Uma função $f: A \to B$ diz-se:

- injetiva se
$$\forall a, b \in A \, (a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)),$$
ou equivalentemente, se
$$\forall a, b \in A \, (f(a) = f(b) \Rightarrow a = b).$$
- sobrejetiva se
$$\forall b \in B \, \exists a \in A \; f(a) = b,$$
ou equivalentemente se
$$f(A) = B$$
- bijetiva se f é injetiva e sobrejetiva, i.e, se
$$\forall b \in B \, \exists^1 a \in A \; f(a) = b.$$

Sejam P um conjunto e ρ uma relação binária em P.

Diz-se que ρ é uma relação de ordem parcial em P se são satisfeitas as seguintes condições:

i) Para todo $a \in P$, $(a, a) \in \rho$. reflexividade

ii) Para quaisquer $a, b \in P$, antissimetria
$$((a, b) \in \rho \text{ e } (b, a) \in \rho) \Rightarrow a = b.$$

iii) Para quaisquer $a, b, c \in P$, transitividade
$$((a, b) \in \rho \text{ e } (b, c) \in \rho) \Rightarrow (a, c) \in \rho.$$

Se adicionalmente, para quaisquer $a, b \in P$,

iv) $(a, b) \in \rho$ ou $(b, a) \in \rho$,

a relação ρ diz-se uma relação de ordem total.

Se P é um conjunto não vazio e ρ uma relação de ordem parcial em P, ao par (P, ρ) dá-se a designação de conjunto parcialmente ordenado (c.p.o).

Se ρ é uma relação de ordem total em P, o par (P, ρ), designa-se por conjunto totalmente ordenado ou cadeia.

Dado um subconjunto, A de P, podem existir elems especiais de A.

Seja $m \in P$, diz-se que m é:

minorante de A se, para todo $a \in A$,

$$m \leq a;$$

majorante de A se, para todo $a \in A$,

$$m \geq a;$$

máximo de A se m é um majorante de A e $m \in A$;

mínimo de A se m é um minorante de A e $m \in A$

maximal de A se, $m \in A$ e $\neg(\exists a \in A, m < a)$

minimal de A se, $m \in A$ e $\neg(\exists a \in A, m > a)$

supremo de A se m é um majorante de A e $m \leq m'$, para qq majorante m' de A;

ínfimo de A se m é um minorante de A e $m \geq m'$, para qq minorante m' de A.

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e

$\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

- a aplicação é antítona se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(b) \leq_2 \alpha(a).$$

- α aplicação é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq \alpha(b)$$

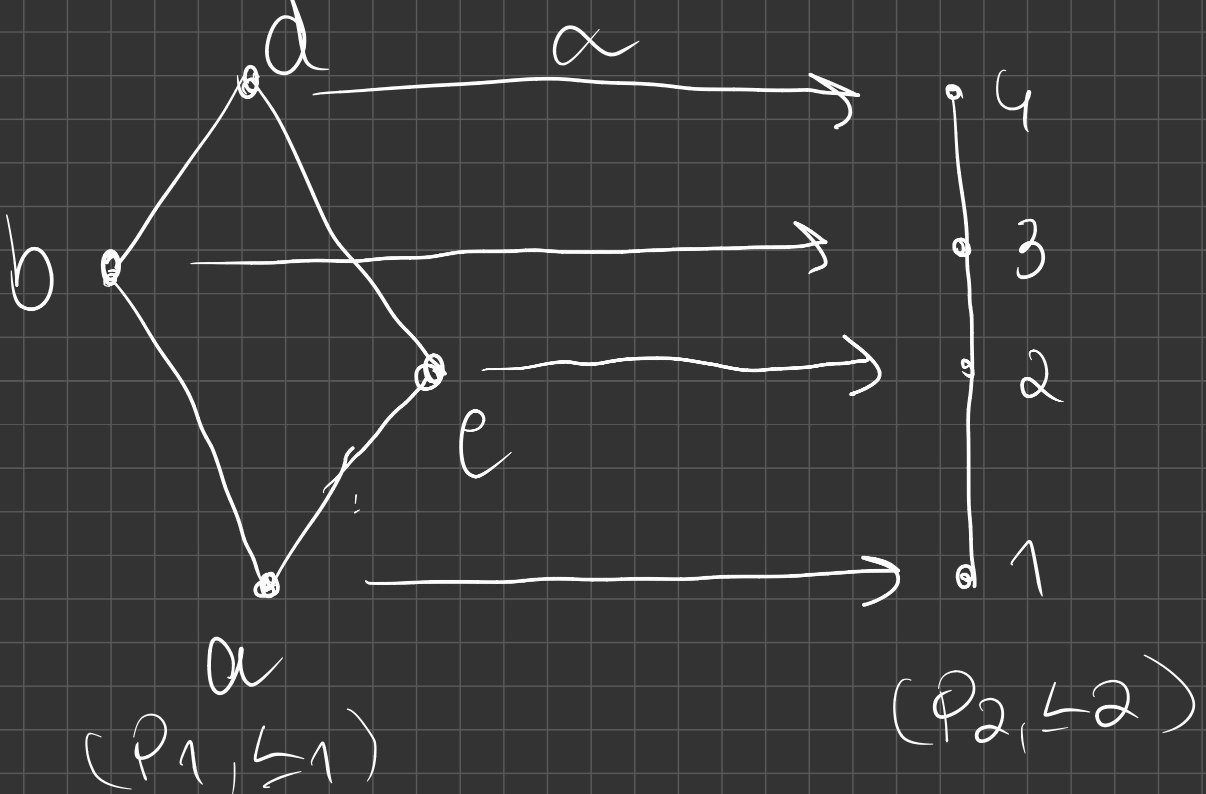
- α é um isomorfismo de cpos se α é mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

Um isomorfismo de cpos é uma aplicação bijetiva.
Assim, se α é um isomorfismo de um cpo $(P_1, \leq_1)$ num cpo $(P_2, \leq_2)$ então $\alpha^{-1} : P_2 \to P_1$ é um isomorfismo de $(P_2, \leq_2)$ em $(P_1, \leq_1)$.

Caso exista um isomorfismo entre os cpos $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$, diz-se que os cpos são isomorfos e escreve-se $(P_1, \leq_1) \cong (P_2, \leq_2)$.

Nota que: embora um isomorfismo de cpos seja uma aplicação isótona e bijetiva, uma aplicação isótona e bijetiva não é necessariamente um isomorfismo.

Por exemplo, sendo α a aplicação entre $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ a seguir representada.



ou seja, sendo α a aplicação de P_1 em P_2 definida por $\alpha(a)=1$, $\alpha(b)=2$, $\alpha(e)=3$ e $\alpha(d)=4$, verifica-se que α é isótona e bijetiva, mas não é isomorfismo de cpos...

Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma aplicação $f: P \to P$ diz-se um **operador de fecho** em $(P, \leq)$ se para quaisquer $x, y \in P$ são satisfeitas as seguintes condições:

F_1: $x \leq f(x)$

F_2: $f^2(x) \leq f(x)$

F_3: $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

Dado um operador de fecho $f: P \to P$ e dado $p \in P$ **designa-se** o elemento **$f(p)$** por **fecho de p**.

$$x \wedge y = \inf\{x, y\} \qquad x \vee y = \sup\{x, y\}$$
$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

- lei comutativa

$x \wedge y = y \wedge x$

$x \vee y = y \vee x$

- lei associativa

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

- leis da idempotência

$x \wedge x = x$

$x \vee x = x$

- lei absorção

$x \wedge (x \vee y) = x$

$x \vee (x \wedge y) = x$

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R; \wedge_{R_1}, \vee_{R_1})$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2, \wedge_{R_2}, \vee_{R_2})$ reticulados e $\alpha : R_1 \to R_2$ uma aplicação.

Diz-se que:

- α é homomorfismo de R_1 em R_2 se, para quaisquer $a, b \in R_1$,

$$\alpha(a \wedge_{R_1} b) = \alpha(a) \wedge_{R_2} \alpha(b) \text{ e}$$
$$\alpha(a \vee_{R_1} b) = \alpha(a) \vee_{R_2} \alpha(b);$$

- α é um isomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ se α é bijetiva e é um homomorfismo.

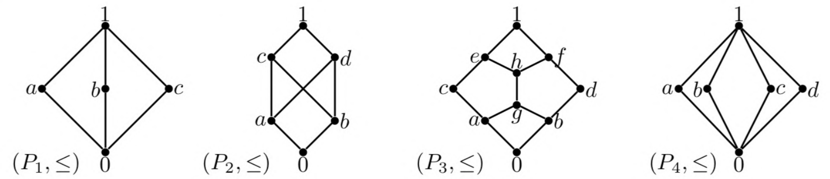
Folha 1

Nota que: Um cpo (conjunto parcialmente ordenado) $(P, \leq)$ é reticulado se para quaisquer $x, y \in P$ existirem $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

1. Reticulados

1.1.

1.1. Diga, justificando, quais dos c.p.o.s a seguir representados são reticulados:



$(P_1, \leq)$:

É reticulado.

$(P_2, \leq)$:

Este cpo não é reticulado pois não existe $\sup\{a, b\}$.

(Temos $\text{Maj}\{a, b\} = \{c, d, 1\}$ e $\{c, d, 1\}$ não tem mínimo.)

$(P_3, \leq)$:

Para qualquer par $x, y \in P_3$, existe $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

Logo podemos concluir que P_3 é reticulado.

$(P_4, \leq)$:

Para qualquer $x, y \in P_4$, existe $\sup\{x, y\}$ e $\inf\{x, y\}$.

1.2. Mostre que cada um dos c.p.o.s a seguir indicados é um reticulado.

(a) $(\mathbb{N}, |)$, onde $|$ é a relação *divide* definida em $\mathbb{N}$.

(b) $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \subseteq)$, onde $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ é o conjunto das partes de um conjunto A e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

(c) $(\mathrm{Subg}(G), \subseteq)$, onde $\mathrm{Subg}(G)$ representa o conjunto dos subgrupos de um grupo G e $\subseteq$ é a relação de inclusão usual.

1.2)

c) Temos de provar que, para quaisquer $G_1, G_2 \in$ Subgrupo(G), existem $\sup\{G_1, G_2\}$ e $\inf\{G_1, G_2\}$. $(\mathrm{subg}(G), \subseteq)$

Para quaisquer $G_1, G_2 \in \mathrm{Subg}(G)$

- $G_1 \cap G_2 \in$ subgrupo(G)
(a interseção de subgrupos de G é um subgrupo de G.)

- $G_1 \cap G_2 \subseteq G_1$, $G_1 \cap G_2 \subseteq G_2$

Logo, $G_1 \cap G_2$ é um minorante de $\{G_1, G_2\}$

Seja $Z \in \mathrm{subg}(G)$ tal que,

$Z \subseteq G_1$ e $Z \subseteq G_2$.

Logo, $Z \subseteq G_1 \cap G_2$. Assim,

$G_1 \cap G_2$ é o maior dos minorantes de $\{G_1, G_2\}$

Dado um subconjunto, A de P, podem existir elems especiais de A.

Seja $m \in P$, diz-se que m é:

minorante de A se, para todo $a \in A$,

$m \leq a$;

Portanto, $\inf\{G_1, G_2\} = G_1 \cap G_2$

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \notin \mathrm{subg}(G)$

$G_2 = \{4, 5, 6, 7, 8\} \in subg(G)$

$G_1 \cap G_2 = \{4, 5\} \in subg(G)$

$\shortparallel$

m minorante

Dados $G_1, G_2 \in subg(G)$, representamos por $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ o subgrupo de G gerador por $G_1 \cup G_2$ ou seja, o menor subgrupo de G que contém $G_1 \cup G_2$.

Para qualquer $G_1, G_2 \in subg(G)$:

- $\langle G_1 \cup G_2 \rangle \in subg(G)$ (imediatamente pela definição de $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$.

- $G_1 \subseteq G_1 \cup G_2 \subseteq \langle G_1 \cup G_2 \rangle$
- $G_2 \subseteq G_1 \cup G_2 \subseteq \langle G_1 \cup G_2 \rangle$

Assim, $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ é um majorante de $\{G_1, G_2\}$.

- Seja $Z \in subg(G)$ tal que $G_1 \subseteq Z$ e $G_2 \subseteq Z$

Logo, $G_1 \cup G_2 \subseteq Z$. Mas $\langle G_1 \cup G_2 \rangle$ é o menor subgrupo de G que contém $G_1 \cup G_2$.

Portanto, $\underbrace{\langle G_1 \cup G_2 \rangle \subseteq Z}_{\langle G_1 \cup G_2 \rangle}$. é o supremo...

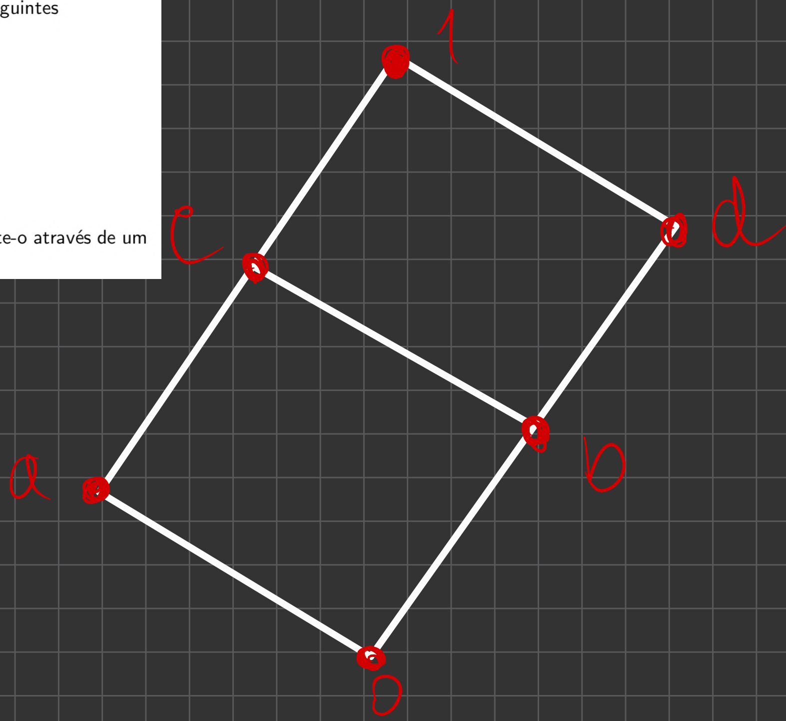
Assim, provámos que $(subg(G), \subseteq)$ é reticulado.

1.4. Seja $(R;\wedge,\vee)$ o reticulado cujas operações $\wedge$ e $\vee$ são as descritas através das tabelas seguintes

$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	b	b
c	0	a	b	c	b	c
d	0	0	b	b	d	d
1	0	a	b	c	d	1

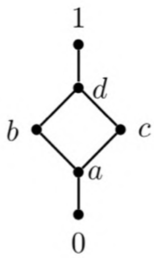
$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	c	c	1	1
b	b	c	b	c	d	1
c	c	c	c	c	1	1
d	d	1	d	1	d	1
1	1	1	1	1	1	1

Considere o reticulado interpretado como um conjunto parcialmente ordenado e represente-o através de um diagrama de Hasse.



1.5. Seja $(R,\leq)$ o reticulado representado ao lado.

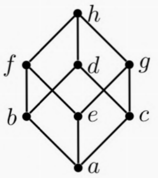
Considere este reticulado interpretado como uma estrutura algébrica $(R;\wedge,\vee)$ e indique as tabelas das operações $\wedge$ e $\vee$.



$\wedge$	0	a	b	c	d	1
0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a	a
b	0	a	b	a	b	b
c	0	a	a	c	c	c
d	0	a	b	c	d	d
1	0	a	b	c	d	1

$\vee$	0	a	b	c	d	1
0	0	a	b	c	d	1
a	a	a	b	c	d	1
b	b	b	b	d	d	1
c	c	d	d	c	d	1
d	d	d	d	d	d	1
1	1	1	1	1	1	1

1.6. Considere o reticulado $(R, \leq)$ a seguir representado.



Para cada um dos conjuntos R' a seguir indicados, diga se $(R', \leq_{|R'})$ é um sub-reticulado de $(R, \leq)$.

(a) $R' = \{a, b, c, d\}$.

(b) $R' = \{b, c, f, g\}$.

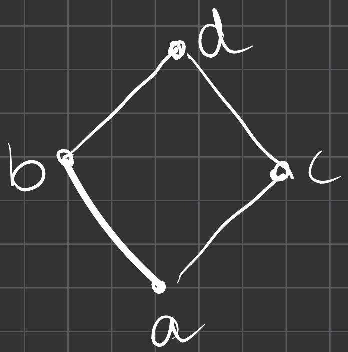
(c) $R' = \{a, b, f, g, h\}$.

Seja $(R, \leq)$ um reticulado. Um cpo $(S, \leq')$ é subreticulado de R se $S \subseteq R$, $\leq' = \leq_{|S}$, e para quaisquer $x, y \in S$,

$$\underline{\sup\{x, y\} \in S} \quad e \quad \underline{\inf\{x, y\} \in S}$$

estes valores são calculados no R

a) $R' = \{a, b, c, d\}$



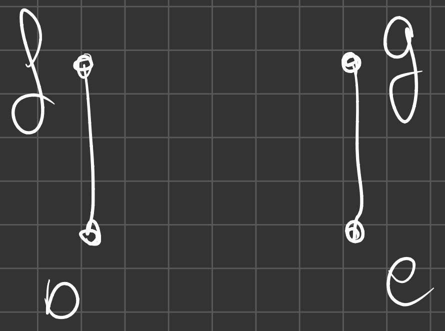
- $\forall x, y \in R'$, se $x \leq y$, temos
  - $\sup\{x, y\} = y \in R'$
  - $\inf\{x, y\} = x \in R'$

- $\boxed{\sup\{b, c\}} = d$ e $d \in R'$
- $\boxed{\inf\{b, c\}} = a$ e $a \in R'$

Logo, $(R', \leq_{|R'})$ é um subreticulado de $(R, \leq)$.

Calculados no R

b) $R' = \{b, c, f, g\}$



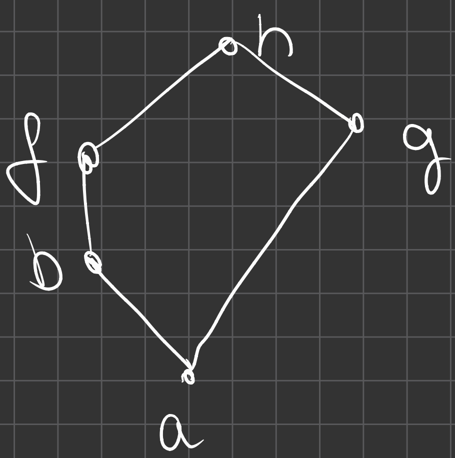
$(R', \leq_{|R'})$ não é reticulado, logo não é sub-reticulado de $(R, \leq)$.

