TEORÍA DE STURM

Se trata de obtener información sobre el número de ceros de las soluciones de ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas del tipo

(E) $\quad y'' + a(t)\, y' + b(t)\, y = 0$

con $a, b \in C(I)$, I intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN: Por unicidad, si $\varphi(t)$ es una solución no trivial de (E) ($\varphi \not\equiv 0$), los ceros de φ si existen, son simples.
En efecto, si $t_0 \in I$ es tal que $\varphi(t_0) = 0 = \varphi'(t_0)$, la unicidad de solución del p.v.i. para (E) nos aseguraría que $\varphi \equiv 0$.

Dada la ecuación (E), definimos (fijado $t_0 \in I$)

$$p(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \quad y \quad q(t) = b(t)\, p(t)$$

$p \in C^1(I)$, $p(t) > 0$, $\forall\, t \in I$ y $q \in C(I)$. Además, multiplicando (E) por $p(t)$ (observar que $p(t) \neq 0$, $\forall t \in I$),

(E) $\sim \quad p(t)\, y'' + a(t)\, p(t)\, y' + b(t)\, p(t)\, y = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(p(t)\, y'\right)' + q(t)\, y = 0 \qquad (E^*)$

es decir, la ecuación de partida es equivalente a (E^*).
La ecuación (E^*) se dice de está en forma autoadjunta o en forma de Sturm-Liouville.
Recíprocamente, si tenemos una ecuación en forma autoadjunta con $p \in C^1(I)$, $p(t) > 0$, $t \in I$ y $q \in C(I)$,

$(E^*) \sim \; p(t)y'' + p'(t)y' + q(t)y = 0.$

Como $p(t) \neq 0$, $t \in I$,

$$(E^*) \sim \; y'' + \frac{p'(t)}{p(t)} y' + \frac{q(t)}{p(t)} y = 0.$$

Definiendo $a(t) = \frac{p'(t)}{p(t)}$ y $b(t) = \frac{q(t)}{p(t)}$, $a, b \in C(I)$ y (E^*) es equivalente a (E).

↪ Toda ecuación diferencial lineal de segundo orden admite una forma autoadjunta.

Vamos a trabajar con la ecuación en esa forma.

<u>TEOREMA 1</u>.- (DE COMPARACIÓN DE STURM). Sean $p \in C^1(I)$, $p(t) > 0$, $t \in I$ y $q_1, q_2 \in C(I)$ con $q_1(t) < q_2(t)$, $t \in I$. Consideramos las ecuaciones

(1) $(p(t)y')' + q_1(t)y = 0$,

(2) $(p(t)y')' + q_2(t)y = 0$.

Entonces, entre cada dos ceros consecutivos de cualquier solución no trivial de (1) se anula toda solución de la ecuación (2).

-D-

Supongamos que $t_1 < t_2$ son dos ceros consecutivos de una solución no trivial $\varphi_1(t)$ de la ecuación (1). Cambiando, si es necesario, φ_1 por $-\varphi_1$, podemos suponer

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0 \quad y \quad \varphi_1(t) > 0, \quad t \in (t_1, t_2)$$

Sea $\varphi_2(t)$ una solución de (2) y supongamos que $\varphi_2(t) \neq 0$, para todo $t \in (t_1, t_2)$. Como antes, cambiando de signo φ_2 si es necesario, podemos suponer $\varphi_2(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$.

$\varphi_i(t)$ es solución de la ecuación (i), luego

$$(p(t)\varphi_i(t)')' + q_i(t)\varphi_i(t) = 0, \quad t \in I, \quad i = 1, 2.$$

Multiplicando la primera ecuación por $\varphi_2(t)$, la segunda por $\varphi_1(t)$, restando e integrando entre t_1 y t_2, queda

$$\int_{t_1}^{t_2} (p(t)\varphi_1'(t))'\varphi_2(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} (p(t)\varphi_2'(t))'\varphi_1(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} (q_2(t)-q_1(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt$$

