**Problema:** Siga un algoritme paral·lel que compleix la Llei de Amdahl per a l'acceleració on el paràmetre **α** (part no paral·lelitzable de l'algoritme) segueix la següent expressió: $\alpha(p,n) = p/n^2$, on $p$ és el nombre de processadors i $n$ és la grandària del problema.

a) (1) Calculeu l'expressió de l'acceleració $S(n,p)$ per a este algoritme i explica com l'has obtingut.
b) (.5) Calculeu els límits de la eficiència $E(n,p)$ de l'algoritme quan ($n \rightarrow \infty$) i quan ($p \rightarrow \infty$).
c) (1) $S(n,p)$ és una funció lineal respecte de $p$, o pot tindre algun màxim? Calculeu-lo per a qualsevol $p$.

a) Com $\alpha(p,n) = p/n^2$ i que la llei de Amdahl per a l'acceleració té la següent expressió: $S(n,p) = \frac{T(n,1)}{T(n,p)} = \frac{T(n,1)}{\alpha T(n,1) + \frac{(1-\alpha)T(n,1)}{p}}$, es sustitueix el valor de α pel de la expressió i queda

$$S(n,p) = \frac{1}{\alpha + \frac{(1-\alpha)}{p}} = \frac{p}{p\alpha + (1-\alpha)} = \frac{p}{p\left(\frac{p}{n^2}\right) + 1 - \left(\frac{p}{n^2}\right)} = \boldsymbol{\frac{p\,n^2}{n^2 + p(p-1)}}$$

b) Com que l'eficiència ve donada per l'expressió $E(n,p) = S(n,p)/p$, tenim que $E(n,p) = \frac{p\,n^2}{p(n^2+p(p-1))} = \frac{n^2}{n^2+p(p-1)}$. Per tant els límits que ens demanen seran:

$$\lim_{n\to\infty} E(n,p) = \frac{n^2}{n^2 + p(p-1)} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$
$$\lim_{p\to\infty} E(n,p) = \frac{n^2}{n^2 + p(p-1)} = \frac{n^2}{p^2} = 0$$

c) $S(n,p)$ no és una funció lineal respecte de $p$, ja que apareix un terme lineal però també un terme inversament quadràtic. Per tant, pot tindre un màxim que podem calcular obtenint la primera derivada de $S(n,p)$:

$$S'(n,p) = \frac{d}{dp}\left(\frac{p\,n^2}{n^2+p(p-1)}\right) = \frac{n^2}{n^2+p(p-1)} - \frac{p\,n^2(2p-1)}{(n^2+p(p-1))^2},$$

i igualant-la a cero, d'on ens queda que:

$$\frac{n^2}{n^2+p(p-1)} - \frac{p\,n^2(2p-1)}{\left(n^2+p(p-1)\right)^2} = 0 \rightarrow \frac{n^2}{n^2+p(p-1)} = \frac{p\,n^2(2p-1)}{(n^2+p(p-1))^2} \rightarrow$$
$$1 = \frac{p(2p-1)}{n^2+p(p-1)} \rightarrow n^2 + p(p-1) = p(2p-1) \rightarrow n^2 + p^2 = 2p^2 \rightarrow \boldsymbol{n^2 = p^2}$$

Ja que p es distint de cero i que sols té sentit una solució positiva, hi haurà un màxim quan es complisca que $p = n$. No és necessària la segona derivada per vore que es tracta d'un màxim, ja que en l'expressió de $S(n,p)$ el terme lineal multiplica $n^2$, mentre que el terme inversament quadràtic està sumant a $n^2$, i ja que $n >> 1$, el terme numerador serà major que el denominador fins que p tinga un valor equiparable a n. En eixe cas tenim que

$$S(n,p) = \frac{n\,n^2}{n^2+n(n-1)} = \boldsymbol{\frac{n^2}{2n-1}}$$

**Problema:** Es vol paral·lelitzar, per a un sistema multiprocessador el següent segment de codi:

```
for (i = 0; i < n; i++){
  ···  //codi per a cada iteració
}
```