Temos que $f, g \in R'$, $\boxed{\sup\{f, g\} = h}$ e

calculado no R

$h \notin R'$...

e) $R' = \{a, b, f, g, h\}$



$(R', \leq_{|R'})$ é reticulado, mas não é subreticulado de R.

Por exemplo, $\inf\{f, g\} = e$ e $e \notin R'$.

1.7.

Provar que:
$x \wedge_I y = x \wedge y$ $\forall x,y \in I$
$x \vee_I y = x \vee y$

Sabemos que:
I subconjunto ñ vazio de R diz-se ideal de R se:
1. $(\forall x,y \in R)$ $x,y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
2. $(\forall x \in I)(\forall y \in R)$ $y \wedge x = y \Rightarrow y \in I$;

Para mostrar que $(I, \wedge_I, \vee_I)$ é um sub-reticulado de $(R, \wedge, \vee)$ temos de provar:

i) $I \neq \emptyset$

ii) Para qq $x,y \in I$,
- $x \wedge_R y \in I$, $x \vee_R y \in I$.
- $x \wedge_I y = x \wedge_R y$,
  $x \vee_I y = x \vee_R y$

iii) $\wedge_I$, $\vee_I$ são op binárias em I

Prova:

i) Imediato pela definição de ideal

ii) Pela definição de $\wedge_I, \vee_I$ é imediato que, para quaisquer $x,y \in R$, $x,y \in I$...

$$x \wedge_I y = x \wedge_R y$$
$$x \vee_I y = x \vee_R y \ \ldots$$

Para qualquer $x,y \in I$, temos que $x \vee_R y \in I$ (por 1.)

Para qq $x,y \in I$, temos que $x,y \in R$.
Como R é reticulado, $x \wedge y \in R$.

iii)

De ii) considerando que $\wedge_R$ e $\vee_R$ são operações binárias em R, então $\wedge_I, \vee_I$ também são op binárias em I.

$$\wedge_I : I \times I \to I$$
$$(x,y) \mapsto x \wedge_R y$$

1.9
a) $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \text{mdc}, \text{mmc})$ reticulado...

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, para $\forall x \in \mathbb{N}$, ($n \in \mathbb{N}$ fixo)
$x \mapsto nx$

f é homomorfismo de $\mathcal{N}$ em $\mathcal{N}$?

$\mathcal{R}_1 = (R_1, \wedge_1, \vee_1)$; $\mathcal{R}_2 = (R_2, \wedge_2, \vee_2)$
reticulados

$h: R_1 \to R_2$ aplicação
h é homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ tq:

$\forall x, y \in \mathcal{R}_1$, $h(x \wedge_1 y) = h(x) \wedge_2 h(y)$
$h(x \vee_1 y) = h(x) \vee_2 h(y)$

Para qq $x, y \in \mathbb{N}$
$f(\text{mdc}(x,y)) = \text{mdc}(f(x), f(y))$

Prova:

$\text{mdc}(f(x), f(y)) =$
$\text{mdc}(nx, ny) =$
$n \times \text{mdc}(x,y) =$
$f(\text{mdc}(x,y))$

$\text{mmc}(f(x), f(y)) =$
$\text{mmc}(nx, ny) =$
$n \times \text{mmc}(x,y) =$
$f(\text{mmc}(x,y))$

6) $g(x) = x+2$, $x \in \mathbb{N}$

g é homomorfismo de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$?

Sejam $\mathcal{R}_1 = (R_1, \wedge_1, \vee_1)$ e $\mathcal{R}_2 = (R_2, \wedge_2, \vee_2)$ reticulados!

$h : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ aplicação

h é homomorfismo de $\mathcal{R}_1$ em $\mathcal{R}_2$ tq:

$\forall x, y \in \mathcal{R}_1$, $h(x \wedge_1 y) = h(x) \wedge_2 h(y)$

$h(x \vee_1 y) = h(x) \vee_2 h(y)$

Para qq $x, y \in \mathbb{N}$

$g(mdc(x,y)) = mdc(g(x), g(y))$

Prova: Seja $x = 2$ e $y = 4$

$g(mdc(2,4)) =$

$mdc(g(2), g(4)) =$

$mdc(2+2, 4+2) =$

$mdc(4, 6) = 2 \neq$

$mdc(2,4) + 2 = 4$

$g(mmc(2,4)) =$

$mmc(2,4) + 2 =$

$4 + 2 = 6 \neq$

$mmc(4, 6) = 12$

$mmc(2+2, 4+2))$

$mmc(g(2), g(4)) =$

$g(mmc(2,4)) =$

Logo, concluio que g não é homomorfismo...

e) $h: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, definida por:

$h(\emptyset) = \emptyset$

$h(A) = \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$

h é homomorfismo?

Para qualquer $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$h(X \cap Y) = h(X) \cap h(Y) ?$$

Sejam $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

Temos $h(A \cap B) = h(\emptyset) = \emptyset$
$h(A) \cap h(B) = \mathbb{N} \cap \mathbb{N}$ $\neq$

Logo, conclui-se que h não é homomorfismo...

1.10

Aplicações isótonas preservam ordem

$A \leq_1 B \Rightarrow f(A) \leq_2 f(B)$

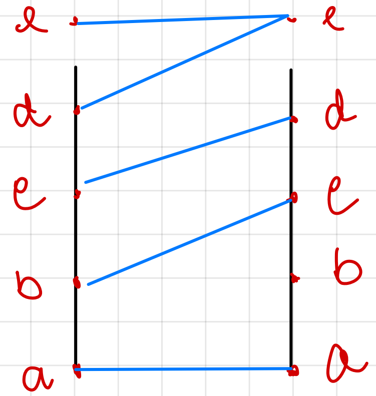
Mergulho de ordem

$f(A) \leq_2 f(B) \Leftrightarrow A \leq_1 B$

sobrejetiva

$\forall b \in B \; \exists a \in A, f(a) = b$ ou $f(A) = B$

a) $h: R_1 \rightarrow R_1$, definida por
$h(a) = a$
$h(b) = c$
$h(c) = d$
$h(d) = e$
$h(e) = e$



i) h é isótona?

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmentes ordenados e $\alpha: P_1 \rightarrow P_2$ uma aplicação.

Diz-se que:

- a aplicação α preserva a ordem ou que α é isótona se para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

– α é um mergulho de ordem se para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$\alpha(a) \leq_2 \alpha(b) \Leftrightarrow a \leq_1 b$$

– α é isomorfismo de cpos se α é um mergulho de ordem e é uma aplicação sobrejetiva.

A aplicação h é uma aplicação isótona de $(R_1, \leq)$ em $(R_1, \leq)$, pois, para quaisquer $s, t \in P_1$,

$$s \leq_1 t \Rightarrow h(s) \leq_2 h(t)$$

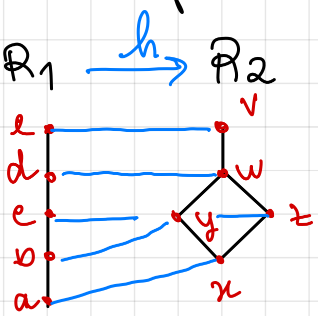
ii) h é isomorfismo?

A aplicação h não é isomorfismo de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_1, \leq_1)$ uma vez que h não é sobrejetiva

$(b \in R_1$ e $b \neq h(s)$, para todo $s \in R_1)$.

b) $h : R_1 \to R_2$, definida por:

$h(a) = x$
$h(b) = y$
$h(c) = z$
$h(d) = w$
$h(e) = v$



i) h é isótona?

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha : P_1 \to P_2$ uma aplicação. Diz-se que:

– α preserva a ordem ou que é isótona se, para, quaisquer $a, b \in P_1$

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

– α é um mergulho de ordem se, para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$a \leq_1 b \Leftrightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

- α é isomorfismo de cpos se:
  - α é mergulho de ordem
  - α é uma aplicação sobrejetiva

A aplicação h não é uma aplicação isótona de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_2, \leq_2)$ pois,

$$b, c \in R_1, \quad b \leq_1 c \quad \text{mas}$$

$$h(b) = y \quad \text{e} \quad h(c) = z$$

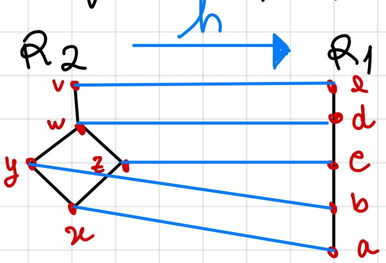
$$y \not\leq_2 z$$

ii) h é isomorfismo?

Todo o isomorfismo é uma aplicação isótona. Uma vez que h não é isótona, então h não é isomorfismo de $(R_1, \leq_1)$ em $(R_2, \leq_2)$.

e) $h: R_2 \to R_1$ definida por,

$h(x) = a$
$h(y) = b$
$h(z) = c$
$h(w) = d$
$h(v) = e$



i) h é isótona?

Sejam $(P_1, \leq_1)$ e $(P_2, \leq_2)$ dois conjuntos parcialmente ordenados e $\alpha: P_1 \to P_2$ uma aplicação.

Diz-se que:

- α é isótona ou que α preserva a ordem se para quaisquer $a, b \in P_1$

$$a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

- α é um mergulho de ordem se para quaisquer $a, b \in P_1$,

$$\alpha(a) \leq_2 \alpha(b) \Leftrightarrow a \leq_1 b$$

- α é um isomorfismo de cpos se
  - α é mergulho de ordem
  - α é sobrejetiva

A aplicação h é uma aplicação isótona de $R_2 \to R_1$ pois para qq $s, t \in R_2$,

$$s \leq_2 t \Rightarrow h(s) \leq_1 h(t).$$

ii) h é isomorfismo?

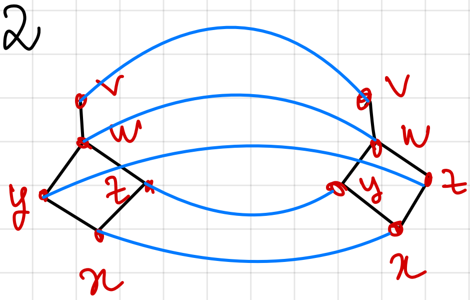
h não é um isomorfismo pois não é um mergulho de ordem

$$y \not\leq_2 z \Leftrightarrow h(y) \leq_1 h(z)$$

falha aqui y e z não são comparáveis

d) $h: R_2 \to R_2$

$h(x) = x$
$h(y) = z$
$h(z) = y$
$h(w) = w$
$h(v) = v$



i) h é isótona? $a \leq_1 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$

h é isótona, uma vez que para quaisquer $a, b \in R_2$

$$a \leq_2 b \Rightarrow \alpha(a) \leq_2 \alpha(b)$$

isto é verdade pq $\overline{a \leq_2 b}$ é falso para

$$y \leq_2 z \quad e \quad z \leq_2 y, \text{ mas}$$

como estamos perante uma implicação. $0 \to \dots$ é sempre verdade...

ii) h é isomorfismo?

h é mergulho de ordem, mesmo motivo de ser isotona (é verdade no antecedente)

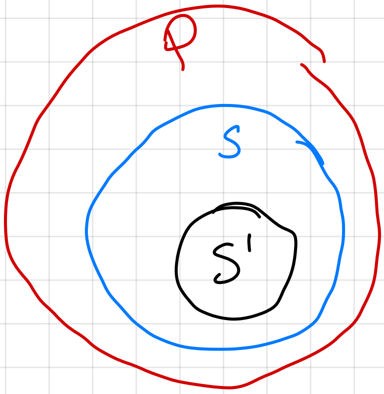
h é sobrejetiva uma vez que

$\forall a \in R_2 \; \exists b \in R_2 , \; h(a) = b$

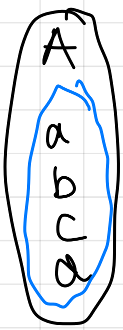
Logo, h é um isomorfismo de $(R_2, \leq_2)$ em $(R_2, \leq_2)$

1.12

a) $(P(A), \subseteq)$ é algébrico?



Seja $(P, \leq)$ um reticulado.
Um elem a de P diz-se compacto sempre que existe $\vee S$ e $a \leq \vee S$, para algum $S \subseteq P$, tem-se $a \leq \vee S'$ para algum conjunto finito S' tal que $S' \subseteq S$.



majorante
Qualquer $x \in A$
$m \geq x$

supremo
é o majorante mais pequeno

Dado um subconjunto, A de P, podem existir elems especiais de A.

Seja $m \in P$, diz-se que m é:

minorante de A se, para todo $a \in A$,
$m \leq a$;

majorante de A se, para todo $a \in A$,
$m \geq a$;

máximo de A se m é um majorante de A e $m \in A$;

mínimo de A se m é um minorante de A e $m \in A$

maximal de A se,
$m \in A$ e $\neg(\exists a \in A, m < a)$

minimal de A se,
$m \in A$ e $\neg(\exists a \in A, m > a)$

supremo de A se m é um majorante de A e $m \leq m'$, para qq majorante m' de A;

ínfimo de A se m é um minorante de A e $m \geq m'$, para qq minorante m' de A;

O reticulado $(P, \leq)$ diz-se:

- um reticulado completo sse, para qq $S \subseteq P$, existe $\vee S$.

· compactamente gerado se, para todo $a \in P$, $a = \vee S$, onde S é um conjunto de elementos compactos de P.

· um reticulado algébrico se é um reticulado completo e compactamente gerado.

Seja A um conjunto. O reticulado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ é completo, pois, para qualquer $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ existe $\bigvee S$.

De facto, se $S = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família é subconjuntos de A, então:

- $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{P}(A)$;
- $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, para todo $j \in I$;
- se Z é um subconjunto de A tal que, para todo $i \in I$, $A_i \subseteq Z$, tem-se $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq Z$.

Falta provar que A é compactamente gerado.

1.13

$\mathcal{R} = (R, \wedge_R, \vee_R)$ $S = (S, \wedge_S, \vee_S)$

reticulados

Mostre que:

a) Se $\mathcal{R}$ é distributivo, então sub-reticulado de R é distributivo.

Seja $R_1 = (R_1, \wedge_{R_1}, \vee_{R_1})$ um sub reticulado de $\mathcal{R}$.

Para quaisquer x, y, z em $\mathcal{R}_1$, temos

$(x \wedge_{R_1} y) \vee_{R_1} z =$

$= (x \wedge_R y) \vee_R z = \rightarrow$ R é distributivo $x, y, z \in R$

$= (x \wedge_R z) \vee_R (y \wedge_R t) =$

$= (x \wedge_{R_1} z) \vee_{R_1} (y \wedge_{R_1} t)$

Logo, $\mathcal{R}_1$ é distributivo.

b) Se $\mathcal{R}$ e S são distributivos (modulares) então $\mathcal{R} \times S$ é distributivo (modular).

Sejam $R = (R; \wedge_R, \vee_R)$ e $S = (S; \wedge_S, \vee_S)$ reticulados distributivos. Então,

$$R \times S = (R \times S; \wedge_{R\times S}, \vee_{R \times S}),$$

onde $\wedge_{R\times S}$ e $\vee_{R\times S}$ são op binárias em $R \times S$ definidas por:

- $(a_1, a_2) \wedge_{R\times S} (b_1, b_2) = (a_1 \wedge_R b_1, a_2 \wedge_S b_2)$
- $(a_1, a_2) \vee_{R\times S} (b_1, b_2) = (a_1 \vee_R b_1, a_2 \vee_S b_2)$

é um reticulado.

Considerado que $\mathcal{R}$ e S são distributivos para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in R \times S$, tem-se:

$(a_1, a_2) \wedge_{R\times S} ((b_1, b_2) \vee_{R\times S} (c_1, c_2)) =$

$$= (a_1 \wedge_R (b_1 \vee_R e_1),\ a_2 \wedge_S (b_2 \vee_S e_2))$$
$$= ((a_1 \wedge_R b_1) \vee_R (a_1 \wedge_R e_1),\ (a_2 \wedge_S b_2) \vee_S (a_2 \wedge_S e_2)) \quad (1)$$
$$= ((a_1 \wedge_R b_1,\ a_2 \wedge_S b_2) \vee_{R\times S} (a_1 \wedge_R e_1,\ a_2 \wedge_S e_2))$$
$$= ((a_1, a_2) \wedge_{R\times S} (b_1, b_2),\ (a_1, a_2) \vee_{R\times S} (e_1, e_2))$$

(1) R e S são distributivos...

Logo $R \times S$ é distributivo.

De modo similar prova-se que se R e S são modulares, então $R \times S$ é modular.

e) Se R é distributivo (modular) e S é uma imagem homomorfa de R, então S é distributivo (modular).

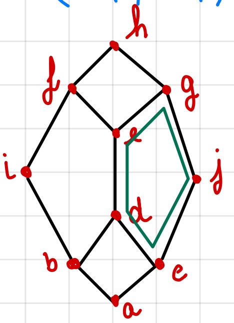
Sejam $R = (R; \wedge_R; \vee_R)$ e $S = (S; \wedge_S, \vee_S)$ reticulados tais que S é uma imagem homomorfa de R.

Então existe um homomorfismo $h: R \to S$ tal que h é sobrejetivo.

Sendo R um reticulado distributivo (modular), prova-se que $S = h(R)$ também é um reticulado distributivo (modular), uma vez que, para qualquer $y \in S$, existe $x \in R$ tal que $y = h(x)$ e para qualquer $a, b \in R$,

$$h(a \wedge_R b) = h(a) \wedge_S h(b)$$
$$h(a \vee_R b) = h(a) \vee_S h(b)$$

1.14 $(R_1; \leq_1)$



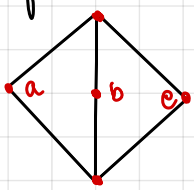
Nota que: Um reticulado $(R, \leq)$ é:

distributivo sse não tem qq sub-reticulado isomorfo a N_5 ou M_3.

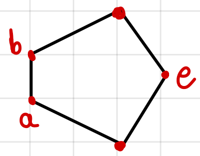
NOTA 2: todo o reticulado distributivo é modular...

modular sse não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5.

M_3:



N_5:

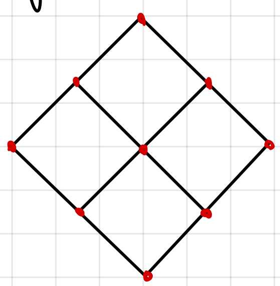


O $(R_1, \leq_1)$ não é distributivo nem modular pois tem um subreticulado isomorfo a N_5.

$(R_2, \leq_2)$

Seja $\mathcal{D}$ a cadeia com 3 elems a seguir representada.

