

5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S . Mostre que SHS é um operador de fecho.

Um operador O diz-se idempotente se para qualquer classes de álgebras K_1 e K_2 (do mesmo tipo), temos:

- i) $K_1 \subseteq O(K_1)$
- ii) $O^2(K_1) \subseteq O(K_1)$
- iii) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O(K_1) \subseteq O(K_2)$.

Vamos provar que SHS é operador de fecho.

i) Para qq $O \in \{H, S\}$ e para qq classe de álgebras K , temos $K \subseteq O(K)$.

$$\text{Logo, } K_1 \subseteq S(K_1), S(K_1) \subseteq HS(K_1), \\ HS(K_1) \subseteq SHS(K_1)$$

$$\text{Portanto, } K_1 \subseteq SHS(K_1).$$

$$\begin{aligned} \text{ii) Para qq classe de álgebras } K_1, \\ \text{temos } (SHS)^2(K_1) &= SHS SHS(K_1) \\ &= SHSHS(K_1) \quad (S^2=S) \\ &= SHHS(K_1) \quad (SH \subseteq HS) \\ &= SHS(K_1) \quad (S^2=S, H^2=H) \end{aligned}$$

iii) Para qq $O \in \{S, H\}$ e para qq classe, K, K' , temos,

$$K \subseteq K' \Rightarrow O(K) \subseteq O(K')$$

Logo, para qq classes de álgebras K_1, K_2 , SHS

$$\begin{aligned} K_1 \subseteq K_2 &\Rightarrow S(K_1) \subseteq S(K_2) \\ &\Rightarrow HS(K_1) \subseteq HS(K_2) \\ &\Rightarrow SHS(K_1) \subseteq SHS(K_2) \end{aligned}$$

De i, ii e iii) conclui-se que SHS é operador de fecho...

6. Sejam $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$ e $k : C \rightarrow D$ morfismos de uma categoria \mathbf{C} . Mostre que se g é um monomorfismo e $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k , então (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow[k]{h} D$$

Dados:

g monomorfismo
 $(A \xrightarrow{g \circ f})$ é um igualizador de h e k

Suponhamos $g: B \rightarrow C$ C -morfismo monomorfismo. Então, para q

$$g \circ s = g \circ t \Rightarrow s = t$$

Suponhamos também que $(A, g \circ f)$ é igualizada de h e k . Então,

que $h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$

ii). para qq C -morfismo $j: f \rightarrow c$ tal que $hoj = koj$ existe um único C -morfismo $u: f \rightarrow A$ tal que $(gof) \circ u = j$.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow[h]{h} D$$

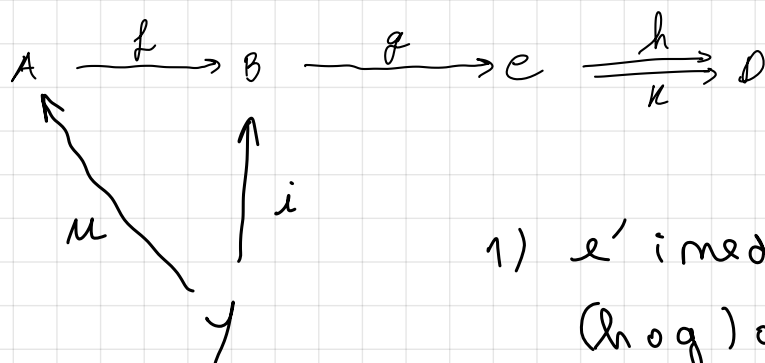
$\nwarrow i$
 $\uparrow j$

Omnemos provar que (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $\kappa \circ g$.

Ou seja,

1) f é um C-morfismo de A em B tal que $(h \circ g) \circ f = (\kappa \circ g) \circ f$.

2) para qq C-morfismo $i: Y \rightarrow B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (\kappa \circ g) \circ i$ existe um único C-morfismo $u: Y \rightarrow A$ tal que $f \circ u = i$.



1) é imediato por i), pois

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$\stackrel{(i)}{=} \kappa \circ (g \circ f) = (\kappa \circ g) \circ f.$$

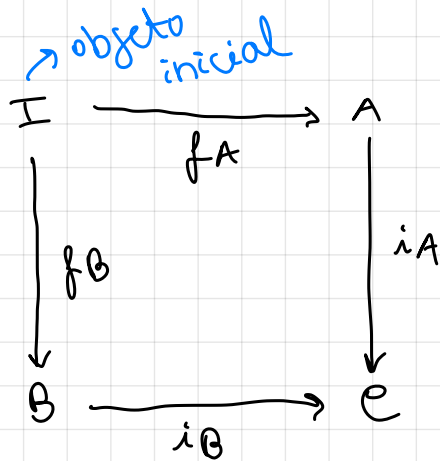
2) Seja $i: Y \rightarrow B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (\kappa \circ g) \circ i$

$$\text{Logo, } h \circ \underbrace{(g \circ i)}_i = \kappa \circ \underbrace{(g \circ i)}_i.$$

Então, por ii) existe um e um só morfismo $u: Y \rightarrow A$ tal que $(g \circ f) \circ u = g \circ i$.

