LOGARITMO REAL DE UNA MATRIZ REAL

DEFINICION: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$, se dice que A admite un logaritmo real si existe $L \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $e^L = A$.

- Para $n=1$, $M_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ y se trata de la función logaritmo real.
- Para $n>1$, el logaritmo no es único

EJ: Las matrices

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$$

son dos logaritmos reales de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pues $e^{L_i} = A$, $i=1,2$.

- Si A admite un logaritmo real, L,

$$\det A = \det e^L = e^{\operatorname{tr} L} > 0,$$

por tanto, una condición necesaria para que A admita un logaritmo real es que A sea no singular.

- Si $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, existe $\log x^2$. Este resultado se generaliza a $M_n(\mathbb{R})$.

Vamos a demostrar

TEOREMA: Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ con $\det A \neq 0$. Entonces, A^2 admite logaritmo real.

(Observar que la función $\log x^2$ no tiene un desarrollo en serie de potencias convergente para todo $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por tanto, no se puede hacer un desarrollo similar al de la definición de la exponencial de una matriz).

Si $x \in \mathbb{R}$, $|x|<1$, se sabe que

$$\log(1+x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p$$

y la convergencia de la serie anterior es absoluta y uniforme en $|x|<1$.

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es tal que $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A^p$ es convergente y denotamos por $S = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A^p$, cabe esperar que $e^S = I + A$.

Cuando A es nilpotente, claramente la serie anterior converge (es una suma finita). Se demuestra

<u>LEMA</u>: Sea $N \in M_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Se define $R[N] = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} N^p$. Entonces, $\exp R[N] = I + N$.

(Observar que la serie que define $R[N]$ es en realidad una suma finita).

La demostración de este lema se basa en estimaciones que se obtienen operando con las series del $\log(1+x)$ y de la exponencial en $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$

$$(1+x) = \exp(\log(1+x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} x^p \right\}^n = (*)$$

Operando formalmente, se tiene que

$$(*) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m_1+\dots+m_n=p} \left[\prod_{m_i} \frac{(-1)^{m_i-1}}{m_i} \right] x^p \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m_1+\dots+m_n=p} \left[\prod_{m_i} \frac{(-1)^{m_i-1}}{m_i} \right] \right\} x^p.$$

Se puede demostrar que las igualdades anteriores son válidas (las series que intervienen son absolutamente convergentes) y del principio de identidad para series de potencias se obtiene

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m_1+\dots+m_n=p} \left[\prod_{m_i} \frac{(-1)^{m_i-1}}{m_i} \right] = \begin{cases} 1 & \text{si } p=1 \\ 0 & \text{si } p>1 \end{cases}$$

Si se repiten los mismos cálculos para la exponencial de $R[N]$ (ahora las series son en realidad sumas finitas y no hay problemas con las reordenaciones), teniendo en cuenta (1), se obtiene que

$\exp R[N] = I + N.$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA.-

Sea J la forma canónica real de A; si $A = PJP^{-1}$, $A^2 = PJ^2P^{-1}$. Para encontrar un logaritmo real de A^2, basta con encontrar un logaritmo real de J^2 pues si $V \in M_n(\mathbb{R})$ verifica $e^V = J^2$, la matriz $L = PVP^{-1}$ es real y $e^L = Pe^VP^{-1} = PJ^2P^{-1} = A^2$, luego L es un logaritmo real de A^2.

Vamos a demostrar que J^2 admite un logaritmo real. Sea

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_k & & & \\ & & & \mathcal{Y}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathcal{Y}_r \end{pmatrix}$$

con $J_i = (\lambda_i I + N_i)$ bloque de Jordan asociado al valor propio real λ_i,

$\mathcal{Y}_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & I_2 & & \\ & \Lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \Lambda_j \end{pmatrix}$ bloque de Jordan asociado a los valores propios complejos $a_j \pm i b_j$

$\left(\Lambda_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}, \ b_j \neq 0 \right).$

Entonces,

$$J^2 = \begin{pmatrix} J_1^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_k^2 & & & \\ & & & \mathcal{Y}_1^2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathcal{Y}_r^2 \end{pmatrix}$$

Si L_i es un logaritmo de J_i^2 y $\mathcal{L}_j$ es un logaritmo de $\mathcal{Y}_j^2$, por las propiedades de la exponencial, la matriz

$$V = \begin{pmatrix} L_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & L_k & & & \\ & & & \mathcal{L}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathcal{L}_r \end{pmatrix}$$

es un logaritmo de J^2.