Então, o reticulado $R \times R$ é isomorfo ao reticulado seguinte



$(R', \leq')$

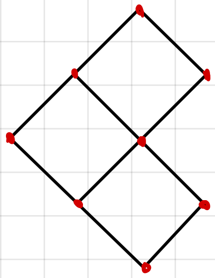
Todas as cadeias são reticulados distributivos.

O produto de reticulados distributivos é ainda um reticulado distributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo.

Logo $(R', \leq')$ é um reticulado distributivo.

Todo o sub-reticulado de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo.

Então o reticulado seguinte (que é sub-reticulado de $(R', \leq')$).

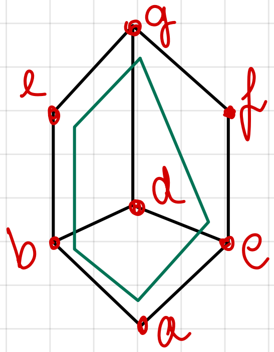


$(R'', \subseteq'')$

é um reticulado destributivo.
O reticulado $(R_2, \leq_2)$ é uma imagem homomorfa de $(R'', \subseteq'')$.

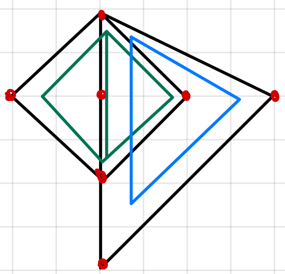
Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é um reticulado destributivo, conclui-se que $(R_2, \leq_2)$ é um reticulado distributivo.

$(R_3, \leq_3)$



Não é distributivo nem modular pois é isomorfo a N5.

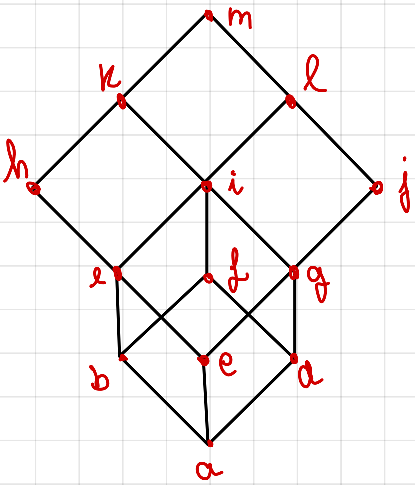
$(R_4, \leq_4)$



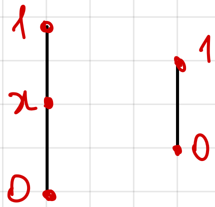
$(R_4, \leq_4)$ não é distributivo uma vez que é isomorfo a M3.

E também não é modular uma vez que é isomorfo a N5.

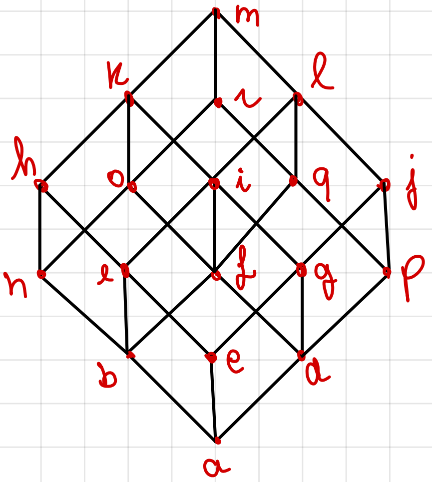
$(R_5, \leq_5)$



O reticulado $(R \times R) \times S$, onde R e S são respetivamente, as cadeias 3 e 2 elementos à seguir representadas:



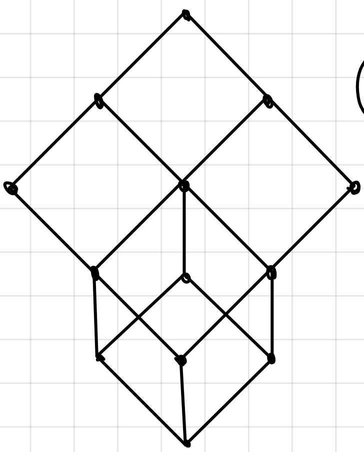
é isomorfo ao reticulado seguinte.



$(R', \leq')$

Todas as cadeias são reticulados destributivos. O produto de reticulados distributivos continua a ser destributivo e toda a imagem homomorfa de um reticulado destributivo é também um reticulado destributivo.

Todo o sub-reticulado de um reticulado destributivo é um reticulado distributivo. Então, o reticulado seguinte (que é um subreticulado de $(R', \leq')$)



$(R'', \leq'')$

é um reticulado destributivo.

O reticulado destributivo $(R_5, \leq_5)$ é uma imagem homomorfa do reticulado $(R'', \leq'')$.

Considerando que toda a imagem homomorfa de um reticulado distributivo é também um reticulado distributivo, conclui-se que $(R_5, \leq_5)$ é distributivo.

Folha 4

2.1.

b) Para cada um dos conjuntos C a seguir indicados, diga se C é subuniverso de $\mathcal{A}$:

i: $C = \emptyset$

Um subconjunto S de A diz-se subuniverso de $\mathcal{A}$ se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^A(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto $\emptyset$ não é subuniverso de $\mathcal{A}$ pois 0^A é uma operação nulária de $\mathcal{A}$ e $0^{\mathcal{A}} = 0 \notin \emptyset$.

ii) $C = \{0, f, d, 1\}$

Um subconjunto S de A diz-se um subuniverso de A se, para todo o símbolo de operação $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$ temos

$$h^A(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, f, d, 1\}$ não é subuniverso de $\mathcal{A}$, pois $f, d \in C$ e $f \wedge_A d = e \notin C$.

iii) $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$

Um subconjunto S de A diz-se um sub-universo de A se, para todo o símbolo de op. $h \in \{\wedge, \vee, \delta, 0, 1\}$ de aridade n, $n \in \{0, 1, 2\}$, e para todo $(a_1, \dots, a_n) \in S^n$, temos

$$h^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \in S.$$

O conjunto $C = \{0, a, b, c, f, d, 1\}$ é um subuniverso de A, pois:

- $0^A = 0$, $1^A = 1 \in C$
- para quaisquer $x, y \in C$, $x \wedge_A y$, $x \vee_A y \in C$
- para qualquer $x \in C$, $\delta(x) \in C$.

e) Diga se B é subálgebra de A

Para uma álgebra B ser subálgebra de A,

tem de ter o mesmo tipo e B tem de ser subuniverso

Neste caso B não é subalgebra uma vez que não é subuniverso, pq $\delta_B(f) \neq \delta_A(f)$ ...

2.2. Seja S um subuniverso de A. Então $S \subseteq A$ e S é fechado para todas as operações de A_n. Como S é fechado para a operação 0^{A_n}, segue que $0 \in S$.

O conjunto S também é fechado para a operação f^{A_n}, donde resulta que

$f^{A_n}(0) = 2 \in S$,
$f^{A_n}(2) = 4 \in S$,
$f^{A_n}(2n-2) = 2n \in S$.

Se o conjunto S não tem inteiros impares temos, $S = \{0, 2, 4, \dots, 2n\}$. Caso S tenha um número ímpar, então atendendo a que S é fechado para a operação f^{A_n} segue que $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\} \subseteq S$, pelo que $S = A$.

Assim, os únicos subuniversos de A_n são, $\{0, 2, 4, \dots, 2n\}$ e A_n.

2.3.

Sejam $\mathcal{R} = (R, \vee, \wedge)$ um reticulado e $a \in R$.

Mostre que $I_a = \{x \in R : x \vee a = a\}$ é um subuniverso de $\mathcal{R}$.

Temos de provar que:

1) $I_a \subseteq R$
2) I_a é fechado para as op. $\wedge, \vee$.

1) Pela definição de I_a, $I_a \subseteq R$.

2) Sejam $x, y \in I_a$. Então $x, y \in R$ e $x \vee a = a$ e $y \vee a = a$.

$x \vee y \in I_a$?

- $x, y \in R$ e $\mathcal{R}$ é reticulado, logo $x \vee y \in R$.
- $(x \vee y) \vee a = x \vee (y \vee a) = x \vee a = a$

Logo, $x \vee y \in I_a$.

$x \wedge y \in I_a$?

- $x, y \in R$ e $\mathcal{R}$ é reticulado, logo $x \wedge y \in R$.

Como $x \vee a = a$ e $y \vee a = a$, então $x \wedge a = x$ e $y \wedge a = y$.

$(x \wedge y) \vee a \overset{?}{=} a$

$(x \wedge y) \vee a = (x \wedge a \wedge y \wedge a) \vee a =$ comutatividade associatividade idempotência

$= ((x \wedge y) \wedge a) \vee a =$ lei absorção.

a

De 1) e 2) conclui-se que I_a é subuniverso de $\mathcal{R}$

2.4. Considere o grupo $(\mathbb{Z},+)$ visto como uma álgebra de tipo (2). Dê exemplo de uma subálgebra de $(\mathbb{Z},+)$ que não seja grupo.

$(\mathbb{N},+)$ é subálgebra de $(\mathbb{Z},+)$ e não é grupo.

Em $(\mathbb{N},+)$ não existe elemento neutro.

2.6. Considera a álgebra A definida no exercício 2.1

a) Dê exemplo de conjunto $X, Y \subseteq A$ tais que:

i. $X \neq Y$ e $Sg^A(X) = Sg^A(Y)$

Sejam $X = \emptyset$ e $Y = \{0\}$

ii. $|X| = 2$ e $Sg^A(X) = A$

Dado $X \subseteq A$, temos $Sg^A(X) = \bigcup X_i, i \in \mathbb{N}$

onde $X_0 = X$

$X_{i+1} = X_i \cup \{h^A(x) \mid h$ é um op n-ária de A e $x \in (X_i)^n\}$

Seja $X = \{f, g\}$. Temos:

$X_0 = X$

$X_1 = \{f, g\} \cup \{0, 1, d, e, a\}$ $f \wedge g$

$X_2 = \{f, g, 0, 1, d, e, a\} \cup \{b, c\}$

$X_3 = X_2 = A$, $Sg(\{f, g\}) = A$.

b) Determine $Sg^A(\{e\})$

Dado $X \subseteq A$, tem-se $sg^A(\{x\}) = \bigcup_{k, k \in \mathbb{N}_0} X_k$, onde

$X_0 = X$

$X_{i+1} = X_i \cup \{h^A(x) \mid h$ é op n-ária em A e $x \in (X_i)^n$, $n \in \{0,1,2\}\}$.

$X_0 = \{e\}$

$X_1 = \{e\} \cup \{0, 1, g\}$

$X_2 = X_1 = \{0, 1, e, g\}$

Folha 5...

2.7. Sejam $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra e $X, Y \subseteq A$. Mostre que:

a) $X \subseteq Sg^{\mathcal{A}}(X)$.

Imediato, uma vez que $Sg^{\mathcal{A}}(X)$ é o menor subuniverso de A que contem X.

b) $X \subseteq Y \Rightarrow Sg^A(X) \subseteq Sg^A(Y)$

Admitamos que $X \subseteq Y$.
Sabemos que $Sg^A(Y)$ é o menor subuniverso de A que contém o Y.

Logo, $X \subseteq Sg^A(Y)$. Mas $Sg^A(X)$ é o menor subuniverso de A que contém X.

Portanto, $Sg^A(X) \subseteq Sg^A(Y)$.

e) $Sg^A(Sg^A(X)) = Sg^A(X)$

Sabemos que $Sg^A(X)$ é o menor subuniverso de A que contém X.

Então, $Sg^A(Sg^A(X))$ é o menor subuniverso de A que contém o menor subuniverso de A que contém X.

Logo, é o próprio $Sg^A(X)$

2.8.

a) $X = \{b\}$ e $Y = \{e\}$

$Sg^A(X) \cup Sg^A(Y) = Sg^A\{X \cup Y\}$

$Sg^A\{b\} = \{d\} \cup \{e\} = \{b, d, e\}$

$Sg^A\{e\} = \{e\} = \{e, e, d\}$

$Sg^A\{b,e\} = \{d, e, a, b, e\}$

$Sg^A\{x\} \cup Sg^A\{y\} = \{b, e, d, e\}$ $\neq$

Logo, $Sg^A\{x\} \cup Sg^A\{y\} \neq Sg^A\{x \cup y\}$ ...

b) Seja $\mathbf{B} = (B; F)$ uma algebra unária.
Mostre que para qualquer, $X, Y \subseteq B$
$$Sg^B(X) \cup Sg^B(Y) = Sg^B(X \cup Y)$$

Uma vez que $X \subseteq X \cup Y$ e $Y \subseteq X \cup Y$
temos que:
$$Sg^B(X) \subseteq Sg^B(X \cup Y) \text{ e}$$
$$Sg^B(Y) \subseteq Sg^B(X \cup Y)$$

Portanto, $Sg^B(X) \cup Sg^B(Y) \subseteq Sg^B(X \cup Y)$

Para provar a inclusão contrária
começamos por mostrar que
$Sg^B(X) \cup Sg^B(Y)$ é um sub universo
de $\mathbf{B}$

Seja f^B uma op (unária) de B
Então, para todo $x \in B$
$$x \in Sg^B(X) \cup Sg^B(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in Sg^B(X) \cup x \in Sg^B(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^B(x) \in Sg^B(X) \cup f^B(x) \in Sg^B(Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f^B(x) \in Sg^B(X) \cup Sg^B(Y) \ldots$$

Logo, $Sg^{B}(X) \cup Sg^{B}(Y)$ é subuniverso de B.

Como $X \subseteq Sg^{B}(X)$ e $Y \subseteq Sg^{B}(Y)$, temos que $X \cup Y \subseteq Sg^{B}(X) \cup Sg^{B}(Y)$.

Mas $Sg^{B}(X \cup Y)$ é o menor subuniverso de B que contém $X \cup Y$. Portanto $Sg^{B}(X \cup Y) \subseteq Sg^{B}(X) \cup Sg^{B}(Y)$.

2.9.

a) Determina relações congruência...

Para qq álgebra e para qq $\theta \in Con A$, temos

$$\theta = \bigvee \{\theta(a,b) \mid (a,b) \in \theta\}$$

Comecemos por determinar as congruências principais em A

$$\theta(a,a) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$$

Para todo $x \in \{a,b,c,d\}$,

$$\theta(x,x) = \Delta_A$$

$$\theta(a,b) = \theta(b,a) = \Delta_A \cup \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,c),(c,a)\}$$

$$\theta(a,c) = \theta(c,a) = \Delta_A \cup \{(a,c),(c,a)\}$$

$$\theta(a,d) = \theta(d,a) = \Delta_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,d),(d,c),(a,c),(c,a)\}$$

$$\theta(b,c) = \theta(c,b) = \Delta_A \cup \{(b,c),(c,b),(a,b),(b,a),(c,a),(a,c)\}$$

$$\theta(b,d) = \theta(d,b) = \Delta_A \cup \{(b,d),(d,b)\}$$

$$\theta(c,d) = \theta(d,c) = \Delta_A \cup \{(c,d),(d,c),(a,d),(d,a),(c,a),(a,c)$$

Ver os sup 2 a 2...

$\theta(a,b) \vee \theta(a,c) = \theta(a,b)$

$\theta(a,b) \vee \theta(a,d) = \theta(a,b) \cup \theta(a,d) \cup \{(b,d),(d,b)\} = \nabla_A$

$\theta(a,c) \vee \theta(a,d) = \theta(a,d)$

$\theta(a,c) \vee \theta(b,d) = \theta(a,c) \cup \theta(b,d)$

$\theta(a,d) \vee \theta(b,d) = \theta$

2.4

1) Começar por determinar as congruências principais
justificar as decisões

2) ver os sup de cada congruência

3) Desenhar $(\mathrm{Con}A, \subseteq)$ (reticulado)

- lei comutativa

$x \wedge y = y = x$

$x \vee y = y \vee x$

- lei associativa

$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

- leis da idempotência

$x \wedge x = x$

$x \vee x = x$

- lei absorção

$x \wedge (x \vee y) = x$

$x \vee (x \wedge y) = x$

Folha 6 Matéria para 2º teste

2.15 Mostrar que é monomorfismo.

Aplicação α é homomorfismo, pois

- $\alpha(c^{B}) = \alpha(1) = 2 = c^{A}$;
- $\alpha(1 *^{B} 1) = \alpha(2) = 3$

$\alpha(1) *^{A} \alpha(1) = 2 *^{A} 2 = 3$ =

- $\alpha(1 *^{B} 2) = \alpha(2) = 3$

$\alpha(1) *^{A} \alpha(2) = 2 *^{A} 3 = 3$ =

- $\alpha(2 *^{B} 1) = \alpha(2) = 3$

$\alpha(2) *^{A} \alpha(1) = 3 *^{A} 2 = 3$ =

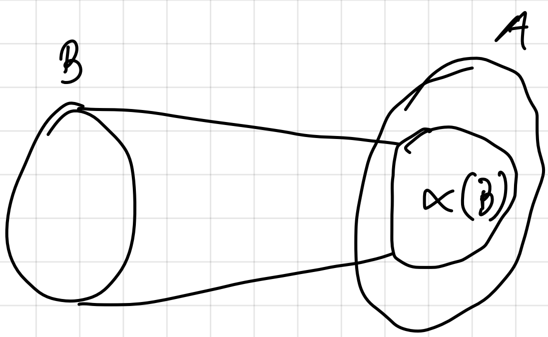
- $\alpha(2 *^{B} 2) = \alpha(1) = 2$

$\alpha(2) *^{A} \alpha(2) = 3 *^{A} 3 = 2$ =

α é injetiva, pois $1 \neq 2$ $\alpha(1) \neq \alpha(2)$.

Portanto, α é monomorfismo.

$\alpha : B \to A$



Como α é monomorfismo, $B \leq B$, então $\alpha(B)$ é subalgebra de A.

Seja $\alpha : B \to \alpha(B)$
$x \mapsto \alpha(x)$

Uma vez que α é monomorfismo, a aplicação α também é um monomorfismo e é sobrejetiva (pois, para todo $y \in \alpha(B)$, existe $x \in B$, tq $\alpha(x) = b$;

$y \in \alpha(B) \Rightarrow y = \alpha(x)$

$\Rightarrow y = \alpha'(x)$, para algum $x \in B$.

2.19

A, B álgebras do mesmo tipo

$\alpha, \beta \in Hom(A, B)$

$Eq(\alpha, \beta) = \{x \in A \mid \alpha(x) = \beta(x)\}$

Mostre que $Eq(\alpha, \beta)$ é um subuniverso de A.

Prova:

1. Claramente, temos $Eq(\alpha, \beta) \in A$ ← é subconjunto

2. O conjunto $Eq(\alpha, \beta)$ é fechado p/todas as op. de A. De facto, para qualquer op n-ária f^A e para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in A$, $a_1, \dots, a_n \in Eq(\alpha, \beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1, \dots, a_n \in Eq(\alpha, \beta) \Rightarrow a_1, \dots, a_n$ A e $\alpha(a_1) = \beta(a_1)$ e ... e $\alpha(a_n) = \beta(a_n)$ ...

