Modelo de Ising en 2D

Hernadez, Jordan

Universidad de Antioquia

November 6, 2022

Contenido

El **Modelo de ising** sirve para describir transiciones de fase de sistemas magnéticos por medio del Hamiltoniano de Heisenberg. Para un sistema que consiste de una red bidimensional de espines, el Hamiltoniano por espín viene dado por:

$$\mathcal{H}_i = -J\sigma_i \sum_{(j)} \sigma_j - \sigma_i H_i \tag{1}$$

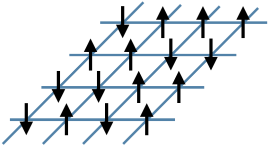

Figure: Malla.

La solución de la ecuación (1) requiere estar sujeta a unas condiciones de frontera bien definidas:

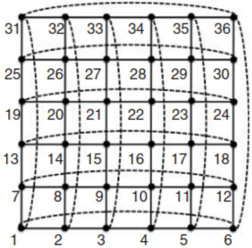

Figure: Condiciones de frontera.

Metrópolis

Para aplicar el algoritmo de metrópolis se debe cumplir la condición de equilibrio detallada que para este caso es:

$$\frac{P(\mu \to \nu)}{P(\nu \to \mu)} = \frac{p_\nu}{p_\mu} = \frac{\frac{1}{Z} e^{-\beta E_\nu}}{\frac{1}{Z} e^{-\beta E_\mu}} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \tag{2}$$

Donde $\frac{P(\mu \to \nu)}{P(\nu \to \mu)}$ puede expresarse como:

$$\frac{g(\mu \to \nu)A(\mu \to \nu)}{g(\nu \to \mu)A(\nu \to \mu)} = e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} \tag{3}$$

Metrópolis

Se debe considerar la probabilidad de transición del estado μ al estado ν esta dado por:

$$A(\mu \to \nu) = \begin{cases} e^{-\beta(E_\nu - E_\mu)} & \text{if } E_\nu > E_\mu \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4}$$

El primer paso consiste el estado actual μ, a partir de esto se elije una particula al azar en la red y se cambia la orientación del espín (estadoν). Y queremos calcular la probabilidad $A(\mu \to \nu)$ de aceptar este nuevo estado. Y para esto generamos un numero aleatorio u y lo comparamos con la probalidad $A(\mu \to \nu)$ tal que si $u < A(\mu \to \nu)$ entonces se acepta el cambio de espín y de estado.

Algortimo de Wolf

A diferencia del caso Metrópolis, el algoritmo de Wolff es un algoritmo de agrupamiento, es decir, un agrupamiento completo de espines se voltea en cada movimiento en lugar de uno solo. Entonces para este algoritmo la condición de balance detallado es:

$$\frac{P(\nu \to \mu)}{P(\mu \to \nu)} = \frac{g(\nu \to \mu)A(\nu \to \mu)}{g(\mu \to \nu)A(\mu \to \nu)} = (1 - P_{\text{add}})^{n-m} \frac{A(\nu \to \mu)}{A(\mu \to \nu)} = e^{-\beta(E_\mu - E_\nu)} \tag{5}$$

Donde m y n son es el número de enlaces creados/destruidos para pasar de un estado al otro.

$$\frac{A(\nu \to \mu)}{A(\mu \to \nu)} = \left[(1 - P_{\text{add}})\, e^{2\beta,}\right]^{m-n} \tag{6}$$

$$P_{\text{add}} = 1 - e^{-2\beta J} \tag{7}$$

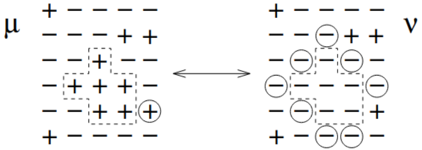

Figure: Clustering algorithm .

Observables

$$
\begin{gathered}
E=-J\sum_{i=1}^{N-1}\sigma_i\sigma_{i+1} \\
C=\frac{\beta^2}{N}\left[\left\langle E^2\right\rangle-\langle E\rangle^2\right] \\
M=\sum_i\frac{\sigma_i}{N}
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Exponent	Definition	Ising Value
α	$C \quad \propto (T-T_c)^{-\alpha}$	0
β	$M \quad \propto (T_c-T)^{\beta}$	1/8
γ	$\chi \quad \propto (T-T_c)^{-\gamma}$	7/4

Figure: Observables y exponentes criticos.

Resultados

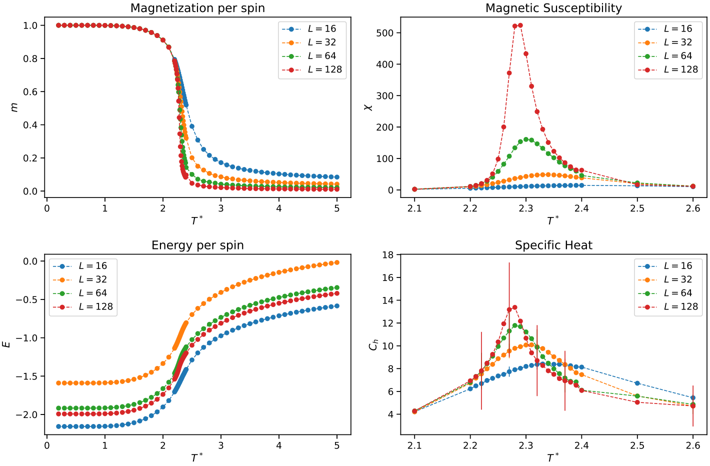

Figure: Observables .

Resultados

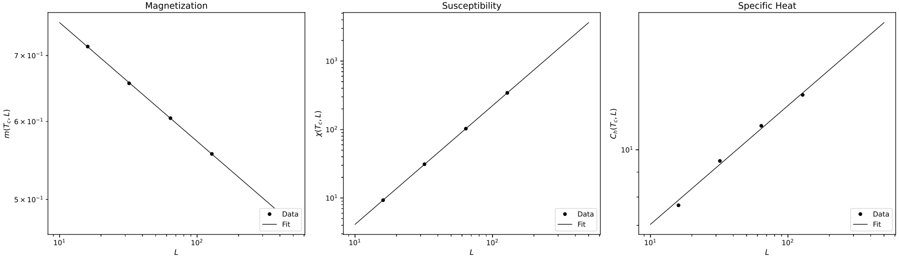

Figure: Ajuste a exponentes criticos .

Bibliografía

Richard L. Burden (2011)
Numerical Analysis

Raúl Toral, Pere Colet(2014)
Stochastic Numerical Methods: An Introduction for Students and Scientists

E. Carlon
Advanced Monte Carlo Methods