

# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

---

## Álgebra Corto #2

Nombre: \_\_\_\_\_

Grupo: Preolimpico IMO

Fecha: 5/julio/2025

### Problemas

Estimado estudiante, resuelva los siguientes problemas, justifique sus respuestas y redacte soluciones compresibles.

**Problema 1.** Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x^2 + f(y)) = f(xy)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Problema 2.** Sean  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que

$$f(x + g(y)) = 2x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hallar  $g(x + f(y))$  en términos de  $x$  y  $y$ .

**Problema 3.** ¿Existen enteros  $m, n$  y una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que satisfacen

- $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $m \leq n$  y  $f(m) = n$ ?

**Problema 4.** Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$