$\Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n) \in A$ e $f^B(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) = f^B(\beta(a_1), \dots, \beta(a_n))$

$\Leftrightarrow f^A(a_1, \dots, a_n) \in A$ e $\alpha(f^A(a_1, \dots, a_n)) = \beta(f^A(a_1, \dots, a_n))$

$\Rightarrow f^A(a_1, \dots, a_n) \in Eq(\alpha, \beta)$.

$a_1, \dots, a_n \in A$ e $f^A : A^n \to A$ é função, então $f^A(a_1, \dots, a_n) \in A$

f^B é função

2.23

$\mathcal{A} = (A; (f^A)_{f\in O})$;
$\mathcal{B} = (B; (f^B)_{f\in O})$; álgebras do tipo (O, τ)
$\mathcal{C} = (C; (f^C)_{f\in O})$;

$\alpha_1 \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\alpha_2 \in Hom(\mathcal{A}, \mathcal{C})$

$\alpha : A \longrightarrow B\times C$, $\alpha(a) = (\alpha_1(a), \alpha_2(a))$
$\forall a \in A$.

a) Mostre que α é homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$.

Já é dito que α é função. Logo resta provar que α é compactível c/ os símbolos de operação.

Sejam f um símbolo de op de aridade n, $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\alpha(f^A(a_1,\dots,a_n)) = (\alpha_1(f^A(a_1,\dots,a_n)), \alpha_2(f^A(a_1,\dots,a_n)))$$

$\left(\begin{matrix}\alpha_1 \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{B}),\\ \alpha_2 \in Hom(\mathcal{A},\mathcal{C})\end{matrix}\right)$ $$= (f^B(\alpha_1(a_1),\dots,\alpha_1(a_n)), f^C(\alpha_2(a_1),\dots,\alpha_2(a_n)))$$

def da op $f^{B\times C}$ $$= f^{B\times C}((\alpha_1(a_1), \alpha_2(a_1)), \dots, (\alpha_1(a_n), \alpha_2(a_n)))$$

definição de α $$= f^{B\times C}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

b) Mostre que $Ker\,\alpha = Ker\,\alpha_1 \cap Ker\,\alpha_2$

$\alpha : A \to B\times C$

$$Ker\,\alpha = \{(x,y) \in A^2 \mid \alpha(x) = \alpha(y)\}$$
$$= \{(x,y) \in A^2 \mid (\alpha_1(x), \alpha_2(x)) = (\alpha_1(y), \alpha_2(y))\}$$
$$= \{(x,y) \in A^2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_1(y) \text{ e } \alpha_2(x) = \alpha_2(y)\}$$
$$= \{(x,y) \in A^2 \mid \alpha_1(x) = \alpha_1(y)\} \cap \{(x,y) \in A^2 \mid \alpha_2(x) = \alpha_2(y)\}$$
$$= Ker\,\alpha_1 \cap Ker\,\alpha_2.$$

c) Mostre que se α é um epimorfismo, então $\alpha 1$ e $\alpha 2$ são epimorfismo e

$$A/(\ker\alpha 1 \cap \ker\alpha 2) \cong A/\ker\alpha 1 \times A/\ker\alpha 2$$

- α epimorfismo $\Rightarrow \alpha 1, \alpha 2$ são epimorfismos

Admitámos que α é epimorfismo.
Uma vez que $\alpha 1$ e $\alpha 2$ são homomorfismo resta provar que $\alpha 1$ e $\alpha 2$ são sobrejetivas.

- $\alpha 1$ sobrejetiva

C álgebra

Seja $b \in B$. Temos $C \neq \emptyset$. Seja $c \in C$.
Logo $(b, c) \in B \times C$. Como α é sobrejetivo, existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = (b, c)$.

Logo existe $a \in A$ tal que $(\alpha_1(a), \alpha_2(a)) = (b, c)$
portanto, $b = \alpha 1(a)$, c/ $a \in A$.

Assim, $\alpha 1$ é sobrejetiva.

De forma análoga prova-se que $\alpha 2$ é sobrejetiva.

$$A/(\ker\alpha 1 \cap \ker\alpha 2) \cong A/\ker\alpha 1 \times A/\ker\alpha 2$$

1ª lei do isomorfismo

A, B álgebras do mesmo tipo
$\alpha : A \to B$ homomorfismo
Então, $A/\ker\alpha \cong \alpha(A)$
Se α é epimorfismo, temos $A/\ker \cong B$

- $\alpha : A \to B \times C$
Como α é epimorfismo então $A/\ker\alpha \cong B \times C$

- $\alpha 1_2 : A \to B\ C$
Uma vez que $\alpha 1_2$ é epimorfismo então $A/\ker\alpha 1_2 \cong B\ C$

Logo $A/\ker\alpha \cong A/\ker\alpha 1 \cap A/\ker\alpha 2$

Temos que $\ker\alpha =$
$= \ker\alpha 1 \cap \ker\alpha 2$, portanto

$A/(\ker\alpha 1 \cap \ker\alpha 2) \cong$
$\cong A/\ker(\alpha 1) \times A/\ker(\alpha 2)$

2.25

(1) Seja $A = (\{a,b,c,d\}; f^A)$ a álgebra do tipo (1), onde $f^A: \{a,b,c,d\} \to \{a,b,c,d\}$ é a função definida por

x	a	b	c	d
$f^A(x)$	c	d	a	b

Útil para 1º teste

a) Determine $\theta(a,b)$ e $\theta(a,d)$. Justifique que $(\theta(a,b), \theta(a,d))$ é um par de congruências fator.

Dados $x,y \in A$, $\theta(x,y)$ é a menor congruência em A que contém $\{(x,y)\}$

Assim,

propriedade da substituição

$$\theta(a,b) = \underbrace{\Delta_A}_{\text{garante reflexividade}} \cup \underbrace{\{(a,b),(b,a),(c,d),\underbrace{(d,c)}_{\text{garante simetria}}\}}_{\text{garante transitividade}}$$

$$\theta(a,d) = \Delta_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,b),(b,c)\}$$

Def. congruências fator

A álgebra; $\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Con} A$

(θ_1, θ_2) é um par congruências fator se:

- $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$
- $\theta_1 \cup \theta_2 = \nabla_A$
- $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ ser permutável

sse

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A \text{ e } \theta_1 \circ \theta_2 = \nabla_A$$

Temos

1) $\theta(a,b) \cap \theta(a,d) =$
$= \Delta_A$ (identidade A)
$(a,a)\ (b,b) \ldots$

2) $\theta(a,b) \circ \theta(a,d) =$

$= (\Delta_A \cup \{(a,b),(b,a),(e,d),(d,e)\}) \circ (\Delta_A \cup \{(a,d),(d,a),(e,b),(b,e)\})$

$= \underline{\theta(a,b) \cup \theta(a,d)} \cup \{(a,e),(d,b),(e,a),(b,d)\}$

pq ambas são reflexivas

$= \nabla_A$ (relação Universal)

De 1) e 2) concluimos que $(\theta(a,b), \theta(a,d))$ é um par de congruências fator.

b) Justifique que existe álgebras A_1 e A_2 não triviais tq $A \cong A_1 \times A_2$. Dê exemplos de álgebras A_1 e A_2 nas condições indicadas e determine $A_1 \times A_2$.

Teor. | A álgebra
Se (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, então $A \cong A/\theta_1 \times A/\theta_2$

Como $(\theta(a,b), \theta(a,d))$ é um par de congs fator, então $A \cong A/\theta(a,b) \times A/\theta(a,d)$

Como A não é a álgebra trivial e $\theta(a,b)$ e $\theta(a,d)$ não são a congruência universal, então as álgebras $A/\theta(a,b)$ e $A/\theta(a,d)$ não são triviais.

$A/\theta(a,b)$

$\theta(a,b) = \Delta \cup \{(a,b),(b,a),(e,d),(d,e)\}$

$\mathcal{A}/\theta(a,b) = (A/\theta(a,b); f^{A/\theta(a,b)})$ é a álgebra do tipo (1).

$A/\theta(a,b) = \{[a]_{\theta(a,b)}, [e]_{\theta(a,b)}\}$

$[a]_{\theta(a,b)} = \{b,a\}$

$[b]_{\theta(a,b)} =$

$[e]_{\theta(a,b)} = \{c,d\}$

$[d]_{\theta(a,b)} =$

$f^{A/\theta(a,b)}: A/\theta(a,b) \to A/\theta(a,b)$

$[a]_{\theta(a,b)} \mapsto [f^A(a)]_{\theta(a,b)} = [e]_{\theta(a,b)}$

$[e]_{\theta(a,b)} \mapsto [f^A(e)]_{\theta(a,b)} = [a]_{(a,b)}$

Cong principais

Algebras congruentes

G1 2Q subuniverso

2Q Congruencias

Subuniverso gerado $\{X \cup Y\}$ $= \{X\} \cup \{Y\}$??

e na interseção??

Alg cong distributiva se
con A é distributivo

$2 - G$

Dada Algebra

→ relação binária é sobre congruências

→ Ultima pergunta ... sobre congruência
de tipo 2

$A = (\{a, b, c\}; f^A)$

f^A	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	b
c	c	b	a

op aridade 0? Não, então
$\emptyset$ é subuniverso.

gerado por a, gerado por b, gerado por c

$\{a\}, \{b\}, \{c, a\},$

$\{a, b\}$ $\{b, c, a\}$

gerado por ab, gerado b,c

se tivermos op aridade 0,
o $\emptyset$ não é subuniverso!

se a álgebra tiver op.
de aridade 0, começar
pelas constantes...

2.27. a) Mostre que para toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível

29/03 4F

Uma álgebra $\mathcal{A}$ do tipo (O, τ) é direta/indecomponível se, para quaisquer álgebras $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ do tipo (O, τ),

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \Rightarrow \mathcal{A}_1 \text{ é trivial ou } \mathcal{A}_2 \text{ é trivial.}$$

Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra finita com um número primo de elementos, ou seja $|A| = n$ com n primo.

Admitamos que $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Então, $|A| = |A_1 \times A_2|$. Como A é finita, então $A_1 \times A_2$ é finita e tem-se $|A_1 \times A_2|$.

$|A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$. Logo $n = |A_1| \times |A_2|$.

Uma vez que n é primo, $|A_1| = 1$ ou $|A_2| = 1$.

Portanto, $\mathcal{A}_1$ é trivial ou $\mathcal{A}_2$ é trivial.

Assim, $\mathcal{A}$ é direta/indecomponível.

b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ a op unária em A definida por

conjunto de suporte

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \{2,4\} \\ 2 & \text{se } x \in \{1,3,5\} \end{cases}$$

i. Sejam θ_1, θ_2 as congruências de $\mathcal{A}$ definida por $\theta_1 = \theta(1,2)$ e $\theta_2 = (3,5)$.

Determine θ_1 e θ_2. Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \text{Con}\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$.

$\theta(1,2) = \Delta_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$

$\theta(3,5) = \Delta_A \cup \{(3,5),(5,3)\}$

menor conA que contem $\{(1,2)\}$

θ_1 e θ_2 são congruências em $\mathcal{A}$ pois $\theta_1, \theta_2 \subseteq A \times A$, são relações de equivalência e satisfazem à propriedade de substituição.

$\theta_1 \neq \Delta_A$, pois $(1,2) \in \theta_1$ e $1 \neq 2$.

$\theta_2 \neq \Delta_A$, pois $(3,5) \in \theta_2$ e $3 \neq 5$.

Portanto, $\theta_1, \theta_2 \in \text{Con}\mathcal{A} \setminus \{\Delta_A\}$.

Por definição de interseção, é imediato que $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$.

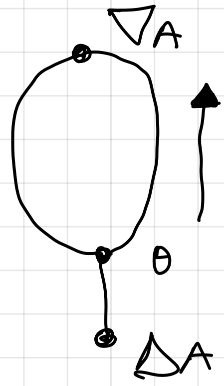
ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências em $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

Uma vez que $|A| = 5$ e 5 é primo, a álgebra $\mathcal{A}$ é direta/indecomponível. Então se $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, temos que $\mathcal{A}/\theta$ é trivial ou $\mathcal{A}/\phi$ é trivial.

$A/\theta = \{[x]_\theta \mid x \in A\} \ldots$

Se A/θ é trivial, então $\theta = \nabla_A$;
Se A/ϕ é trivial, então $\phi = \nabla_A$.

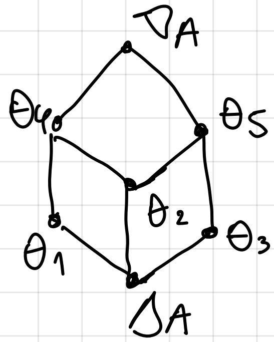
iii. Diga, justificando, se a álgebra A é subdireta / irredutível.



Uma álgebra A é subdiretamente irredutível sse A é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}A \setminus \{\Delta_A\}$ tem mínimo...

Considerando que θ_1 e $\theta_2 \in \mathrm{Con}A \setminus \{\Delta_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta_A$, então $\mathrm{Con}A \setminus \{\Delta_A\}$ não tem mínimo. Então, como A não é a álgebra trivial, concluímos que A não é subdireta / irredutível.

2.27. Seja $A = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte.



Justifique que:

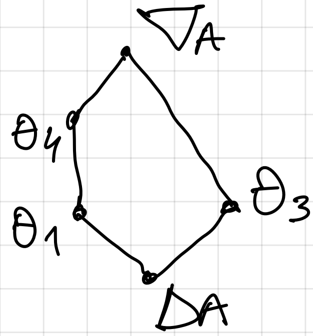
a) A álgebra A não é congruência-distributiva.

b) A álgebra A não é subdireta irredutível.

c) Os reticulados $\mathrm{Con}A/_{\theta_1}$ e $\mathrm{Con}/_{\theta_3}$ são isomorfos.

a) A álgebra A é congruente-distributiva sse $\mathrm{Con}\,A$ é distributiva.
Um reticulado é distributivo sse não tem qq sub-reticulado isomorfo a M_3 ou N_5.

A álgebra A não é congruente distributiva, pois o reticulado é um sub-reticulado de $\mathrm{Con}A$ e é isomorfo a N_5.



b) A álgebra A não é trivial, pois $\mathrm{Con}\,A / \{\Delta_A\}$. Além disso, o cpo $\mathrm{Con}\,A / \{\Delta_A\}$ não tem elem mínimo. Logo a álgebra não é subdireta/irredutível.

c) Preciso teorema correspondência...

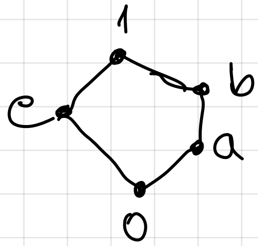
Teorema Correspondência:

Sejam A uma álgebra e $\theta \in \mathrm{Con}\,A$. Então $\mathrm{Con}\,A/\theta \cong [\theta, \nabla_A]$.

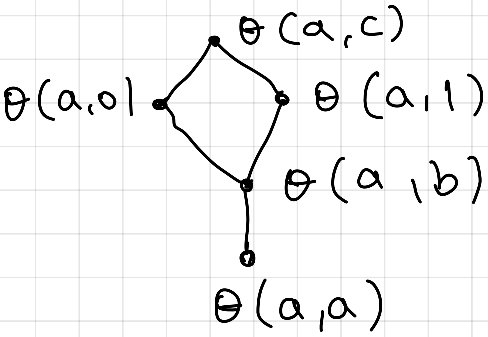
Pelo teorema correspondência, temos $\mathrm{con}\,A/\theta_1 \cong [\theta_1, \nabla_A]$, $\mathrm{Con}\,A/\theta_3 \cong [\theta_3, \nabla_A]$, concluímos que

$\mathrm{con}\,A/\theta_1 \cong \mathrm{con}\,A/\theta_3$.

2.28. Considere o reticulado N_5 representado pelo diagrama Hasse



Sabendo que o reticulado das congruências de N_5 é representado pelo diagrama de Hasse.



diga, justificando, se a álgebra N_5 é:

a) congruente-modular

b) direta/indecomponível

c) subdireta/irredutível

a) Uma álgebra A é congruente-modular se Con A é modular.

Um reticulado é modular sse não tem qualquer sub-reticulado isomorfo a N_5.

O único sub-reticulado de $\mathrm{Con}\,N_5$ com 5 elementos é $\mathrm{Con}\,N_5$. Claramente $\mathrm{Con}\,N_5$ não é isomorfo a N_5. Logo N_5 é congruente-modular.

b) A álgebra tem 5 elems e 5 é primo, Logo a álgebra N_5 é direta/indecomponível.

Solução Alternativa: Usando Álgebras...

Uma álgebra A é direta/indeponível sse as únicas congruências fator são Δ_A e ∇_A.
Uma congruência $\theta \in Con\,A$ diz-se uma congruência fator se existe $\theta' \in Con\,A$ tal que $\theta \cap \theta' = \Delta_A$, $\theta \cup \theta' = \nabla_A$ e $\theta' \circ \theta = \theta \circ \theta'$.

P.S.: $A = N_5$...

Seja $\theta \in Con\,A \setminus \{\Delta_A, \nabla_A\}$. Admitámos que θ é congruência fator.

Então existe $\theta' \in Con\,N_5$ tal que:

$$\theta \cap \theta' = \Delta_{N_5}, \quad \theta \cup \theta' = \nabla_{N_5} \text{ e } \theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta.$$

Como $\theta \cap \theta' = \Delta_A$, do reticulado $Con\,N_5$ concluimos que $\theta' = \Delta_{N_5}$.

Logo $\theta \vee \theta' = \theta$ (contradição, pois $\theta \neq \nabla_{N_5}$)

Assim, as únicas congruências fator são ∇_{N_5} e Δ_{N_5}.

Portanto, N_5 é direta/indecomponível.

c) Uma vez que o c.p.o. $Con\,N_5 \setminus \{\Delta_A\}$ tem elemento mínimo (esse mínimo é $\theta(a,b)$), então N_5 é subdireta/irredutível.

Nota: Toda a álgebra subdireta/irredutível é direta/indecomponível.

—Aula— 12/04 — TP

$: Con A/\theta_1 \cong [\theta_1, \nabla_A]$

2.30 Mostre que, para cada operador $O \in \{H, S\}$, temos $IO = OI$.

$[HI = IH]$.

Queremos provar que, para qualquer classe K de álgebras do mesmo tipo, temos $HI(K) = IH(K)$.

- $HI(K) \subseteq IH(K)$.

