

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Álgebra Corto #2

Nombre: _____

Grupo: Preolimpico IMO

Fecha: 5/julio/2025

Problemas

Estimado estudiante, resuelva los siguientes problemas, justifique sus respuestas y redacte soluciones compresibles.

Problema 1. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + f(y)) = f(xy)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que

$$f(x + g(y)) = 2x + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hallar $g(x + f(y))$ en términos de x y y .

Problema 3. ¿Existen enteros m, n y una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que satisfacen

- $f(f(x)) = 2f(x) - x - 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$,
- $m \leq n$ y $f(m) = n$?

Problema 4. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$