FORMA CANÓNICA REAL DE JORDAN

Dada $A \in M_N(\mathbb{R})$, denotaremos $\sigma(A)$ al conjunto de todos sus valores propios o espectro, es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p(\lambda) := \det(A - \lambda I_N) = 0\}.$$

Si $\lambda \in \sigma(A)$, denotaremos:

- $m(\lambda) \equiv$ multiplicidad algebráica de λ, es decir, multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico, $p(\lambda) = 0$.
- $\nu(\lambda) \equiv$ multiplicidad geométrica de λ, esto es, $\dim \ker(A - \lambda I_N)$.
- $\nu_k(\lambda) := \dim \ker (A - \lambda I_N)^k$.

Observa que $\nu(\lambda) \leq m(\lambda)$, $\nu(\lambda) = \nu_1(\lambda)$ y $\nu_{m(\lambda)}(\lambda) = \nu_{m(\lambda)+n}(\lambda)$, $n = 1, 2 \ldots$

TEOREMA: $\exists P \in M_N(\mathbb{R})$, $\det P \neq 0$ y $J \in M_N(\mathbb{R})$ diagonal por bloques, es decir, $J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_S, L_1, \ldots L_r)$, tales que

$$A = PJP^{-1}$$

J se denomina "forma canónica real" de A y a cada uno de los bloques J_i, $i = 1, \ldots s$, L_j, $j = 1, \ldots r$, "bloques elementales" de Jordan

J viene determinada por las siguientes propiedades:

1: Cada uno de los bloques elementales, J_i, está asociado a un mismo valor propio real, $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$, y es de la forma

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_{p_i} + N_{p_i}$$

siendo $N_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Los bloques L_j están asociados a un mismo par de valores complejos conjugados, $\lambda, \bar{\lambda} \in \sigma(A)\setminus\mathbb{R}$ y, si $\lambda = a+ib$, $b>0$,

$$L_j = \begin{pmatrix} \Lambda & I_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ O_2 & \Lambda & I_2 & \cdots & O_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ O_2 & \cdots & & \Lambda & I_2 \\ O_2 & \cdots & & O_2 & \Lambda \end{pmatrix} \quad \text{siendo } \Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

2.- Cada valor propio real λ se repite exactamente $m(\lambda)$ veces en la diagonal de J y para cada valor propio complejo, $\lambda = a+ib$, $b>0$, el bloque $\Lambda = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ aparece exactamente $m(\lambda)$ veces en la diagonal de J.

3.- El número de bloques elementales correspondiente al valor propio λ es $\nu(\lambda)$.

4.- El número de bloques elementales de dimensión ℓ, si λ es real, o de dimensión 2ℓ, cuando $\lambda = a+ib$, $b>0$, viene dado por

$$2\nu_\ell(\lambda) - \nu_{\ell-1}(\lambda) - \nu_{\ell+1}(\lambda) \quad , \quad 1 \leq \ell \leq m(\lambda)$$

tomando $\nu_0(\lambda) = 0$, por definición.

La forma canónica real de Jordan de una matriz es única, salvo reordenación de los bloques.