Seja $A \in HI(K)$. Então $A = \alpha(B)$ para alguma álgebra $B \in I(K)$ e algum epimorfismo $\alpha : B \to A$.

Como $B \in I(K)$, então $B = \delta(\mathcal{C})$ para alguma álgebra $\mathcal{C} \in K$ e para algum isomorfismo $\delta : \mathcal{C} \to B$.

Assim,

$$A' = \alpha(B) = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C}).$$

Uma vez que, α e δ são epimorfismo, então $\alpha \circ \delta$ é um epimorfismo. Logo $A \in H(K)$.

Como $A = id_A(A)$ e id_A é um isomorfismo, temos $A \in IH(K)$.

- $IH(K) \subseteq HI(K)$

Seja $A \in IH(K)$. Então $A = \alpha(B)$ para alguma álgebra $B \in H(K)$ e algum isomorfismo $\alpha : B \to A$.

Como $B \in H(K)$, então $B = \delta(\mathcal{C})$ para alguma álgebra $\mathcal{C} \in K$ e algum epimorfismo $\delta : \mathcal{C} \to B$.

Logo, $A = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$.
homomorfismo...

Como $\mathcal{C} = id_C(\mathcal{C})$ e id_C é um isomorfismo, então $\mathcal{C} \in I(K)$.

Uma vez que α e δ são epimorfismos, então $\alpha \circ \delta$ é o epimorfismo. Logo, $A \in H(I(K)) = HI(K)$.

Portanto, $IH(K) \subseteq HI(K)$.

2.31. Mostre que os operadores S, I, H e IP são idempotentes.

ser idempotente

$[S^2 = S]$

Queremos provar que qualquer que seja as classes K de álgebras do mesmo tipo, $S^2(K) = S(K)$.

Para qualquer $O \in \{H, S, I, P, P_S\}$ e para qualquer classe de álgebras K', temos $K' \subseteq O(K')$.

Logo,

$$S(K) \subseteq S(S(K)) = S^2(K).$$

Falta provar que $S^2(K) \subseteq S(K)$.
Seja $A \in S^2(K) = SS(K)$.

Então $A \leq B$ para alguma álgebra $B \in S(K)$.

Como $B \in S(K)$. Então $B \leq C$ para alguma álgebra $C \in K$.

Como $A \leq B$ e $B \leq C$, temos $A \leq C$, el $C \in K$. Logo $A \in S(K)$.

Portanto, $SS(K) \subseteq S(K)$.

Assim, $S^2 = S$.

[$H^2 = H$]

Para qualquer operador $O \in \{H, I, S, P, P_S\}$ e para qualquer classe de álgebras K', temos $K' \subseteq O(K')$.

Logo, $H(K) \subseteq H(H(K)) = H^2(K)$.

Resta provar que $H^2(K) \subseteq H(K)$.

Seja $A \in H^2(K) = HH(K)$. Então, $A = \alpha(B)$ para alguma álgebra $B \in H(K)$ e algum epimorfismo $\alpha: B \to A$.

Como $B \in H(K)$, temos que $B = \delta(C)$ para alguma álgebra $C \in K$ e algum epimorfismo $\delta: C \to B$.

$A = (\alpha \circ \delta)(C)$. Como α e δ são epimorfismos, $\alpha \circ \delta$ também é epimorfismo.

Logo $A \in H(K)$.

Portanto, $H^2(K) \subseteq H(K)$.

2.32. Mostre que HS, HIP e SIP são operadores de fecho em classes do mesmo tipo.

Um operador O diz-se idempotente se, para qualquer classes de algebras K_1 e K_2 (do mesmo tipo), temos:

i) $K_1 \subseteq O(K_1)$
ii) $O^2(K) \subseteq O(K_1)$
iii) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O(K_1) \subseteq O(K_2)$.

Vamos provar que HIP é um operador de fecho.

i) Para qualquer $O \in \{H, S, I, P, P_S\}$ e para qualquer classe de álgebras K, temos $K \subseteq O(K)$.

Logo,
$K_1 \subseteq P(K_1)$, $P(K_1) \subseteq IP(K_1)$, $IP(K_1) \subseteq HIP(K_1)$.

Portanto, $K_1 \subseteq HIP(K_1)$.

ii) Para qualquer classe de álgebras K_1, temos $(HIP)^2(K_1) = HIPHIP(K_1)$
$\subseteq HIHPIP(K_1)$ $(PH \subseteq HP)$
$= HHIPIP(K_1)$ $(IH = HI)$
$= HIP(K_1)$ $(H^2 = H,\ IP^2 = IP)$

iii) Para quaisquer $O \in \{H, I, S, P, P_S\}$ e para quaisquer classe, K, K', temos

$K \subseteq K' \Rightarrow O(K) \subseteq O(K')$.

Logo, para quaisquer classes de álgebras K_1, K_2,

$K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow P(K_1) \subseteq P(K_2)$
$\Rightarrow IP(K_1) \subseteq IP(K_2)$
$\Rightarrow HIP(K_1) \subseteq HIP(K_2)$

$HIP(K_1) \subseteq HIP(K_2)$

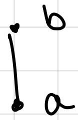
De i, ii, iii) conclui-se que HIP é um operador de fecho.

2.33. Mostre que $SH \neq HS$, $PS \neq SP$, $PH \neq HS$.

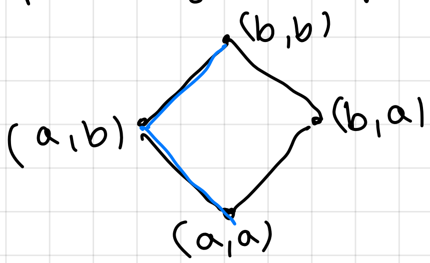
Vamos mostrar que $PS \neq SP$.
Queremos mostrar que existe uma classe de álgebras K tal que $PS(K) \neq SP(K)$.

Temos sempre $PS \subseteq SP$, logo temos de mostrar que existe uma classe K tal que $SP(K) \nsubseteq PS(K)$.

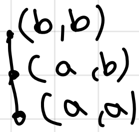
Seja $K = \{2\}$, onde 2 é o reticulado $(\{a,b\}; \wedge, \vee)$ representados pelo diagrama.



Como $2 \in K$, então $2 \times 2 \in P(K)$. O reticulado 2×2 pode ser representado pelo diagrama.



O reticulado representado por



é um elemento de $SP(K)$.

Sendo $K = \{2\}$, temo $S(K) = \{(\{a\},\wedge,\vee), (\{b\},\wedge,\vee), 2\}$

Para todo $\mathcal{R} = (R, \wedge, \vee) \in PS(K)$, $|R| = 2^{|I|}$ para algum conjunto I.

Logo, $R'' \notin PS(K)$.

Portanto $SP(K) \nsubseteq PS(K)$.

2.34. Mostre que se $\underline{G}$ é a classe dos grupos abelianos, então $HS(G) = SH(G)$.

Nota: Os elementos de G têm de ser considerados como álgebras do tipo $(2,1,0)$. Neste caso, o conceito de subgrupo coincide c/ o conceito de subálgebra.

Todo o grupo (abeliano) é subgrupo de si mesmo. $[\underline{G} \subseteq S(\underline{G})]$.

Todo o subgrupo de um grupo abeliano é um grupo abeliano. $[S(\underline{G}) \subseteq \underline{G}]$.

Assim, $S(G) = G$.

Todo o grupo é imagem homomorfa de si mesma $[G \subseteq H(G)]$

$h: G_1 \to G_2$ homomorfismo
G_1 grupo abeliano
$h(G_1)$ é grupo
$h(G_1)$ é abeliano...

$x, y \in H(G_1)$
$\Rightarrow x = h(x'), y = h(y'), x', y' \in G_1$
$\Rightarrow x_2 y = h(x' \cdot_1 y')$
$\Rightarrow \ldots$

Toda a imagem homomorfa de um grupo abeliano é um grupo abeliano. $[H(\underline{G}) \subseteq \underline{G})]$

Assim, $H(G) \subseteq G$.

—

19 Abril

3.1

Da definição de $\mathcal{M}$ segue que:

1) dom e cod são funções (bem definidas) de $\mathcal{M}$ em $\{\mathcal{M}\}$;

2) $\circ$ é uma função (bem definida) de $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ em $\mathcal{M}$, pois $\circ = \cdot$ e $\cdot$ é uma função de $\mathcal{M} \times \mathcal{M} = \mathcal{M}$.

3) $\hom(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$ e $\mathcal{M}$ é um conjunto;

4) para quaisquer $r, s \in \mathcal{M}$, temos $r \cdot s \in \mathcal{M}$ (pois $\cdot$ é uma op binária em $\mathcal{M}$),

$$\operatorname{dom}(s \circ r) = \operatorname{dom}(s \cdot r) = \mathcal{M} = \operatorname{dom}(r)$$
$$\operatorname{cod}(s \circ r) = \operatorname{cod}(s \cdot r) = \mathcal{M} = \operatorname{cod}(s)$$

5) para o unico elem de $\{\mathcal{M}\}$ existe $id_{\mathcal{M}} = 1_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}$ tal que $\operatorname{dom}(id_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M} = \operatorname{cod}(id_{\mathcal{M}})$ e, para todo $r \in \mathcal{M}$,

$$\left.\begin{array}{l} id_{\mathcal{M}} \circ r = 1_{\mathcal{M}} \cdot r = r \\ r \circ id_{\mathcal{M}} = r \cdot 1_{\mathcal{M}} = r \end{array}\right\}$$ (pois, $1_{\mathcal{M}}$ é o elem neutro de um monóide)

6) para quaisquer $r, s, t \in \mathcal{M}$,

$$(r \circ s) \circ t = (r \cdot s) \cdot t \underset{\substack{\uparrow \\ \cdot \text{ é associativa}}}{=} r \cdot (s \cdot t) = r \circ (s \circ t)$$

De 1), 2), ..., 6) concluimos que $\underline{\mathcal{M}}$ é uma categoria.

b) $(P, \leq)$

$\mathbf{P}$ $\quad \operatorname{obj}(\mathbf{P}) = P$
$\quad \operatorname{Mor}(\mathbf{P}) = \leq$

$a, b \in P$, $\hom(a, b) = \{(a, b)\} \cap \leq$

$(a, b), (b, c) \in \leq$, $(b, c) \circ (a, b) = (a, c)$
$a \in P$, $id_a = (a, a)$

3.2. Numa categoria $\mathcal{C}$, considera o diagrama seguinte:

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i"] & & \bullet \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "s"] \arrow[drr, "k"'] \arrow[rrrr, bend right=20, "d"'] & & \bullet \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "t"] & & \mathcal{C} \\
 & & \bullet \arrow[urr, "l"'] & &
\end{tikzcd}$$

Mostre que se os quatro triângulos internos comutam, então $h \circ g \circ f = l \circ k$.

|Se fosse categoria o d existia|

Admitindo que os quatro triângulos comutam, temos,

$$s = i \circ t, \quad t = h \circ j, \quad g = j \circ i, \quad t \circ s = l \circ k.$$

Então,

$$h \circ g \circ f = h \circ \underbrace{(j \circ i) \circ f}_{} \overset{\text{associatividade}}{=} (h \circ j) \circ (i \circ f) \overset{\text{hip}}{=} (h \circ j) \circ s \overset{\text{hip}}{=} t \circ s \overset{\text{hipótese..}}{=} l \circ k_{//}$$

3.2. Seja $\mathcal{C}$ a categoria definida pelo diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[d] \arrow[dr, "q"] \arrow[drr, bend right=90, looseness=1.5] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & C \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
D \arrow[r, "r"'] \arrow[rr, bend right] & E \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

Construa:

a) A subcategoria plena $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ tal que, $Obj(\mathcal{C}') = \{A, B, C, F\}$

b) A categoria dos objetos sobre E.

a) A subcategoria plena $\mathcal{C}'$ tal que $Obj(\mathcal{C}') = \{A, B, C, F\}$ é a categoria definida pelo seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[drr, bend right] & B \arrow[loop below, "id_B"] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathcal{C} \arrow[loop below, "id_C"] \arrow[d, shift right, "g"'] \arrow[d, shift left, "f"] \\
 & & F \arrow[loop below, "id_F"]
\end{tikzcd}$$

b) A categoria dos objetos sobre E $(\mathcal{C}/E)$ é a categoria definida pelo diagrama

$q \qquad p$

$r \qquad id_E$

$Obj(\mathcal{C}/E) = \{$ monomorfismo de $\mathcal{C}$ c/ codomínio $E\}$

dados dois elementos de $Obj(\mathcal{C}/E)$ (isto é, dados $\mathcal{C}$-morfismos $f: X \to E$, $g: Y \to E$) um $\mathcal{C}/E$-morfismo de f em g é um triplo de morfismos (f, j, g) tal que $g \circ j = f$.

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[r, "(q,i,p)"] \arrow[d, "(q,s,r)"'] \arrow[dr, "(q,q,id_E)"] & p \arrow[d, "(p,p,id_E)"] \\
R \arrow[r, "(R,R,id_E)"'] & id_E
\end{tikzcd}$$

3.4.

a) Sejam C e D as categorias definidas respetivamente, pelos diagramas seguintes:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "i"] & v
\end{tikzcd}$$

Defina por meio de diagrama a categoria produto $C \times D$.

$$Obj\,(\mathcal{C}\times D) = \{(X,Y) \mid X \in Obj\,(\mathcal{C}),\ Y \in Obj\,(D)\}$$

$$Mor\,(\mathcal{C}\times D) = \{(f,g) \mid f \in Mor\,(\mathcal{C}),\ g \in Mor\,(D)\}$$

$$(X,Y),\ (X',Y') \in Obj\,(\mathcal{C}\times D)$$

$$hom\,((X,Y),(X',Y')) = \{(f,g) \mid f \in hom_C(X,X'),\ g \in hom_D(Y,Y')\}$$

$$id^{C\times D}_{(X,Y)} = (id^C_X,\ id^D_Y)$$

$$(f,g) \circ_{C\times D} (f',g') = (f \circ_C f',\ g \circ_D g')$$

A categoria $C \times D$ é a categoria definida pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(A,u) \arrow[loop left, "(id_A,id_u)"] \arrow[r, "(id_A,i)"] \arrow[d, "(f,id_u)"] \arrow[dr, "(f,i)"] \arrow[ddr, "(g,i)"] \arrow[dd, bend right=60, "(g,id_u)"'] & (A,v) \arrow[loop right, "(id_A,id_v)"] \arrow[d, "(f,id_v)"] \arrow[dd, bend left=60, "(g,id_v)"] \\
(B,u) \arrow[loop left, "(id_B,id_u)"] \arrow[r, "(id_B,i)"] \arrow[d, "(h,id_u)"] \arrow[dr, "(h,i)"] & (B,v) \arrow[loop right, "(id_B,id_v)"] \arrow[d, "(h,id_v)"] \\
(C,u) \arrow[loop left, "(id_C,id_u)"] \arrow[r, "(id_C,i)"] & (C,v) \arrow[loop right, "(id_C,id_v)"]
\end{tikzcd}$$

3.5 Sejam $\mathcal{R} = (R, \cdot_R, 1_R)$ e $\mathcal{S} = (S, \cdot_S, 1_S)$ monóides vistos como categorias $\underline{R}$ e $\underline{S}$.

O que é a categoria $\underline{R} \times \underline{S}$?

Sejam, $\underline{R} = (Obj(R), Mor(R), dom(R), cod(R), \circ_R)$

$\underline{S} = (Obj(S), Mor(S), dom(S), cod(S), \circ_S)$

as categorias respeitantes aos monóides $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$.

A categoria $\underline{R} \times \underline{S}$ é a categoria

$(Obj(\underline{R}\times\underline{S}), Mor(\underline{R}\times\underline{S}), dom_{\underline{R}\times\underline{S}}, cod_{\underline{R}\times\underline{S}}, \circ_{\underline{R}\times\underline{S}})$

onde,

- $Obj(\underline{R}\times\underline{S}) = \{(R,S)\}$
- $Mor(\underline{R}\times\underline{S}) = \{(r,s) \mid r \in Mor(\underline{R}), s \in Mor(\underline{S})\} = R \times S$;
- para cada $(r,s) \in Mor(\underline{R}\times\underline{S})$, $dom_{\underline{R\times S}}((r,s)) = (dom_{\underline{R}}(r), dom_{\underline{S}}(s))$

$= (R, S)$

$cod_{\underline{R\times S}}((r,s)) = (cod_{\underline{R}}(r), cod_{\underline{S}}(s))$

$= (R, S)$

- para quaisquer $(r,s), (r',s') \in Mor(\underline{R},\underline{S})$

• $(r,s) \circ_{\underline{R\times S}} (r',s') = (r \circ_{\underline{R}} r', s \circ_{\underline{S}} s') = (r \cdot_R r', s \cdot_S s')$

- $id^{\underline{R\times S}}_{(R,S)} = (id^{\underline{R}}_R, id^{\underline{S}}_S) = (1_R, 1_S)$

Logo, $\underline{R} \times \underline{S}$ é a categoria correspondente ao monóide $\mathcal{R} \times \mathcal{S}$.

$\mathcal{R} = (R, \cdot_R, 1_R)$, $\mathcal{S} = (S, \cdot_S, 1_S)$

$\mathcal{R} \times \mathcal{S} = (R \times S, \cdot^{R\times S}, 1_{R\times S})$

$(a,b) \cdot^{R\times S} (c,d) = (a \cdot^R c, b \cdot^S d)$

$1_{R\times S} = (1_R, 1_S)$

Aula 19 Abril

3.7

Considere a categoria C definida pelo diagrama

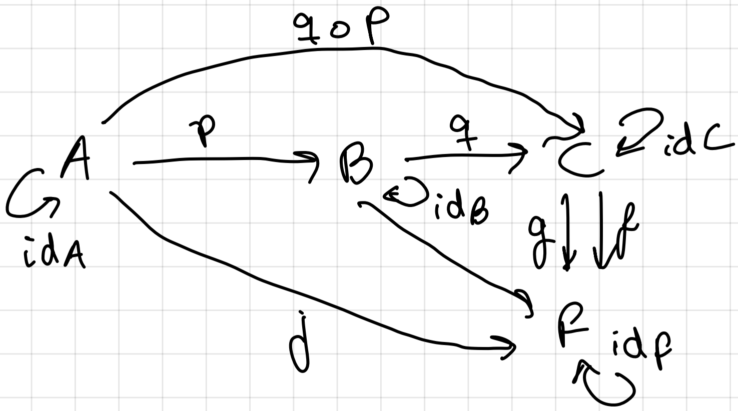
Indica, caso exista:

a) um monomorfismo do C

b) um monomorfismo que não seja epimorfismo

c) um bimorfismo

d) um isomorfismo



onde $i = g \circ f = f \circ g$

$j = i \circ p = g \circ g \circ p = f \circ g \circ p$

Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se um epimorfismo se, para qq C-morfismo

$s: Y \to Z$, $t: Y \to Z$

$s \circ h = t \circ s \Rightarrow s = h$.

