Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios I

Encuentro: 2
Curso: Álgebra
Nivel: Preolímpico IMO
Fecha: 26 de abril de 2025

Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Índice

1. Fundamentos

En esta segunda sesión repasaremos aspectos fundamentales sobre los polinomios que debemos conocer, veremos conceptos de polinomios, divisiones, raíces y una serie de teoremas importantes.

1.1. Conceptos

Definición 1.1. Un *monomio* en la variable x es una expresión cx^k donde c es una constante y k un entero no negativo.

Un polinomio es la suma de finitos monomios. En otras palabras un polinomio es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Asumamos que $a_n \neq 0$. En este caso, los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ se llaman los coeficientes del polinomio, y n es llamado el grado del polinomio.

Los polinomios pueden ser sumados y multiplicados. Para $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ y $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ definimos

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$
$$A(x)B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \ldots$$

Para los motivos de este documento consideraremos a los polinomios con coeficientes reales, racionales, enteros, complejos o incluso valores que son residuos en módulo de algún primo p.

1.2. División de polinomios

Definición 1.2. Para los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, llamamos *cociente* y *resto* a los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, respectivamente, si

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

y $\deg R < \deg G$.

Teorema 1.1 (División polinómica)**.** El cociente y resto siempre existen y son únicos.

Teorema 1.2 (Bezout version 1)**.** El resto de $P(x)$ dividido por $(x-a)$ es igual a $P(a)$.

Teorema 1.3 (Bezout version 2)**.** Un número a es raíz de $P(x)$ si y solo si $(x-a)|P(x)$.

Corolario 1.1. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son raíces distintas de $P(x)$, entonces

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|P(x).$$

Teorema 1.4. El polinomio $P(x)$ con grado n tiene a lo más n raíces.

Corolario 1.2. Si $A(x)$ y $B(x)$ no son iguales, y su grado es a lo máximo n, entonces la ecuación $A(x) = B(x)$ tiene a lo sumo n raíces.

Ejemplo 1.1. Probar que

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Solución. Denotemos por $P(x)$ al lado izquierdo de la ecuación. Sabemos que $P(x)$ es un polinomio con grado a lo sumo 2 y $P(a) = a$, $P(b) = b$ y $P(c) = c$. Por tanto, por el corolario previo $P(x) = x$. ■

Ejemplo 1.2. Dado el entero positivo n. El polinomio $P(x)$ satisface $P(i) = 2^i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Probar que $\deg P \geq n$.

Solución. Considere el polinomio $Q(x) = 2P(x) - P(x+1)$. Es obvio que $\deg Q = \deg P$. Y los números $0, 1, \ldots, n-1$ son raíces de Q, por lo cual $\deg Q \geq n$. ■

Ejemplo 1.3. Dado el polinomio $P(x)$ con grado tres. Llamaremos a una tripleta de números reales (a, b, c) *cíclica* si $P(a) = b$, $P(b) = c$ y $P(c) = a$. Probar que existen a lo más nueve tripletas cíclicas.

Solución. Dividamos la solución

1. Tripletas cíclicas diferentes no tienen elementos compartidos. Supongamos lo contrario y que hay dos tripletas cíclicas con números iguales (a, b, c) y (a, d, e). Con base en la definición de tripleta cíclica, $b = P(a)$ y $d = P(a)$, por tanto $d = b$. Y $c = P(b)$ y $e = P(d) = P(b)$, por tanto $c = e$. Esto implica que las tripletas son iguales.
2. Todos los números en cualquier tripleta cíclica son raíces del polinomio $Q(x) = P(P(P(x)))-x$. Consideremos cualquier tripleta cíclica (a, b, c).
$$P(P(P(a))) = P(P(b)) = P(c) = a.$$
3. El grado del polinomio $P(P(P(x))) - x$ es 27, ya que si existen 10 tripletas cíclicas distintas, entonces existen 30 raíces distintas para $Q(x)$. Lo cual es absurdo. ■

1.3. Raíces

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental del álgebra). Cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Equivalentemente, todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos pude factorizarse como

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

donde $a_n \neq 0$, y $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (considerando la multiplicidad).

