5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.

Um operador O diz-se idempotente se para qualquer classes de álgebras K_1 e K_2 (do mesmo tipo), temos:

i) $K_1 \subseteq O(K_1)$
ii) $O^2(K_1) \subseteq O(K_1)$
iii) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O(K_1) \subseteq O(K_2)$.

Vamos provar que SHS é operador de fecho.

i) Para qq $O \in \{H, S\}$ e para qq classe de álgebras K, temos $K \subseteq O(K)$.

Logo, $K_1 \subseteq S(K_1)$, $S(K_1) \subseteq HS(K_1)$, $HS(K_1) \subseteq SHS(K_1)$

Portanto, $K_1 \subseteq SHS(K_1)$.

ii) Para qq classe de álgebras K_1, temos $(SHS)^2(K_1) = SHS\,SHS(K_1)$
$$= SHSHS(K_1) \quad (S^2 = S)$$
$$= SHHSS(K_1) \quad (SH \subseteq HS)$$
$$= SHS(K_1) \quad (S^2 = S, H^2 = H)_{//}$$

iii) Para qq $O \in \{S, H\}$ e para qq classe, K, K', temos,

$K \subseteq K' \Rightarrow O(K) \subseteq O(K')$

Logo, para qq classes de álgebras K_1, K_2,
SHS

$$K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow S(K_1) \subseteq S(K_2)$$
$$\Rightarrow HS(K_1) \subseteq HS(K_2)$$
$$\Rightarrow SHS(K_1) \subseteq SHS(K_2)$$

De i, ii e iii) conclui-se que SHS é operador de fecho...

6. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ e $k : C \to D$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se g é um monomorfismo e $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k, então (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} D$$

Dados:

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ monomorfismo} \\ (A, g\circ f) \text{ é um igualizador de } h \text{ e } k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(A, f) \text{ é um igualizador de} \\ h\circ g \text{ e } k \circ g\end{array}$$

Suponhamos $g : B \to C$ monomorfismo. Então, para qq $\mathbf{C}$-morfismo $s, t : X \to B$

$$g \circ s = g \circ t \Rightarrow s = t$$

Suponhamos também que $(A, g\circ f)$ é igualizador de h e k. Então,

i) $g \circ f$ é um $\mathbf{C}$-morfismo de A em C tal que

$$h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$$

ii) para qq $\mathbf{C}$-morfismo $j : J \to C$ tal que $h \circ j = k \circ j$ existe um único $\mathbf{C}$-morfismo $u : J \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & D \\ & & J \arrow[llu, "u"] \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Queremos provar que (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

Ou seja,

1) f é um $\mathcal{C}$-morfismo de A em B tal que $(h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$.

2) para qq $\mathcal{C}$-morfismo $i : Y \to B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$ existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $u : Y \to A$ tal que $f \circ u = i$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & D \\
& Y \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

1) é imediato por i), pois

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \overset{(i)}{=} k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f.$$

2) Seja $i : Y \to B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$

Logo, $h \circ \underbrace{(g \circ i)}_{j} = k \circ \underbrace{(g \circ i)}_{j}$.

Então, por ii) existe um e um só morfismo $u : Y \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = g \circ i$.

Como g é monomorfismo resulta que $f \circ u = i$

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$, $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

objeto inicial

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\
B \arrow[r, "i_B"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Dados:

$\left.\begin{array}{l} (\mathcal{C}, (i_A, i_B)) \text{ coproduto de } A \text{ e } B \\ I \text{ objeto inicial} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{C}, (i_A, i_B))$ soma amalgamada...

Se $(\mathcal{C}, (i_A, i_B))$ coproduto de A e B, ou seja,

i. $i_A \in hom_C(\mathcal{C}, A)$, $i_B \in hom_C(\mathcal{C}, B)$

ii. para qq $X \in Obj(\mathcal{C})$ e para qq C-morfismos $f_1 : A \to X$ e $f_2 : B \to X$ existe um único C-morfismo $u : \mathcal{C} \to X$ tal que

$$u \circ i_A = f_1 \quad \text{e} \quad u \circ i_B = f_2$$

objeto inicial

Coproduto

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
B \arrow[r, "i_B"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \mathcal{C} \arrow[dr, "u"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Queremos mostrar que $(\mathcal{C}, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

→ objeto inicial

Ou seja,

i) existem C-morfismos $i_B : B \to \mathcal{C}$, $i_A : A \to \mathcal{C}$ tais que $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

ii) para qq $X \in Ob(C)$ e para qq C-morfismos $f_2 : B \to X$, $f_1 : A \to X$ tais que $f_2 \circ f_B = f_1 \circ f_A$ existe um e um só C-morfismo $u : \mathcal{C} \to X$ tal que $u \circ i_B = f_2$ e $u \circ i_A = f_1$.