Como g é monomorfismo resulta que $f \circ u = i$

7. Sejam C uma categoria com objeto inicial I e $i_A : A \rightarrow C$, $i_B : B \rightarrow C$, $f_A : I \rightarrow A$ e $f_B : I \rightarrow B$ morfismos de C . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , então $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) .



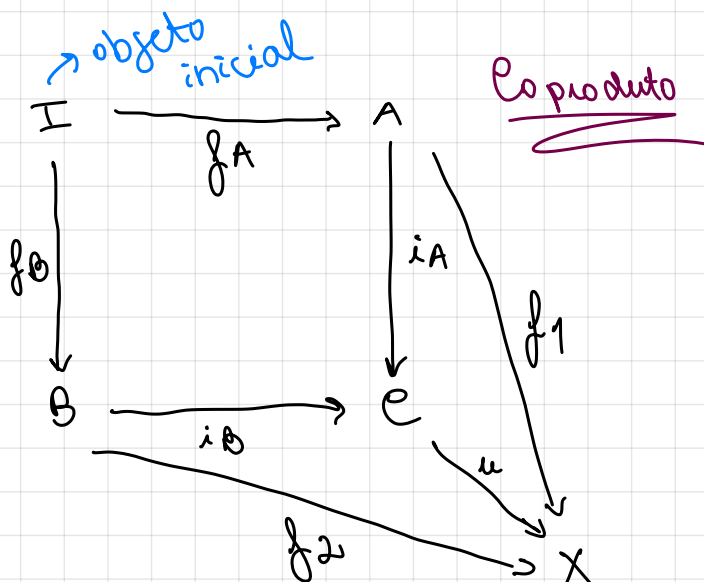
Dados:

$(C, (i_A, i_B))$ coproduto de A e B
 I objeto inicial $\Rightarrow (C, (i_A, i_B))$ soma amalgamada...

Se $(C, (i_A, i_B))$ coproduto de A e B , ou seja,

- $i_A \in \text{hom}_C(C, A)$, $i_B \in \text{hom}_C(C, B)$
- para qq $X \in \text{Obj}(C)$ e para qq C -morfismos $f_1: A \rightarrow X$ e $f_2: B \rightarrow X$ existe um único C -morfismo $u: C \rightarrow X$ tal que

$$u \circ i_A = f_1 \quad \text{e} \quad u \circ i_B = f_2$$

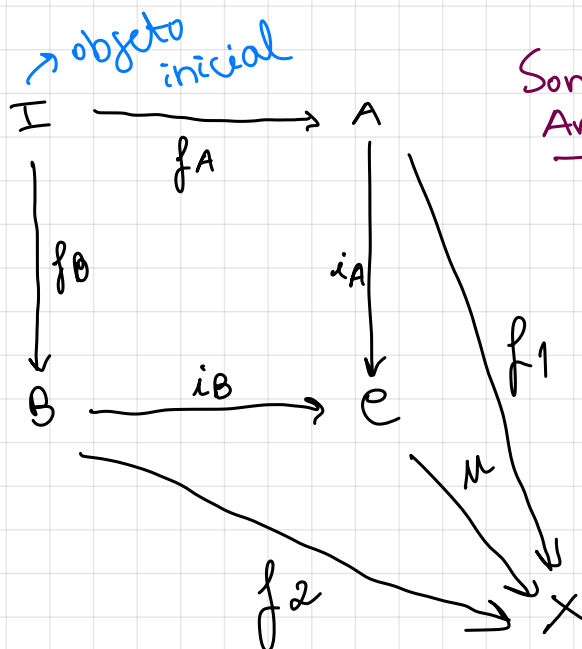
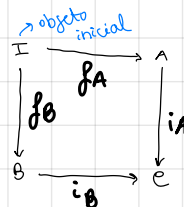


Queremos mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) .

Ou seja,

i) existem C -morfismos $i_B: B \rightarrow C$, $i_A: A \rightarrow C$ tais que $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

ii) para η $X \in \text{Obj}(C)$ e para η C -morfismos $f_2: B \rightarrow X$, $f_1: A \rightarrow X$ tais que $f_2 \circ f_B = f_1 \circ f_A$ existe um e um só C -morfismo $u: C \rightarrow X$ tal que $u \circ i_B = f_2$ e $u \circ i_A = f_1$.



Soma Amalgamada

i) Como $i_B \circ f_B$ e $i_A \circ f_A$ são morfismos C (domínio I , C o mesmo codomínio e I é objeto inicial, então $i_B \circ f_B = i_A \circ f_A$.

ii) Sejam $f_1: A \rightarrow X$ e $f_2: B \rightarrow X$ morfismos tais que $f_1 \circ f_A = f_2 \circ f_B$.