Ejemplo 1.4. Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \geq 0$ para todo real a. Probar que existen polinomios $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Solución. Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sea un polinomio con coeficientes reales. Por el teorema Fundamental del álgebra, $P(x)$ puede factorizarse como

$$P(x) = c \prod j = 1c(x - \alpha_j),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Ya que $P(x)$ tiene coeficientes reales, cualquier raíz no real α debe tener su conjugado complejo $\overline{\alpha}$ en la factorización. De esta manera, los factores reales de $P(x)$ son productos de

- Factores lineales: $(x - r)^{2k}$, correspondientes a raíces reales.
- Factores cuadráticos irreducibles: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$.

Si consideramos un polinomio cuadrático $x^2 + bx + c$ sin raíces reales (es decir $b^2 - 4c < 0$) y completando cuadrados, obtenemos que

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4}.$$

Esto puede escribirse como

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2$$

Por la identidad de Brahmagupta sabemos que el producto de dos sumas de dos cuadrados es igual a la suma de dos cuadrados, esto es

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

Así que cada factor de $P(x)$ puede ser representado como la suma de dos cuadrados, por lo cual, $P(x)$ puede ser escrito de la forma

$$P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$$

con $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$. ■

1.3.1. Raíces en intervalos

Aquí haremos uso de algunos teoremas de cálculo y sus corolarios.

Teorema 1.6 (Teorema del valor intermedio)**.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, asumamos que se toman los valores extremos con signos opuestos, es decir

$$f(a)\cdots f(b) < 0,$$

entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

1.4. Interpolación de Lagrange

Teorema 1.7. Para reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y cualesquiera $y_0, y_1, \ldots, y_n$ definimos

$$P_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

así, el único polinomio $P(x)$ con grado como máximo n tal que $P(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$ es igual a

$$y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + \ldots + y_nP_n(x)$$

Ejemplo 1.5. Dado el polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y grado 10. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que $y = P(x)$ y el círculo $x^2 + y^2 = 1$ puede tener?

Solución. La respuesta es 20. Supongamos que hay más de 20 intersecciones, considerando el polinomio $Q(x) = x^2 + P(x)^2 - 1$. Si (x_0, y_0) es un punto de intersección, entonces x_0 es raíz de $Q(x)$. Pero $\deg(Q) = 20$, así que solo pueden existir a lo máximo 20 valores x_0. ■

2. Problemas

Problema 2.1. Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \geq 0$ para todo real a. Probar que existen polinomios $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Problema 2.2. Encontrar todos los polinomios $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tales que

$$(x-3)P(x+1) = (x+1)P(x).$$

Problema 2.3. Probar que un polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

Problema 2.4. ¿Existe un polinomio cuadrático $P(x)$ tal que dos de sus coeficientes son enteros y

$$P\left(\frac{1}{2024}\right) = \frac{1}{2025}, \quad P\left(\frac{1}{2025}\right) = \frac{1}{2024}?$$

Problema 2.5. Sean a, b, c números reales distintos tales que para el polinomio cuadrático $f(x)$ se tiene

$$f(a) = ab, \quad f(b) = ac, \quad f(x) = ab.$$

Probar que $f(a+b+c) = ab + bc + ca$.

Problema 2.6. Sea k un entero positivo tal que

$$1 + x^k + x^{2k} = (1 + a_1 x + x^2)(1 + a_2 x + x^2)\dots(1 + a_k x + x^2),$$

hallar el valor de $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$

Problema 2.7. Dado los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, se sabe que estos tienen tres términos cada uno ¿cuántos monomios distintos de cero tiene como mínimo el producto $P(x)Q(x)$?

Problema 2.8. Sea $P(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$, definimos

$$Q(x) = P(x)P(x^3)P(x^5)P(x^7)P(x^9) = \sum_{i=0}^{50} a_i x^i,$$

encontrar $\displaystyle\sum_{i=0}^{50} |a_i|$.