O morfismo $q: B \to C$ não é epimorfismo pois, existe $g: C \to F$, $f: F \to C$ tais que

...

e) Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se um bimorfismo se h é monomorfismo e epimorfismo.

- Para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, id_X é um monomorfismo e um epimorfismo, logo é um bimorfismo.

- O morfismo j é um bimorfismo. Já tínhamos verificado que j é monomorfismo. Prova-se que j é também epimorfismo, pois, para

99. C-morfismo $s: F \to Z$, $t: F \to Z$

$f \circ s = f \circ t \Rightarrow s = t = id_F$ (pois id_F é o único morfismo c/ domínio F).

d) Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se um isomorfismo se é invertível à direita e invertível à esquerda.

Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se invertível à esquerda se existe um morfismo $h: Y \to X$ tal que $h \circ h = id_X$.

Dualmente define-se morfismo invertível à direita.

Para todo $X \in Obj(X)$, id_X é invertível à esquerda (o seu inverso esquerdo é id_X, pois $id_X \circ id_X = id_X$) e também é invertível à direita (o seu inverso direito é id_X). Logo id_X é um isomorfismo.

Dicas

$(A; (f^A)_{f \in O})$, $\theta \in Con\,A$

$A/\theta = (A/\theta; (f^{A/\theta})_{f \in O})$ $\quad f^{A/\theta}: (A/\theta)^n \to A/\theta$

f aridade n

$f^{A/\theta}([a_1]_\theta, \dots, [a_n]_\theta)$

$= [f^A(a_1, \dots, a_n)]_\theta$

3.8. Numa categoria $\mathcal{C}$, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rrr, "q"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddd, "p"'] & & & \bullet \arrow[dl, "k"'] \arrow[ddd, "r"] \\
& \bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"] & \bullet \arrow[d, "j"] & \\
& \bullet \arrow[r, "u"] & \bullet \arrow[dr, "m"] & \\
\bullet \arrow[ur, "t"] \arrow[rrr, "s"'] & & & \bullet
\end{tikzcd}$$

Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama comutam, mostre que:

a) Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior é comutativo.

Assumindo que os quatros trapézios comutam, sabemos que:

$$v \circ e = k \circ q$$
$$i \circ e = t \circ p$$
$$s = m \circ u \circ t$$
$$r = m \circ j \circ k$$

Admitindo que o quadrado mais pequeno é comutativo temos:

$$j \circ v = u \circ i \quad \circledast$$

Queremos mostrar que $r \circ q = s \circ p$.

De facto,

$$\begin{aligned}
r \circ q &= (m \circ j \circ k) \circ q = (m \circ j) \circ (k \circ q) = (m \circ j) \circ (v \circ e) \\
&= m \circ (j \circ v) \circ e \\
&= m \circ (u \circ i) \circ e \\
&= (m \circ u) \circ (i \circ e) \\
&= (m \circ u) \circ (t \circ p) \\
&= (m \circ u \circ t) \circ p = \\
&= s \circ p_{\,/\!/}
\end{aligned}$$

b) ...

Admitindo que o quadrado maior é comutativo temos, $r \circ q = s \circ p$

Queremos mostrar que $j \circ v = u \circ i$.

De facto,

$$\begin{aligned}
r \circ q = s \circ p &\Rightarrow m \circ j \circ k \circ q = m \circ u \circ t \circ p \\
&\Rightarrow j \circ k \circ q = u \circ t \circ p \quad (m \text{ é monomorfismo}) \\
&\Rightarrow j \circ v \circ e = u \circ i \circ e \\
&\Rightarrow j \circ v = u \circ i \quad (e \text{ é epimorfismo})
\end{aligned}$$

3.9. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f: A \to B$
$g: B \to \mathcal{C}$, $\mathcal{C}$-morfismo. Mostre que:

a) Se f e g são invertíveis à esquerda, então $g \circ f$ é invertível à esquerda.

Admitindo que f e g são invertíveis à esquerda, existem $\mathcal{C}$-morfismos $f': B \to A$, $g': C \to B$ tais que,

$$f' \circ f = id_A \quad e \quad g' \circ g = id_B.$$

Queremos provar que $g \circ f: A \to \mathcal{C}$ é invertível à esquerda ou seja, temos de mostrar que existe $h: \mathcal{C} \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Consideramos $h = f' \circ g'$. Então $f' \circ g' \in hom(\mathcal{C}, A)$ e

$$(f' \circ g') \circ (g \circ f) = f' \circ (g' \circ g) \circ f = f' \circ id_B \circ f$$
$$= f' \circ f = id_A.$$

Portanto, $g \circ f$ é invertível à esquerda; $f' \circ g'$ é um inverso esquerdo de $g \circ f$.

b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda, então f é invertível à esquerda.

Se $g \circ f: A \to C$ é invertível à esquerda então existe $h: C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Queremos provar que f é invertível à esquerda, ou seja, queremos provar que existe $f: B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Como $h \circ (g \circ f) = id_A$, então $(h \circ g) \circ f = id_A$.

Logo existe $f' = h \circ g: B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Portanto, f é invertível à esquerda.

3.10. Sejam C uma categoria e $f : A \to B$ um morfismo de C.

a) Mostre que se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo

Se f é invertível à esquerda, então existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Queremos mostrar que f é monomorfismo ou seja, temos de provar que, para qq C-morfismos.

$i, j : C \to A$,

$$f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j.$$

Sejam $i, j : C \to A$, Então:

$$f \circ i = f \circ j \Rightarrow f' \circ f \circ i = f' \circ f \circ j$$

$$\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j$$

$$\Rightarrow i = j$$ //

Ficha 11

3.15 Mostre que se C_1 e C_2 são categorias

Admitámos que as categorias C_1 e C_2 têm objetos terminais.
Sejam T_1 um objeto terminal de C_1 e T_2 um objeto terminal de C_2.

Prova-se que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $C_1 \times C_2$:

- Como $T_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)$, $T_2 \in \mathrm{Obj}(C_2)$ então $(T_1, T_2) \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1 \times C_2)$.

- Para todo $(X, Y) \in \mathrm{Obj}(C_1 \times C_2)$ existe um e um só morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). De facto,

  - como $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_1)$ e T_1 é objeto terminal de C_1, então existe um e um só C_1-morfismo $f_1 : X \longrightarrow T_1$;

  - como $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_2)$ e T_2 é objeto terminal de C_2, então existe um e um só C_2-morfismo $f_2 : Y \to T_2$.

  Logo (f_1, f_2) é um $\mathcal{C}_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2).

- como $|\hom_{C_1}(X, T_1)| = 1$,
  $|\hom_{C_2}(Y, T_2)| = 1$, temos
  $$|\hom_{C_1 \times C_2}((X, Y), (T_1, T_2))| = 1.$$

Logo, (T_1, T_2) é objeto terminal de $C_1 \times C_2$.

3.16 Mostre que uma categoria C tem objetos zero, então todo o objeto inicial (terminal) de C é objeto zero.

Deduza que a categoria Set não tem objetos zero.

|| Um objeto de C diz-se objeto zero se for simultaneamente objeto inicial e terminal.

Admitamos que O é um objeto zero de $\mathcal{C}$ e I é um objeto inicial de $\mathcal{C}$.

Queremos provar que I é um objeto zero. Como I é obj. inicial, basta provar que I é obj. terminal.

Seja $X \in Obj(\mathcal{C})$.
Uma vez que O é obj. terminal, existe um e um só morfismo $f: X \to O$

Como I é obj. inicial, existe um e um só morfismo $g: O \to I$.

Logo $g \circ f: X \to I$ é um C-morfismo

$$X \xrightarrow{f} O \xrightarrow{g} I$$

Para concluir que I é obj terminal, resta provar que $g \circ f$ é o único morfismo de X em I.

Seja $h: X \to I$ um C-morfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] & O \arrow[r, "g"] & I \end{tikzcd}$$

Uma vez que I é obj. inicial existe um e um só morfismo $g': I \to O$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "h"] & O \arrow[r, "g"] & I \arrow[l, bend left, "g'"] \end{tikzcd}$$

Então $g \circ g': I \to I$ é um C-morfismo.

Também temos $id_I : I \to I \in Mor(\mathcal{C})$.
Uma vez que $g \circ g'$ e Id_I são morfismos c/ domínio, com o mesmo codomínio e I é obj inicial, temos $g \circ g' = id_I$.

Uma vez que $f : X \to 0$ e $g' \circ h : X \to 0$ são morfismos c/ o mesmo domínio, c/ codomínio 0 e 0 é obj terminal então $g' \circ h = f$. Logo, $g \circ (g' \circ h) = g \circ f$ donde $id_I \circ h = g \circ f$.

Portanto, $h = g \circ f$.

Assim, para todo $X \in Obj(\mathcal{C})$, existe um e um só morfismo de X em I. Logo I é obj terminal. Como I também é obj inicial, concluímos que I é obj zero.

O conj $\emptyset$ é o objeto inicial na categoria Set, mas não é um objeto terminal (por exemplo, não existem morfismos de $\{1\}$ para $\emptyset$). Logo, a categoria Set não tem objetos zero (caso contrário, o conj. $\emptyset$ teria de ser obj. terminal).

3.17 Seja C uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T.

Mostre que se $f : T \to I$ é um morfismo em C, então f é um isomorfismo. Conclua que I e T são objetos zero.

Sejam T um obj terminal de C, e I um objeto inicial e $f : T \to I$ um C-morfismo.
Queremos provar que f é isomorfismo, ou seja, queremos provar que existe $f' : I \to T$ tal que $f \circ f' = id_I$ e $f' \circ f = id_T$.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "f"] & I \arrow[l, bend left, "f'"] \end{tikzcd}$$

Uma vez que I é obj inicial, existe um e um só morfismo $f' : I \to T$.

Como $f \circ f' : I \to I$ e $id_I : I \to I$ são morfismos c/ domínio I, e/ o mesmo codomínio e I é objeto inicial, então $f \circ f' = id_I$.

De modo análogo, concluímos que $f' \circ f = id_T$.

Portanto, f é um isomorfismo.

Uma vez que I é inicial e $T \cong I$, então T também é obj. inicial.
Como T é objeto terminal e inicial, então T é objeto zero.

Dual/, conclui-se que I é obj. zero.

3.18. Seja C a categoria definida pelo diagrama seguinte:

$$
\begin{tikzcd}
 & R \arrow[loop right, "id_R"] & \\
P \arrow[loop left, "id_P"] \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Q \arrow[loop right, "id_Q"] \arrow[ul, "i"'] \arrow[dl, "j"] \arrow[ll, shift right, "u"'] \arrow[ll, shift left, "v"] \\
 & S &
\end{tikzcd}
$$

onde,
$u \neq v$
$i = f \circ u = f \circ v$
$j = g \circ u = g \circ v$

Diga, justificando se:

a) a categoria tem objetos iniciais e objetos terminais;

b) $(P, (f,g))$ é um produto de $R \times S$.

a) $\overset{S}{R}$ não é objeto inicial, pois não existe morfismo de $\underset{S}{R}$ em $\underset{R}{S}$.

P não é objeto inicial, pois não existe morfismo de P em Q;

Q não é objeto inicial, pois existe mais do que um morfismo de Q em P.

Falta ver os objetos terminais...

b) $(P, (f,g))$ é produto de $R \times S$ se:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \arrow[dr, "f_2"] & \\ R & P \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

i) $f \in hom_C(P,R)$, $g \in hom(P,S)$;

ii) para qq $X \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $f_1 : X \to R$ e $f_2 : X \to S$, existe um e um só morfismo $u : X \to P$ tal que $f \circ u = f_1$ e $g \circ u = f_2$.

$(P, (f,g))$ não é produto de R e S, pois $i : Q \to R$ e $j : Q \to S$ são C-morfismos e existem $u, v \in Mor(C)$ tais que $u \neq v$ e $i = f \circ u$, $g \circ u = j$; $i = f \circ v$, $g \circ v = j$

3.19. Dados objetos A e B da categoria Set, seja $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A$ e $b \in B\}$ e sejam P_A e P_B as funções definidas por:

$$P_A : A \times B \to A \qquad e \qquad P_B : A \times B \to B$$
$$(a,b) \mapsto a \qquad\qquad\qquad (a,b) \mapsto b$$

Mostre que $(A \times B, (P_A, P_B))$ é um produto dos objetos A e B.

Queremos provar que:

1) $P_A \in hom_{Set}(A \times B, A)$, $P_B \in hom_{Set}(A \times B, B)$;

2) para qualquer $X \in Obj(Set)$ e para quaisquer Set-morfismos

$f_A : X \to A$ e $f_B : X \to B$, existe um e um só set-morfismo $u : X \to A \times B$ tal que $P_A \circ u = f_A$ e $P_B \circ u = f_B$.

1) Imediatamente, pois f_A e f_B são funções, logo são morfismo da categoria set.

2) Sejam $X \in Obj(Set)$ e $f_A : X \to A$ e $f_B : X \to B$ set-morfismos

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "P_A"] \arrow[r, "P_B"'] & B \end{tikzcd}$$

$u : X \longrightarrow A \times B$
$x \longmapsto (a,b)$

$P_A \circ u = f_A$
$(P_A \circ u)x = P_A(u(x)) = f_A(x)$

Seja u a correspondência de X em $A \times B$ definida por $u(x) = (f_A(x), f_B(x))$

$P_B \circ u = f_B$

$(P_B \circ u)(x) = f_B(x)$

Para concluirmos que $(A \times B, (P_A, P_B))$ é um produto de A e B, temos de provar que:

i) $u \in \hom_{set}(X, A \times B)$ (ou seja, temos de mostrar que u é uma função de X em $A \times B$).

ii) $P_A \circ u = f_A$ e $P_B \circ u = f_B$ (provar igualdade de funções).

iii) se $v : X \to A \times B$ é um set-morfismo tal que $P_A \circ v = f_A$ e $P_B \circ v = f_B$, então $u = v$.

<u>3.20</u> Seja $\mathcal{C}$ uma categoria c/ objeto terminal T. Para qq objeto A de $\mathcal{C}$, mostre que:

a) o par $(A; (\mathcal{E}^A, id_A))$, onde $\mathcal{E}^A$ é o único morfismo $A \to T$, é um produto de T e A.

Queremos provar que:

i) $\mathcal{E}^A \in \hom_{\mathcal{C}}(A, T)$, $id_A \in \hom_{\mathcal{C}}(A; A)$;

ii) para qq $X \in Obj$, para qq $\mathcal{C}$-morfismo $f : X \to T$ e $g : X \to A$, existe um e um só $\mathcal{C}$-morfismo $u : X \to A$ tal que $\mathcal{E}^A \circ u = f$ e $id_A \circ u = g$.

i) imediato pela definição de $\mathcal{E}^A$ e id_A;

ii) Sejam $X \in Obj(\mathcal{C})$ e $f : X \to T$, $g : X \to A$ $\mathcal{C}$-morfismos.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\ T & A \arrow[l, "\mathcal{E}^A"] \arrow[r, "id_A"'] & A \end{tikzcd}$$

Seja $u = g$.
Então, $id_A \circ u = g$.
Também temos $\mathcal{E}^A \circ u = f$, pois $\mathcal{E}^A \circ u$ e f são morfismos com o mesmo domínio, c/ codomínio T e T é obj. terminal.

Seja $v : X \to A$ um C-morfismo tal que $\varepsilon^A \circ v = f$ e $id_A \circ v = g$.

Logo $v = g = \mu$.

De i) e ii) conclui-se que

$(A, (\varepsilon^A, id_A))$ é um produto de T e A.

09/05

Queremos provar que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$, ou seja, que:

1) $(\alpha \circ f) \circ i = (\alpha \circ g) \circ i$

2) para qq $K \in Obj(\mathcal{C})$ e p/ qq. morfismo $k : K \to A$, tal que $(\alpha \circ f) \circ k = (\alpha \circ g) \circ k$, existe um e um só morfismo $v : K \to I$ tal que $i \circ v = k$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "\alpha \circ f"] \arrow[r, shift right, "\alpha \circ g"'] & C \\ K \arrow[u, "v"] \arrow[ur, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Como (I, i) é um igualizador de f e g, então:

i) $f \circ i = g \circ i$

ii) para todo $J \in Obj(\mathcal{C})$ e para qq $\mathcal{C}$- morfismo $j : J \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$ existe um e um só morfismo $u : J \to I$ tal que $i \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ J \arrow[u, "u"] \arrow[ur, "j"'] & & \end{tikzcd}$$

1) É imediato a partir de (i), pois

$$(\alpha \circ f) \circ i = \alpha \circ (f \circ i) \overset{(i)}{=} \alpha \circ (g \circ i) = (\alpha \circ g) \circ i$$

2) Sejam $K \in Obj(\mathcal{C})$ e $k : K \to A$ um morfismo tal que $(\alpha \circ f) \circ k = (\alpha \circ g) \circ k$.

Uma vez que $\alpha \circ (f \circ k) = \alpha \circ (g \circ k)$ e α é um monomorfismo, então $f \circ k = g \circ k$.

Logo, por ii), existe um e um só morfismo $v : K \to I$ tal que $i \circ v = k$.

De 1) e 2) conclui-se que (I, i) é um igualizador de $\alpha \circ f$ e $\alpha \circ g$.

3.26 Sejam $f, g : A \to B$ e $i : I \to A$ morfismos de $\mathcal{C}$. Mostre que se $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g), então (I, i) é um igualizador de f e g.

Admitimos que $(I, (i, i))$ é um produto fibrado de (f, g).

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[dd, bend right, "p"'] & & \\
I \arrow[rr] \arrow[d] & & A \arrow[d] \\
A \arrow[rr] & & B
\end{tikzcd}
$$

Então,

i) $f \circ i = g \circ i$

ii) para qq $K \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e para qq morfismos $p : K \to A$ e $q : K \to A$ tais que $f \circ p = g \circ p$, existe um e um só morfismo $k : K \to I$ tal que $i \circ k = p$ e $i \circ k = q$.

Queremos mostrar que (I, i) é um igualizador de f e g, ou seja, que:

i) $f \circ i = g \circ i$

ii) para qq $J \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e qq morfismo $j : J \to A$ tal que $f \circ i = g \circ i$, existe um e um só morfismo $u : J \to I$ tal que $i \circ u = j$.

1) Imediato apartir de i).

2) Seja $J \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e $j : J \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$

De ii), considerando $K = J$, $p = j$ e $q = j$, resulta que existe um e um só morfismo

$u : J \to I$ tal que

$i \circ u = p = j$ e $i \circ u = q = j$

De 1) e 2) conclui-se que (I, i) é um igualizador de f e g.

