ZADACA2

3.

4.) Prvo izračunamo nekoliko početnih vrijednosti:

$$f(k,0) = h(k) + 0 = c + 0$$
$$f(k,1) = f(0) + 1 = h(k) + 1 = c + 1$$
$$f(k,2) = f(1) + 2 = f(0) + 1 + 2 = h(k) + 3 = c + 3$$
$$f(k,3) = f(2) + 3 = f(1) + 2 + 3 = f(0) + 1 + 2 + 3 = h(k) + 6 = c + 6$$

Općenito: $f(k,i) = f(k,i-1) + i$

Indukcija:

$$f(k,i) = h(k) + \sum_{j=0}^{m} j = h(k) + \frac{m(m+1)}{2}$$

Ako uzmemo $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, imamo:

$$f(k,i) = h(k) + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i^2$$

Za svaki i dobijemo različite vrijednosti

5.) Pretpostavimo suprotno. Postoje dvije različite vrij. a i b t.d. $0 \leq a < b < m$.

$$f(k,a) = f(k,b) \bmod m: \quad h(k) + \frac{a(a+1)}{2} = h(k) \frac{b(b+1)}{2} \bmod m$$

$$\frac{a(a+1)}{2} = \frac{b(b+1)}{2} \bmod m$$

$$\frac{a(a+1)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = 0 \bmod m$$

$$\frac{a^2 + a - b^2 - b}{2} = 0 \bmod m$$

$$\frac{a^2 + a + ab - b^2 - b + b}{2} = 0 \bmod m$$

$$\frac{(a-b)(a+b+1)}{2} = 0 \bmod m$$

Prema tome $\exists r$ t.d. vrijedi:

$$(a-b)(a+b+1) = 2rm$$

m je potencija broja 2, pa $\exists p$ t.d. $m = 2^p$ i imamo:

$$(a-b)(a+b+1) = r \cdot 2^{p+1}$$

a i b su brojevi što znači da je jedan od brojeva $(a-b)$ i $(a+b+1)$ paran, a drugi je neparan, što znači da je jedan od njih djeljiv s 2^{p+1}, a to je kontradikcija jer:

$(a-b)$ nije djeljiv s 2^{p+1} jer vrijedi:

$$a-b < m < 2^{p+1}$$

i $(a+b+1)$ nije djeljiv s 2^{p+1} jer vrijedi:

$$a+b+1 \leq (m-1)+(m-2)+1 = 2m-2 < 2^{p+1}$$

Dakle, za $0 \leq a < b < m$ vrijedi $f(k,a) \neq f(k,b)$, što znači da algoritam pretraživanja pretraži svaku poziciju u tablici