

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios I

Encuentro: 2

Curso: Álgebra

Nivel: Preolímpico IMO

Fecha: 26 de abril de 2025

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Índice

| | |
|-------------------------------|----------|
| 1 Fundamentos | 1 |
| 1.1 Conceptos | 1 |
| 1.2 División de polinomios | 1 |
| 1.3 Raíces | 3 |
| 1.3.1 Raíces en intervalos | 4 |
| 1.4 Interpolación de Lagrange | 4 |
| 2 Problemas | 4 |

1. Fundamentos

En esta segunda sesión repasaremos aspectos fundamentales sobre los polinomios que debemos conocer, veremos conceptos de polinomios, divisiones, raíces y una serie de teoremas importantes.

1.1. Conceptos

Definición 1.1. Un *monomio* en la variable x es una expresión cx^k donde c es una constante y k un entero no negativo.

Un polinomio es la suma de finitos monomios. En otras palabras un polinomio es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Asumamos que $a_n \neq 0$. En este caso, los números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ se llaman los coeficientes del polinomio, y n es llamado el grado del polinomio.

Los polinomios pueden ser sumados y multiplicados. Para $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ y $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$ definimos

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

$$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

Para los motivos de este documento consideraremos a los polinomios con coeficientes reales, racionales, enteros, complejos o incluso valores que son residuos en módulo de algún primo p .

1.2. División de polinomios

Definición 1.2. Para los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, llamamos *cociente* y *resto* a los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, respectivamente, si

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

y $\deg R < \deg G$.

Teorema 1.1 (División polinómica). El cociente y resto siempre existen y son únicos.

Teorema 1.2 (Bezout version 1). El resto de $P(x)$ dividido por $(x - a)$ es igual a $P(a)$.

Teorema 1.3 (Bezout version 2). Un número a es raíz de $P(x)$ si y solo si $(x - a) | P(x)$.

Corolario 1.1. Si a_1, a_2, \dots, a_n son raíces distintas de $P(x)$, entonces

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) | P(x).$$

Teorema 1.4. El polinomio $P(x)$ con grado n tiene a lo más n raíces.

Corolario 1.2. Si $A(x)$ y $B(x)$ no son iguales, y su grado es a lo máximo n , entonces la ecuación $A(x) = B(x)$ tiene a lo sumo n raíces.

Ejemplo 1.1. Probar que

$$a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Solución. Denotemos por $P(x)$ al lado izquierdo de la ecuación. Sabemos que $P(x)$ es un polinomio con grado a lo sumo 2 y $P(a) = a$, $P(b) = b$ y $P(c) = c$. Por tanto, por el corolario previo $P(x) = x$. ■

Ejemplo 1.2. Dado el entero positivo n . El polinomio $P(x)$ satisface $P(i) = 2^i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$. Probar que $\deg P \geq n$.

Solución. Considere el polinomio $Q(x) = 2P(x) - P(x+1)$. Es obvio que $\deg Q = \deg P$. Y los números $0, 1, \dots, n-1$ son raíces de Q , por lo cual $\deg Q \geq n$. ■

Ejemplo 1.3. Dado el polinomio $P(x)$ con grado tres. Llamaremos a una tripleta de números reales (a, b, c) *cíclica* si $P(a) = b$, $P(b) = c$ y $P(c) = a$. Probar que existen a lo más nueve tripletas cíclicas.

Solución. Dividamos la solución

1. Tripletas cíclicas diferentes no tienen elementos compartidos. Supongamos lo contrario y que hay dos tripletas cíclicas con números iguales (a, b, c) y (a, d, e) . Con base en la definición de triplete cíclica, $b = P(a)$ y $d = P(a)$, por tanto $d = b$. Y $c = P(b)$ y $e = P(d) = P(b)$, por tanto $c = e$. Esto implica que las tripletas son iguales.
2. Todos los números en cualquier triplete cíclica son raíces del polinomio $Q(x) = P(P(P(x))) - x$. Consideremos cualquier triplete cíclica (a, b, c) .

$$P(P(P(a))) = P(P(b)) = P(c) = a.$$

3. El grado del polinomio $P(P(P(x))) - x$ es 27, ya que si existen 10 tripletas cíclicas distintas, entonces existen 30 raíces distintas para $Q(x)$. Lo cual es absurdo. ■

1.3. Raíces

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental del álgebra). Cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Equivalentemente, todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos puede factorizarse como

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

donde $a_n \neq 0$, y $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (considerando la multiplicidad).

Ejemplo 1.4. Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \geq 0$ para todo real x . Probar que existen polinomios $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Solución. Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sea un polinomio con coeficientes reales. Por el teorema Fundamental del álgebra, $P(x)$ puede factorizarse como

$$P(x) = c \prod_{j=1}^n (x - \alpha_j),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Ya que $P(x)$ tiene coeficientes reales, cualquier raíz no real α debe tener su conjugado complejo $\bar{\alpha}$ en la factorización. De esta manera, los factores reales de $P(x)$ son productos de

- Factores lineales: $(x - r)^{2k}$, correspondientes a raíces reales.
- Factores cuadráticos irreducibles: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$.

