# Academia Sabatina de Jóvenes Talento

## Ecuaciones funcionales I

**Encuentro:** 08
**Curso:** Álgebra
**Nivel:** Preolímpico IMO
**Fecha:** 07 de junio de 2025
**Semestre:** I
**Instructor:** Kenny Jordan Tinoco
**Instructor Aux:** Jonathan Gutiérrez

## Índice



## 1. Fundamentos

**Definición 1.1** (Función).

## 2. Problemas

**Ejercicio 1.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) - 5f(y) = 8$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) + xf(1-x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 3.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 4.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x+y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 5.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x-y) = f(x)f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 6.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x+y)) = x + f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 7.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 8.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 9.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 10.** Hallar $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x - \dfrac{3}{x}$ para todo $x > 0$.

**Ejercicio 11.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 12.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) + f(f(x) - y^3) = f(x^2 + y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 13.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x)) + 2f(y) = 2f(x) + 4y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 14.** Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + f(xy)) = xf(x + y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

**Ejercicio 15.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(0) = 1$ que satisfacen

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n,$$

para todo entero $n$.

**Ejercicio 16.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Z}$$

**Ejercicio 17.** Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

i) $f$ es estrictamente decreciente,

ii) $f(x) > -\frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ y

iii) $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ para todo $x > 0$.

Hallar $f(1)$.

**Ejercicio 18.** Hallar todas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $g$ es inyectiva y

$$f(g(x) + y) = g(x + f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 1** (India, 2010)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 2** (IMO, 2002)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera $x, y, u, v$ reales, se cumple

$$[f(x) + f(y)]\,[f(u) + f(v)] = f(xu - yv).$$

**Problema 3** (Korea, 2000)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\left(f(x) + f(y)\right), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 4** (Lista corta IMO, 1988)**.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Hallar los posibles valores de $f(1988)$.

**Problema 5** (Lista corta IMO, 2002)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 6** (Ibero, 1993)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(mn), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{R}.$$

**Problema 7** (Italia, 1999)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Problema 8.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$