ECUACIONES DIFERENCIALES I
Grado en Informática y Matemáticas
Curso 2014-15

Relación de ejercicios 4: **La ecuación lineal de orden superior**

1.- Se considera la ecuación diferencial lineal $x''' + 6x'' + 12x' + 8x = e^{-2t}$. Se pide:

(a) Construir un sistema equivalente.

(b) Determinar, para dicho sistema, una matriz fundamental principal en $t = 0$ y resolverlo. Hallar la solución particular que para $t_0 = 0$ vale $(1, 1, 1)^T$.

(c) A partir del apartado anterior, encontrar la solución de la ecuación diferencial de partida.

2.- Por el método de los coeficientes indeterminados, hallar una solución particular de

(a) $x'' - 3x' + 7x = 5te^{2t}$.

(b) $x'' + 4x = 5\mathrm{sen}(3t) + \cos(3t) + \mathrm{sen}(2t)$.

(c) $x'' - 2x' + 3x = t^3 + \mathrm{sen}(t)$.

3.- Por el método de variación de constantes, hallar una solución particular de

(a) $x'' + x = \mathrm{cotan}(t)$.

(b) $x'' + 4x = \sec(2t)$.

(c) $x'' - 6x' + 9x = e^{3t}t^{-2}$.

(d) $x'' - x = e^{-t}\mathrm{sen}(e^{-t}) + \cos(e^{-t})$.

4.- Previo rebajamiento del orden de las correspondientes ecuaciones diferenciales lineales, resolver

(a) $t^2x'' + t(t-4)x' + 2(3-t)x = 2t^4e^t$, con $x_1(t) = t^2$.

(b) $(t^2 - t)x''' + (3t - t^2 - 3)x'' - tx' + x = 0$, con $x_1(t) = \frac{1}{t}$ y $x_2(t) = t$.

(c) $tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = (t^2 + t - 1)e^{2t}$, con $x_1(t) = e^t$.

(d) $(1+t)x'' + (4t+5)x' + (4t+6)x = e^{-2t}$, con $x_1(t) = e^{at}$ y $a \in \mathbb{R}$ por determinar.

5.- Decidir de forma razonada si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

(a) Existe una ecuación del tipo $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ con $a, b \in C(\mathbb{R})$ tal que $y(t) = t^5$ es solución (primer parcial 1989).

(e) Existe una solución no trivial de $x'' + \operatorname{sen}(t)x' = 0$ que satisface $x(0) = x(\pi) = 0$ (primer parcial 1994).

(f) $\{e^t, \operatorname{sen}(t)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial de la forma $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ con $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas (Junio 1994).

(g) Sean f_1 y f_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Entonces el wronskiano $W(f_1, f_2)$ es constante si y sólo si $a_1 = 0$.

6.- Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + x = 0\,. \tag{1}$$

Denotemos por $S(t)$ a la única solución de esta ecuación que satisface $S(0) = 0$ y $S'(0) = 1$ y por $C(t)$ a la única solución que satisface $C(0) = 1$ y $C'(0) = 0$. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) Las soluciones $S(t)$ y $C(t)$ son infinitamente derivables y están definidas en $\mathbb{R}$.

(b) $S'(t) = C(t)$ y $C'(t) = -S(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) $S(t)^2 + C(t)^2 = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) El wronskiano de $S(t)$ y $C(t)$ vale -1.

(e) $S(t \pm a) = S(t)C(a) \pm C(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

(f) $C(t \pm a) = C(t)C(a) \mp S(t)S(a)$ para cualesquiera $t, a \in \mathbb{R}$.

(g) Existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mínimo tal que $C(\alpha) = 0$. Llamaremos a ese número $\frac{\pi}{2}$.

(h) $S(t + 2\pi) = S(t)$ y $C(t + 2\pi) = C(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.