INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA MINAS GERAIS Campus Formiga

Graduação em Engenharia Elétrica

Disciplina: Algoritmos 1

Professor: Walace de Almeida Rodrigues

Atividade: Trabalho Prático 1

1 Motivação

Seja $f(x)$ uma função integrável no intervalo $[a, b]$. A integral definida nesse intervalo é denotada por

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

onde $F'(x) = f(x)$. Nem sempre a forma analítica de $F(x)$ é de fácil obtenção. Em outros casos, não dispomos da função $f(x)$, mas sim de alguns valores discretos de $f(x)$ conhecidos. Para estes casos podemos utilizar um método de integração numérica para estimar o valor de $\int_a^b f(x)\,dx$. Este trabalho prático propõe a implementação de um método numérico simples, mas útil, para calcular a integral numérica de funções usando aproximações por área de trapézios. Nele pretende-se aplicar os conhecimentos de programação em linguagem C, modularização e documentação do código. O trabalho prático poderá ser desenvolvido em grupo de 3 integrantes cada. Os grupos podem e devem procurar o professor da disciplina para tirar dúvidas e buscar orientação para realizar o trabalho.

2 Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

- Modelar uma aplicação de software usando os conhecimentos adquiridos na disciplina Algoritmos I, em especial aqueles referentes ao uso dos principais constructos da linguagem C: estruturas de repetição, estruturas de decisão, uso de variáveis, uso de vetores, funções com ou sem retorno;
- Aplicar os conhecimentos de programação em um problema real de engenharia;
- Estimular o trabalho em equipe, a divisão de tarefas, a co-responsabilidade.

3 Regra do Trapézio

O cálculo de integral numérica pela regra do trapézio consiste em, dados uma função $f(x)$ e um intervalo $[a, b]$, estimar a área sobre a curva $f(x)$ aproximando-a por meio da área de um ou mais trapézios. Quanto mais trapézios forem adotados, melhor será a aproximação da curva. Para exemplificar, seja a integral definida

$$\int_{0.4}^{2.0} e^x sin(10x) + 8 \; dx = 12.48287$$

As figuras Fig 1 a Fig 6 apresentam o gráfico da função no intervalo $[0.4, 2.0]$, a área do(s) trapézio(s) usado(s) na integração numérica e o valor da aproximação de $f(x)$ para 1, 2, 5, 10, 25 e 100 trapézios. Todos os resultados numéricos apresentados nessas figuras estão disponíveis na tabela que as segue.

Observe que quanto mais trapézios são empregados na integração, mais o resultado calculado se aproxima do resultado analítico 12.48287, e menor é o erro absoluto entre o valor analítico e o valor estimado.

