ECUACIONES DIFERENCIALES I
Grado en Informática y Matemáticas
Curso 2014-15

Relación de ejercicios 3: **La ecuación lineal II**

1.- Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $x' = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 14 \\ 4 & 3 & -8 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$,

(b) $x' = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

(c) $x' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$,

(d) $x' = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix} x$.

Obtener además las soluciones de los PVI para (b) y (c) con condiciones iniciales

$$x(0) = (0,0,1)^T \quad \text{y} \quad x(0) = (0,1)^T ,$$

respectivamente.

2.- Hallar una base del espacio vectorial de soluciones de $x' = A_i\, x$, $1 \le i \le 3$, en cada uno de los siguientes casos:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- Sea $A : I \to M_N(\mathbb{R})$ continua tal que $A(t)A(s) = A(s)A(t)$. Demostrar los siguientes enunciados:

(a) $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\, ds$ conmutan.

(b) Si $A \in C^1(I)$ entonces A y A' conmutan.

(c) Si $A \in C^1(I)$ entonces

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = A'(t) e^{A(t)} = e^{A(t)} A'(t) .$$

(d) Como consecuencia del apartado anterior, demostrar que si A y B conmutan entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B \, .$$

(e) Si $A(t)$ y $\int_0^t A(s)\,ds$ conmutan, entonces $F(t) = e^{\int_0^t A(s)\,ds}$ es una matriz fundamental de $x' = A(t)x$. Calcular la matriz fundamental del sistema lineal homogéneo cuya matriz es

$$A(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -t & t^2 \end{pmatrix} .$$

4.- Se considera la ecuación diferencial lineal $x' = Ax$ con $A \in M_N(\mathbb{R})$. Demostrar que si Φ es una matriz solución de dicha ecuación, también lo es $\Phi^{(m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ¿Se puede asegurar que si Φ es una matriz fundamental de la ecuación, entonces $\Phi^{(m)}$ también lo es? Dar un ejemplo que justifique la respuesta. Demostrar también que si A es una matriz nilpotente, entonces $\Phi^{(p)} = 0$ para cualquier p tal que $A^p = 0$ y, como consecuencia, todos los coeficientes de $\Phi(t)$ son polinomios.

5.- Sea $A \in M_N(\mathbb{R})$ y consideremos la ecuación diferencial matricial

$$X' = AX - XA \tag{1}$$

con la condición inicial $X(0) = X_0 \in M_N(\mathbb{R})$. Se pide:

(a) Demostrar que el PVI anterior tiene una única solución definida en $\mathbb{R}$.

(b) Demostrar que el PVI anterior es equivalente a la ecuación integral

$$X(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X(s)A\,ds \, ,$$

donde $X : \mathbb{R} \to M_N(\mathbb{R})$ es continua.

(c) Se define la sucesión

$$X_{n+1}(t) = e^{At}X_0 - \int_0^t e^{A(t-s)}X_n(s)A\,ds$$

para $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$ y donde $X_0(t) = e^{At}X_0$. Demostrar que X_n converge a la solución del PVI y que la convergencia es uniforme sobre compactos.

(d) Se efectúa en la ecuación (1) el cambio de variable $X(t) = Y(t)e^{-At}$. Resolver la ecuación en Y y obtener como consecuencia una expresión explícita de la solución del PVI para la ecuación (1).

(e) Supongamos que los valores propios de A están en el eje imaginario y son simples. Demostrar entonces que todas las soluciones de (1) están acotadas en $(-\infty, \infty)$.

6.- Se considera el problema de valores iniciales

$$x' = tAx \, , \quad x(0) = x_0 \, , \tag{2}$$

donde $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(a) Justificar que (2) tiene una única solución definida en $I\!R$.

(b) Construir la sucesión de iterantes de Picard asociada a (2).

(c) Utilizando el apartado anterior, encontrar la solución de (1) y expresarla en términos de la exponencial de una matriz.

7.- Dada una matriz $A \in M_N(I\!R)$ se define su seno por medio de la serie

$$\mathrm{sen(A)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}\,.$$

Probar que

(a) La serie dada es convergente y por tanto el seno de una matriz está bien definido.

(b) $\|\mathrm{sen(A)}\| \leq e^{\|A\|} \quad \forall\, A \in M_N(I\!R)\,.$

(c) La función $t \in I\!R \to \mathrm{sen}\ (tA) \in M_N(I\!R)$ es de clase C^2 y satisface la ecuación matricial $X'' + A^2 X = 0$.

(d) Calcular sen (tA) para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.- Dada una matriz $A \in M_N(I\!R)$, ¿cómo deben definirse las funciones hiperbólicas $\mathrm{senh}(A)$ y $\cosh(A)$? ¿Se satisface la identidad $\cosh(A)^2 - \mathrm{senh}(A)^2 = I_N$?

9.- Sean
$$u(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\mathrm{sen}(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\, d\sigma\,, \quad v(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma}\cos(t\sigma)}{\sqrt{\sigma}}\, d\sigma\,.$$

Demostrar que $(u, v)^T$ es solución de un sistema lineal homogéneo y resolver dicho sistema[1].

10.- Sea $\varphi \in C^1(I\!R, I\!R^N)$ solución del sistema $x' = Ax$ con $A \in M_N(I\!R)$. Demostrar que $t\varphi(t)$ es solución de $x' = Ax + \varphi(t)$ y aplicar este resultado para resolver

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

[1]Recuérdese que $\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$