Problema 2.9. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de segundo grado con coeficientes enteros. Probar que existe un polinomio $R(x)$ con coeficientes enteros y de grado a lo sumo dos tal que

$$R(8)R(12)R(2017) = P(8)P(12)P(2017)Q(8)Q(12)Q(2017).$$

Problema 2.10. Suponga que $f(x)$ es un polinomio de grado 3 con coeficiente principal igual a 2 y

$$f(2024) = 2025, \quad f(2025) = 2026,$$

hallar el valor de $f(2026) - f(2023)$.

Problema 2.11. Sea $P(x)$ un polinomio mónico de grado cuatro tal que $P(1+2^n) = 1+8^n$ para todo $n = 1, 2, 3, 4$. Hallar el valor de $P(1)$.

Problema 2.12. Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_4 x^4$ con $a_4 \neq 0$. El resto del polinomio f cuando es dividido por $(x - 2023)$, $(x - 2024)$, $(x - 2025)$, $(x - 2026)$ y $(x - 2027)$ son 24, -6, 4, -6 y 24, respectivamente. Hallar el valor de $f(2028)$.

Problema 2.13. Probar que para todo número real a el polinomio

$$x^4 + a^2x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + a - 1$$

tiene al menos una raíz real.

Problema 2.14. Probar que el polinomio

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$$

tiene una raíz real para cualesquiera números reales a, b, c.

Problema 2.15. Sea $P(x)$ un polinomio arbitrario tal que

$$P(2008) + P(17) < 2025 < P(18) + P(2007).$$

Probar que existen números reales x, y tales que

$$x + y = P(x) + P(y) = 2025.$$

Problema 2.16. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios mónicos con coeficientes reales y

$$\deg(P) = \deg(Q) = 10.$$

Probar que si la ecuación $P(x) = Q(x)$ no tiene soluciones reales, entonces la ecuación

$$P(x+1) = Q(x-1)$$

tiene una solución real.

3. Solución de los ejercicios

Corolario 3.1. Si un polinomio de grado n tiene $n+1$ raíces, entonces $P(x) \equiv 0$.

Demostración. Si un polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, de grado n, tiene $n+1$ raíces reales distintas y son los números $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$. Por el teorema del factor, el polinomio puede ser escrito como

$$P(x) = C(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_{n+1}).$$

Sin embargo, al desarrollar el lado derecho de la expresión obtenemos un polinomio de grado $n+1$, cuyo término principal sería Cx^{n+1}. Como este término no aparece al lado izquierdo, entonces $C = 0$. Luego, $P(x) \equiv 0$. ■

Ejercicio 1. Probar que

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Solución. Diremos que el lado izquierdo de la expresión es el polinomio $P(x)$, consideremos el polinomio $Q(x) = P(x) - x$, vamos a demostrar que $Q(x) \equiv 0$. Podemos notar que $P(x)$ tiene a lo sumo grado dos, por lo cual $Q(x)$ también tiene a lo sumo grado dos. Al evaluar a, b y c en $Q(x)$, obtenemos que $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$, es decir, un polinomio de grado a lo sumo dos tiene tres raíces, por tanto $Q(x) \equiv 0$, luego $P(x) = x$. ■

Ejercicio 2. Sean p, q, r tres números reales no nulos tales que $-p, 2q$ y $3r$ son raíces de la ecuación $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, encontrar los valores de p, q y r.