→ objeto inicial

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"'] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ B \arrow[r, "i_B"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \mathcal{C} \arrow[dr, "u"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

Soma Amalgamada

i) Como $i_B \circ f_B$ e $i_A \circ f_A$ são morfismos c/ domínio I, c/ o mesmo codomínio e I é objeto inicial, então $i_B \circ f_B = i_A \circ f_A$.

ii) Sejam $f_1 : A \to X$ e $f_2 : B \to X$ morfismos tais que $f_1 \circ f_A = f_2 \circ f_B$.

Como $f_1 \in hom(A, X)$ e $f_2 \in hom(B, X)$ o resultado é imediato por ii)

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Dados:

$g \circ f$ morfismo invertível à esquerda $\Big\}$ f é monomorfismo

Res:

(1) ex 3.9 b)

(2) ex. 3.10 a)

$g \circ f$ morfismo inv esq. $\Big\} \Rightarrow$ f é invertível à esquerda $\Big\} \Rightarrow$ f é monomorfismo

(1) Se $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda então existe $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Queremos provar que f é invertível à esquerda, ou seja, queremos provar que existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Como $h \circ (g \circ f) = id_A$, então $(h \circ g) \circ f = id_A$.

Logo, existe $f' = h \circ g : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

E portanto, f é invertível à esquerda.

(2)

Se f é invertível à esquerda, então existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Queremos mostrar que f é monomorfismo, ou seja, temos de provar que, para qq C-morfismos

$i, j : C \to A$
$f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j$.

Sejam $i, j : C \to A$. Então:

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j &\Rightarrow f' \circ f \circ i = f' \circ f \circ j \\ &\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j \\ &\Rightarrow i = j \;\; // \end{aligned}$$

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Justifique.

$Sg^A(\{2\}) = \{2,3,4\}$ $\quad$ $Sg^A(\{5\}) = \{5\}$

Seja $X = Sg^A(\{2\}) \cup Sg^A(\{5\}) = \{2,3,4,5\}$

X não é subuniverso de A, pois X não é fechado para todas as operações de A. No caso, $f^A(4,5) = 1$ e $1 \notin X$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ onde $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$, $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

(a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c,d)$. Determine θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ nas condições indicadas.

(c) A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

a) $\theta_1 = \Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$

$\theta_2 = \theta(c,d).$

$\theta_2 = \Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\}$

· $\Delta A \in \theta_2$ pq θ_2 cumpre a propriedade de reflexão

· $(d,c) \in \theta_2$ pois $(c,d) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

· $(a,b) \in \theta_2$ pois $(c,d) \in \theta_2$ e θ_2 respeita a propriedade de substituição...

· $(b,a) \in \theta_2$ pois $(a,b) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

Para que (θ_1, θ_2) seja um par de congruências fator é preciso que:

ver na folha seguinte... a prova da comutatividade

$1)\ \theta_1 \cap \theta_2 = \Delta A$ $\qquad$ $2)\ \theta_1 \vee \theta_2 = \nabla A$ $\qquad$ $\boxed{3)\ \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1}$

1) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta A$

$\Leftrightarrow (\Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}) \cap (\Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\})$

$\Leftrightarrow \Delta A$ //

2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla A$

$\Leftrightarrow (\Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}) \vee (\Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\})$

~~a,b~~ $\quad$ b,c
~~a,c~~ $\quad$ ~~b,d~~
a,d $\quad$ ~~c,d~~

$\Leftrightarrow \Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d)(d,b),(c,d),(d,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,d),(d,a)\} = \nabla A$

2.a)

$\theta_1 = \Delta \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$

$\theta_2 = \Delta \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\}$

$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(c,b),(d,a),(a,d),(b,c)\} = \theta_2 \circ \theta_1$

2.b)

(θ_1, θ_2) é um par de cong.s fator de $\mathcal{A}$, logo

$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_2$.

Como $|A| \neq 1$ e $\theta_1, \theta_2 \neq \nabla_A$, então

$\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}/\theta_2$ não são triviais.

2.c)

Toda a álg. subd. irred. é diretam. indecomponível.

De b) sabe-se que $\mathcal{A}$ não é diretam. indecomponível.* logo $\mathcal{A}$ não é sub. irred.

(* pois existe álg.s $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$).