Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Polinomios I

Encuentro: 2
Curso: Álgebra
Nivel: Preolímpico IMO
Fecha: 26 de abril de 2025

Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Índice

1. Fundamentos

En esta segunda sesión repasaremos aspectos fundamentales sobre los polinomios que debemos conocer, veremos conceptos de polinomios, divisiones, raíces y una serie de teoremas importantes.

1.1. Conceptos

Definición 1.1. Un *monomio* en la variable x es una expresión cx^k donde c es una constante y k un entero no negativo.

Un polinomio es la suma de finitos monomios. En otras palabras un polinomio es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

Asumamos que $a_n \neq 0$. En este caso, los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ se llaman los coeficientes del polinomio, y n es llamado el grado del polinomio.

Los polinomios pueden ser sumados y multiplicados. Para $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ y $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$ definimos

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots$$

$$A(x)B(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \ldots$$

Para los motivos de este documento consideraremos a los polinomios con coeficientes reales, racionales, enteros, complejos o incluso valores que son residuos en módulo de algún primo p.

1.2. División de polinomios

Definición 1.2. Para los polinomios $F(x)$ y $G(x)$, llamamos *cociente* y *resto* a los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$, respectivamente, si

$$F(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

y $\deg R < \deg G$.

Teorema 1.1 (División polinómica)**.** El cociente y resto siempre existen y son únicos.

Teorema 1.2 (Bezout version 1)**.** El resto de $P(x)$ dividido por $(x-a)$ es igual a $P(a)$.

Teorema 1.3 (Bezout version 2)**.** Un número a es raíz de $P(x)$ si y solo si $(x-a)|P(x)$.

Corolario 1.1. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son raíces distintas de $P(x)$, entonces

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|P(x).$$

Teorema 1.4. El polinomio $P(x)$ con grado n tiene a lo más n raíces.

Corolario 1.2. Si $A(x)$ y $B(x)$ no son iguales, y su grado es a lo máximo n, entonces la ecuación $A(x) = B(x)$ tiene a lo sumo n raíces.

Ejemplo 1.1. Probar que

$$a\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x.$$

Solución. Denotemos por $P(x)$ al lado izquierdo de la ecuación. Sabemos que $P(x)$ es un polinomio con grado a lo sumo 2 y $P(a) = a$, $P(b) = b$ y $P(c) = c$. Por tanto, por el corolario previo $P(x) = x$. ■

Ejemplo 1.2. Dado el entero positivo n. El polinomio $P(x)$ satisface $P(i) = 2^i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Probar que $\deg P \geq n$.

Solución. Considere el polinomio $Q(x) = 2P(x) - P(x+1)$. Es obvio que $\deg Q = \deg P$. Y los números $0, 1, \ldots, n-1$ son raíces de Q, por lo cual $\deg Q \geq n$. ■

Ejemplo 1.3. Dado el polinomio $P(x)$ con grado tres. Llamaremos a una tripleta de números reales (a, b, c) *cíclica* si $P(a) = b$, $P(b) = c$ y $P(c) = a$. Probar que existen a lo más nueve tripletas cíclicas.

Solución. Dividamos la solución

1. Tripletas cíclicas diferentes no tienen elementos compartidos. Supongamos lo contrario y que hay dos tripletas cíclicas con números iguales (a, b, c) y (a, d, e). Con base en la definición de tripleta cíclica, $b = P(a)$ y $d = P(a)$, por tanto $d = b$. Y $c = P(b)$ y $e = P(d) = P(b)$, por tanto $c = e$. Esto implica que las tripletas son iguales.
2. Todos los números en cualquier tripleta cíclica son raíces del polinomio $Q(x) = P(P(P(x))) - x$. Consideremos cualquier tripleta cíclica (a, b, c).
$$P(P(P(a))) = P(P(b)) = P(c) = a.$$
3. El grado del polinomio $P(P(P(x))) - x$ es 27, ya que si existen 10 tripletas cíclicas distintas, entonces existen 30 raíces distintas para $Q(x)$. Lo cual es absurdo. ■

1.3. Raíces

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental del álgebra)**.** Cualquier polinomio no constante con coeficientes complejos tiene al menos una raíz compleja. Equivalentemente, todo polinomio de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos pude factorizarse como

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

donde $a_n \neq 0$, y $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (considerando la multiplicidad).

Ejemplo 1.4. Dado el polinomio $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $P(x) \geq 0$ para todo real a. Probar que existen polinomios $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$ para el cual $P(x) = Q(x)^2 + R(x)^2$.

Solución. Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ sea un polinomio con coeficientes reales. Por el teorema Fundamental del álgebra, $P(x)$ puede factorizarse como

$$P(x) = c \prod j = 1c(x - \alpha_j),$$

donde $c \in \mathbb{R}$ y $\alpha_j \in \mathbb{C}$. Ya que $P(x)$ tiene coeficientes reales, cualquier raíz no real α debe tener su conjugado complejo $\overline{\alpha}$ en la factorización. De esta manera, los factores reales de $P(x)$ son productos de

- Factores lineales: $(x - r)^{2k}$, correspondientes a raíces reales.
- Factores cuadráticos irreducibles: $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$.

Si consideramos un polinomio cuadrático $x^2 + bx + c$ sin raíces reales (es decir $b^2 - 4c < 0$) y completando cuadrados, obtenemos que

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4}.$$

Esto puede escribirse como

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2$$

Por la identidad de Brahmagupta sabemos que el producto de dos sumas de dos cuadrados es igual a la suma de dos cuadrados, esto es

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

Así que cada factor de $P(x)$ puede ser representado como la suma de dos cuadrados, por lo cual, $P(x)$ puede ser escrito de la forma

$$P(x)=Q(x)^2+R(x)^2$$

con $Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x]$. ■

1.3.1. Raíces en intervalos

Aquí haremos uso de algunos teoremas de cálculo y sus corolarios.

Teorema 1.6 (Teorema del valor intermedio)**.** Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, asumamos que se toman los valores extremos con signos opuestos, es decir

$$f(a)\cdot(b)<0,$$

entonces existe un punto $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

1.4. Interpolación de Lagrange

Teorema 1.7. Para reales distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y cualesquiera $y_0, y_1, \ldots, y_n$ definimos

$$P_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)},$$

así, el único polinomio $P(x)$ con grado como máximo n tal que $P(x_i)=y_i$ para todo $i=0,1,\ldots,n$ es igual a

$$y_0P_0(x)+y_1P_1(x)+\ldots+y_nP_n(x)$$

Ejemplo 1.5. Dado el polinomio $P(x)$ con coeficientes reales y grado 10. ¿Cuál es el mayor número de intersecciones que $y=P(x)$ y el círculo $x^2+y^2=1$ puede tener?

Solución. La respuesta es 20. Supongamos que hay más de 20 intersecciones, considerando el polinomio $Q(x)=x^2+P(x)^2-1$. Si (x_0,y_0) es un punto de intersección, entonces x_0 es raíz de $Q(x)$. Pero $\deg(Q)=20$, así que solo pueden existir a lo máximo 20 valores x_0. ■

2. Problemas

Ejercicio 1.

Problema 2.1.