

Introducción a desigualdades Medias

Kenny J. Tinoco

Febrero de 2025

1. Definiciones

La desigualdad de medias es una parte importante en el estudio de las desigualdades, esta nos permite simplificar el tratamiento que realizamos sobre las expresiones, reduciendo el tiempo y esfuerzo de resolución.

Teorema 1.1 (Teorema de las medias). Dado los números reales positivos a_1, a_2, \dots, a_k se cumple que

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_k^k}{k}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \geq \frac{k}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}},$$

donde el caso de igualdad si y solo si $a_1 = a_2 = \dots = a_k$.

Muchas desigualdades pueden ser resueltas con una aplicación concreta de las medias.

2. Problemas

Problema 1. Sean a_1, a_2, \dots, a_k números reales positivos tales que $a_1 a_2 \dots a_k = 1$, demostrar que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_k) \geq 2^k.$$