Solución. Los valores son $(p, q, r) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$. Sea el polinomio $Q(x) = x^3 + px^2 + qx + r$, como $-p, 2q$ y $3r$ son sus raíces y es mónico, por el teorema del factor podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x+p)(x-2q)(x-3r) \\ &= x^3 + (p - 2q - 3r)x^2 + (-2pq + 6qr - 3pr)x + 6pqr. \end{aligned}$$

Comparando los coeficientes de la ecuación inicial con los del polinomio $Q(x)$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} p - 2q - 3r = p \\ -2pq + 6qr - 3pr = q \\ 6pqr = r \end{cases}$$

De la primera ecuación vemos que $2q + 3r = 0$, de la segunda obtenemos

$$\begin{aligned} -2pq + 6qr - 3pr &= q \\ -p(2q + 3r) + 6qr &= q \end{aligned}$$

$$6qr = q \implies r = \frac{1}{6}$$

Como $r = \frac{1}{6}$, entonces $q = -\frac{1}{4}$. Finalmente, en la tercera ecuación al sustituir q y r obtenemos $p = -\frac{2}{3}$. ■

Ejercicio 3. Si a, b, c, x, y son números reales tales que

$$\begin{cases} a^3 + ax + y = 0 \\ b^3 + bx + y = 0 \\ c^3 + cx + y = 0 \end{cases}$$

y $a \neq b \neq c$, determinar el valor de $a + b + c$.

Solución. La respuesta es $a + b + c = 0$. Consideremos el polinomio $A(k) = k^3 + xk + y$, es claro que a, b y c son raíces de $A(k)$, por el teorema del factor, podemos escribir a $A(k)$ como

$$\begin{aligned} A(k) &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x - abc \end{aligned}$$

Como la definición inicial de $A(k)$ no tiene un término cuadrático, entonces $a + b + c$ debe ser cero. ■

Ejercicio 4. Encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobres los naturales m, n para que el polinomio

$$\sum_{k=0}^{m^n} x^k,$$

sea divisible entre $x^3 + x^2 + x + 1$.

Solución. La respuesta es $m = 4p - 1$ y $n = 2q - 1$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Sea $P(x)$ el polinomio. Como $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1)$, entonces $(x + 1)(x^2 + 1)$ divide a $P(x)$ si y solo si -1 y i son raíces de $P(x)$.

- Para que -1 sea raíz de $P(x)$ solo basta que el grado de $P(x)$ sea impar. Un polinomio de grado impar tiene una cantidad par de términos, si este se evalua en -1 los términos se cancelan entre sí. Ejemplo,

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \implies (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = 0.$$

- Para que i sea raíz, el grado de $P(x)$ tiene que ser congruente con -1 en módulo 4. Como la suma de cuatro potencias consecutivas de i se cancelan, en necesario que $P(x)$ tenga una cantidad de términos múltiplos de cuatro.
- Cualquier potencia impar de un número de la forma $4k - 1$ es de la forma $4t - 1$.

■

Ejercicio 5. Sea $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sin tres o cuatro de ellos iguales a cero a la vez, tales que

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}=1.$$

Determinar el valor de

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{a+c+d}+\frac{c^2}{a+b+d}+\frac{d^2}{a+b+c}=1.$$

Solución. La respuesta es cero. Sea $k = a+b+c+d$, la condición puede ser escrita como

$$\frac{a}{k-a}+\frac{b}{k-b}+\frac{c}{k-c}+\frac{d}{k-d}=1.$$

Notemos que $\frac{a}{k-a} = \frac{a-k+k}{k-a} = \frac{k}{k-a} - 1$, esto puede ser realizado con las demás fracciones, con lo cual obtenemos

$$\frac{k}{k-a}+\frac{k}{k-b}+\frac{k}{k-c}+\frac{k}{k-d}=5.$$

Veamos que $\frac{a^2}{k-a} = \frac{a^2-k^2+k^2}{k-a} = \frac{k^2}{k-a} - (a+k)$, análogamente con las demas fracciones, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{a^2}{k-a}+\frac{b^2}{k-b}+\frac{c^2}{k-c}+\frac{d^2}{k-d} &= \frac{k^2}{k-a}+\frac{k^2}{k-b}+\frac{k^2}{k-c}+\frac{k^2}{k-d}-(a+b+c+d+4k)\\
&= k\left(\frac{k}{k-a}+\frac{k}{k-b}+\frac{k}{k-c}+\frac{k}{k-d}\right)-5k\\
&= k(5)-5k\\
&= 0
\end{aligned}$$

■