ZADAĆA 1.

1.

1.a) 77, 69, 39, 70, 6, 8, 40, 89, 49, 15 , $m = 19$

$h(77) = 77 \bmod 19 = 1$

$h(69) = 69 \bmod 19 = 12$

$h(39) = 1$

$h(70) = 13$

$h(6) = 6$

$h(8) = 8$

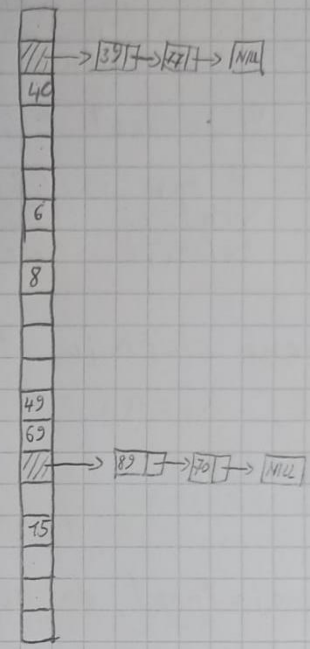
$h(40) = 2$

$h(89) = 13$

$h(49) = 11$

$h(15) = 15$

⇒



1.b)

$h(77,0) = (h_1(77) + 0 \cdot h_2(77)) \bmod 19 = 1$

$h(69,0) = h_1(69) \bmod 19 = 12$

$h(39,0) = h_1(39) \bmod 19 = 1$

$h(39,1) = (h_1(39) + 1 \cdot h_2(39)) \bmod 19 = 5$

$h(70,0) = h_1(70) \bmod 19 = 13$

$h(6,0) = h_1(6) \bmod 19 = 6$

$h(8,0) = h_1(8) \bmod 19 = 8$

$h(40,0) = h_1(40) \bmod 19 = 2$

$h(89,0) = h_1(89) \bmod 19 = 13$

$h(89,1) = (h_1(89) + 1 \cdot h_2(89)) \bmod 19 = 12$

$h(89,2) = (h_1(89) + 2 \cdot h_2(89)) \bmod 19 = 11$

$h(49,0) = h_1(49) \bmod 19 = 11$

$h(49,1) = (h_1(49) + 1 \cdot h_2(49)) \bmod 19 = 6$

$h(49,2) = (h_1(49) + 2 \cdot h_2(49)) \bmod 19 = 1$

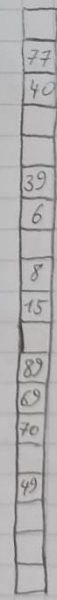
$h(49,3) = (h_1(49) + 3 \cdot h_2(49)) \bmod 19 = 15$

$h(15,0) = h_1(15) \bmod 19 = 15$

$h(15,1) = (h_1(15) + 1 \cdot h_2(15)) \bmod 19 = 12$

$h(15,2) = (h_1(15) + 2 \cdot h_2(15)) \bmod 19 = 9$

⇒



2.) Da bi f-ja $f(x)$ bila univerzalna, mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. Funkcija mora biti definirana za sve moguće ulaze x, tj. svi n-znamenkasti decimalni brojevi s decimalnim znamenkama $\{0, 1, \dots, 9\}$.
2. Vrijednost f-je $f(x)$ moraju biti $\in \mathbb{Z}$
3. $\forall$ par različitih ulaza x i y, vjerojatnost da će f-ja vratiti istu vrijednost za oba ulaza, tj. vjerojatnost kolizije, mora biti jednaka $1/m$, m - broj mogućih izlaza f-je

U ovom slučaju f-ja nije univerzalna jer za npr.:

$n = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ i za npr. 12 i 83

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 \bmod 8 = 3$$

$$8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 11 \bmod 8 = 3$$

Vjerojatnost da se preslikaju u isto je $1 > \frac{1}{8}$.

(2.) Ako definiramo slučajnu varijablu X koja modelira vjerojatnost kolizije za $0, \dots, n-1$ ključeva:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \cdots & \frac{n-1}{m} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow EX = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{m} = \frac{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}{m} = \frac{n^2 - n}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{m}$$

Očekivani broj kolizija je proporcionalan broju ključeva kvadratno.

3.

1.) Za i-to ubacivanje ključa, vjerojatnost da zahtijeva strogo više od k probiranja jednaka je vjerojatnosti da prvih k-1 mjesta v tablici već bude zauzeto. Vjerojatnost da prvo mjesto bude zauzeto je n/m, drugo mjesto $(n-1)/(m-1)$ (jer se već zauzelo jedno mjesto), treće $(n-2)(m-2)$,... stoga je vjerojatnost da zahtjeva više od k probiranja:

$$P\{X_i > k\} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-k+1}{m-k+1}$$

Kako vrijedi $n \leq m/2$, za $k = \lfloor \lg n \rfloor$, dobivamo:

$$P\{X_i > \lfloor \lg n \rfloor\} \leq \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-\lfloor \lg n \rfloor + 1}{m-\lfloor \lg n \rfloor + 1} \leq \frac{n}{m} \cdot \frac{n}{m} \cdots \frac{n}{m} = \cdots$$

$$\cdots = \left(\frac{n}{m}\right)^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq 2^{-\frac{\lfloor \lg n \rfloor}{2}} \leq 2^{-\frac{k}{2}}$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je umnožak manji od $(\frac{n}{m})^k$ jer je svaki član umnoška $\leq \frac{n}{m}$

2.) Vjerojatnost da i-to ubacivanje zahtijeva više od $2 \lg n$ probiranja je:

$$\leq 2^{-2\lg n} = 2^{\lg n^{-2}} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3.) Ako je $X = \max\{X_i : 1 \leq i \leq n\}$,

$$P\{X > 2\lg n\} = P\{X_i > 2\lg n \vee X_2 > 2\lg n \vee \cdots \vee X_n > 2\lg n\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\{X_i > 2\lg n\} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n}\right)$$

4.) $$EX = \sum_{i=1}^{n} i \cdot P\{X = i\} \leq P\{X \leq 2\lg n\}\, 2\lg n + P\{X > 2\lg n\}\, n \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \frac{n-1}{n} 2\lg n + \frac{1}{n} \cdot n = 2\lg n + 1 - \frac{2\lg n}{n} \in O(\lg n)$$