Academia Sabatina de Jóvenes Talento

Ecuaciones funcionales I

Encuentro: 08
Curso: Álgebra
Nivel: Preolímpico IMO
Fecha: 07 de junio de 2025

Semestre: I
Instructor: Kenny Jordan Tinoco
Instructor Aux: Jonathan Gutiérrez

Índice

1. Fundamentos

Definición 1.1 (Función)**.**

2. Problemas

Ejercicio 1. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) - 5f(y) = 8$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) + xf(1-x) = x$, con $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x+y) + f(x)f(y) = x^2y^2 + 2xy$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x-y) = f(x)f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x+y)) = x + f(y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 8. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f\left(f(x)^2 + f(y)\right) = xf(x) + y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 10. Hallar $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tales que $2f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3x - \dfrac{3}{x}$ para todo $x > 0$.

Ejercicio 11. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + yf(x)) = xf(x+y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 12. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) + f(f(x) - y^3) = f(x^2 + y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 13. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(f(x)) + 2f(y) = 2f(x) + 4y$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 14. Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x^2 + f(xy)) = xf(x + y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 15. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ con $f(0) = 1$ que satisfacen

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n,$$

para todo entero n.

Ejercicio 16. Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{Z}$$

Ejercicio 17. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

i) f es estrictamente decreciente,

ii) $f(x) > -\frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ y

iii) $f(x)f\left(f(x) + \frac{1}{x}\right) = 1$ para todo $x > 0$.

Hallar $f(1)$.

Ejercicio 18. Hallar todas las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es inyectiva y

$$f(g(x) + y) = g(x + f(y)), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 1 (India, 2010)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x + y) + xy = f(x)f(y), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 2 (IMO, 2002)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera x, y, u, v reales, se cumple

$$[f(x) + f(y)]\,[f(u) + f(v)] = f(xu - yv).$$

Problema 3 (Korea, 2000)**.** Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\left(f(x) + f(y)\right), \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 4 (Lista corta IMO, 1988)**.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que cumple

$$f(f(m) + f(n)) = m + n, \text{ para todos } m, n.$$

Hallar los posibles valores de $f(1988)$.

Problema 5 (Lista corta IMO, 2002)**.** Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \text{ para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 6 (Ibero, 1993)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfacen

$$f(nf(m)) = m^2 f(mn), \text{ para todos } m, n \in \mathbb{R}.$$

Problema 7 (Italia, 1999)**.** Encontrar todas las funciones estrictamente monótonas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + f(y)) = f(x) + y, \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Problema 8. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

Referencias

[Arg15] Argel. Fórmulas de Vieta. *OMMBC*, 2015.

[BGV14] Radmila Bulajich, Jośe Gómez, and Rogelio Valdez. *Álgebra*. UNAM, 2014.

[TD23] Kenny Tinoco and José Duarte. Clase 4. Fórmulas de Vieta. *Academia Sabatina de Jóvenes Talento*, Abril 2023.