

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Álgebra Clase #1

Encuentro: 1

Semestre: I

Fecha: 12 de abril de 2025

Nivel: Preolímpico IMO

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Contenido: Clase práctica #1

En esta primera sesión tendremos una clase práctica para resolver ejercicios y problemas.

Problema 1. Sea $P(x)$ un polinomio de grado impar. Probar que la ecuación

$$P(P(x)) = 0,$$

tiene al menos tantas raíces reales como la ecuación $P(x) = 0$.

Problema 2. El polinomio $P(x)$ de grado n satisface $P(i) = \frac{1}{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n$. Hallar $P(n+1)$.

Problema 3. Dado el polinomio $P(x)$ de grado tres. Llamaremos a una tripleta de reales distintos (a, b, c) como *cíclica* si $P(a) = b$, $P(b) = c$ y $P(c) = a$. Dadas cuatro tripletas cíclicas distintas, probar que no pueden tener la misma suma en sus coordenadas.

Problema 4. Hans y David juegan un juego. Hans piensa en un polinomio $P(x)$ de grado diez. En cada turno David dice 10 números distintos, Hans toma uno de esos números, calcula el valor en el polinomio y le dice a David el valor. David no conoce qué número tomó Hans. ¿Cuántos turnos son necesarios para que David deduzca el polinomio de Hans?

Ejercicio 1. Resolver el siguiente sistema en números reales

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2c \\ 1 + a^2 = 2ac \\ c^2 = ab \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sean $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ números reales y para cada entero $1 \leq i \leq 2025$ sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Sí $a_1 = 2025$ y se cumple $S_n = n^2 a_n$ para todo n , determinar el valor de S_{2025} .