Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Solución a ejercicios

Encuentro: 05
Curso: Álgebra
Nivel: Preolímpico IMO
Fecha: 17 de mayo de 2025

Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

1. Solución de los ejercicios

Corolario 1.1. Si un polinomio de grado n tiene $n+1$ raíces, entonces $P(x) \equiv 0$.

Demostración. Sea el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grado n, con $n+1$ raíces reales distintas $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$. Por el teorema del factor, el polinomio puede ser escrito como

$$P(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_{n+1}).$$

Sin embargo, al desarrollar el lado derecho de la expresión obtenemos un polinomio de grado $n+1$, cuyo término principal sería Cx^{n+1}. Como este término no aparece al lado izquierdo, entonces $C = 0$. Luego, $P(x) \equiv 0$. ■

Ejercicio 1. Probar que

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Solución. Diremos que el lado izquierdo de la expresión es el polinomio $P(x)$, consideremos el polinomio $Q(x) = P(x) - x$, vamos a demostrar que $Q(x) \equiv 0$. Podemos notar que $P(x)$ tiene a lo sumo grado dos, por lo cual $Q(x)$ también tiene a lo sumo grado dos. Al evaluar a, b y c en $Q(x)$, obtenemos que $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$, es decir, un polinomio de grado a lo sumo dos tiene tres raíces, por tanto $Q(x) \equiv 0$, luego $P(x) = x$. ■

Ejercicio 2. Sean p, q, r tres números reales no nulos tales que $-p, 2q$ y $3r$ son raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, encontrar los valores de p, q y r.

Solución. Los valores son $(p, q, r) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. Sea el polinomio $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, como $-p, 2q$ y $3r$ son sus raíces y es mónico, por el teorema del factor podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+p)(x-2q)(x-3r) \\ &= x^3 + (p - 2q - 3r)x^2 + (-2pq + 6qr - 3pr)x + 6pqr. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de la ecuación inicial con los del polinomio $Q(x)$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} p - 2q - 3r = p \\ -2pq + 6qr - 3pr = q \\ 6pqr = r \end{cases}$$

De la primera ecuación vemos que $2q + 3r = 0$, de la segunda obtenemos

$$\begin{aligned} -2pq + 6qr - 3pr &= q \\ -p(2q + 3r) + 6qr &= q \\ 6qr = q &\implies r = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Como $r = \frac{1}{6}$, entonces $q = -\frac{1}{4}$. Finalmente, en la tercera ecuación al sustituir q y r obtenemos $p = -\frac{2}{3}$. ■

Ejercicio 3. Si a, b, c, x, y son números reales tales que

$$\begin{cases} a^3 + ax + y = 0 \\ b^3 + bx + y = 0 \\ c^3 + cx + y = 0 \end{cases}$$

y $a \neq b \neq c$, determinar el valor de $a + b + c$.

Solución. La respuesta es $a + b + c = 0$. Consideremos el polinomio $A(k) = k^3 + xk + y$, es claro que a, b y c son raíces de $A(k)$, por el teorema del factor, podemos escribir a $A(k)$ como

$$\begin{aligned} A(k) &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \end{aligned}$$

Como la definición inicial de $A(k)$ no tiene un término cuadrático, entonces $a + b + c$ debe ser cero. ■

Ejercicio 4. Encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobres los naturales m, n para que el polinomio

$$\sum_{k=0}^{m^n} x^k,$$

sea divisible entre $x^3 + x^2 + x + 1$.

Solución. La respuesta es $m = 4p - 1$ y $n = 2q - 1$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Sea $P(x)$ el polinomio. Como $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$, entonces $(x + 1)(x^2 + 1)$ divide a $P(x)$ si y solo si -1 y i son raíces de $P(x)$.

- Para que -1 sea raíz de $P(x)$ solo basta que el grado de $P(x)$ sea impar. Un polinomio de grado impar tiene una cantidad par de términos, si este se evalua en -1, entonces los términos se cancelan entre sí. Ejemplo,

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \implies (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

- Para que i sea raíz, el grado de $P(x)$ debe ser congruente con -1 en módulo 4. Como la suma de cuatro potencias consecutivas de i se cancelan, es necesario que $P(x)$ tenga una cantidad de términos múltiplos de cuatro.

- Cualquier potencia impar de un número de la forma $4k-1$ es de la forma $4t-1$. ■

Ejercicio 5. Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sin tres o cuatro de ellos iguales a cero a la vez, tales que

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}=1.$$

Determinar el valor de

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=1.$$

Solución. La respuesta es cero. Sea $k=a+b+c+d$, la condición puede ser escrita como

$$\frac{a}{k-a}+\frac{b}{k-b}+\frac{c}{k-c}+\frac{d}{k-d}=1.$$

Notemos que $\frac{a}{k-a}=\frac{a-k+k}{k-a}=\frac{k}{k-a}-1$, esto puede ser realizado con las demás fracciones, con lo cual obtenemos

$$\frac{k}{k-a}+\frac{k}{k-b}+\frac{k}{k-c}+\frac{k}{k-d}=5.$$

Veamos que $\frac{a^2}{k-a}=\frac{a^2-k^2+k^2}{k-a}=\frac{k^2}{k-a}-(a+k)$, análogamente con las demas fracciones, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{k-a}+\frac{b^2}{k-b}+\frac{c^2}{k-c}+\frac{d^2}{k-d}&=\frac{k^2}{k-a}+\frac{k^2}{k-b}+\frac{k^2}{k-c}+\frac{k^2}{k-d}-(a+b+c+d+4k)\\&=k\left(\frac{k}{k-a}+\frac{k}{k-b}+\frac{k}{k-c}+\frac{k}{k-d}\right)-5k\\&=k(5)-5k\\&=0\end{aligned}$$

■