L'execució de cadascuna de las iteracions del bucle, sense dependència de dades, suposa un temps d'execució $2\cdot(i+1)\cdot t_c$, on $t_c$ és el temps d'execució d'una instrucció. En l'execució paral·lela, la inicialització, comunicació i sincronització de $p$ processos suposa un temps $(1 + \log p) \cdot t_c$. Es considera que $n>>p$.

a) (1) Obteniu l'expressió de la funció d'isoeficiència. Comenta cóm s'ha obtingut.
b) (1) Calculeu la relació R/C per a este algoritme i obteniu el seu valor asimptòtic per a $n$.
c) (1) Donat l'execució d'este algoritme amb $p$ processadors per a una mida $n$, indica quin hauria de ser el nombre de processadors $p'$ perquè es mantingués igual la eficiència al executar-lo amb la mida del problema $n'= 4n$. Descriviu cóm s'ha obtingut.

a) Com que cadascuna de les n iteracions del bucle tenen una cost $2\cdot(i+1)\cdot tc$, on i és el nombre de la iteració, el cost seqüencial de l'algoritme serà:

$$W(n,1) = \sum_{i=0}^{n-1} 2(i+1)t_c = \sum_{i=1}^{n} 2it_c = 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)t_c = n(n+1)t_c$$

Llavors $S(n,p)$ serà:

$$S(n,p) = \frac{n(n+1)t_c}{\frac{n(n+1)}{p}t_c + (1+\log_2 p)\,t_c}$$

I la eficiència

$$E(n,p) = S(n,p)/p = \frac{n(n+1)t_c}{n(n+1)t_c + p(1+\log_2 p)t_c} = \frac{n(n+1)t_c}{n(n+1)t_c + p\log_2(2p))t_c}$$

Si substituïm per $W(n,1)$ y l'aïllem, obtenim la funció d'Isoeficiència:

$$\boldsymbol{W(n,1) = \left(\frac{E}{1-E}\right)\cdot p\log_2(2p)\;t_c}.$$

b) La relació R/C per a este algoritme és la relació entre el cost computacional del algoritme paral·lel i el sobrecost per la inicialització, comunicació i sincronització dels p processos:

$$R/_C = \frac{\frac{n(n+1)}{p}}{(1+\log_2 p)} = \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{p(1+\log_2 p)}}$$

El seu valor asimptòtic per a n serà de: **$O(n^2)$**

c) Ens demanen el valor de p' perquè es mantinga l'eficiència quan n'= 4n .

Com $W(n,1) = n(n+1)\,t_c$, Per al cas n' tenim que $W(n',1) = n'(n'+1)\,t_c = 4n(4n+1)\,t_c$.

La funció d'isoeficiència te l'expressió $W(n,1) = \left(\frac{E}{1-E}\right)\cdot p\log_2(2p)t_c$, i donat que $n \gg p \geq 1$ tenim que:

$$\frac{W(n',1)}{W(n,1)} = \frac{p'\log_2(2p')}{p\log_2(2p)}. \rightarrow \frac{n'(n'+1)}{n(n+1)} \cong \frac{n'^2}{n^2} = \frac{16n^2}{n^2} = \mathbf{16} = \boldsymbol{\frac{p'\log_2(2p')}{p\log_2(2p)}}.$$

No hi ha solució exacta sempre per a aquesta equació, però podem vore alguns resultats per a alguns valors de p i les aproximacions que tindríem:

p= 2 → $p'\log_2(2p') = 16p\log_2(2p) = 16*2*2 = 64$ → p' = 13,46

p= 4 → $p'\log_2(2p') = 16p\log_2(2p) = 16*4*3 = 192$ → p' = 32

p= 8 → $p'\log_2(2p') = 16p\log_2(2p) = 16*2*4 = 512$ → p' = 71,5