$\Vert \leftarrow$ Int. por partes $\left[\begin{array}{l} u=\varphi_2(t) \\ dv=(p(t)\varphi_1'(t))'dt \end{array} \Big/ \begin{array}{l} u=\varphi_1(t) \\ dv=(p(t)\varphi_2'(t))'dt \end{array}\right]$

$$p(t)\varphi_1'(t)\varphi_2(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \cancel{p(t)\varphi_1'(t)\varphi_2'(t)}\,dt - p(t)\varphi_2'(t)\varphi_1(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \cancel{p(t)\varphi_2'(t)\varphi_1'(t)}\,dt$$

$$= p(t_2)\varphi_1'(t_2)\varphi_2(t_2) - p(t_1)\varphi_1'(t_1)\varphi_2(t_1)\ ,\quad \text{puesto que } \varphi_1(t_1)=\varphi_1(t_2)=0.$$

Ahora bien, $p(t_1), p(t_2)>0$, $\varphi_2(t_1), \varphi_2(t_2)\geq 0$ y $\varphi_1'(t_2)<0$, $\varphi_1'(t_1)>0$ ya que $\varphi_1(t_1)=\varphi_1(t_2)=0$, $\varphi_1(t)>0$, $t\in(t_1,t_2)$ y los ceros de φ_1 son simples.

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} (q_2(t)-q_1(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t)\,dt \leq 0 \quad ¡! \ \left(\begin{array}{l} q_2(t)-q_1(t)>0,\ t\in(t_1,t_2) \\ \varphi_1(t),\varphi_2(t)>0,\ t\in(t_1,t_2) \end{array}\right)$$

Por tanto, existe $t^*\in(t_1,t_2)$ tal que $\varphi_2(t^*)=0$.

—— . ——

EJEMPLOS.-

1.- (1) $y''+n^2y=0$

(2) $y''+m^2y=0$

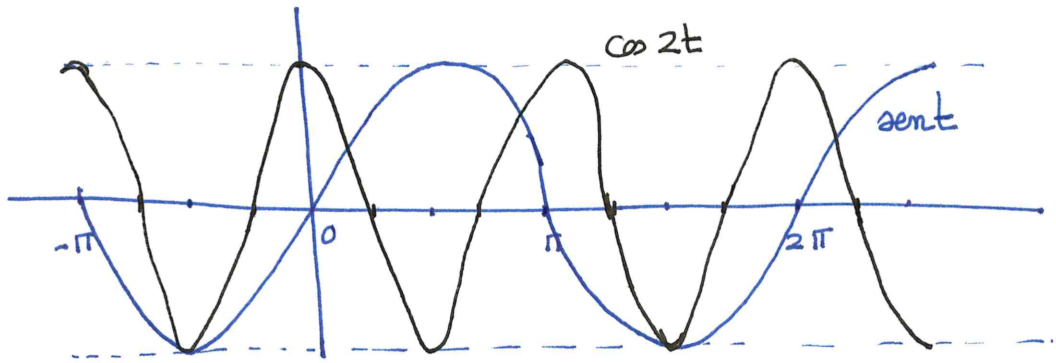
$n<m$ $\quad \left|\begin{array}{l} p(t)=1 \\ q_1(t)=n \\ q_2(t)=m \end{array}\right.$, $I=\mathbb{R}$

Entre cada dos ceros consecutivos de cualquier solución $\overset{\varphi_1\neq 0}{\vee}$ de (1) se anula toda solución de (2).

Sol. de (1) : $y_1(t)=A_1\cos nt + B_1 \operatorname{sen} nt$

$y_2(t)=A_2\cos mt + B_2\operatorname{sen} mt$

Por ejemplo, $n=1$, $m=2$, $A_1=0$, $B_1=1$, $A_2=1$, $B_2=0$,



2.- Sea $q \in C(I)$, con $q(t)<0$, $t\in I$. Toda solución no nula de

(*) $y''+q(t)\,y=0$ se anula a lo sumo una vez.