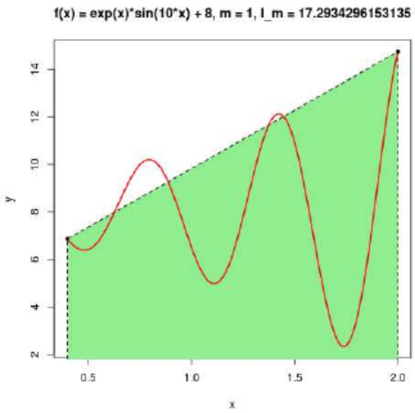

Figura 1: $m = 1, \int f(x) \approx 17.29342$

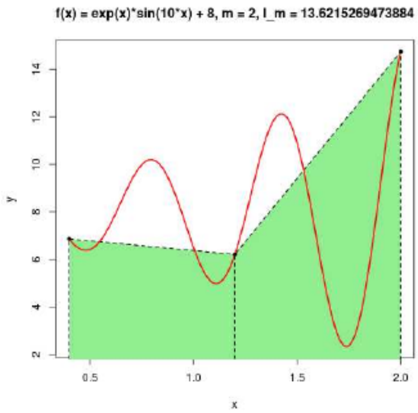

Figura 2: $m = 2, \int f(x) \approx 13.62152$

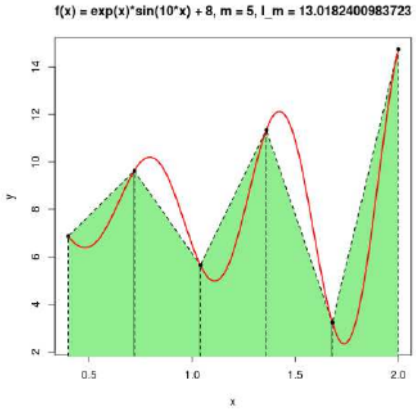

Figura 3: $m = 5, \int f(x) \approx 13.01824$

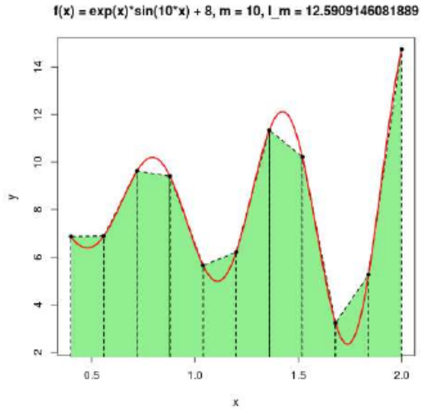

Figura 4: $m = 10, \int f(x) \approx 12.59091$

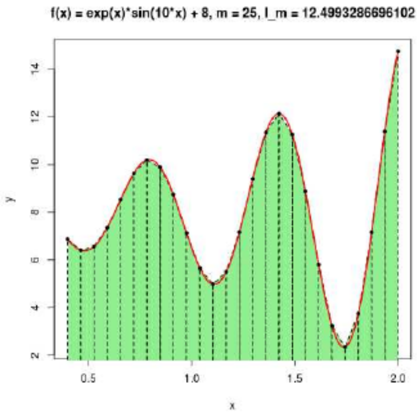

Figura 5: $m = 25, \int f(x) \approx 12.49932$

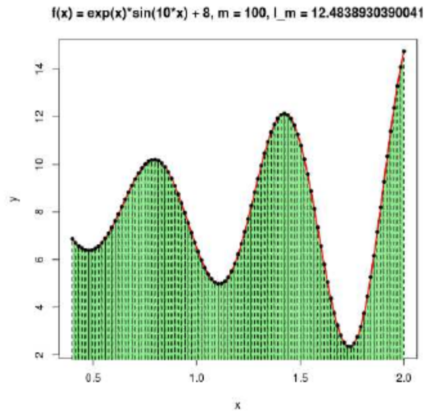

Figura 6: $m = 100, \int f(x) \approx 12.48389$

No. Trapézios	Int. Numérica	Erro Absoluto
1	17.29342	4.81055
2	13.62152	1.13865
5	13.01824	0.53537
10	12.59091	0.10804
25	12.49932	0.01645
100	12.48389	0.00102

4 Especificação

Esta seção apresenta a especificação do software que irá implementar o método numérico de integração pela regra do trapézio. O trabalho deverá ser implementado na linguagem C padrão. Todas as funções descritas neste documento devem ser implementadas e estar contidas num único arquivo texto denominado **int-trapezio.c**.

O trabalho prático será dividido em requisitos funcionais que o software deverá ter para cumprir com todas as funcionalidades previstas. O valor integral dos pontos do trabalho prático implicam na implementação de todos os requisitos funcionais descritos nas próximas sub-seções.

4.1 Requisito 1: Funções Numéricas Pré-Definidas

Neste requisito o grupo deverá implementar 3 funções matemáticas cuja integral será calculada pelo método dos trapézios. A listagem a seguir apresenta estas funções, com o valor da integral calculado analiticamente:

1. $$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx = 1.94591$$

2. $$\int_{0.4}^{2.0} e^x sin(10x) + 8\,dx = 12.48287$$

3. $$\int_1^3 x^3 ln(x)\,dx = 17.2469$$

Deverá haver uma função chamada escrita em C que avalia o valor das funções (1), (2) e (3) para os valores de x informados. Além do valor de x, deve-se passar o número da função que estamos avaliando, tal que seja possível determinar qual delas deve ser usada na avaliação.

4.2 Requisito 2: Cálculo da Área do Trapézio

Neste requisito o grupo deverá implementar uma função em C que calcula a área de um trapézio. A área do trapézio depende das seguintes informações: comprimento da base maior (B), comprimento da base menor (b) e altura (h), relacionados na seguinte fórmula:

$$\frac{(B+b)\times h}{2}$$

A função deverá receber, portanto, os parâmetros acima modelados com os tipos de dados mais adequados, e retornar o valor da área calculada segundo a fórmula dada.

4.3 Requisito 3: Divisão do Intervalo [a, b] em m Sub-Intervalos

A integração numérica pela regra do trapézio obtém melhores resultados conforme o número de trapézios usados na aproximação aumenta. Em função disso, este requisito consistirá na construção de uma função que dividirá o intervalo $[a, b]$ em m sub-intervalos menores, cada qual delimitando a região que deverá ser aproximada por um trapézio. O grupo deverá implementar uma função em C que receberá os limites a e b do intervalo onde a integral está definida, assim como a quantidade m de sub-intervalos em que a função $f(x)$ será dividida, todos de tamanho uniforme h. De posse destes dados, a função deverá calcular o valor de $f(x)$ aplicado nos limites de cada sub-divisão. Estes valores devem ser armazenados em memória para serem usados posteriormente no cálculo da área do trapézio. Para exemplificar, seja a Figura 7 onde a integral da função $f(x)$ deve ser calculada no intervalo $[1, 3]$.