3.27. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f: A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Mostre que as afirmações seguintes são equivalentes

A1) f é monomorfismo.

A2) $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f).

(A1) $\Rightarrow$ (A2) Admitamos que f é um monomorfismo. Queremos provar que $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f), ou seja, que:

i) $f \circ id_A = f \circ id_A$

ii) para qq $K \in Obj(\mathcal{C})$ e p/ qq morfismos $p: K \to A$ e $q: K \to A$ tais que $f \circ p = g \circ p$, existe um e um só morfismo $k: K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$

i) Imediato, pela definição de id_A.

ii) Sejam $K \in Obj(\mathcal{C})$ e $p: K \to A$, $q: K \to A$ morfismos tais que $f \circ p = f \circ p$.

Como f é monomorfismo, temos $p = q$.

Logo, considerando, $k = p\ (= q)$, temos $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

O morfismo $k = p$ é o único morfismo que faz comutar o diagrama: se admitirmos que $v: K \to A$ é um morfismo tal que $id_A \circ v = p$ e $id_A \circ v = q$, segue que $v = p = q$; ou seja, $v = k$.

(A2) $\Rightarrow$ (A1). Admitamos que $(A, (id_A, id_A))$ é um produto fibrado de (f, f). Então,

Queremos provar que f é monomorfismo, ou seja, temos de mostrar que, para qq. morfismos $p: K \to A$ e $q: K \to A$,

$$f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q$$

Sejam $p: K \to A$ e $q: K \to A$ morfismos tais que $f \circ p = f \circ q$. Então, por ii), existe um e um só morfismo $k: K \to A$ tal que $id_A \circ k = p$ e $id_A \circ k = q$.

Logo, $p = k = q$.

Portanto, f é um monomorfismo.

3.22 Sejam C uma categoria com objeto terminal T e A, B objetos de C.

Mostre que:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

é um quadrado cartesiano se e só $(P, (p_A, p_B))$ é produto de A e B.

$\Rightarrow$) Admitamos que o quadrado é cartesiano. Logo, $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B) e, portanto:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "q_B"] \arrow[ddr, bend right, "q_A"'] & & \\
& P \arrow[r, "f_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "f_B"] \\
& A \arrow[r, "f_A"'] & T
\end{tikzcd}$$

i) $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$;

ii) para qq $K \in Obj(C)$ e qq morfismos $q_A: K \to A$ e $q_B: K \to B$ tal que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$, existe um e um só morfismo $k: K \to P$ tal que

$p_A \circ k = q_A$ e $p_B \circ k = q_B$

Queremos provar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B, ou seja, que:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "g_A"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

1) $p_A \in hom_C(P, A)$, $p_B \in hom(P, B)$

2) Para qq $Z \in Obj(C)$ e para qq morfismos $g_A: Z \to A$ e $g_B: Z \to B$, existe um e um só morfismo $u: Z \to A$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

i) Imediato, pela definição de p_A e p_B.

ii) Sejam $Z \in Obj(\mathcal{C})$ e $g_A: Z \to A$ e $g_B: Z \to B$.

Uma vez que $f_A \circ g_A$ e $f_B \circ g_B$ são morfismos c/ o mesmo domínio, c/ codomínio T e T é objeto terminal, temos $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$. Logo, por ii), existe um e um só morfismo $u: Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

Portanto, $(P, (p_A, p_A))$ é um produto de A e B.

Admitamos que T é obj Terminal e $(P, (p_A, p_B))$ é um produto de A e B.

Queremos provar que $(P, (p_A, p_B))$ é um produto fibrado de (f_A, f_B), ou seja, que:

i) $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$

ii) para qq $Z \in Obj(\mathcal{C})$ e p/ qq morfismos $g_A: Z \to A$ e $g_B: Z \to B$, tais que $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$, existe um e um só morfismo $u: Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

Uma vez que $f_A \circ p_A$ e $f_B \circ p_B$ são morfismos c/ o mesmo domínio, c/ codomínio T e T é obj Terminal, temos $f_A \circ p_A = f_B \circ p_B$.

ii) Sejam $Z \in Obj(C)$ e $g_A: Z \to A$ e $g_B: Z \to B$ tq $f_A \circ g_A = f_B \circ g_B$.

De (2) resulta que existe um e um só morfismo $u: Z \to P$ tal que $p_A \circ u = g_A$ e $p_B \circ u = g_B$.

Folha 13 17 Maio

3.33 Considere um cpo $(P, \leq)$ visto como categoria P.

Sejam $F_{ob} : Obj(P) \to Obj(Set)$ a função que a cada objeto $a \in P$ ~~corresponde~~ associa o conjunto $\{a\}$ e $F_{hom} : Mor(P) \to Mor(Set)$ a função que a cada P-morfismo $f : a \to b$ associa a função

$$F_{hom}(f) : \underbrace{\{a\}}_{=F(a)} \to \underbrace{\{b\}}_{=F(b)}$$

$$a \mapsto b$$

Mostre que o par...

O par (F_{ob}, F_{hom}) é um funtor de P em set se:

1) F_{ob} é uma função de $Obj(P)$ em $Obj(Set)$;

2) F_{hom} é uma função de $Mor(P)$ em $Mor(Set)$ que a cada P-morfismo $f : a \to b$ associa um set-morfismo.

$F(f) : f(a) \to F(b)$

3) para todo $a \in A$, $F_{hom}(id_a) = id_{F_{ob}(a)}$

4) para qq Pmorfismos $f : a \to b$, $g : b \to c$

$$F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$$

1) É imediato pelo inunciado.

2) Uma vez que $F_{ob}(a) = \{a\}$ e $F_{ob}(b) = \{b\}$, a condição (2) também é imediata a partir do enunciado.

3) para $a \in P$, $id_a : a \to a$ e $Mor(P)$ e por defenição de f, temos

$$F(id_a) : \{a\} \to \{a\}$$
$$a \mapsto a$$

Por outro lado, por definição de função identidade associada a um conjunto, temos

$$id(Fa) : \overset{=\{a\}}{F(a)} \longrightarrow \overset{=\{a\}}{F(a)}$$
$$a \longmapsto a$$

As funções $F(id_a)$ e $id_{F(a)}$ são iguais, pois tem o mesmo domínio, conjunto de chegada e

$$F(id_a)(a) = id_{F(a)}(a).$$

4) Para qq P-morfismos $f: a \to b$, $g: b \to c$, temos $g \circ f : a \to c \in Mor(P)$ e, por definição de F temos

$$F(g \circ f) : \{a\} \to \{c\}$$
$$a \mapsto c$$

Por outro lado, por definição de F temos

$$F(f) : \{a\} \to \{b\} \quad e \quad F(g) : \{b\} \to \{c\}$$
$$a \mapsto b \qquad\qquad b \mapsto c$$

Por definição de composição de funções segue que:

$$F(g) \circ F(f) : \{a\} \to \{c\}$$
$$a \mapsto F(g)(F(f)(a))$$

As funções $F(g \circ f)$ e $F(g) \circ F(f)$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e

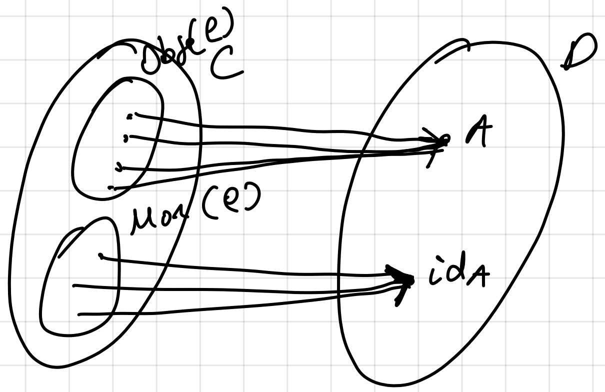
$$(F(g) \circ F(f))(a) = F(g)(F(f)(a)) = F(g)(b) = c = F(g \circ f) = a$$

De 1), 2), 3) e 4) concluímos que F_{ob}, F_{hom} é um funtor de P em set.

3.34. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias e A um objeto de $\mathcal{D}$.

Sejam $F_{ob}: Obj(\mathcal{C}) \to Obj(\mathcal{D})$ a função que a cada $X \in Obj(\mathcal{C})$ associa o objeto A,

$F_{hom}: Mor(\mathcal{C}) \to Mor(\mathcal{D})$ a função que a cada $\mathcal{C}$-morfismo $f: X \to Y$ associa o $\mathcal{D}$ morfismo id_A.



Mostre que o par $F = (F_{ob}, F_{hom})$ é um funtor de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$.

Temos de provar que:

1) F_{ob} é uma função de $Obj(\mathcal{C})$ em $Obj(\mathcal{D})$;

2) F_{hom} é uma função de $Mor(\mathcal{C})$ em $Mor(\mathcal{D})$ que a cada $\mathcal{C}$-morfismo $f: X \to Y$ associa um $\mathcal{D}$-morfismo

$$F(f): F_{ob}(X) \longrightarrow F_{ob}(Y);$$

3) Para qq $X \in Obj(\mathcal{C})$, $F_{hom}(id_X) = id_{F_{ob}(X)}$;

4) para qq $\mathcal{C}$-morfismos $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

$$F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$$

1) Imediato pelo enunciado.

2) Para qq $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, $F_{ob}(X) = A = F_{ob}(Y)$,

logo, $id_A : F_{ob}(X) \longrightarrow F_{ob}(Y) \in Mor(\mathcal{D})$

Logo, a condição 2) segue do enunciado.

3) para qq $X \in Obj(\mathcal{C})$, temos $id_X: X \to X \in Mor(\mathcal{C})$ e por definição de F, $F_{hom}(id_X) = id_A$.

Por outro lado, temos $id_{F_{ob}(X)} = id_A$.

Portanto, $F_{hom}(id_A) = id_{F_{ob}(X)}$.

4) Para qq C-morfismo $f: X \to Y$
$g: Y \to Z$, temos $g \circ f: X \to Z \in \mathrm{Mor}(C)$
e por definição de F_{hom}, temos $F_{hom}(g \circ f) = id_A$.

Por outro lado, temos $F_{hom}(f) = id_A$ e $F_{hom}(g) = id_A$
logo $F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f) = id_A \circ id_A = id_A$

Assim, $F_{hom}(g \circ f) = F_{hom}(g) \circ F_{hom}(f)$

De 1, 2, 3 e 4 concluimos que F é um funtor de C em D.

3.36. Consideremos o funtor definido em 3.33.

O funtor F é fiel se, para qq P-morfismos

$$f: a \to b \quad e \quad g: a \to b$$

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$$

Para qq $a, b \in P$, existe no máximo um P-morfismo de a em b.

Logo o funtor F é fiel.

O funtor F é pleno se, para qq $a, b \in \mathrm{Obj}(P)$ e para qq Set-morfismo $g: F(a) \to F(b)$ existe um P-morfismo $f: a \to b$ tal que $F(f) = g$.

Dados $a, b \in \mathrm{Obj}(P)$, a função

$$g: \{a\} \to \{b\}$$
$$a \mapsto b$$

é um set-morfismo, onde $F(a) = a$ e $F(b) = b$.

Logo, o funtor é pleno ~~sse~~ para qq $a, b \in \mathrm{Obj}(P)$, existe um P-morfismo $f: a \to b$, ou seja, o funtor F é pleno sse, para qq $a, b \in \mathrm{Obj}(P)$, $(a, b) \in \leq$.

O funtor F é pleno sse para $x, y \in Obj(P)$ $(x,y), (y,x) \in \leq$. Uma vez que $\leq$ é uma ordem parcial, então, para qq $x, y \in Obj(P)$ temos $x = y$.

Consideremos o funtor definido em 3.34.

O funtor F é fiel se, para qq C-morfismos $f: a \to b$; $g: a \to b$

$$F(g) = F(f) \Rightarrow f = g.$$

O funtor F é ideal sse, para qq $X, Y \in Obj(C)$, existe no max um morfismo de X em Y.

u

O funtor F é pleno se, para qq $X, Y \in Obj(C)$ e para qq D-morfismo $g: \underbrace{F(X)}_{=A} \to \underbrace{F(Y)}_{=A}$, existe um C-morfismo $f: X \to Y$ tal que $F(f) = g$.

Uma vez que $A \in Obj(D)$, $id_A: A \to A \in Mor(C)$.

Logo, para todo $X, Y \in Obj(C)$.

$id_A: F(X) \to F(Y) \in Mor(D)$.

O funtor F é pleno sse, para qq $X, Y \in Obj(C)$ existe um morfismo de X em Y e $hom_D(A, A) = \{id_A\}$.

3.37. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $F: \mathbf{Set} \to \mathcal{C}$ um funtor. Prove que:

a) Se f é um monomorfismo c/ domínio não vazio em Set, então $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$.

Se f é um monomorfismo c/ domínio não vazio em Set, então f é invertível à esquerda. Todo o funtor preserva morfismos invertíveis à esquerda. Logo $F(f)$ é invertível à esquerda.

Todo o morfismo invertível à esquerda é um monomorfismo.
Portanto, $F(f)$ é um monomorfismo em $\mathcal{C}$.

b) tentar fazer em Casa...

3.38. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ um funtor fiel e $f: A \to B$ um morfismo de $\mathcal{C}$. Mostre que:

a) Se $F(f)$ é um epimorfismo, então f é um epimorfismo. Admitamos que $F(f)$ é um epimorfismo. Queremos provar que f é um epimorfismo, ou seja, para qq $\mathcal{C}$-morfismo $p, q: B \to C$

$$p \circ f = q \circ f \Rightarrow p = q.$$

Admitamos que $p, q: B \to C$ são $\mathcal{C}$-morfismos tais que $p \circ f = q \circ f$

Então $F(p \circ f) = F(q \circ f)$. Como F é funtor temos $F(p) \circ F(f) = F(q) \circ F(f)$.

Uma vez que $F(f)$ é um epimorfismo obtemos $F(p) = F(q)$.

Considerando que F é fiel, concluímos que $p = q$.

b) Um diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}$ é comutativo sse o diagrama correspondente em $\mathcal{C}'$ é comutativo.

Queremos provar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd} \qquad D$$

é comutativo sse

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "F(h)"'] & & F(B) \arrow[dl, "F(g)"] \\ & F(C) & \end{tikzcd} \qquad D'$$

é comutativo.

Admitamos que o Diagrama D é comutativo.

Então $g \circ f = h$. Logo $F(g \circ f) = F(h)$. Como F é funtor obtemos $F(g) \circ F(f) = F(h)$.

Logo, o diagrama D' é comutativo.

Então $F(g) \circ F(f) = F(h)$. Como F é funtor temos $F(g \circ f) = F(h)$

Uma vez que F é fiel, obtemos $g \circ f = h$. Logo, o diagrama D é comutativo.

3.40. Sejam $F_{ob}: Obj(Set) \longrightarrow Obj(Set)$ a função que a cada conjunto A associa o conjunto potência $\mathcal{P}(A)$ e $F_{hom}: Mor(Set) \to Mor(Set)$ a função que a cada função $f: A \to B$ associa a função

$$F_{hom}(f): F_{ob}(A) \longrightarrow F_{ob}(B)$$
$$u \longmapsto f(u).$$

a) $F = (F_{ob}, F_{hom})$ é um funtor de set em set.

b) i) O funtor F preserva objetos terminais se, para cada $T \in obj(set)$, T é objeto terminal $\Rightarrow F(T)$ é objeto terminal.

O Funtor F não preserva objetos terminais, pois, $\{1\}$ é um objeto terminal de set e $F(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$ não é objeto terminal de set.

ii) F é fiel se, para qq funções $f: X \to Y$, $g: X \to Y$

$$F_{hom}(f) = F_{hom}(g) \Rightarrow f = g$$

$$F_{hom}(f): \underbrace{F(X)}_{=P(X)} \longrightarrow \underbrace{F(Y)}_{=P(Y)}$$
$$u \longmapsto f(u)$$

Sejam $f, g: X \to Y$ tais que $F_{hom}(f) = F_{hom}(g)$

Então, para todo $u \in F(X) = \mathcal{P}(X)$ temos $f'(u) = g(u)$

$$F_{hom}(g): F(X) \to F(Y)$$
$$u \mapsto g(u)$$

Em particular, para todo $x \in X$, temos $f(\{x\}) = g(\{x\})$, isto é

$$\{f(x)\} = \{g(x)\}$$

Assim, para todo, $x \in X$, $f(x) = g(x)$

Logo, $f = g$.

Portanto, o funtor F é fiel.

Um C-morfismo $h: X \to Y$ diz-se um **monomorfismo** se, para qq C-morfismo $s,t: Z \to X$

$$h \circ s = h \circ t \Rightarrow s = t$$

Um C-morfismo diz-se **bijetivo** se: for monomorfismo e epimorfismo

---

$f: A \to B$ é **invertível à esq.** dir. Então existe $h: B \to A$ tal que $\overset{h \circ f}{f \circ h} = id_A^{B}$.

Seja X um objeto de C. Uma vez que A é um objeto **terminal** inicial existe um e um só C-morfismo $\overset{A \to X}{X \to A}$.

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to A$ C-morfismos (I,i) (I',i') **igualizadores** de f e g.

(I,i) é igualizador de f e g se:

i) i é um C-morfismo de I em A tal que $f \circ i = g \circ i$.

ii) para qq C-morfismo $j: J \to A$ tal que $f \circ j = g \circ j$ existe um único C-morfismo $u: J \to I$ tal que $i \circ u = j$.

Seja

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "pB"] \arrow[d, "pA"'] & B \arrow[d, "fB"] \\ A \arrow[r, "fA"'] & T \end{tikzcd}$$

um **quadrado cartesiano**.

Então:

i) pA e pB são C-morfismos tais que $pA \in hom_C(P,A)$, $pB \in hom_C(P,B)$ e $fA \circ pA = fB \circ pB$;

ii) para qq $K \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $q_A: K \to A$, $q_B: K \to B$ tais que $f_A \circ q_A = f_B \circ q_B$ existe um e um só C-morfismo $k: K \to P$ tal que $pA \circ k = q_A$ e $pB \circ k = q_B$.

Seja

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

uma **soma amalgamada**.

Então:

i) existem C-morfismos $g: Z \to Y$, $f': X \to Y$ tais que $g \circ f = f' \circ g'$;

ii) para qq $S \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $f_Z: Z \to S$, $f_X: X \to S$ tais que $f_Z \circ f = f_X \circ g'$ existe um e um só C-morfismo $s: Y \to S$ tal que $s \circ g = f_Z$ e $s \circ f' = f_X$.

Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se **epimorfismo** se, para qq C-morfismo $s,t: Y \to Z$. $s \circ h = t \circ h \Rightarrow s = t$

Um morfismo $h: X \to Y$ diz-se um **isomorfismo** se existe um morfismo $h': Y \to X$ tal que $h \circ h' = id_Y$ e $h' \circ h = id_X$.