Vamos a ver como se calcula el logaritmo de cada uno de los bloques de Jordan

(1).- <u>Logaritmo de J_i^2</u>.

Formalmente, $J_i^2 = \lambda_i^2 \left(I + \frac{N_i}{\lambda_i}\right)^2 \rightsquigarrow \log J_i^2 = (\log \lambda_i^2) I + 2 \log\left(I + \frac{N_i}{\lambda_i}\right) =$
$= (\log \lambda_i^2) I + 2R[N_i/\lambda_i]$.

Sea $L_i = (\log \lambda_i^2) I + 2R\left[\frac{N_i}{\lambda_i}\right]$. Vamos a comprobar que $e^{L_i} = J_i^2$.

$$e^{L_i} \underset{\substack{\uparrow \\ (\log \lambda_i^2) I \text{ conmuta con } 2R[N_i/\lambda_i]}}{=} \lambda_i^2 e^{2R[N_i/\lambda_i]} = \lambda_i^2 \left(e^{R[N_i/\lambda_i]}\right)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{lema}}}{=} \lambda_i^2 \left(I + \frac{N_i}{\lambda_i}\right)^2$$

$\Rightarrow L_i$ es un logaritmo real de J_i^2.

(2).- <u>Logaritmo de Λ</u>

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ b \neq 0$$

Supongamos en primer lugar que $a \geq 0$. Sea

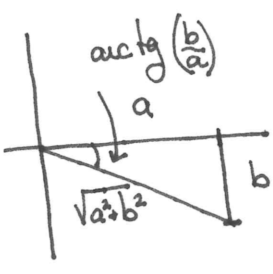
$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \log\sqrt{a^2+b^2} & \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \\ -\operatorname{arctg}\frac{b}{a} & \log\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$$

con $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$. Vamos a comprobar que $e^{\mathcal{L}} = \Lambda$.

$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, con $\mathcal{L}_1 = (\log\sqrt{a^2+b^2}) I$, $\mathcal{L}_2 = \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ conmutan,

$$e^{\mathcal{L}} = e^{\mathcal{L}_1} e^{\mathcal{L}_2} = (\sqrt{a^2+b^2}) I \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) & \operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) & \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) \end{pmatrix} =$$



$$= \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} = \Lambda .$$

Si $a<0$, $\Lambda = -I\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$

$\log \Lambda = \log(-I) + \log\begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$; y $\log(-I) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$

(3).- Logaritmo de $\mathcal{Y}_j$

$$\mathcal{Y}_j = \begin{pmatrix} \Lambda_j & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_j \end{pmatrix}\left[I + \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_j^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \Lambda_j^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O_2 & I_2 & & \\ & O_2 & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & O_2 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotente}} \right]$$

$\Rightarrow$ ~~$\log \mathcal{Y}_j =$~~ Sea

$$\mathcal{L}_j = \begin{pmatrix} M_j & & \\ & \ddots & \\ & & M_j \end{pmatrix} + R\left[\begin{pmatrix} O_2 & \Lambda_j^{-1} & & \\ & O_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \Lambda_j^{-1} \\ & & & O_2 \end{pmatrix}\right]$$

con $e^{M_j} = \Lambda_j$. Se comprueba que $e^{\mathcal{L}_j} = \mathcal{Y}_j$.

Pero entonces, $e^{2\mathcal{L}_j} = \mathcal{Y}_j^2$, luego $2\mathcal{L}_j$ es un logaritmo de $\mathcal{Y}_j^2$.

OBSERVACION:

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y todos los valores propios de A ~~son~~ reales son positivos, se puede repetir el razonamiento anterior con todos los bloques de Jordan de A. (Si $J = \lambda I + N$ es un bloque de Jordan asociado a un valor propio real, $\lambda > 0$, luego $L = (\log\lambda) I + R[N/\lambda]$ es un logaritmo real de J). Se tiene pues

- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ y todos los valores propios de A reales son positivos

$\Rightarrow$ A admite un logaritmo real.