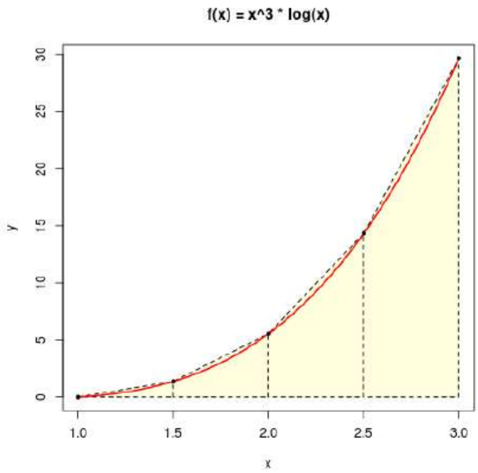

Figura 7: Intervalo $[1, 3]$ onde que a função $f(x) = x^3 ln(x)$ foi dividida em 4 sub-intervalos, todos com $h = 0.5$

Para melhor aproximar o resultado da integral numérica usou-se 4 trapézios, ou seja, o intervalo $[1, 3]$ foi dividido em 4 sub-intervalos, cada qual com distância entre os extremos de h = 0.5. Os valores de $f(1.0)$, $f(1.5)$, $f(2.0)$, $f(2.5)$, $f(3.0)$ foram calculados para se obter os parâmetros de cálculo da área do trapézio, ou seja, b, B e h (observe que estes valores podem ser obtidos de cada trapézio através dos valores de $f(x)$ aplicados aos extremos do intervalo, e do valor de h).

4.4 Requisito 4: Cálculo da Integral pelo Método do Trapézio

Neste requisito, o grupo deverá implementar uma função em C que calcula a integral definida no intervalo $[a, b]$ usando a função escrita no Requisito 3, para dividir o intervalo $[a, b]$ em m sub-intervalos, e a função escrita no Requisito 2, que calcula a área do trapézio. Para tal ela receberá como parametros o intervalo, o número de trapézios a utilizar, e o número da função escolhida pelo usuário descrita no Requisito 1.

O valor da aproximação pelo método dos trapézios será o somatório das áreas de cada um dos m trapézios, ou seja, a função deverá calcular a área de cada trapézio em separado e acumular os resultados para obter a aproximação da integral definida.

4.5 Requisito 5: Entrada de Dados

A entrada de dados será feita via digitação de opções em um menu, implementado em uma aplicação console (linha de comando). Ao executar o programa int-trapezio, é esperado que o usuário veja uma tela com as seguintes mensagens:

```
Integracao pela Regra do Trapezio
========== ==== ===== == ========
Funcoes:
1) Integral [1.0, 7.0] de f(x) = 1/x
2) Integral [0.4, 2.0] de f(x) = e^x sen(10x) + 8
3) Integral [1.0, 3.0] de f(x) = x^3 ln(x)
Escolha a funcao a integrar:
```

O usuário deverá então digitar o número da função que pretende integrar nos intervalos pré-definidos.

Feito isto, o programa deverá perguntar ao usuário qual é a quantidade de trapézios que deseja usar na aproximação:

Digite o no. de trapezios a usar na aproximacao:

Os dados informados devem ser armazenados como parâmetro de cálculo, e serão usados nas funções descritas nos Requisitos 1 à 4. O programa deverá suportar uma quantidade de trapézios de 1 à 1000.

4.6 Requisito 6: Saída de Dados

De posse das informações sobre qual função integrar, intervalos de integração, número de trapézios a utilizar, o software deverá calcular a aproximação descrita no Requisito 4. Para ser útil, este resultado deverá ser informado para o usuário da aplicação através de mensagens no terminal. Espera-se que a implementação do grupo mostre na tela (i) o resultado da aproximação numérica, (ii) o erro absoluto entre o valor estimado e o valor real (informado no Requisito 1), (iii) o valor do erro relativo percentual entre o valor estimado e o valor real.

Sejam a o valor real da integral, e $\overline{a}$ o valor aproximado. As fórmulas para os erros absolutos (EA) e relativos (ER) e que devem ser implementadas pelo grupo são as seguintes:

$$EA = |a - \overline{a}|$$

$$ER = \frac{|a - \overline{a}|}{|a|}$$

Portanto, o grupo deve implementar duas funções em linguagem C, uma para cálculo do erro absoluto, e outra para o cálculo do erro relativo. Após determinar o valor estimado pela regra do trapézio, o programa deverá imprimir o resultado na tela, com mostra o seguinte exemplo:

```
Resultado para 5 trapezios: 12.48389
Erro Absoluto             : 0.00102
Erro Relativo (%)         : 8.171198e-05
```

4.7 Requisito 7: Função Principal

A solução para o problema de calcular integral numérica de funções foi descrita neste documento em partes separadas, cada uma em um requisito funcional do software. No entanto, tais partes nada fazem em separado sendo necessário que sejam ligadas na função principal da aplicação (função main()). O grupo deverá pensar em como cada função descrita até o presente momento pode ser integrada de forma a resolver o problema proposto.

4.8 Requisito 8: Documentação do Código

Os comentários de código são importantes elementos usados na codificação de soluções computacionais, pois permitem documentar cada função e partes importantes do código para futuras manutenções. Desta forma, é um requisito do trabalho que todas as funções sejam bem documentadas, em quantidade de comentários suficientes para que um terceiro compreenda a implementação computacional escrita pelo grupo.

Bom Trabalho!