Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones funcionales I

Encuentro: 08
Curso: Álgebra
Nivel: Preolímpico IMO
Fecha: 07 de junio de 2025

Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Índice

1. Fundamentos

Definición 1.1 (Función)**.** Sean X y Y dos conjuntos. Una función $f : X \to Y$ es una relación con un valor de Y para cada $x \in X$, y lo denotamos por $f(x) = y$.

Definición 1.2 (Inyectiva)**.** Una función $f : X \to Y$ es inyectiva si para todo $y \in Y$, existe a lo más un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Definición 1.3 (Sobreyectiva)**.** Una función $f : X \to Y$ es sobreyectiva si para todo $y \in Y$, existe al menos un elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 1.1. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy.$$

Solución. La única función que cumple es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $P(x, y)$ la evaluación en la función. Usando $P(1, y)$, obtenemos que

$$f(f(y) - f(1)) = y + 2f(1), \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

por la cual f es biyectiva. Como f es biyectiva, existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = 0$. Usando $P(a, y)$, obtenemos

$$f(af(y)) = ay, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Con $y = 0$ en esta ecuación encontramos que $f(af(0)) = 0 = f(a)$ lo que implica que $a(f(0) - 1) = 0$. Si $a = 0$, usando $P(x, 0)$ tenemos que $f(-f(x)) = 2f(x)$ donde la única solución es $f(x) = -2x$, pero esta función no cumple. Por tanto $f(0) = 1$. Usando $P(1, 1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(1) - f(1)) &= 2f(1) + 1 \\ f(0) &= 2f(1) + 1 \end{aligned}$$

$$0 = f(1)$$
$$f(a) = f(1)$$

por lo cual $a = 1$. Así, usando $P(1, y)$ obtenemos

$$f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Usando $P(f(x), 1)$, encontramos

$$f(-x) = f(x) + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Usando este último resultado y $P(x, f(y))$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(xy - f(x)) &= 2f(x) + xf(y) \\ \implies f(f(x) - xy) + 2\left[f(x) - xy\right] &= 2f(x) + xf(y) \\ \iff f(f(x) - xy) &= xf(y) + 2xy \\ \iff f(f(x) - xy) &= x\left[f(y) + 2y\right] \\ \implies f(f(x) - xy) &= xf(-y) \end{aligned}$$

Con $y = -1$ en este último resultado, $f(f(x) + x) = 0 = f(1)$ de donde obtenemos que $f(x) = 1 - x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. ■

2. Problemas

Ejercicio 2.1. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) - 5f(y) = 8$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.2. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) + xf(1 - x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.3. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.4. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.5. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x - y) = f(x)f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.6. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x + y)) = x + f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.7. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.8. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $(y + 1)f(x) + f(xf(y) + f(x + y)) = y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.9. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2.10. Hallar $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x - \dfrac{3}{x}$ para todo $x > 0$.

Ejercicio 2.11. Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(x^2+yf(x))=xf(x+y)$, con $x,y\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.12. Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(x)+f(f(x)-y^3)=f(x^2+y)$, con $x,y\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.13. Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(f(x))+2f(y)=2f(x)+4y$, con $x,y\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.14. Hallar $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $f(x^2+f(xy))=xf(x+y)$, con $x,y\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.15. Hallar todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ con $f(0)=1$ que satisfacen

$$f(f(n))=f(f(n+2)+2)=n,$$

para todo entero n.

Ejercicio 2.16. Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tales que

$$f(x+f(y))=f(x)+y, \text{ para todo } x,y\in\mathbb{Z}$$

Ejercicio 2.17. Sea $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que

i) f es estrictamente decreciente,

ii) $f(x)>-\frac{1}{x}$ para todo $x>0$ y

iii) $f(x)f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$ para todo $x>0$.

Hallar $f(1)$.

Ejercicio 2.18. Hallar todas las funciones $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que g es inyectiva y

$$f(g(x)+y)=g(x+f(y)), \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}.$$

Problema 2.1 (India, 2010)**.** Encontrar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x+y)+xy=f(x)f(y), \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}.$$

Problema 2.2 (IMO, 2002)**.** Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x,y,u,v reales, se cumple

$$[f(x)+f(y)]\,[f(u)+f(v)]=f(xu-yv).$$

Problema 2.3 (Korea, 2000)**.** Hallar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2-y^2)=(x-y)\left(f(x)+f(y)\right), \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}.$$

Problema 2.4 (Lista corta IMO, 1988)**.** Sea $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ una función que cumple

$$f(f(m)+f(n))=m+n, \text{ para todos } m,n.$$

Hallar los posibles valores de $f(1988)$.

Problema 2.5 (Lista corta IMO, 2002)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.6 (Ibero, 1993)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(mn), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.7 (Italia, 1999)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.8. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

Referencias

[Che20] Evan Chen. *The OTIS Excerpts. A collection of 192 problems and solutions.* Independent publication, 2020.