

# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

---

## Ecuaciones funcionales I

Encuentro: 08

Curso: Álgebra

Nivel: Preolímpico IMO

Fecha: 07 de junio de 2025

Semestre: I

Instructor: Kenny Jordan Tinoco

Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

---

## Índice

1	Fundamentos . . . . .	1
2	Problemas . . . . .	1

## 1. Fundamentos

Definición 1.1 (Función).

## 2. Problemas

**Ejercicio 2.1.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $2f(x) - 5f(y) = 8$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.2.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x) + xf(1 - x) = x$ , con  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.3.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.4.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x + y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.5.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x - y) = f(x)f(y)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.6.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(f(x + y)) = x + f(y)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.7.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.8.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $(y + 1)f(x) + f(xf(y) + f(x + y)) = y$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.9.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.10.** Hallar  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x - \frac{3}{x}$  para todo  $x > 0$ .

**Ejercicio 2.11.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.12.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x) + f(f(x) - y^3) = f(x^2 + y)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.13.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(f(x)) + 2f(y) = 2f(x) + 4y$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.14.** Hallar  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f(x^2 + f(xy)) = xf(x + y)$ , con  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2.15.** Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  con  $f(0) = 1$  que satisfacen

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n,$$

para todo entero  $n$ .

**Ejercicio 2.16.** Encontrar todas las funciones  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 2.17.** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que

- i)  $f$  es estrictamente decreciente,
- ii)  $f(x) > -\frac{1}{x}$  para todo  $x > 0$  y
- iii)  $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$  para todo  $x > 0$ .

Hallar  $f(1)$ .

**Ejercicio 2.18.** Hallar todas las funciones  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g$  es inyectiva y

$$f(g(x) + y) = g(x + f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2.1** (India, 2010). Encontrar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2.2** (IMO, 2002). Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que, para cualesquiera  $x, y, u, v$  reales, se cumple

$$[f(x) + f(y)][f(u) + f(v)] = f(xu - yv).$$

**Problema 2.3** (Korea, 2000). Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2.4** (Lista corta IMO, 1988). Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una función que cumple

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Hallar los posibles valores de  $f(1988)$ .

**Problema 2.5** (Lista corta IMO, 2002). Encontrar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2.6** (Ibero, 1993). Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(mn), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{N}.$$

**Problema 2.7** (Italia, 1999). Encontrar todas las funciones estrictamente monótonas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2.8.** Hallar todas las funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$