Como $f_1 \in \text{hom}(A, X)$ e $f_2 \in \text{hom}(B, X)$ o resultado é imediato por ii)

3. Sejam C uma categoria e $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$ morfismos de C . Mostre que se $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Dados:

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f \text{ morfismo} \\ \text{invertível} \\ \text{à esquerda} \end{array} \right\} f \text{ é monomorfismo}$$

Res:

(1) ex 3.9 b)

(2) ex. 3.10 a)

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f \text{ morfismo} \\ \text{inv. esq.} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f \text{ é invertível} \\ \text{à esquerda} \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ é monomorfismo}$$

(1) Se $g \circ f: A \rightarrow C$ é invertível à esquerda, então existe $h: C \rightarrow A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Queremos provar que f é invertível à esquerda, ou seja, queremos provar que existe $f': B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Como $h \circ (g \circ f) = id_A$, então $(h \circ g) \circ f = id_A$.

Logo, existe $f' = h \circ g: B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

E portanto, f é invertível à esquerda.

(2) Se f é invertível à esquerda, então existe $f': B \rightarrow A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Queremos mostrar que f é monomorfismo, ou seja, temos de provar que, para qq C -morfismos

$$i, j: C \rightarrow A \\ f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j.$$

Sejam $i, j: C \rightarrow A$. Então:

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j &\Rightarrow f' \circ f \circ i = f' \circ f \circ j \\ &\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j \\ &\Rightarrow i = j \end{aligned}$$

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2, 1)$, onde $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \rightarrow A$, $g^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$ é um subuniverso de \mathcal{A} . Justifique.

$$Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) = \{2, 3, 4\} \quad Sg^{\mathcal{A}}(\{5\}) = \{5\}$$

$$\text{Seja } X = Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\}) = \{2, 3, 4, 5\}$$

X não é subuniverso de A , pois X não é fechado para todas as operações de A . No caso, $f^{\mathcal{A}}(4, 5) = 1$ e $1 \notin X$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1, 1)$ onde $A = \{a, b, c, d\}$ e $f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

- (a) Considere as congruências $\theta_1 = \Delta_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c, d)$. Determine θ_2 . Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.
- (b) Justifique que existem álgebras \mathcal{B} e \mathcal{C} não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras \mathcal{B} e \mathcal{C} nas condições indicadas.
- (c) A álgebra \mathcal{A} é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

a) $\theta_1 = \Delta_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}$
 $\theta_2 = \theta(c, d)$.

$\theta_2 = \Delta_A \cup \{(c, d), (d, c), (a, b), (b, a)\}$

• $\Delta_A \in \theta_2$ pñ θ_2 cumpre a propriedade de reflexão

• $(d, c) \in \theta_2$ pois $(c, d) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

• $(a, b) \in \theta_2$ pois $(c, d) \in \theta_2$ e θ_2 respeita a propriedade de substituição...

• $(b, a) \in \theta_2$ pois $(a, b) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

Para que (θ_1, θ_2) seja um par de congruências fator é preciso que:

ver na folha seguinte... a prova da comutatividade

1) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$

2) $\theta_1 \cup \theta_2 = \nabla_A$

3) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$

1) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$

$\Rightarrow (\Delta_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}) \cap (\Delta_A \cup \{(c, d), (d, c), (a, b), (b, a)\})$

$\Rightarrow \Delta_A //$

2) $\theta_1 \cup \theta_2 = \nabla_A$

$\Rightarrow (\Delta_A \cup \{(a, c), (c, a), (b, d), (d, b)\}) \cup (\Delta_A \cup \{(c, d), (d, c), (a, b), (b, a)\})$

~~a, b~~ ~~b, c~~
 ~~a, c~~ ~~b, d~~
 ~~a, d~~ ~~c, d~~

$\Rightarrow \Delta_A \cup \{(\overline{a, c}), (c, a), (\overline{b, d}), (d, b), (\overline{c, d}), (\overline{d, c}), (\overline{a, b}), (b, a), (\overline{b, c}), (\overline{c, b}), (\overline{a, d}), (\overline{d, a})\} = \nabla_A$

2.a)

$$\theta_1 = A \cup \{(a,c), (c,a), (b,d), (d,b)\}$$

$$\theta_2 = A \cup \{(c,d), (d,c), (a,b), (b,a)\}$$

$$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2 \cup \{(c,b), (d,a), (a,d), (b,c)\} = \theta_2 \circ \theta_1$$

2.b)

(θ_1, θ_2) é um par de cong.s fator^{de}, logo

$$A \cong A/\theta_1 \times A/\theta_2.$$

Como $|A| \neq 1$ e $\theta_1, \theta_2 \neq \Delta_A$, então

A/θ_1 e A/θ_2 não são triviais.

2.c)

Toda a alg. subd. inred. é direta/ indecompo-
sível.

De b) sabe-se que A não é direta/ indecompo-
sível.* logo A não é sub. inred.

(* pois existe alg.s B e C não triviais tais que
 $A \cong B \times C$).