N}, \ 1 \leq j \leq J \right. \\ &\quad \left. \sigma_j \in K, \ #(\sigma_j) = n+1 \right\} \\ \text{con coeficientes en } \mathbb{F} & \qquad \qquad \qquad \lambda_j \in \mathbb{F} \end{aligned}$$

Fije un buen orden \leq en los vértices de K .

y para $\sigma \in K$ un n -simplexo, escriba

$$\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{donde } x_i \leq x_j \text{ si y solo si } i \leq j$$



para $0 \leq i \leq n$ sea

$$\sigma^{(i)} = \sigma - \{x_i\}$$

$$= \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$$

\uparrow
 $(n-1)$ -simplejo

i -esima cara de σ .

$$\text{La frontera de } \sigma \text{ es: } \partial(\sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma^{(i)}$$

$$\partial(x) = 0$$

$$\partial(x, y) = y - x$$

$$\begin{aligned} \partial(x, y, z) &= yz - xz + xy \\ &= xy + yz - xz \end{aligned}$$

$$\partial(x, y, z, w) = xyz - wyz + wzx - wxy$$

$wxyz$

Lo cual define una única transformación lineal

operador frontera $\rightarrow \partial_n: C_n(K; F) \rightarrow C_{n-1}(K; F)$

$$\partial_n \left(\sum_{j=1}^J \lambda_j \cdot \sigma_j \right) = \sum_{j=1}^J \lambda_j \partial(\sigma_j)$$

$$= \sum_{j=1}^J \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda_j \cdot \sigma_j^{(i)}$$

Prop: $C_{n+1}(K; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n(K; \mathbb{F}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K; \mathbb{F})$

Entonces $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \quad \forall n > 0.$

y por tanto $\text{img}(\partial_{n+1})$ es un subespacio
lineal de $\ker(\partial_n)$

(la frontera de la frontera es cero)

$$\begin{aligned} \partial_1 \circ \partial_2 \left(\begin{array}{c} z \\ \nearrow \\ x \\ \searrow \\ y \end{array} \right) &= \partial_1 (zy + yz - zx) \\ &= (y-x) + (z-y) - (z-x) = 0 \end{aligned}$$

Def: • $Z_n(K; \mathbb{F}) = \ker(\partial_n) \leftarrow$ espacio de n-ciclos

• $B_n(K; \mathbb{F}) = \text{img}(\partial_{n+1}) \leftarrow$ espacio de n-fronteras

• $H_n(K; \mathbb{F}) := Z_n(K; \mathbb{F}) / B_n(K; \mathbb{F}) \leftarrow$ n -homología
de K con coef. en \mathbb{F}