En efecto, supongamos que una solución de (*) admite dos ceros. Sean $t_1<t_2$ dos ceros consecutivos de esta solución. Por el teorema anterior, toda solución de la ecuación

(**) $y''=0$ $\quad (\,q(t)<0)$

debe anularse en el intervalo (t_1,t_2). Pero $y(t)=A$, $A\in\mathbb{R}$ es solución de (**) y no se anula.

3.- Toda solución de la ecuación

$$y''+\frac{t^2}{t^2+1}\,y=0$$

tiene infinitos ceros.

En efecto, $q_2(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}\to 1$, $t\to+\infty$, por tanto, existe $T>0$ t.q. $q_2(t)>\frac{1}{4}$, $t\in[T,+\infty)$.

Tomamos $I=(T,+\infty)$ y $q_1(t)=\frac{1}{4}$. La función $\varphi_1(t)=\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ tiene infinitos ceros en $(T,+\infty)$ $\Rightarrow$ toda solución de la ecuación de partida se anula infinitas veces en $(T,+\infty)$.

TEOREMA 2.- (DE SEPARACIÓN DE STURM). Sean $p \in C^1(I)$, $p(t) > 0$, $t \in I$ y $q \in C(I)$ y sean φ_1, φ_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$(p(t)\,y')' + q(t)\,y = 0 .$$

Entonces, entre cada dos ceros consecutivos de $\varphi_1(t)$ se anula $\varphi_2(t)$ y viceversa.

-D-

Sean t_1 y t_2 dos ceros consecutivos de φ_1. Como en el caso anterior podemos suponer que $\varphi_1(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$.

Supongamos que $\varphi_2(t)$ no se anula en (t_1, t_2), por ejemplo, que $\varphi_2(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$.

Ahora φ_1 y φ_2 cumplen respectivamente

$$\left(p(t)\,\varphi_1'(t)\right)' + q(t)\,\varphi_1(t) = 0 \quad , \; t \in (t_1, t_2)$$

$$\left(p(t)\,\varphi_2'(t)\right)' + q(t)\,\varphi_2(t) = 0 \; , \quad t \in (t_1, t_2)$$

Trabajando como en la demostración anterior se obtiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(p(t)\,\varphi_1'(t)\right)' \varphi_2(t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(p(t)\,\varphi_2'(t)\right)' \varphi_1(t)\,dt = 0 ,$$

e integrando por partes como antes,

$$p(t)\,\varphi_1'(t)\,\varphi_2(t)\Big|_{t_1}^{t_2} - p(t)\,\varphi_2'(t)\,\varphi_1(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = 0 ,$$

luego, como $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0$

$p(t_2)\,\varphi_1'(t_2)\,\varphi_2(t_2) - p(t_1)\,\varphi_1'(t_1)\,\varphi_2(t_1) = 0$, esto es,

$p(t_2)\,\varphi_1'(t_2)\,\varphi_2(t_2) = p(t_1)\,\varphi_1'(t_1)\,\varphi_2(t_1)$ y como $p(t) > 0$, $t \in I$

$\varphi_1'(t_2) < 0$ y $\varphi_1'(t_1) > 0$, al ser $\varphi_2(t) > 0$, $t \in (t_1, t_2)$, necesariamente

$\varphi_2(t_1) = \varphi_2(t_2) = 0$, lo que es imposible puesto que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ son l.i, luego

$W(\varphi_1, \varphi_2)(t) \neq 0$, $t \in I$.

Para demostrar el recíproco basta intercambiar φ_1 con φ_2.

—·—

EJ:-

1- $\varphi_1(t) = 5431 \cos t - 10^7 \operatorname{sen} t$ y $\varphi_2(t) = \operatorname{sen} t$ son dos soluciones l.i de

$x'' + x = 0$, por tanto, $\varphi_1(t)$ tiene un cero en cada intervalo $(k\pi, (k+1)\pi)$

$k \in \mathbb{Z}$.

2.- La ecuación

$$(H_n) \quad y'' - 2t y' + 2n y = 0$$

se llama ecuación de Hermite de índice n.