$(P,(f,g))$ é um **coproduto** de R e S se:

i. $f \in hom_C(P,R)$, $g \in hom_C(P,S)$

ii. para qq $X \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $f_1: \overset{R \to X}{X \to R}$ e $f_2: \overset{S \to X}{X \to S}$ existe um único C-morfismo $u: \overset{P \to X}{X \to P}$ tal que

$$\underset{u \circ f}{f \circ u} = f_1 \quad \text{e} \quad \underset{u \circ g}{g \circ u} = f_2$$

Seja $(I,(i,i))$ **produto fibrado** de (f,g). Então:

i) é um C-morfismo de I em A tal que $g \circ i = f \circ i$.

ii) para qq $K \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $f': K \to A$, $g': K \to A$ tais que $f \circ f' = g \circ g'$, existe um e um só morfismo $k: K \to I$ tal que $i \circ k = f'$ e $i \circ k = g'$.

O funtor F é **fiel** se, para qq $f,g: a \to b$

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g$$

O funtor F é **pleno** se, para qq $X, Y \in Obj(C)$ e para qq D-morfismo $g: F(X) \to F(Y)$, existe um C-morfismo $f: X \to Y$, tal que $F(f) = g$.

5. Considere os operadores de classes de álgebras H e S. Mostre que SHS é um operador de fecho.

Um operador O diz-se idempotente se para qualquer classes de álgebras K_1 e K_2 (do mesmo tipo), temos:

i) $K_1 \subseteq O(K_1)$
ii) $O^2(K_1) \subseteq O(K_1)$
iii) $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow O(K_1) \subseteq O(K_2)$.

Vamos provar que SHS é operador de fecho.

i) Para qq $O \in \{H, S\}$ e para qq classe de álgebras K, temos $K \subseteq O(K)$.

Logo, $K_1 \subseteq S(K_1)$, $S(K_1) \subseteq HS(K_1)$, $HS(K_1) \subseteq SHS(K_1)$

Portanto, $K_1 \subseteq SHS(K_1)$.

ii) Para qq classe de álgebras K_1, temos $(SHS)^2(K_1) = SHS\,SHS(K_1)$
$= SHSHS(K_1)$ $(S^2 = S)$
$= SHHSS(K_1)$ $(SH \subseteq HS)$
$= SHS(K_1)$ $(S^2 = S, H^2 = H)$

iii) Para qq $O \in \{S, H\}$ e para qq classe, K, K', temos,

$K \subseteq K' \Rightarrow O(K) \subseteq O(K')$

Logo, para qq classes de álgebras K_1, K_2,

$$\begin{aligned} K_1 \subseteq K_2 &\Rightarrow S(K_1) \subseteq S(K_2) \\ &\Rightarrow HS(K_1) \subseteq HS(K_2) \\ &\Rightarrow SHS(K_1) \subseteq SHS(K_2) \end{aligned}$$

De i, ii e iii) conclui-se que SHS é operador de fecho...

6. Sejam $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ e $k : C \to D$ morfismos de uma categoria $\mathbf{C}$. Mostre que se g é um monomorfismo e $(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k, então (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

Dados:

g monomorfismo
$(A, g \circ f)$ é um igualizador de h e k $\Bigg\} \Rightarrow$ (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$

Suponhamos $g : B \to C$ monomorfismo. Então, para qq C-morfismo $s, t : X \to B$

$$g \circ s = g \circ t \Rightarrow s = t$$

Suponhamos também que $(A, g \circ f)$ é igualizador de h e k. Então,

i) $g \circ f$ é um C-morfismo de A em C tal que

$$h \circ (g \circ f) = k \circ (g \circ f)$$

ii) para qq C-morfismo $j : J \to C$ tal que $h \circ j = k \circ j$ existe um único C-morfismo $u : J \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = j$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & D \\ & & J \arrow[ull, "u"] \arrow[u, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Queremos provar que (A, f) é um igualizador de $h \circ g$ e $k \circ g$.

Ou seja,

1) f é um $\mathcal{C}$-morfismo de A em B tal que $(h \circ g) \circ f = (k \circ g) \circ f$.

2) para qq $\mathcal{C}$-morfismo $i : Y \to B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$ existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $u : Y \to A$ tal que $f \circ u = i$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & D \\
& Y \arrow[ul, "u"] \arrow[u, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

1) é imediato por i), pois

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \overset{(i)}{=} k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f.$$

2) Seja $i : Y \to B$ tal que $(h \circ g) \circ i = (k \circ g) \circ i$

Logo, $h \circ \underbrace{(g \circ i)}_{j} = k \circ \underbrace{(g \circ i)}_{j}$.

Então, por ii) existe um e um só morfismo $u : Y \to A$ tal que $(g \circ f) \circ u = g \circ i$.

Como g é monomorfismo resulta que $f \circ u = i$

7. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria com objeto inicial I e $i_A : A \to C$, $i_B : B \to C$, $f_A : I \to A$ e $f_B : I \to B$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B, então $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

objeto inicial

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\
B \arrow[r, "i_B"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

Dados:

$$\left.\begin{array}{l} (\mathcal{C}, (i_A, i_B)) \text{ coproduto de } A \text{ e } B \\ I \text{ objeto inicial} \end{array}\right\} \Rightarrow (C, (i_A, i_B)) \text{ soma amalgamada} \ldots$$

Se $(\mathcal{C}, (i_A, i_B))$ coproduto de A e B, ou seja,

i. $i_A \in \hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, A)$, $i_B \in \hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}, B)$

ii. para qq $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ e para qq $\mathcal{C}$-morfismos $f_1 : A \to X$ e $f_2 : B \to X$ existe um único $\mathcal{C}$-morfismo $u : \mathcal{C} \to X$ tal que

$$u \circ i_A = f_1 \quad \text{e} \quad u \circ i_B = f_2$$

objeto inicial

Coproduto

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\
B \arrow[r, "i_B"'] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \mathcal{C} \arrow[dr, "u"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Queremos mostrar que $(\mathcal{C}, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \\ B \arrow[r, "i_B"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

$\nearrow$ objeto inicial

Ou seja,

i) existem C-morfismos $i_B : B \to \mathcal{C}$, $i_A : A \to \mathcal{C}$ tais que $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;

ii) para qq $X \in Obj(C)$ e para qq C-morfismos $f_2 : B \to X$, $f_1 : A \to X$ tais que $f_2 \circ f_B = f_1 \circ f_A$ existe um e um só C-morfismo $u : \mathcal{C} \to X$ tal que $u \circ i_B = f_2$ e $u \circ i_A = f_1$.

$\nearrow$ objeto inicial

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_B"'] & A \arrow[d, "i_A"] \arrow[ddr, bend left, "f_1"] & \\ B \arrow[r, "i_B"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & \mathcal{C} \arrow[dr, "u"] & \\ & & X \end{tikzcd}$$

Soma Amalgamada

i) Como $i_B \circ f_B$ e $i_A \circ f_A$ são morfismos c/ domínio I, c/ o mesmo codomínio e I é objeto inicial, então $i_B \circ f_B = i_A \circ f_A$.

ii) Sejam $f_1 : A \to X$ e $f_2 : B \to X$ morfismos tais que $f_1 \circ f_A = f_2 \circ f_B$.

Como $f_1 \in hom(A, X)$ e $f_2 \in hom(B, X)$ o resultado é imediato por ii)

3. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f : A \to B$ e $g : B \to C$ morfismos de $\mathbf{C}$. Mostre que se $g \circ f$ é um morfismo invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Dados:

$g \circ f$ morfismo invertível à esquerda $\Big\}$ f é monomorfismo

Res: (1) ex 3.9 b) (2) ex. 3.10 a)

$g \circ f$ morfismo inv esq. $\Big\} \Rightarrow$ f é invertível à esquerda $\Big\} \Rightarrow$ f é monomorfismo

(1) Se $g \circ f : A \to C$ é invertível à esquerda então existe $h : C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.

Queremos provar que f é invertível à esquerda, ou seja, queremos provar que existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Como $h \circ (g \circ f) = id_A$, então $(h \circ g) \circ f = id_A$.

Logo, existe $f' = h \circ g : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

E portanto, f é invertível à esquerda.

(2)

Se f é invertível à esquerda, então existe $f' : B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.

Queremos mostrar que f é monomorfismo, ou seja, temos de provar que, para qq C-morfismos

$i, j : C \to A$
$$f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j.$$

Sejam $i, j : C \to A$. Então:

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j &\Rightarrow f' \circ f \circ i = f' \circ f \circ j \\ &\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j \\ &\Rightarrow i = j \text{ "} \end{aligned}$$

1. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra do tipo $(2,1)$, onde $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $f^{\mathcal{A}} : A^2 \to A$, $g^{\mathcal{A}} : A \to A$ são as operações definidas por

$f^{\mathcal{A}}$	1	2	3	4	5
1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2
3	2	2	2	2	2
4	3	3	3	4	1
5	3	3	3	1	5

x	1	2	3	4	5
$g^{\mathcal{A}}(x)$	2	3	4	2	5

Determine $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\})$ e $Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$. Diga se $Sg^{\mathcal{A}}(\{2\}) \cup Sg^{\mathcal{A}}(\{5\})$ é um subuniverso de $\mathcal{A}$. Justifique.

$Sg^A(\{2\}) = \{2,3,4\}$ $\qquad$ $Sg^A(\{5\}) = \{5\}$

Seja $X = Sg^A(\{2\}) \cup Sg^A(\{5\}) = \{2,3,4,5\}$

X não é subuniverso de A, pois X não é fechado para todas as operações de A. No caso, $f^A(4,5) = 1$ e $1 \notin X$.

2. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ onde $A = \{a,b,c,d\}$ e $f^{\mathcal{A}}$, $g^{\mathcal{A}}$ são as operações definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	a	a	a	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	a	b	a	b

(a) Considere as congruências $\theta_1 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$ e $\theta_2 = \theta(c,d)$. Determine θ_2. Justifique que (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ nas condições indicadas.

(c) A álgebra $\mathcal{A}$ é sudiretamente irredutível? Justifique a sua resposta.

a) $\theta_1 = \Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$

$\theta_2 = \theta(c,d)$.

$\theta_2 = \Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\}$

· $\Delta A \in \theta_2$ pq θ_2 cumpre a propriedade de reflexão

· $(d,c) \in \theta_2$ pois $(c,d) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

· $(a,b) \in \theta_2$ pois $(c,d) \in \theta_2$ e θ_2 respeita a propriedade de substituição...

· $(b,a) \in \theta_2$ pois $(a,b) \in \theta_2$ e θ_2 é simétrica

Para que (θ_1, θ_2) seja um par de congruências fator é preciso que:

1) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta A$ 2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla A$

Não era preciso ver def 2.5.4.

$\boxed{3) \ \theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1}$

1) $\theta_1 \cap \theta_2 = \Delta A$

$\Leftrightarrow (\Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}) \cap (\Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\})$

$\Leftrightarrow \Delta A$ //

2) $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla A$

$\Leftrightarrow (\Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}) \vee (\Delta A \cup \{(c,d),(d,c),(a,b),(b,a)\})$

~~a,b~~ b,c
~~a,c~~ ~~b,d~~
a,d ~~c,d~~

$\Leftrightarrow \Delta A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b),(c,d),(d,c),(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(a,d),(d,a)\} = \nabla A$

b) Justificar que existem álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não triviais tais que

$\mathcal{A} \cong \mathcal{B} \times \mathcal{C}$. Indique álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ nas condições indicadas.

3.21 Sejam A e B dois objetos admitindo coproduto $(A+B,(i_A,i_B))$ e tais que $hom_C(B,A) \neq \emptyset$. Mostre que i_A é invertível à esquerda, e portanto, é um monomorfismo.

Sejam A e B objetos. Considerando que $hom_C(B,A) \neq \emptyset$, existe um C-morfismos $f: B \to A$.

Como $A \in Obj(\mathcal{C})$ e C é categoria $id_A: A \to A$ também é morfismo de $\mathcal{C}$.

Então, atendendo a que $(A+B,(i_A,i_B))$ é um coproduto de A e B, existe um e um só morfismo $u: A+B \to A$ tal que $u \circ i_A = id_A$ e $u \circ i_B = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
A \arrow[ur, "id_A"] \arrow[r, "i_A"'] & A+B \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "f"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Uma vez que $u \circ i_A = id_A$, concluímos que i_A é invertível à esquerda. Todo o morfismo invertível à esquerda é monomorfismo, i_A é monomorfismo.

3.23 Seja C uma categoria com objeto zero 0. Mostre que se $f: A \to B$ é um $\overset{\text{epi}}{\text{monomorfismo}}$, então o $\overset{\text{co-}}{\text{igualizador}}$ de f e do morfismo nulo de A em B é o par $(\overset{0}{0}, \overset{0_{B,0}}{0_{0,A}})$.

Seja f monomorfismo. Então para qq C-morfismos $s,t: Z \to A$, tal que
$f \circ s = f \circ t \Rightarrow s = t$.

Queremos provar que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$, ou seja, temos de mostrar que

i) $0_{0,A}$ é um C-morfismo de 0 em A tal que $f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}$;

ii) para qq $C \in Obj(\mathcal{C})$ e para qq C-morfismo $g: C \to A$ tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$, existe um e um só morfismo $u: C \to 0$ tal que $i \circ u = g$

Mostremos as condições i) e ii).

i) Por definição dos morfismos $0_{0,A}$ e $0_{A,B}$, temos $0_{0,A} \in hom_C(0,A)$ e $0_{A,B} \in hom_C(A,B)$. Logo,

$$f \circ 0_{0,A}: 0 \to B \quad \text{e} \quad 0_{A,B} \circ 0_{0,A}: 0 \to B$$

são C-morfismos. Considerando que $f \circ 0_{0,A}$ e $0_{A,B} \circ 0_{0,A}$ são morfismos com domínio 0, com o mesmo codomínio e que 0 é objeto inicial segue que:

$$f \circ 0_{0,A} = 0_{A,B} \circ 0_{0,A}.$$

ii) Sejam $C \in Obj(\mathcal{C})$ e $g: C \to A$ um C-morfismo tal que $f \circ g = 0_{A,B} \circ g$. Nestas condições prova-se existe um e um só morfismo $u: C \to 0$ tal que $0_{0,A} \circ u = g$.

De facto, como 0 é objeto terminal existe um e um só C-morfismo de C em 0; esse morfismo é o morfismo $0_{C,0}$. Além disso, tem-se $0_{0,A} \circ 0_{C,0} = g$.

Com efeito, como

$$f \circ g = 0_{A,B} \circ g = 0_{C,0} =$$
$$= f \circ (0_{0,A} \circ 0_{C,0})$$

e f é monomorfismo, segue que

$$g = 0_{0,A} \circ 0_{C,0}.$$

Assim, de i) e ii) resulta que $(0, 0_{0,A})$ é um igualizador de f e $0_{A,B}$.

3.15. Mostre que se C_1 e C_2 são duas categorias com objetos terminais iniciais, então $C_1 \times C_2$ também tem objetos terminais iniciais.

Sejam C_1, C_2 categorias e T_1, T_2 objetos terminais de C_1, C_2 respetivamente. Mostremos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $C_1 \times C_2$.

Uma vez que T_1 é objeto terminal de C_1, então $T_1 \in Obj(C_1)$ e para cada $X \in Obj(C_1)$, existe um e um só C-morfismo $f: X \longrightarrow T_1$. Como T_2 é um objeto terminal de C_2, então $T_2 \in Obj(C_2)$, para cada $Y \in Obj(C_2)$ existe um e um só C_2-morfismo $g: Y \to T_2$.

Como $T_1 \in Obj(C_1)$ e $T_2 \in Obj(C_2)$ então $(T_1, T_2) \in Obj(C_1 \times C_2)$.
Mostremos que para $(X, Y) \in Obj(C_1 \times C_2)$ existe um e um só $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2).
Então X é objecto de C_1 e Y é objecto de C_2. Logo existe um C_1 morfismo $f: X \to T_1$ e existe um C_2-morfismo $g: Y \to T_2$.
Assim, (f, g) é um $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). De facto, se (f', g') é um $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2), então f' é um C_1-morfismo de X em T_1 e g' é um C_2-morfismo de Y em T_2. Logo, atendendo a que f é o único morfismo de X em T_1 e g é o único morfismo de Y em T_2, segue que $f' = f$ e $g' = g$. Portanto, $(f', g') = (f, g)$. Desta forma, provamos que (T_1, T_2) é um objeto terminal de $C_1 \times C_2$.

3.30. Na categoria Set, sejam A, B e C conjuntos e $f: A \to C$ e $g: B \to C$ funções. Mostre que o produto fibrado de (f, g) é o par $(P, (f', g'))$, onde

$$P = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, f(a) = f(b)\}$$

e $f': P \to A$ e $g': P \to B$ são as funções definidas por

$$f'(a, b) = a \quad e \quad g'(a, b) = b$$

para todo $(a, b) \in P$.

Pretendemos mostrar que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g) ou seja, pretende-se provar que

i) f' e g' são Set-morfismos tais que $f' \in hom_{Set}(P, A)$, $g' \in hom_{Set}(P, B)$, e $f \circ f' = g \circ g'$.

ii) para qq $X \in Obj(Set)$ e para qq Set-morfismos $f'': X \to A$, $g'': X \to B$ tais que $f \circ f'' = g \circ g''$, existe um e um só Set-morfismo $u: X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "g''"] \arrow[ddr, bend right, "f''"'] & & \\
& P \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Mostremos as condições...

i) Considerando que $Mor(Set)$ é a classe de todas as funções, então pela definição de f' e g', é imediato que $f' \in hom_{Set}(P, A)$ e $g' \in hom_{Set}(P, B)$. Além disso, as funções $f \circ f'$ e $g \circ g'$ são iguais, pois têm o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e para todo $(x, y) \in P$

$$(f \circ f')(x, y) = f(f'(x, y)) = f(x) = g(y) = g(g'(x, y)) = (g \circ g')(x, y).$$

ii) Sejam $X \in Obj(Set)$ e $f'': X \to A$, $g'': X \to B$ morfismos de Set tais que $f \circ f'' = g \circ g''$. Então existe um e um só Set-morfismo $u: X \to P$ tal que $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$. De facto, se considerarmos a correspondência $u: X \to P$

definida por $u(x) = (f''(x), g''(x))$
prova-se que:

- u é uma função de X em P e portanto, u é set-morfismo de X em P.

- $f' \circ u = f''$ e $g' \circ u = g''$

- se $v : X \to P$ é um set-morfismo tal que $f' \circ v = f''$ e $g' \circ v = g''$ então $u = v$.

De i e ii conclui-se que $(P, (f', g'))$ é um produto fibrado de (f, g).