Introducción a desigualdades

Kenny J. Tinoco

Diciembre de 2024

1. Definiciones

Empezaremos recordando unas tautologías sobre las proposiciones.

Implicación ($\implies$)
Dada dos proposiciones lógicas A y B diremos que A implica a B si el valor lógico de A causa el valor lógico de B. Denotaremos esta relación por el símbolo

$$A \implies B.$$

Existe varias maneras de verbalizar esta relación, por ejemplo: si A, entonces B, A causa B, para que B es necesario A, entre otros.

Doble implicación ($\iff$)
Si tenemos que $A \implies B$ y $B \implies A$ a la vez, podemos decir que existe una doble implicación entre A y B. Lo denotamos por

$$A \iff B.$$

Verbalizando esto es igual a: A si y solo si B, $A \equiv B$.

Ahora recordemos las propiedades importantes de las desigualdades. Sean a, b y c dos números reales, se cumple.

1. **Tricotomía**:
   Se cumple que $a < b$, $a = b$ o $a > b$.
2. **Suma:**
   Si $a \geq b$, entonces $a + c \geq b + c$ para cualquier c.
3. **Multiplicación:**
   Si $a \geq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \geq bc$
   Si $a \geq b$ y $c \leq 0$, entonces $ac \leq bc$
4. **Reflexividad:**
   $a \geq a$
5. **Antisimetría:**
   Si $a \geq b$ y $b \geq a$, entonces $a = b$.
6. **Transitividad:**
   Si $a \geq b$ y $b \geq c$, entonces $a \geq c$
   .

2. Técnicas

Cuando resolvemos desigualdades hay maneras comunes de avanzar con la solución, estas maneras son las técnicas.

Comparación directa

1. La desigualdad $A \geq B$ es verdadera si y solo si $A - B \geq 0$ es también verdadera.
2. La desigualdad $A \geq B$ con $B \neq 0$ es verdadera si y solo si $\frac{A}{B} \geq 1$ es verdadera.

Maximizar y reducir

Si tenemos la desigualdad $A \geq B$, entonces podemos partir la demostración encontrando valores $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$A \geq A_1 \geq A_2 \geq \ldots \geq A_k \geq B.$$

Análisis de la desigualdad

Si tenemos la desigualdad $A \geq B$, entonces podemos partir la demostración encontrando desigualdades $(A_1 \geq B_1), (A_2 \geq B_2), \ldots, (A_k \geq B_k)$ tales que

$$A \geq B \iff (A_1 \geq B_1) \iff (A_2 \geq B_2) \iff \ldots \iff (A_k \geq B_k)$$

Muchas veces utilizaremos teoremas sobre desigualdades para simplificar las demostraciones de las desigualdades.

3. Problemas

Problema 1. Si a, b, c son números reales arbitrarios, entonces probar que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Problema 2. Si a, b son números reales tales que $a + b = 2$, probar que

$$a^4 + b^4 \geq 2.$$

Problema 3. Si a, b, c son números reales positivos, probar que

$$a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a).$$

Problema 4. Sea a, b, x, y números reales cualesquiera. Demostrar que

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2.$$

Problema 5. Probar que $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Problema 6. Si x, y son reales positivos, probar que $x^2 + y^2 \geq \dfrac{(x-y)^2}{2}$.

Problema 7. Probar que $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.

Problema 8. Probar que para cualquier real x se cumple que

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) + 10 > 0.$$