Para cada n, esta ecuación admite una solución que es un polinomio

de grado n (polinomios de Hermite). Por ejemplo

$n = 1 \rightarrow \quad y(t) = a + bt$

$\qquad\qquad y'(t) = b, \ y''(t) = 0$

Sustituyendo en (H_1) : $a = 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\varphi_1(t) = t$ es solución de

(H_1). Como sólo se anula en $t=0$, por el resultado anterior, toda solución

de (H_1) tiene a lo sumo 2 ceros y si una solución de (H_1) tuviese dos

ceros, necesariamente uno sería negativo y el otro positivo.

$n = 2 \rightarrow \quad y(t) = a + bt + ct^2$

$\qquad\qquad y'(t) = b + 2ct, \ y''(t) = 2c$

Sustituyendo en (H_2) : $b = 0$, $c = -2a$ $\rightsquigarrow$ $\varphi_2(t) = 1 - 2t^2$ es una

solución de (H_2). que se anula en $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si una solución $x(t)$ de

(H_2) es l.i. con $\varphi_2(t)$, necesariamente se anula en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y

tiene exactamente un cero en este intervalo; de anularse más veces debe

ser a lo sumo una antes de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y a lo sumo otra después de $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Los llamados polinomios de Hermite de grado 1 y 2 son múltiplos apropiados de las funciones φ_1 y φ_2 anteriores.

En general, para calcular el polinomio de Hermite de grado n:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k, \quad y'(t) = \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}, \quad y''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k t^{k-2}$$

Sustituyendo en (H_n):

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k t^{k-2} - 2t \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} + 2n \sum_{k=0}^{n} a_k t^k = 0,$$

o, reagrupando términos del mismo grado,

$$2\cdot 1 a_2 + 2n a_0 + \sum_{k=1}^{n-2} \left\{ (k+2)(k+1) a_{k+2} - 2(k-n) a_k \right\} t^k +$$

$$+ \left(-2(n-1) + 2n\right) a_{n-1} t^{n-1} + \left(-2n + 2n\right) a_n t^n = 0$$

$$\rightarrow \quad a_2 = -n a_0$$

$$a_{k+2} = \frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad k = 1, \dots n-2$$

$$a_{n-1} = 0$$

Por tanto, si n es par, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$, $a_{2m-1} = 0$ y todos los términos de grado impar son 0, es decir, $a_1 = a_3 = \dots = a_{2m-1} = 0$

Fijado $a_0 \rightarrow a_2 = -2m a_0$, $a_4 = \frac{2(2-2m)}{4\cdot 3} a_2 = -\frac{2^2(m-1)}{4\cdot 3} a_2 =$

$$= \frac{2^3 m(m-1)}{4\cdot 3} a_0 = \frac{2^4 m(m-1)}{4!} a_0$$

$$a_6 = \frac{2(4-2m)}{6\cdot 5} a_4 = -\frac{2^6 m(m-1)(m-2)}{6!} a_0$$

$$\hookrightarrow \quad a_{2k} = (-1)^k \, 2^{2k} \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, \dots, m.$$

El polinomio de Hermite de grado $2m$ se define con una apropiada elección del coeficiente a_0

De manera similar se calcularán los de grado impar.

La forma autoadjunta de (H_n) es

$$(H_n^*) : \left(e^{-t^2} y'\right)' + 2n e^{-t^2} y = 0$$

Llamando $q_n(t) = 2n e^{-t^2}$, si $n < m \Rightarrow q_n(t) < q_m(t)$, $t \in \mathbb{R}$

El primer teorema demostrado permite asegurar que entre cada dos ceros consecutivos de un polinomio de Hermite de grado n se anula todo polinomio de Hermite de grado superior.

Por ejemplo, el polinomio de Hermite de grado 3 debe anularse entre $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (De hecho se anula en cero porque al ser de grado impar, todos los términos pares se anulan) También cualquier otra solución de (H_n) con $n > 2$ debe anularse en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.