Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Álgebra
Clase #1

Encuentro: 1
Semestre: I
Fecha: 12 de abril de 2025

Nivel: OMCC
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Contenido: Clase práctica #1

En esta primera sesión tendremos una clase práctica para resolver ejercicios y problemas sencillos.

Ejercicio 1. Para los reales no negativos a, b, c se satisface $a+b+c = 2\sqrt{abc}$. Probar que $bc \geq b + c$.

Ejercicio 2. Sean los reales $a, b, c, d > 0$. Probar que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d.$$

Ejercicio 3. Hallar el $n_0 \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ tal que $\forall n \geq n_0,\ n = 5i + 6j$ con $i, j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.

Ejercicio 4. Existe un único polinomio con coeficiente reales de la forma

$$P(x) = 7x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Tal que $P(1) = 1$, $P(2) = 2, \ldots, P(6) = 6$. Hallar el valor de $P(2025)$.

Ejercicio 5. Hallar la suma y el producto de las raíces del polinomio $x^{2025} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2025}$.

Ejercicio 6. Resolver el siguiente sistema en números reales

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2c \\ 1 + a^2 = 2ac \\ c^2 = ab \end{cases}$$

Ejercicio 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2025}$ números reales y para cada entero $1 \leq i \leq 2025$ sea

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Sí $a_1 = 2025$ y se cumple $S_n = n^2 a_n$ para todo n, determinar el valor de S_{2025}.

Ejercicio 8. Dado los reales positivos x, y, z que satisfacen $xyz = 1$. Probar que

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geq \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 9. Probar para todo $n \in \mathbb{N}$ que el número $A_n = 3^n - 2n^2 - 1$ es múltiplo de 8. Además, si $3 \nmid n$, entonces A_n es múltiplo de 24.