

Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Álgebra Corto #3

Nombre: _____

Grupo: Preolimpico IMO

Fecha: 12/julio/2025

Problemas

Estimado estudiante, resuelva los siguientes problemas, justifique sus respuestas y redacte soluciones compresibles.

Ejercicio 1. Encontrar $f_{2025}(x)$ si

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Donde $f_k(x)$ es la k -ésima composición sucesiva en f .

Ejercicio 2. Hallar todas las funciones f tales que

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^4+1}{x^2}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

Problema 1. Hallar todas las funciones f tales que $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

Problema 2. Suponga que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que

$$f(xy) + f(y-x) \geq f(y+x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Encontrar una función polinómica, no constante, que cumpla.
2. Probar que $f(x) \geq 0$ para todo x real.

Problema 3. Probar que no existen una función $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $x \in \mathbb{Z}^+$ se cumple

$$f(2f(x)) = x + 1998.$$