Si consideramos un polinomio cuadrático $x^2 + bx + c$ sin raíces reales (es decir $b^2 - 4c < 0$) y completando cuadrados, obtenemos que

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4}.$$

Esto puede escribirse como

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2$$

Por la identidad de Brahmagupta sabemos que el producto de dos sumas de dos cuadrados es igual a la suma de dos cuadrados, esto es

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Así que cada factor de $P(x)$ puede ser representado como la suma de dos cuadrados, por lo cual, $P(x)$ puede ser escrito de la forma

$$P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$$

con $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$. ■

1.3.1. Raíces en intervalos

Aquí haremos uso de algunos teoremas de cálculo y sus corolarios.

Teorema 1.6 (Teorema del valor intermedio). Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, asumamos que se toman los valores extremos con signos opuestos, es decir

$$f(a) \cdots f(b) < 0,$$

entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

1.4. Interpolación de Lagrange

Teorema 1.7. Para reales distintos x_0, x_1, \dots, x_n y cualesquiera y_0, y_1, \dots, y_n definimos

$$P_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

así, el único polinomio $P(x)$ con grado como máximo n tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, 1, \dots, n$ es igual a

$$y_0 P_0(x) + y_1 P_1(x) + \dots + y_n P_n(x)$$

Ejemplo 1.5. Dado el polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y grado 10. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que $y = P(x)$ y el círculo $x^2 + y^2 = 1$ puede tener?

Solución. La respuesta es 20. Supongamos que hay más de 20 intersecciones, considerando el polinomio $Q(x) = x^2 + P(x)^2 - 1$. Si (x_0, y_0) es un punto de intersección, entonces x_0 es raíz de $Q(x)$. Pero $\deg(Q) = 20$, así que solo pueden existir a lo máximo 20 valores x_0 . ■

2. Problemas

Problema 2.1. Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \geq 0$ para todo real a . Probar que existen polinomios $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Problema 2.2. Encontrar todos los polinomios $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que

$$(x-3)P(x+1) = (x+1)P(x).$$

Problema 2.3. Probar que un polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

Problema 2.4. ¿Existe un polinomio cuadrático $P(x)$ tal que dos de sus coeficientes son enteros y

$$P\left(\frac{1}{2024}\right) = \frac{1}{2025}, \quad P\left(\frac{1}{2025}\right) = \frac{1}{2024}?$$

Problema 2.5. Sean a, b, c números reales distintos tales que para el polinomio cuadrático $f(x)$ se tiene

$$f(a) = ab, \quad f(b) = ac, \quad f(c) = ab.$$

Probar que $f(a+b+c) = ab+bc+ca$.

Problema 2.6. Sea k un entero positivo tal que

$$1 + x^k + x^{2k} = (1 + a_1x + x^2)(1 + a_2x + x^2) \dots (1 + a_kx + x^2),$$

hallar el valor de $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2$

Problema 2.7. Dado los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se sabe que estos tienen tres términos cada uno ¿cuántos monomios distintos de cero tiene como mínimo el producto $P(x)Q(x)$?

Problema 2.8. Sea $P(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}$, definimos

$$Q(x) = P(x)P(x^3)P(x^5)P(x^7)P(x^9) = \sum_{i=0}^{50} a_i x^i,$$

encontrar $\sum_{i=0}^{50} |a_i|$.

Problema 2.9. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de segundo grado con coeficientes enteros. Probar que existe un polinomio $R(x)$ con coeficientes enteros y de grado a lo sumo dos tal que

$$R(8)R(12)R(2017) = P(8)P(12)P(2017)Q(8)Q(12)Q(2017).$$

Problema 2.10. Suponga que $f(x)$ es un polinomio de grado 3 con coeficiente principal igual a 2 y

$$f(2024) = 2025, \quad f(2025) = 2026,$$

hallar el valor de $f(2026) - f(2023)$.

Problema 2.11. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado cuatro tal que $P(1 + 2^n) = 1 + 8^n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4$. Hallar el valor de $P(1)$.

Problema 2.12. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_4x^4$ con $a_4 \neq 0$. El resto del polinomio f cuando es dividido por $(x - 2023)$, $(x - 2024)$, $(x - 2025)$, $(x - 2026)$ y $(x - 2027)$ son 24, -6, 4, -6 y 24, respectivamente. Hallar el valor de $f(2028)$.

Problema 2.13. Probar que para todo número real a el polinomio

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1$$

tiene al menos una raíz real.

Problema 2.14. Probar que el polinomio

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$$

tiene una raíz real para cualesquiera números reales a, b, c .

Problema 2.15. Sea $P(x)$ un polinomio arbitrario tal que

$$P(2008) + P(17) < 2025 < P(18) + P(2007).$$

Probar que existen números reales x, y tales que

$$x + y = P(x) + P(y) = 2025.$$

Problema 2.16. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios mónicos con coeficientes reales y

$$\deg(P) = \deg(Q) = 10.$$

Probar que si la ecuación $P(x) = Q(x)$ no tiene soluciones reales, entonces la ecuación

$$P(x + 1) = Q(x - 1)$$

tiene una solución real.